APhEx 13, 2016 (ed. Vera Tripodi)
Ricevuto il: 26/01/2015
Accettato il: 22/21/2016
Redattore: Valeria Giardino

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK
N°13 GENNAIO 2016

P R O F I L I

Luitzen Egbertus Jan Brouwer

Miriam Franchella

Luitzen Egbertus Jan Brouwer, detto Bertus, è stato un matematico olandese del XX secolo, noto nella matematica per alcuni importanti teoremi relativi alla topologia; nella storia della matematica e nella filosofia come il padre dell'Intuizionismo. Ciò che caratterizza fortemente la sua produzione scientifica è lo stretto legame tra la sua visione del mondo e il suo progetto di una matematica costruttiva.

INDICE

1. Biografia

Bertus Brouwer nacque a Overschie, attualmente sobborgo di Rotterdam, il 27 febbraio 1881, primogenito di Egbertus Luitzen Brouwer e di Henderika Poutsma. Ebbe due fratelli: Isaac Alexander, artista mancato, insegnante di francese in una scuola secondaria superiore di Amsterdam, e Hendrik Albertus che divenne professore di geologia, sempre ad Amsterdam. A diciassette anni fece la professione di fede nella particolare chiesa protestante cui i genitori appartenevano. Il testo scritto della sua professione, conservato nel suo archivio, fa emergere i tratti di carattere che lo accompagneranno per tutta la vita: una grossa difficoltà a relazionarsi con gli altri esseri umani ("Gli spettri umani intorno a me sono la parte più brutta del mio mondo di immagini" – van Stigt (1990, 393)), accompagnata da una solida consapevolezza delle proprie capacità intellettuali, più un riferimento di fondo a un Dio creatore col quale si sente in costante relazione (solitaria).

Studente modello, nel 1897, si iscrisse alla Facoltà di matematica di Amsterdam, dove ricevette un insegnamento con un taglio molto applicativo. Tuttavia, le conferenze del matematico autodidatta Gerrit Mannoury offrirono a Bertus uno squarcio sulla matematica pura vista come terreno per fantasia, bellezza e gioco. Al pari di tutti i suoi compagni partecipò all'attività di un'associazione studentesca: così conobbe il poeta Carel Adama van Scheltema, che gli rimase amico per sempre. Il 31 agosto 1904 si sposò con la trentaquattrenne Elisabeth de Holl, farmacista di Amsterdam, che aveva conosciuto alcuni anni prima, e si trasferì a Blaricum a vivere con lei e Louise, la figlia che Elisabeth aveva avuto dal precedente matrimonio. Nel 1905 apparve il suo primo ed unico volume: *Leven, kunst en mystiek* (*Vita, arte e mistica*), raccolta di conferenze tenute agli studenti di Delft in risposta a quelle che lo hegeliano Gerardus Bolland aveva offerto allo stesso pubblico. Il *pamphlet* propugnava una visione mistica del mondo, in cui la vera realtà è quella interiore e soltanto in essa l'uomo può trovare la sua serenità, sull'onda di Jacob Boehme e Meister Eckhart, da lui ampiamente citati assieme alla *Bhagavad-Gita*. Sono presenti brani di pesante svalutazione del ruolo della donna nella società. Più lungimiranti appaiono i suoi giudizi ecologici, in cui Brouwer vede come conseguenze del dominio dell'uomo sulla natura la catastrofe ecologica e come conseguenze del dominio dell'uomo sull'uomo lo sfruttamento dei paesi del terzo mondo.

La redazione di *Vita, arte e mistica* si sovrappose alla stesura della tesi di dottorato intitolata *I fondamenti della matematica*, che inizialmente era strutturata in sei capitoli: 1) Lo sviluppo della matematica; 2) La sua genesi in riferimento all'esperienza; 3) Il suo significato filosofico; 4) La fondazione della matematica su assiomi; 5) Il suo valore per la società; 6) Il suo valore per l'individuo. I due lavori sono accomunati dal fatto che la visione sulla matematica espressa nella tesi (quale sia il suo oggetto e quale debba essere il suo metodo) dipende dal giudizio morale che Brouwer dà di essa, e questo a sua volta dipende dall'impostazione filosofica di base delineata in *Vita, arte e mistica*. Il suo relatore, Diederik Korteweg gli fece eliminare dalla tesi la maggior parte delle osservazioni di carattere non strettamente matematico, temendo che potessero svalutare l'opera del candidato agli occhi della commissione. Le parti scartate sono state raccolte e pubblicate a cura di W. P. van Stigt all'interno del suo volume *Brouwer's Intuitionism* del 1990.

Il 19 febbraio 1907 Brouwer discusse la tesi *Over de grondslagen der wiskunde* (*Sui fondamenti della matematica*) all'Università di Amsterdam, delineando i primi tratti della Matematica Intuizionista: una matematica, che si sviluppa interamente attraverso costruzioni mentali a partire dall'intuizione del tempo. Fu, però, il 1908 un anno veramente decisivo per la sua produzione. Nell'articolo "De onbetruwbaarheid der logische principes" ("L'inaffidabilità dei princìpi della logica") presentò al mondo matematico olandese una rilettura del principio del terzo escluso, necessaria nell'ottica intuizionista, che ne comportava la sospensione come legge logica[1].

[1] Il principio del terzo escluso classicamente afferma che, data qualunque proprietà e dato qualunque individuo di un dominio, o l'individuo gode della proprietà, oppure non ne gode. Dal punto di vista intuizionista, un principio logico, per valere, deve esprimere una costruzione mentale: è, dunque, necessario precisare il significato dei connettivi e dei quantificatori in riferimento a costruzioni mentali. Nello specifico, si deve precisare il significato della negazione: dovendo riferirsi a costruzioni mentali, sarà la constatazione

Nell'estate 1909 sembra abbia incontrato David Hilbert, il famoso e potente matematico di Gottinga: iniziò un rapporto originariamente molto gratificante per entrambi ed esteso anche alle rispettive famiglie. Nel gennaio 1910, durante una visita al fratello a Parigi, conobbe Henri Poincaré, Jacques Hadamard ed Emile Borel. Nel 1911 Brouwer pubblicò l'articolo "Zur Analysis Situs" ("Per la topologia"), primo di una serie di lavori sulla topologia, che culminò con la dimostrazione del teorema dell'invarianza dimensionale[2]. La sua fama internazionale crebbe, ma più per l'eco che si diffuse del fatto che Brouwer era riuscito a provare teoremi con cui altri si cimentavano invano da decenni, che per una diretta lettura dei suoi testi. Essi, infatti, erano estremamente curati nei minimi dettagli, secondo un'esigenza di rigore ben comprensibile, ma che rendeva l'esposizione molto pesante.

Su consiglio di Korteweg, Brouwer accettò di essere dal 1909 al 1912 *Privaat docent*, ovvero docente non retribuito, di geometria all'università di Amsterdam, esordendo con la conferenza "Het wezen der meetkunde" ("L'essenza della geometria"), in cui annunciava l'esigenza teorica di eliminare le *dimostrazioni per assurdo*[3] dalla matematica. Nel frattempo si occupava dell' amministrazione dell'attività commerciale della moglie. Nel 1912 ottenne la cattedra di teoria degli insiemi, teoria delle funzioni e assiomatica come professore straordinario. Il suo discorso inaugurale portava il titolo: "Intuitionisme en formalisme" ("Intuizionismo e formalismo"). Qui il pensiero hilbertiano viene per la prima volta etichettato come formalismo, e tale rimarrà nella letteratura. Nel medesimo anno fu eletto membro dell'*Accademia Reale Olandese delle Scienze*. L'anno seguente Korteweg si ritirò per lasciargli il posto di ordinario.

Nel 1915 Brouwer si unì al *Signific*, un circolo che era stato fondato in

che le costruzioni che potrebbero concludersi con la prova che l'individuo gode della proprietà falliscono. Pertanto, il principio viene espresso come: "data qualunque proprietà e dato qualunque individuo di un dominio, o c'è una costruzione mentale che prova che l'individuo gode della proprietà oppure qualunque costruzione mentale che proverebbe che l'individuo gode della proprietà si rivela fallimentare". Riprenderemo questo importante tema nel seguito.

[2] Esso afferma impossibilità dell'esistenza di una rappresentazione iniettiva e continua di una varietà m-dimensionale in una varietà $(m+h)$-dimensionale.

[3] Si tratta delle dimostrazioni in cui, per dimostrare una tesi A, si ipotizza la sua negazione $\neg A$ e si ricava da questa una contraddizione: il fatto che la negazione di A conduca a contraddizione costituisce una prova della validità di A, poiché sullo sfondo sta il principio del terzo escluso, per cui esistono solo le due alternative o A o $\neg A$; se non vale $\neg A$, necessariamente vale A. Riprenderemo nel seguito anche questo argomento.

Inghilterra da Lady Victoria Welby col duplice scopo di studiare come il linguaggio sia strumento di trasmissione e mantenimento di valori sociali, e di progettare nuovi vocaboli per diffondere nuovi valori. Egli era venuto a contatto col *Signific* attraverso l'amico Frederik van Eeden. Con lui aderirono altre personalità di spicco della cultura olandese: David van Dantzig, Herman Gorter, Jacob Israël de Haan, Evert Willem Beth. Inizialmente pensarono di attuare il progetto nell'Accademia di Amersfoort, ma poi, nel giro di qualche anno, si svilupparono all'interno del circolo correnti diverse: una incline a realizzare il progetto all'interno di gruppi "ideologici" preesistenti; un'altra (in cui Brouwer si riconosceva) incline a creare strumenti linguistici di riforma sociale in una comunità "neutra e umanitaria" (lettera di Brouwer a Mannoury del 16.12. 1922). Le divergenze e la mancanza di fondi portarono alla chiusura del circolo nel 1922.

Nel 1914 Brouwer presentò un'opinione innovativa sul continuo (cioè sull'insieme dei numeri reali). Lo descrisse, infatti, come una sorta di albero in perenne crescita (per evitare di introdurre in matematica l'infinito attuale) in cui ogni ramo rappresenta un numero reale: se si pensa ad un numero reale come il limite di una successione infinita convergente di numeri razionali, un ramo dell'albero rappresenta quel numero reale se i numeri razionali che costituiscono la successione vengono fatti corrispondere ordinatamente ai vari nodi del ramo. Egli non giustificò il cambiamento, se non dicendo che la nuova posizione gli sembrava veramente in linea con l'intuizionismo.

Nel 1918 Brouwer diede inizio ad una serie di pubblicazioni in cui ricostruì la matematica in accordo coi princìpi intuizionisti. Quest'attività costituì la quasi totalità delle sue pubblicazioni: infatti, solo fino al 1920 continuò anche la produzione topologica tradizionale con articoli sulla classificazione delle rappresentazioni di superfici. Successivamente, i suoi rari articoli di topologia che apparvero furono un abbozzo di revisione intuizionista di alcuni concetti o teoremi.

Nel 1919 Hilbert offrì a Brouwer una cattedra a Gottinga, ma egli non abbandonò Amsterdam e il tipo di vita che conduceva: quando gli impegni accademici glielo permettevano, infatti, amava rimanere a Blaricum con la figlia Louise e una sua compagna di scuola, Cor Jongehian (che poi gli sarebbe restata accanto fino alla morte, curandone le disposizioni testamentarie). In campagna poteva dedicarsi alle attività sportive che lo attiravano – il calcio e la bicicletta – e mantenere la sua dieta vegetariana.

Gli anni '20 portarono a Brouwer la conferma della sua fama internazionale. Da un lato giovani matematici – per lo più topologi – giunsero dall'estero per studiare presso di lui. Dall'altro, logici e filosofi da ogni parte del mondo lo andavano a trovare: Edmund Husserl, Rudolf Carnap, Alfred Tarski, Evert Willem Beth sono solo alcuni dei nomi.

Verso la fine degli anni ’20 dello scorso secolo Brouwer fu sollecitato, da una serie di articoli di Valerij Ivanovič Glivenko, Marcel Barzin, Alfred Errera, Paul Lévy, Rolin Wavre riguardanti l’interpretazione da dare alla logica intuizionista e la sua non-accettazione del principio del terzo escluso, ad aprirsi ad una ulteriore riflessione anche formale su questo tema. Mentre, da un lato, cercava di elaborare egli stesso alcuni appunti in proposito, fu d’accordo sul far indire dalla *Wiskundige Genootschap* (la Società Matematica di Amsterdam) nel 1927 un bando per la costruzione di un sistema formale in grado di rispecchiare la logica e la matematica intuizionista. Vincitore fu il suo allievo Arend Heyting, personalità solare, che con le sue doti comunicative e di chiarezza contribuì a diffondere la matematica intuizionista.

Nel 1927 Brouwer fu Gastprofessor a Berlino, dove tenne lezioni – diversamente da come faceva in patria – non su argomenti tecnici classici, bensì sull'impostazione teorica intuizionista.

Del marzo 1928 sono le due conferenze viennesi “Mathematik, Wissenschaft und Sprache” (“Matematica, conoscenza e linguaggio”) e “Die Struktur des Kontinuums” (“La struttura del continuo”): alla prima furono presenti, tra gli altri, Kurt Gödel e Ludwig Wittgenstein. Secondo quanto testimonia il diario di Carnap, riportato nella biografia di Gödel scritta da Hao Wang (1987, 50), Gödel apprese in quell’occasione l’idea intuizionista che l’attività matematica precede ed eccede quanto possa essere esprimibile linguisticamente, e da essa ricavò lo spunto per cercare di dimostrare che una formalizzazione di tutta la matematica non possa mai essere realizzabile. Secondo quanto sostiene Ray Monk (1990, 249-251) nella sua biografia di Wittgenstein e sulla base di quanto afferma Herbert Feigl (1969, 638-639) – testimone molto vicino a Wittgenstein –, la conferenza di Brouwer fece maturare in Wittgenstein il suo ritorno alla ricerca filosofica, dopo che, con l’uscita del *Tractatus* nel 1921, era rimasto in silenzio per anni su questioni filosofiche. Dirk van Dalen, nel II volume della biografia di Brouwer (2005, 567-567) ci informa di un’intera giornata trascorsa da Brouwer e Wittgenstein insieme, successivamente alle conferenze di Vienna, per approfondirne i contenuti e scambiarsi i loro punti di vista.

Di lì a poco, però, per Brouwer la positività del periodo cessò bruscamente. Il colpo più grosso fu dato dal fatto che l'amicizia con Hilbert conobbe il suo epilogo con quella che Albert Einstein definì “la battaglia della rana e del topo” (van Dalen (1990)). Il rapporto tra i due, inizialmente di reciproco apprezzamento, era degenerato. Brouwer, infatti, nel 1912 aveva contrapposto l'intuizionismo alla visione fondazionale hilbertiana come basati, rispettivamente, sulla mente e sulla carta. Tuttavia, si era trattato solo dell'esposizione di due punti di vista, e per di più formulata come discorso inaugurale, in olandese, ad Amsterdam. Poi, però, Brouwer aveva pubblicato numerosi articoli in lingua tedesca (dunque accessibili a un pubblico più ampio) cercando di acquisire proseliti. Hermann Weyl, allievo di Hilbert, aveva trovato convincente la teoria del continuo di Brouwer e, almeno per qualche tempo, l'aveva fatta propria, cosa che irritò parecchio il maestro. Dal canto suo, Hilbert aveva parzialmente accolto le idee di Brouwer: infatti, aveva accolto la sua distinzione fra matematica dotata di contenuto e matematica ideale. Tuttavia, aveva definito come oggetti della matematica contenutistica i segni (considerati unici a priori della matematica, ottenuti da una terza fonte di conoscenza, aggiuntiva rispetto alla logica e all'esperienza empirica), restringendo, quindi il dominio della matematica contenutistica rispetto a quella intuizionista. Inoltre, Hilbert intendeva continuare ad usare anche il resto della matematica, garantendosi circa la sua non-contraddittorietà: la verifica di tale caratteristica doveva essere condotta utilizzando solo la parte concreta (detta *finitaria*) della matematica. Brouwer prese atto di questo accoglimento parziale della sua impostazione e lo considerò solo un avvicinamento incompleto alla vera fondazione. Nel 1928 Hilbert si trovò anche a dover fronteggiare la pesante ingerenza che Brouwer fece nel suo territorio di potere (la Germania) in occasione del congresso di matematica di Bologna, a cui i tedeschi erano stati ammessi solo come uditori, come una sorta di punizione in seguito alla prima guerra mondiale. Hilbert riteneva opportuno partecipare comunque, e invitò tutti a recarvisi. Brouwer, invece, cercò di far passare tra i colleghi tedeschi l'idea che essi avrebbero dovuto pretendere il pieno titolo e, in mancanza di esso, avrebbero dovuto boicottare il congresso. Il punto di vista di Hilbert prevalse, ma egli fu infastidito dall'atteggiamento di Brouwer. Per questo, Hilbert escogitò un sistema per liberarsi della presenza di Brouwer almeno nella redazione dei *Mathematische Annalen* di cui faceva parte dal 1915: propose la chiusura della serie di allora della rivista e, conseguentemente, lo scioglimento del comitato responsabile. A ciò sarebbe seguita la fondazione di una nuova serie degli *Annalen*, con un nuovo comitato, da cui Brouwer sarebbe stato escluso. Brouwer si offese irreparabilmente. Da quel momento, oltre a pretendere che i suoi amici considerassero Hilbert un nemico personale, abbandonò quasi completamente la ricerca fondazionale: la pubblicazione di articoli, prima intensissima, diventò rara (solo quattro articoli nel periodo 1930-45). Solo nel secondo dopoguerra, Brouwer tornò ad essere scientificamente attivo: dal '46 al '51 visitò Cambridge regolarmente, nel '53 si recò in università canadesi e statunitensi e nel 1954 andò in Sudafrica, a Città del Capo. Nel 1947 riprese a pubblicare, sviluppando in modo originale nozioni che aveva delineato negli anni '20, e continuò fino al 1954, tre anni dopo il suo pensionamento. Dal 1948 fu membro della *Royal Society* di Londra. In quel periodo si interessò molto di letteratura e musica, presenziò spesso a concerti e fondò con la moglie un circolo.

Del suo soggiorno a Cambridge abbiamo gli scritti, pubblicati postumi, in cui compaiono almeno due temi interessanti da sottolineare. Viene data una proprietà per la quale il principio del terzo escluso è contraddittorio (è la razionalità dei numeri reali[4]) e, inoltre, l'intuizionismo viene schematizzato in due atti:

PRIMO ATTO DELL'INTUIZIONISMO: Separa completamente la matematica dal linguaggio matematico e quindi dai fenomeni linguistici descritti dalla logica teorica, riconosce che la matematica intuizionista è un'attività essenzialmente alinguistica della mente avente la sua origine nella percezione di un moto temporale. Tale percezione può essere descritta come separazione di un momento di vita in due cose distinte, una delle quali cede il passo all'altra ma è conservata nella memoria. La *duità* così generata, se spogliata di tutte le qualità, passa nella forma vuota del substrato comune a tutte le *duità*. Ed è questo substrato comune, questa forma vuota, che costituisce l'intuizione basilare della matematica. (Brouwer (1981, 4))

SECONDO ATTO DELL'INTUIZIONISMO: Ammette due modi di creare nuove entità matematiche: in primo luogo, sotto la forma di *successioni*, che

[4] Per avere una prima idea su questo, senza addentrarci in una lunga serie di dettagli matematici, teniamo presente che Brouwer dimostrò il teorema di continuità delle funzioni, che afferma che una funzione a valori reali ovunque definita su un intervallo chiuso del continuo è uniformemente continua. Se valesse intuizionisticamente il principio del terzo escluso relativamente alla razionalità dei numeri reali (cioè se valesse che, per ogni numero reale, si è in grado di dimostrare che quel numero è razionale o si è in grado di dimostrare che è impossibile che quel numero sia razionale), allora esisterebbe una funzione che, per ciascun numero reale, darebbe valore 1 quando il numero è dimostrato razionale e darebbe valore 0 quando si è dimostrato impossibile che quel numero sia razionale. Cioè esisterebbe una funzione che, in contrasto con il teorema di continuità, non sarebbe uniformemente continua, ma presenterebbe sbalzi da 0 a 1, a seconda del numero reale che riceverebbe come argomento.

procedono indefinitamente in modo più o meno libero, di entità matematiche precedentemente acquisite; in secondo luogo, sotto la forma di *specie* matematiche, cioè di proprietà ipotizzabili per entità matematiche precedentemente acquisite, che soddisfano la condizione che, se valgono per una determinata entità matematica, allora valgono per tutte le entità matematiche che sono state definite come 'uguali' ad essa (posto che la definizione di uguaglianza soddisfi le condizioni di *simmetria, riflessività e transitività*). (Brouwer (1981, 8))

Dopo la parentesi inglese e dopo che negli ultimi anni di presenza in Università il suo potere andò riducendosi, Brouwer si isolò sempre più: solo pochi amici ed ex-allievi gli rimasero vicini. Nel 1959 morì la moglie, e in casa con lui restò Cor Jongehian. Il 2 dicembre 1966, mentre stava portando un dono natalizio ad amici, Brouwer, avvolto nel suo scuro mantello in una sera buia, fu investito mortalmente da un automobilista rimasto sconosciuto. L'intuizionismo era già passato nelle mani di Arend Heyting, che, tramite gli allievi Dirk van Dalen e Anne Troelstra, ha fatto proseguire le ricerche con un'apertura verso la dimensione simbolico-formale. Ciò ha consentito uno sviluppo molto ricco dei temi concettuali tracciati da Brouwer.

2. Gli scritti topologici

I primi scritti di Brouwer hanno riguardato questioni di geometria quadridimensionale nel 1904 e di vettori nel 1908, seguite dalla produzione topologica degli anni 1909-12. Brouwer studiò la topologia da autodidatta, con la convinzione che le dimostrazioni in quell'ambito potessero venire condotte sulla base puramente di costruzioni mentali, dell'immaginazione, senza l'aiuto di formule, quindi in questo senso[5] in linea con la sua fondazione intuizionista della matematica. Trovò i primi problemi da affrontare nell'elenco delle ventitré grandi questioni aperte che Hilbert aveva presentato al Congresso Internazionale di Matematica tenutosi a Parigi nel 1900 come le sfide del secolo a venire. Il primo problema che affrontò fu il quinto, cioè la questione se sia possibile dare una definizione

[5] Non in linea con la fondazione intuizionista appare l'uso, negli scritti topologici di Brouwer, di dimostrazioni per assurdo: egli spiegò questo fatto dicendo che si trattava di teoremi di cui era sicuro che si sarebbe poi potuta dare una prova costruttiva.

dei gruppi di Lie di trasformazione continua senza l'ipotesi di differenziabilità. Brouwer ne considerò il caso lineare. La lettura dei contributi di Arthur Schoenflies gli diede poi il successivo spunto di lavoro: il suo rigore gli fece individuare lacune notevoli nelle dimostrazioni di Schoenflies e lo portò a trovare una famosa serie di controesempi, comparsa nell'articolo *Zur Analysis Situs* (1910), dove Brouwer costruisce, dandone un'illustrazione grafica estremamente suggestiva, una curva che divide il piano in tre regioni e ne costituisce il contorno comune.

Tuttavia, in questa prima parte della sua produzione topologica, Brouwer continuò a usare i metodi di Schoenflies, e, attraverso di essi, dimostrò il teorema sulle singolarità della distribuzione vettoriale: un campo vettoriale continuo su una superficie omeomorfa ad una sfera deve essere zero o infinito in almeno un punto.

Un primo tentativo di sperimentare nuove vie dimostrative (utilizzando concetti che provenivano da altri contesti) si ha nella sua (ri-)dimostrazione del teorema di Camille Jordan per il piano. Tale teorema dice che l'immagine iniettiva e continua di una curva chiusa determina nel piano due domini e ne è il contorno. Nei tentativi di prova compiuti invano dagli autori precedenti si era considerata la curva come limite di poligoni; Brouwer, invece, ne considera proprietà interne, ovvero divide la curva in due archi secondo l'impostazione già presente in Oskar Veblen.

L'innovazione più grossa e risolutiva della topologia brouweriana, però, consiste nell'introduzione dell'*approssimazione simpliciale*[6], del *grado di rappresentazione* e nel loro uso combinato. L'antenata della nozione di grado era stata inizialmente proposta da Augustin Cauchy per il caso bidimensionale e in un contesto non-geometrico. Cauchy aveva definito l'*indice* di una funzione nei punti in cui essa diventa infinita ponendolo uguale a +1 quando la funzione, nel passare all'infinito, cambia segno dal negativo al positivo; uguale a -1 quando la funzione, nel passare all'infinito, cambia segno dal positivo al negativo; uguale a 0 quando la funzione, nel passare all'infinito, non cambia segno. Poi Cauchy aveva definito l'*indice integrale* di una funzione $f(x)$ in un intervallo come la somma degli indici della funzione nell'intervallo. Leopold Kronecker generalizzò questa nozione al caso n-dimensionale. Brouwer venne a conoscenza dell'indice di una funzione attraverso la versione che di essa diede Poincaré (fu Jacques Hadamard a suggerirgli la lettura dei testi di Poincaré), prese l'idea di assegnare un numero relativo in corrispondenza di una variazione di

[6] Cioè approssimazioni di rappresentazioni tra simplessi (simplessi sono i punti, i triangoli, i tetraedri, ecc.).

orientamento in modo da esprimere qualcosa di caratterizzante, e la applicò a rappresentazioni anziché a distribuzioni vettoriali. Brouwer cominciò a delineare la sua nozione di grado alla fine del 1909, quando, in occasione delle vacanze invernali, si recò dal fratello a Parigi: il *grado* per i punti ordinari di un simplesso in μ', immagine di un certo simplesso J di μ secondo l'ultima delle rappresentazioni approssimate, è la differenza fra il numero dei simplessi-immagine a orientazione positiva e il numero dei simplessi-immagine a orientazione negativa che coprono il punto in questione (cioè cui il punto appartiene). Il concetto di grado può essere espresso come il numero di volte in cui l'immagine di una varietà copre i punti di quella su cui è rappresentata: Brouwer fece vedere che il grado è una caratteristica della rappresentazione e che non varia se si rappresentano due rappresentazioni in modo continuo l'una nell'altra.

Quando Brouwer colse tutta la portata di questa nozione, diede origine - con l'articolo "Über die Abbildung von Mannigfaltigkeiten" ("Sulla rappresentazione di molteplicità") del 1912 - alla dimostrazione di una serie di risultati importanti relativamente a: l'invarianza del numero di dimensione, l'esistenza del punto fisso, la classificazione delle rappresentazioni delle sfere, l'invarianza delle curve chiuse, il teorema della traslazione, il teorema della pavimentazione. Dopo di aver ottenuto questa ricchezza di risultati, Brouwer rallentò bruscamente la sua attività topologica intorno al 1912-13 per poi rendere le sue pubblicazioni sull'argomento sempre più rare. Si ipotizza da un lato una sorta di esaurimento del suo metodo: veramente, Brouwer aveva dimostrato pressoché tutto quanto potesse essere compiuto attraverso l'approssimazione simpliciale e la nozione di grado. Inoltre, Brouwer non era disposto a utilizzare un approccio algebrico (che stava progressivamente prendendo piede), in quanto troppo formale, distante dalla semplicità visiva che egli intendeva come propria della matematica. Tuttavia, il suo contributo ha dato un *notevole* impulso alla topologia.

In primo luogo per la scuola che egli ha creato attorno a sé: Paul Alexandroff, Leopold Vietoris, Karl Menger, Wilfrid Wilson e Witold Hurewicz hanno trascorso lunghi periodi presso di lui, anche dopo che il suo diretto lavoro topologico si era ridotto al minimo. Il contatto con lui diede a tutti loro l'occasione di approfondire i suoi concetti e i suoi metodi[7].

In secondo luogo, Brouwer è stato propulsore della topologia per i teoremi che aveva egli stesso dimostrato: non solo perché la dimostrazione

[7] Sul ruolo di Brouwer nella topologia in Olanda si vedano Alexandroff (1969) e Koetsier – van Mill (1997).

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

di alcuni era attesa come indispensabile per gli studi di altri settori della matematica, ma anche perché egli pose le basi per progressi ulteriori in direzioni nuove. Con i suoi controesempi a Schoenflies ha iniziato le ricerche sui continui non scomponibili. Con i suoi teoremi sull'invarianza, dimostrati applicando la topologia combinatoria a insiemi di punti, ovvero mescolando la topologia degli insiemi di punti (di eredità cantoriana) con quella combinatoria (ereditata da Poincaré, seppure privata dell'algebrizzazione), ha sbloccato lo studio della topologia dei poliedri, indicando la direzione mista che permetteva di procedere. Il suo teorema di giustificazione ha contribuito ad attirare l'attenzione degli studiosi sul concetto di dimensione, e la sua definizione induttiva di dimensione ha costituito un passo avanti rispetto a quella di Poincaré[8]. La sua dimostrazione corretta del teorema di Lebesgue della pavimentazione, rendendolo affidabile, l'ha fatto considerare più in profondità. Infine, così si è espresso René Thom a proposito della nozione di grado brouweriana: "Dopo lo sviluppo della teoria dell'omologia verso gli anni 1935-40, la nozione di grado non appariva più che un caso molto particolare dell'omomorfismo indotto da un'applicazione continua. […] Se è chiaro che lo sviluppo di una teoria matematica richiede tecniche nuove, nuovi algoritmi immediatamente sfruttabili, non è meno vero che lo sfruttamento formale di una teoria non tarda a condurre rapidamente alla sua sclerosi. […] Allora la salute non può venire che dall'interazione con un altro dominio, un'altra tecnica che 'risveglia' una nozione centrale, un po' sepolta sotto il formalismo. È ciò che è accaduto alla nozione di grado, che si è 'risvegliata' nella teoria del cobordismo. […] Con essa la nozione di grado è definitivamente condannata? Probabilmente no, perché, con tutta probabilità, la nozione di grado contiene ancora delle grandi possibilità" (Thom (1971, 15-16)).

3. L'intuizionismo

L'intuizionismo matematico di Brouwer ha le sue radici in una particolare visione del mondo: il legame stretto che c'è tra questi due aspetti è una delle caratteristiche più peculiari della sua produzione scientifica, che stupisce per lo sforzo di consapevolezza e, per quanto sia umanamente possibile, di coerenza teoretica che egli vi ha profuso. Va, comunque, sottolineato che, essendo la sua visione del mondo di tipo mistico, il legame all'origine fra la sua matematica e il suo misticismo ha costituito un motivo per screditare o

[8] Si veda Johnson (1981, 220-251).

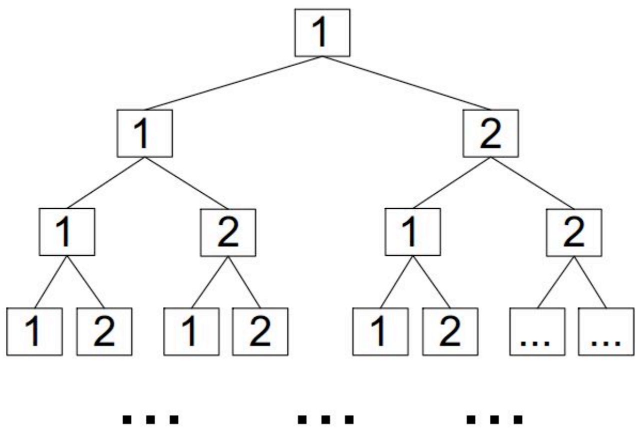
perlomeno non accettare la sua matematica. Perciò il suo allievo Arend Heyting si è sforzato di dare al mondo una presentazione della matematica intuizionista come filosoficamente neutra (o poco esigente), per tentare una (peraltro abbastanza riuscita) operazione di marketing.

L'intuizionismo brouweriano, comunque, nasce dalla visione del mondo che gli aveva permesso di intravedere una sorta di equilibrio per la sua esistenza, avendo trovato nelle suggestioni orientali (in particolar modo nella spiritualità induista) una cornice che conciliasse la sua personalità con la vita quotidiana. Accoglie, infatti, l'idea che l'uomo possa trovare serenità solo stando chiuso in se stesso, evitando, per quanto sia possibile, il desiderio di quanto sta al di fuori di lui, nel mondo naturale e in quello sociale. Tutto ciò che va nella direzione di ottenere qualcosa dall'esterno è per lui 'peccaminoso', cioè fonte di sofferenza. Dunque, anche le scienze sono peccaminose. Come poteva assumersi l'impegno della redazione di una tesi in matematica, disciplina che ad Amsterdam veniva insegnata a scopo eminentemente applicativo? Bertus elaborò una soluzione di compromesso, giocato sul filo del rasoio: se la matematica non è rivolta ad uno scopo applicativo e se si svolge tutta interiormente, allora può essere considerata non peccaminosa. La tesi doveva servire, date queste premesse, a controllare se e come ciò fosse possibile. Una matematica tutta interiore è possibile perché c'è un suo punto di partenza interiore che è costituito dalla intuizione del tempo. Brouwer dichiara di essersi ispirato a Kant per questa, ma il suo riferimento all'intuizione come punto d'origine dei numeri è molto meno complesso di quello kantiano: l'intuizione del tempo, cioè l'atto di distinguere gli istanti del tempo, garantisce la *duo-unità*, cioè la possibilità di produrre unità, aggiungendole alle precedenti. "Passare ad un nuovo istante" è descritto come uno scindersi di un istante dal precedente, conservato nella memoria. Ed è questa capacità tipicamente umana a fondare la successione dei numeri naturali e, con essa, tutta la matematica. Negli anni seguenti, Brouwer preciserà meglio i dettagli di tutto ciò. Nella tesi presenta, però, le basi per questa possibilità: la duo-unità e il suo libero sviluppo come passaggio di evidenza in evidenza. La matematica è libera creazione mentale, senza percorsi prefissati. Brouwer condivide con quella che poi egli stesso definirà *Scuola pre-intuizionista* (rappresentata in particolare, nell'ambito della matematica, da Henri Poincaré) l'accento sull'intuizione-evidenza come fonte di certezza nella dimostrazione matematica, che garantisce la formazione dei Numeri Naturali singolarmente e i Numeri Reali nel loro complesso (non uno per uno – tranne, ovviamente, il caso dei numeri naturali e degli interi e dei razionali che si basano sui numeri naturali). Ciò in aperta polemica con la logica, che si offre come “manuale” di regole dimostrative. Quella che in Poincaré si configura come una semplice rivendicazione di uno spazio per la scoperta in matematica, che va oltre le possibilità che si potrebbero attribuire ad una potente macchina in grado di produrre derivazioni meccaniche da assiomi di base, in Brouwer si declina nel concepire la matematica come un’esperienza interiore (dunque tipicamente ed esclusivamente umana), con i suoi aspetti connotativi e denotativi, *a-linguistica*. Quest’ultima caratterizzazione è resa necessaria dalla *Weltanschauung* di Brouwer (mistica ed intimistica) che vede il linguaggio come strumento di comunicazione e, dunque, come mezzo per uscire dell’interiorità. Il linguaggio appare, così, uno strumento peccaminoso e Brouwer ne descrive i limiti: esso si propone di piegare la volontà dell’interlocutore, e non ha mai garanzia di riuscita, perché, per sua stessa costituzione, è qualcosa di convenzionale, di appreso, e come tale lascia sempre un margine di incertezza nella ricezione del messaggio che si voleva trasmettere. Conseguentemente, Brouwer descrive le fatiche e le delusioni legate all’uso del linguaggio: se non c’è già una volontà comune, ogni discorso è inutile; al più si può cercare di parlare per mantenere vivo l’intento comune pre-esistente. Ma lo sguardo di due innamorati dice di più di migliaia di parole, quand’anche fossero sapientemente intrecciate da un maestro di retorica. Il linguaggio, in una matematica che voglia mantenersi non-peccaminosa, deve, pertanto, restare fuori e *può* restare fuori. Il matematico “vede” interiormente il percorso che compie: vede se una strada che ha intrapreso finisce in un vicolo cieco o se può arrivare all’indirizzo che si era proposto. Il matematico, per usare una metafora topografica, non ha bisogno di percorsi pre-disegnati (frutto di una trasmissione linguistica di regole): il matematico “tenta” dei percorsi, constatando dove si scontra con muri e dove può proseguire. Quello che viene offerto dai manuali di logica – le leggi della logica – non è una mappa che guida il matematico, ma un riepilogo che il matematico (o qualcun altro per lui) compie delle regolarità linguistiche che riscontra nell’espressione delle dimostrazioni matematiche: è come se, al termine dei percorsi tentati, i matematici li segnassero su fogli e si formasse poi una mappa tenendo conto solo dei sentieri che *a posteriori* si sono constatati essere i più utilizzati. Proseguendo nella nostra metafora, infinite altre strade rimangono comunque da percorrere, e percorrere esclusivamente quelle segnate *a posteriori*, in tutte le loro combinazioni possibili, non porta certo in località nuove. Brouwer nella sua tesi arriva a dire che la logica è più utile all’etnografia che alla matematica: essa descrive delle regolarità *linguistiche* che, come tali, sono legate al linguaggio e, dunque, alla cultura che l’ha prodotto. Perciò, la logica può dire di più alla storia delle culture che non alla ricerca matematica. Per quanto riguarda le leggi classiche (principio di identità, di non-contraddizione, del terzo escluso e "del sillogismo"), Brouwer nella tesi le definisce "tautologie, cioè banalità": sono ovvie e non fanno altro che ripetere identità.

La tesi viene discussa il 19 febbraio 1907. Solo pochi mesi più tardi avviene la presa di coscienza di una conseguenza sensazionale della matematica da lui impostata: se la logica è trascrizione delle regolarità linguistiche dell'espressione della matematica, quelle che vengono definite "leggi logiche" devono esprimere un dato di fatto matematico. Se la matematica è intesa come esperienza mentale, che cosa significherà affermare la proprietà *P* di un certo ente *a*? Significherà affermare che si è constatato che per *a* vale la proprietà *P*, che si sono percorsi alcuni passaggi mentali che hanno condotto a vedere che *a* gode di *P*. Che cosa significherà negare che per *a* vale *P*? Significherà affermare che il percorso che doveva portare ad *a*, in realtà va a sbattere contro un muro, cioè significherà affermare che si è constatata l'assurdità del valere di *P* per *a*. Il principio del terzo escluso, che afferma che, per ogni proprietà *P* e per ogni ente matematico *x* o vale *P* di *x* o vale non *P* di *x*, viene a significare che per ogni proprietà e per ogni ente o si ha una *verifica* (*constatazione*) che *P* vale di *a* o si ha una verifica che sia impossibile che *P* valga per *a*. Il principio del terzo escluso, così riletto, diventa l'affermazione che si possiede la soluzione di ogni questione matematica: per ogni proprietà e per ogni oggetto sappiamo con certezza (perché l'abbiamo verificato) o che quella proprietà vale oppure che è impossibile che valga. Non ci sono più domande aperte in matematica.

Una volta acquisita la consapevolezza che, all'interno della sua cornice di matematica tutta interiore, il principio del terzo escluso assume questo nuovo, impegnativo, significato, Brouwer deve anche proclamare che esso non vale più: è dichiarato sospeso finché rimarrà ancora una sola questione matematica aperta. È il contenuto del suo articolo "L'inaffidabilità dei principi della logica" che appare nel 1908. Si noti che, anche se il suo contenuto è una sorta di bomba atomica per la logica, che aveva custodito i suoi principi per secoli, dall'epoca di Aristotele, l'articolo, pubblicato in lingua olandese, non ebbe eco.

Nel 1914 si hanno le prime tracce di un mutamento d'opinione sul continuo: Brouwer dichiara ammissibili intuizionisticamente i singoli numeri reali, operando un cambiamento drastico rispetto al pre-intuizionismo che accettava l'insieme dei numeri reali nella sua totalità, ma non riteneva evidente la possibilità di formarne i singoli numeri. Brouwer introduce questa sua constatazione attraverso la nozione più generale di *spiegamento,* cioè attraverso la costruzione di un albero (schematico, astratto) in crescita (si tratta di un infinito potenziale), a ogni nodo del quale viene attribuito un ente precedentemente acquisito (ad esempio, un numero). Tale nozione gli appare fondata sempre nella duo-unità, che testimonia l'umana capacità di continuare a biforcare (passa da un istante a due istanti). Questa capacità ci consente di costruire alberi in cui ogni nodo ha due rami successori. Vediamo la grafica relativa ai primi tre livelli di biforcazione (l'albero poi prosegue indefinitamente): per indicare ogni ramo, si usa contrassegnare ogni nodo con un numero naturale per poi elencare nell'ordine i numeri dei veri nodi del ramo. Nella figura, troviamo il ramo 1111…, il ramo 1112…, il ramo 1121…, il ramo 1122…, ecc.



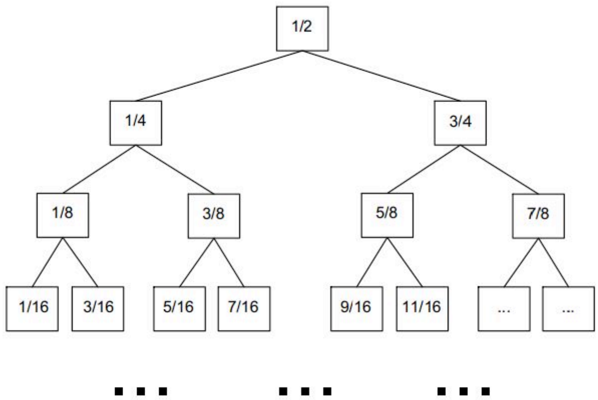
Generalizzando, si può pensare di partire da più di un punto e di produrre più di due rami alla volta.

Ogni ramo dell'albero, se a ogni suo nodo viene associato un ente matematico, rappresenta una successione (di tali enti), che viene detta *successione di libera scelta*. Non c'è nessuna condizione di principio che limiti la possibilità di associare enti matematici ai nodi dell'albero, se non che gli enti devono già essere stati costruiti, prima di poterli distribuire lungo i rami: questa libertà totale ha stuzzicato costantemente il pensiero di Brouwer, che si è posto a più riprese l'interrogativo se tale libertà includa anche la possibilità di auto-limitarsi, e poi di auto-limitare l'auto-limitazione, e così via. Al termine della sua vita si stabilizzò sull'idea che sia ammissibile un'unica possibilità di auto-limitazione di questa libertà, non passibile di ulteriori auto-limitazioni.

Se a ogni nodo si attribuisce un numero razionale scelto opportunamente, cioè in modo da costituire una successione convergente ad

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

un limite, ogni ramo dell'albero può rappresentare un numero reale. Ad esempio (ricordando che prendiamo in considerazione solo i primi quattro livelli dell'albero, che, però, prosegue indefinitamente), nella seguente figura la successione infinita convergente ½, ¼, 1/8, 1/16… rappresenta un numero reale; così pure la successione infinita convergente ½, ¼, 1/8, 3/16…, ecc.:



Lo spiegamento può essere visto come un modo di raggruppare enti (cioè come un insieme), posto che gli enti esistano già: ad es. esso raggruppa numeri razionali sotto forma di successioni infinite. Dal momento che l'intuizione temporale garantisce gli spiegamenti, essa fonda anche la possibilità in genere di raggruppare enti, purché già esistenti: nasce così la definizione di *species* che comprende lo spiegamento come caso particolare. La prima definizione di specie viene infatti data da Brouwer, all'interno dello stesso testo del 1918, dove presenta quella di spiegamento (1975, 150-151). Il fatto che gli enti da raggruppare debbano essere precedentemente dati produce una stratificazione nelle specie, in quanto una può contenerne un'altra, può riferirsi a un'altra solo se questa è già stata precedentemente costruita. In particolare, nessuna potrà contenere se stessa: le specie, quindi, sono al sicuro dalla formazione di antinomie del tipo indicato da Russell, che prevedono un'autoreferenzialità[9].

Del 1923 sono i primi controesempi a proprietà che classicamente valgono, ottenuti sulla base del fatto che intuizionisticamente non vale il principio del terzo escluso e del fatto che i numeri reali sono infiniti potenziali, successioni in crescita indefinita. Vediamo una versione semplificata di uno di questi controesempi. Consideriamo l'enunciato "i punti del continuo costituiscono una specie di punti ordinata". Ricordiamo il fatto che, nella rappresentazione decimale di π, ci sono sequenze di cifre che non sono ancora state individuate: il calcolo attualmente prosegue con l'ausilio di computers sempre più potenti. All'epoca di Brouwer, la sequenza 0123456789 non era ancora stata trovata neppure una volta (perché il calcolo delle cifre non era ancora arrivato fino al passo in cui tale sequenza cominciava, cioè oltre i 17 miliardi di cifre). Al giorno d'oggi, non è ancora stata trovata una seconda presenza di tale sequenza nell'espansione decimale di π, né si è dimostrata l'impossibilità della presenza di tale sequenza: dunque, la seconda presenza di tale sequenza in π è un caso attuale di non validità del principio del terzo escluso. Costruiamo il numero reale c come $c_1, c_2, \ldots$ in parallelo alla rappresentazione decimale di π come segue: sia m la posizione nella rappresentazione di π in cui inizia la sequenza 0123456789 per la seconda volta; finché non si giunge alla cifra m-esima, poniamo $c_v=(-1/2)^v$; quando si giunge a m, poniamo $c_m=(-1/2)^m$ e, da lì in poi, $c_{m+v}=(-1/2)^m$. La successione $c_1, c_2, \ldots$ costituisce il numero reale c per il quale non siamo in grado di affermare né $c=0$ né $c>0$ né $c<0$. Infatti, c sarebbe uguale a 0 solo nel caso in cui si proseguisse per sempre a mettere $c_v=(-1/2)^v$, ma questo avverrebbe se e solo se mai comparisse in π una seconda volta la sequenza 0123456789, e noi ora non siamo in grado di affermarlo. Analogamente, c sarebbe minore di 0 o sarebbe maggiore solo nel caso in cui avessimo un m in cui cominciasse 0123456789 per la seconda volta, cioè solo se avessimo dimostrato dove comincia la seconda sequenza 0123456789 in π: solo in tal caso, infatti, $c_1, c_2, \ldots$ si stabilizzerebbe, da m in poi, diventando $c_1, c_2, \ldots,(-1/2)^m,(-1/2)^m,(-1/2)^m\ldots$, e c sarebbe maggiore di 0 se m fosse pari; sarebbe minore di 0 se m fosse dispari. Quindi, poiché non vale intuizionisticamente il principio del terzo escluso riferito alla seconda comparsa della sequenza 0123456789 in π,

[9] L'antinomia di Russell si riferisce alla classe di tutte le classi che non appartengono a se stesse e nasce come risposta alla domanda se quella classe appartiene a se stessa oppure no. Infatti, se si appartiene, per definizione non si appartiene; e se non si appartiene, per definizione si appartiene.

allora non vale neppure l'enunciato che afferma che la specie di punti del continuo (cioè la specie dei numeri reali) è ordinata (cioè, dati due qualunque tra loro, si può stabilire se sono uguali o quale sia maggiore dell'altro). Successivamente, Brouwer generalizzerà l'uso di questa caratteristica ancora non nota di π all'uso di generiche *proprietà sfuggenti*, cioè proprietà che riguardano i numeri naturali e tali per cui attualmente non si conosce alcun numero naturale che ne goda né si è dimostrato impossibile che un numero naturale ne goda. Il motivo è chiaro: il controesempio sopra riportato è a tempo, cioè dura in relazione alla conoscenza che ha il matematico (o che ha la comunità dei matematici – riprenderemo nel prossimo capitolo questo tema) della rappresentazione di π. Utilizzando una qualunque proprietà sfuggente (senza neppure indicarla nello specifico), si allunga la durata del controesempio fino all'ultima proprietà sfuggente che resterà nell'universo umano. Si noti che, comunque, la dimensione temporale è una caratteristica intrinseca alle successioni di libera scelta (e, quindi, dei numeri reali), che sono entità in divenire. Ciò non deve stupire, come non deve stupire il riferimento alla conoscenza del soggetto che può evolvere: la matematica si fonda sull'intuizione del tempo e di esso si trova traccia in tutti i suoi oggetti e in tutti i suoi risultati, com'è naturale aspettarsi da una matematica frutto dell'attività costruttiva umana.

Nel contempo, Brouwer porta a chiarimento il fatto che, con la sospensione del principio del terzo escluso, si ha anche la sospensione del principio che permette classicamente di passare dalla doppia negazione all'affermazione: infatti, se negare significa constatare l'assurdità di un cammino, constatare l'assurdità del constatare l'assurdità di un cammino (cioè avere una doppia negazione) non produce automaticamente il cammino che porta a quel risultato (cioè all'affermazione). La sospensione di questo principio comporta un notevole arricchimento di sfumature nelle nozioni matematiche intuizioniste: infatti, ognuna si sdoppia nella affermazione e nella sua doppia negazione (che, invece, classicamente vengono a collassare). Ad esempio, l'assurdità della diversità tra due enti (si pensino due insiemi per i quali si riveli assurdo trovare un elemento diverso che li distingua) non collassa sull'identità (cioè nel saper trovare, per ogni elemento di ciascuno dei due insiemi il corrispettivo identico nell'altro insieme): nel primo caso si parlerà di *congruenza* e solo nel secondo di *identità*. Tuttavia, la sospensione del principio ha anche una contropartita negativa: le dimostrazioni per assurdo (che larga parte hanno nella matematica, quando le dimostrazioni dirette, che dovrebbero costruire l'oggetto che gode di una certa proprietà, si rivelano troppo complesse) devono pure essere eliminate dalla matematica in quanto, nel loro ultimo passaggio, fanno uso proprio di quel principio. Infatti, la dimostrazione per assurdo ha per obiettivo la dimostrazione di un certo asserto A, lo nega, deduce una contraddizione da questa negazione (cioè giunge a non-nonA) e, *dunque*, conclude l'affermazione dell'asserto A*, perché passa da non-nonA ad A*. Intuizionisticamente, ci si deve fermare a non-nonA. Questa limitazione è ciò che è apparso più sgradito ed inaccettabile alla comunità matematica, che ha iniziato a recepire, poco alla volta, il suo pensiero, man mano che esso appariva sulle riviste internazionali in lingua tedesca. Lo strumento della dimostrazione per assurdo e il principio stesso del terzo escluso erano considerati vie d'accesso imperdibili a teoremi che difficilmente potevano trovare una soluzione costruttiva, diretta: pretendere di attenersi solo a ciò che può essere davvero costruito dalla mente dell'uomo appariva troppo restrittivo, e non se ne vedeva una ragione convincente. In particolare, a risentire in modo più vistoso della proposta di una matematica intuizionista-costruttiva fu David Hilbert. Egli, infatti, aveva delineato un programma di ricerca matematica ad ampio raggio che mirava a garantirla come strumento applicabile alle scienze fisiche, mettendone le varie branche sotto forma assiomatica, esprimendole poi in maniera simbolica e andandone infine a verificare la non-contraddittorietà (cercando di dimostrare che i segni $1\neq1$ non potessero mai comparire come risultato dell'applicazione delle regole logiche agli assiomi di partenza). Si trattava di un programma complesso ed ambizioso; Brouwer lo smantellava nella sua stessa sensatezza come un castello di carta, che basta un soffio a fare crollare: la matematica, infatti, secondo lui, se si affidava al linguaggio per esserne poi garantita nella coerenza, trovava il suo fondamento proprio nella carta su cui si tracciano i suoi simboli, tra i quali ci assicuriamo che non compaiano mai "$1\neq1$". Carta, solo carta, mentre la matematica che lui, Brouwer, aveva in mente, aveva un più solido fondamento nell'intelletto. Difficile immaginare contrapposizione più forte tra due studiosi. La contrapposizione diviene scontro personale e segnerà un lungo silenzio da parte di Brouwer. Proseguirà il compito di approfondire e far conoscere l'intuizionismo l'allievo di Brouwer, Arend Heyting, che, non partendo da una *Weltanschauung* come quella di Brouwer e non avendo, quindi, motivi di fondo per opporsi al linguaggio (pur avendone chiari i limiti), si dedica a disegnare una formalizzazione della matematica e della logica intuizionista, *posto che* la matematica viene comunque da lui riconosciuta come un prodotto dell'intelletto, non come una manipolazione di simboli. Certamente, così, l'intuizionismo riesce ad essere conosciuto ed apprezzato da fasce più ampie di studiosi, anche se poi, di fatto, la via della formalizzazione farà perdere, strada facendo, il ricordo delle premesse che avevano portato a delineare quel tipo di matematica e quel tipo di logica, inducendo, anzi, a vederle entrambe semplicemente come *una* logica possibile, una matematica possibile, in un ventaglio di sperimentazioni ipotizzabili. Ciò ha radicato nella comunità scientifica l'accettazione dell'idea di una pluralità di logiche oltre a quella classica, da studiare nelle loro proprietà metateoriche e in relazione agli ambiti di applicazione, ben oltre il proposito iniziale del fondatore, che era quello di delineare l'unica matematica accettabile, in alternativa a quella tradizionale. Heyting si è poi lamentato di un certo eccesso di attenzione esclusivamente formale alla logica intuizionista, che ne faceva dimenticare anche la portata profonda di indagine sui limiti di una matematica che si sviluppasse nell'ambito delle sole facoltà umane. In ogni caso, Heyting, riabilitando l'aspetto linguistico all'interno della matematica intuizionista, ha messo in luce un aspetto che Brouwer ha lasciato solo raramente trasparire, e cioè la *necessità* del linguaggio (anche se non direttamente nella conduzione della dimostrazione) come sostegno per la memoria del singolo matematico: una matematica che tenga conto dei limiti umani deve tenere conto anche dei limiti della sua memoria.

Alla fine degli anni '40, l'intuizionismo conobbe il contributo critico importante dell'olandese G.F.C. Griss. L'adesione di Griss all'intuizionismo dipese dalla *Weltanschauung* che egli espose nel libro del 1946 *Idealistische filosofie* (*Filosofia idealistica*). Essa si basava sul dato originario che la coscienza coglie quando raggiunge la propria pienezza: il soggetto si distingue dall'oggetto, ma l'uno non ha senso senza l'altro. Questo dato è l'apriori, la condizione di ogni esperienza, e può essere osservato da diversi punti di vista: soffermandosi sugli enti che risultano dalla scissione e sulle loro mutue relazioni, oppure soffermandosi sull'unità di soggetto e oggetto, oppure considerando entrambi gli aspetti nel loro essere collegati. Nel primo caso si fa matematica, nel secondo mistica, nell'ultimo filosofia. Per quanto riguarda la matematica, il fatto che sia un modo di osservare il dato originario ha come conseguenza rilevante che non si possono concepire le costruzioni matematiche indipendentemente dal matematico, perché, in genere, non si può concepire il prodotto senza il produttore: perciò si può affermare che qualcosa esiste matematicamente solo se è costruita mentalmente e che è vera solo se è evidente all'intelletto. Partendo da una *Weltanschauung* solare, armoniosa, equilibrata, ottimista, aperta verso l'umanità, attenta a valorizzare ogni lato della persona, Griss era giunto alla matematica intuizionista che Brouwer aveva delineato in un quadro cupo su cui incombeva il peso del senso del peccato e dell'esigenza di ascesi. È, dunque, dall'interno dell'intuizionismo che egli mosse la sua critica, facendo notare (1948a, 71-72) come la definizione brouweriana di negazione fosse incompatibile con l'impostazione intuizionista, che prevede il passaggio da evidenze ad evidenze. Griss, infatti, osservava che, se noi definiamo "nonP(*a*)", brouwerianamente, come l'affermazione che la costruzione della prova che *a* gode di *P* si rivela impossibile, partiamo dalla costruzione della prova di *P* per *a*. Tale costruzione è il dato di partenza, perciò dovrebbe essere evidente, ma poi si rivela impossibile. Allora ci sono evidenze che poi si rivelano contraddittorie? Per mantenere l'evidenza come criterio in matematica, Griss propose di dare un nuovo significato alla negazione: il confronto fra due enti (già costruiti) e il rilevamento che essi hanno caratteristiche in più gli uni rispetto agli altri. L'ammissibilità intuizionista di tali operazioni è garantita dall'intuizione originaria della duo-unità: essa, fondando l'unità e la duo-unità, fonda anche la capacità di distinguerle.

Brouwer rispose semplicemente fornendo un esempio di impossibilità di conversione di proprietà negative in proprietà positive. Brouwer introdusse un generico asserto matematico α, "per il quale non *si* conosce alcun metodo né per dimostrare che è assurdo né per dimostrare che è assurda la sua assurdità" (1975, 478). In relazione ad esso, il *soggetto creativo* crea una successione, che prosegue infinitamente, di numeri razionali a_1, a_2, a_3… secondo questa direttiva: fintantoché, mentre sceglie a_n, il soggetto creativo non ha sperimentato (cioè, non ha dimostrato) né la verità né l'assurdità dell'asserto α, ogni a_n è scelto uguale a zero; se, tra la scelta di a_{r-1} e quella di a_r egli ha ottenuto la prova di α, a_r come pure a_{r+v} (per ogni numero naturale *v*) è scelto uguale a 2^{-r}; se, tra la scelta di a_{s-1} e quella di a_s egli ha sperimentato l'assurdità di α, a_s come pure a_{s+v} (per ogni numero naturale *v*) è scelto uguale a -2^{-s}. A parte i problemi interpretativi legati all'introduzione dell'espressione "soggetto creativo" che riprenderemo più tardi, è chiaro che la successione in questione non può essere uguale a zero, perché ciò potrebbe accadere solo se l'asserto matematico in questione non fosse *mai* sperimentato né vero né assurdo. Ma ciò significa dire che esso non è dimostrato vero e non è dimostrato assurdo (nonα e non-nonα), che è una contraddizione. Quindi, il numero a cui converge la successione è diverso da zero (proprietà negativa). Ma di esso non possiamo affermare che sia maggiore di zero o che sia minore di zero (proprietà positive), perché per dimostrarlo dovremmo sapere che l'asserto è assurdo o sapere che l'asserto è vero, dati che al momento non abbiamo[10].

Tuttavia, questa non rappresenta una risposta credibile a Griss: equivale a dirgli che non può cambiare la definizione di negazione, altrimenti perderebbe pezzi di matematica. Ma è un'obiezione sconcertante da parte di uno studioso che non ha indugiato a togliere al pugile Hilbert i guantoni, a sfrondare la matematica classica, in nome di una coerenza etica. Perciò, la problematica additata da Griss rimane aperta.

Durante il suo soggiorno a Cambridge, Brouwer completa la sua riflessione sulla non-validità del principio del terzo escluso, individuando una proprietà per la quale esso è addirittura contraddittorio: si tratta della razionalità dei numeri reali. Infatti, nella matematica intuizionista vale il teorema di continuità delle funzioni, che afferma che ogni funzione definita su un intervallo chiuso del continuo è uniformemente continua (non ammette, cioè, buchi o salti). Esso ha come corollario il fatto che il continuo non si possa scindere in due sottoinsiemi propri non vuoti (o, altrimenti detto, che il continuo, se si scinde, si scinde in se stesso e nell'insieme vuoto). Infatti, anche la funzione $f(x)$ (che descrive la formazione di sottoinsiemi a partire da insiemi), definita su tutto un intervallo chiuso E come uguale a 1 se x appartiene ad un sottoinsieme Q di E e come uguale a 0 se x appartiene all'insieme E-Q, deve essere continua sulla base del teorema, perciò o è sempre uguale a 0 o è sempre uguale a 1 (altrimenti farebbe dei balzi da 0 a 1 o da 1 a 0). Quindi, se il continuo si scinde in due sottoinsiemi disgiunti, uno di essi deve essere l'insieme vuoto e l'altro deve coincidere col continuo stesso. La decidibilità della razionalità dei numeri reali (cioè l'asserto che afferma che, per ogni numero reale, o abbiamo la prova che esso è razionale o abbiamo la prova che è assurda la sua razionalità) comporterebbe la scissione del continuo nei sottoinsiemi dei razionali e degli irrazionali. Tali sottoinsiemi sarebbero entrambi non vuoti, in quanto non tutti gli elementi del continuo sono razionali (né sono tutti irrazionali) e, quindi, si otterrebbe un risultato in contrasto col suddetto corollario. Perciò il caso particolare del principio del terzo escluso che ha come proprietà la razionalità dei numeri reali è contraddittorio.

Con questo, Brouwer conclude la sua strabiliante produzione scientifica, lasciando aperte alcune questioni che tuttora i filosofi della matematica cercano di sciogliere. Ne vediamo qui le più salienti.

---

[10] Come si vede, in questo controesempio, Brouwer usa un asserto ancora più generico della "proprietà sfuggente"; esso non si riferisce a numeri naturali, ma è un asserto di cui non si è "attualmente" in grado di dimostrare né che valga né che la sua validità sarebbe impossibile.

Il dubbio che l'intuizionismo necessiti di una filosofia di riferimento si impone, perché è chiaro che il misticismo solipsista brouweriano non può certo essere una *Weltanschauung* ampiamente condivisa. Va ricordato, però, che esiste, storicamente, perlomeno un'altra alternativa alla posizione brouweriana: si tratta, come abbiamo visto, dell'idealismo di Griss, con la sua carica di apertura all'umanità, che, nel dato originario della coscienza, in cui l'Io si scinde dal Non-io ma ne rimane per sempre collegato, radica sia la responsabilità di ognuno verso gli altri uomini sia una matematica intuizionista. Inoltre, non è necessaria un'intera filosofia per trovare una motivazione alla scelta dell'intuizionismo come matematica da praticare. Esiste la via di Heyting, che propose l'intuizionismo semplicemente con la finalità di provare a vedere quanta matematica si riuscisse a ottenere attenendosi ai limiti umani ("Intuitionist mathematics is nothing more nor less than an investigation of the utmost limits which the intellect can attain in its self-unfolding", cioè "La matematica intuizionista non è niente di più né di meno che la ricerca dei limiti estremi che l'intelletto può ottenere nel suo auto-dispiegamento" – 1968a, 314) e partendo non dall'intuizione temporale ma semplicemente dalla "capacità di individuare".

Invece, ciò che è proprio *necessario* all'intuizionismo è una robusta epistemologia. Ci sono, infatti, almeno tre questioni che sembrano reclamarlo: la difficoltà a spiegare l'unicità della matematica, il fraintendimento psicologistico sempre in agguato, la presenza di gradi di evidenza nelle nozioni matematiche (ad esempio tra i numeri naturali piccoli, quelli grandi, le successioni di libera scelta, ecc.). Come si può parlare di *una* matematica, se essa consiste in un'esperienza interiore, del singolo? Brouwer intendeva affermare l'esistenza di una sola matematica? Possiamo supporre di sì. A parte la testimonianza personale dell'allievo Arend Heyting, che ricordava di aver sentito parlare Brouwer della matematica come di un'esperienza collettiva, possiamo aggiungere il fatto che, se Brouwer avesse davvero creduto nell'esistenza di una matematica per ciascun uomo, verosimilmente l'avrebbe detto, trattandosi di una concezione molto diversa dalla norma. Invece, non c'è traccia di ciò. Inoltre, il suo additare l'intuizione temporale kantiana come fonte d'ispirazione per il suo porre l'intuizione temporale alla base dell'intero edificio matematico, per quanto possa essere stato messo in dubbio e contestato dal suo stesso relatore, D.J. Korteweg, resta a testimonianza del fatto che Brouwer avesse comunque in mente qualcosa di intrinseco, comune a tutti gli uomini. Se supponiamo, dunque, con buone motivazioni, che egli intendesse un'unica matematica, allora dobbiamo immaginare che ipotizzasse l'esistenza di strutture mentali comuni a tutti gli umani: ma allora essa va spiegata.

In secondo luogo, per il suo riferirsi alle facoltà mentali e al soggetto, l'intuizionismo è stato spesso tacciato ed etichettato come psicologistico. In particolare ciò è accaduto in occasione dell'introduzione, da parte di Brouwer, nel 1948, dell'espressione *soggetto creativo* a proposito del soggetto che produce le successioni di libera scelta (nell'ambito della risposta a Griss, che abbiamo menzionato poco sopra). In realtà, l'introduzione di tale espressione non apporta modifiche ai controesempi di proprietà classiche che egli aveva dato precedentemente riferendosi semplicemente all'esistenza di problemi matematici aperti. Ciò testimonia che l'espressione *soggetto creativo* non costituì per lui un cambiamento radicale rispetto a quanto egli aveva detto fino a quel momento. È un'espressione che gli è venuta in mente e che ha utilizzato per ribadire che l'attività del matematico è un'attività dell'individuo, e che questi è libero nel suo effettuare costruzioni mentali. Tuttavia, un'accusa di psicologismo *può* avere luogo per il forte legame che l'intuizionismo ha col soggetto. Il tema del soggetto creativo ha dato luogo a una corposa letteratura, in cui, per esempio van Stigt (1990, 178-179) ipotizza che il soggetto creativo sia il matematico idealizzato, dotato di memoria illimitata e che, quindi, possa lavorare senza alcun ricorso al linguaggio, mentre Troelstra (1982b, 474) tiene a sostenere che si tratta di un modo per ribadire che la pratica matematica è, appunto, esperienza del soggetto e quello che conta è ciò che *egli* sa riguardo un asserto.

Infine, nelle nozioni introdotte da Brouwer compare, come dovette constatare Heyting[11], una difformità di evidenza: pienamente evidenti sono solo le costruzioni di numeri naturali piccoli; sempre meno evidenti quelle che riguardano grandi numeri naturali, la negazione, le successioni di libera scelta, il quantificatore universale. Heyting presentò al primo posto di una scala di evidenza, ciò che non richiede costruzioni ipotetiche, ossia le operazioni su numeri naturali piccoli, e poi collocò i concetti che fanno riferimento a costruzioni ipotetiche quali il *metodo* (asserti con variabile libera, con quantificatore universale e ordinali di tipo ω), condizioni mai soddisfacibili (negazione), costruzioni in divenire (successioni di libera scelta), e proprietà ipotizzabili (specie).

Heyting osservò (1958a, 335-337) che solo nel caso dei numeri naturali piccoli le operazioni vengono effettuate compiutamente e, quindi, "unmittelbar überblickt werden können", possono essere osservate direttamente: tutti gli altri casi hanno un grado di evidenza più debole e, perciò, danno luogo a dubbi o, addirittura, inducono ad un loro rifiuto. Per

[11] Vedi Franchella (1994).

quanto lo concerneva in prima persona, i suoi dubbi riguardavano le specie e le successioni di libera scelta[12]. Heyting concludeva dichiarando terminata l'epoca delle grandi contrapposizioni fondazionali, in quanto ciascuna scuola, nel suo porsi come assoluta, aveva mostrato i propri limiti. Proponeva, inoltre, di continuare la riflessione metateorica sulla matematica come autocoscienza metodologica, cioè consapevolezza delle componenti costruttive, formali, ideali-platoniche presenti nella matematica che di fatto gli addetti ai lavori producono.

Una risposta ai problemi elencati è, invece, venuta negli ultimi anni da parte della fenomenologia[13], che aveva già fatto capolino nella teorizzazione intuizionista come possibile riferimento per meglio comprendere la definizione di negazione. Nella Sesta delle *Logiche Untersuchungen* (*Ricerche logiche*), Husserl spiega che l'io intenziona l'oggetto, cogliendone di volta in volta suoi aspetti, trattenendoli nella memoria e ponendosi aspettative su future percezioni. Le aspettative possono essere riempite o deluse. Man mano che sono riempite si ha un aumento del grado di evidenza di quell'oggetto. Un'evidenza assoluta è prevista solo per l'ego trascendentale (di cui tratteremo a breve), ed è, invece, intesa come idea regolativa per ogni costituzione dell'oggetto. "In senso più ampio parliamo di evidenza ogni volta che un'intenzione posizionale (in particolare un'asserzione) trova la sua conferma in una percezione corrispondente e pienamente adeguata, anche quando si tratta di una opportuna sintesi di singole percezioni insieme connesse. Ha senso allora parlare di *gradi* e di *livelli di evidenza*. [...] L'evidenza stessa è l'atto di quella perfetta sintesi di coincidenza" (1901, 422). Per Husserl, quindi, intuizione è percezione – sensibile o categoriale; evidenza è la concordanza fra l'intuizione e l'intenzione. L'evidenza che si ha è la verità intorno a quell'oggetto, ma è una verità *rivedibile* (1929, 194).

Questa concettualizzazione ben si adatta, in primo luogo, a descrivere la definizione brouweriana di negazione, come costruzione che non può venire portata a termine. Infatti, fu già il fenomenologo Oskar Becker, rifacendosi alla Sesta delle *Logiche Untersuchungen* di Husserl, a far notare (1927, 58-59) che il concetto di negazione dovesse essere interpretato come delusione, cioè come parziale ma non completo riempimento di un'intenzione, e non come totale mancanza di ciò che si è intenzionato. Ad esempio, per dire che un libro *non* si trova su un tavolo, occorre il tavolo. Se nella stanza non c'è

[12] Vedi Franchella (2008, 39-73).
[13] Si vedano, in particolare, Tieszen (1984; 1988; 1989); van Atten (2004; 2007).

il tavolo o se non si ha accesso alla stanza, non si è autorizzati ad asserire che il libro non si trova sul tavolo, perché la teoria della conoscenza fenomenologica prevede successive sintesi, cioè prevede comunque un confronto fra le intenzioni e le percezioni: quindi, in qualunque atto conoscitivo, almeno una parziale soddisfazione delle intenzioni sarà presente. Tuttavia, tale definizione, che era stata – almeno per un certo periodo iniziale[14] – accolta da Arend Heyting, regge fenomenologicamente, perché si trova in un contesto dove è ammessa la smentita di un'evidenza tramite un'altra evidenza, in un contesto dove l'evidenza è criterio che si autocorregge. Ma questa non era l'idea di evidenza condivisa da Brouwer. Ricordiamo la sua espressione: "[…] truths which, just like mathematical truths, anybody who has once understood will forever affirm" ("verità che, proprio come le verità matematiche, chiunque abbia compreso una volta, le affermerà per sempre" - Brouwer (1975, 176)). La fenomenologia dice come conosciamo, e ciò avviene con un progressivo aumento dell'evidenza relativa ai nostri oggetti intenzionati, o con una delusione. L'intuizionismo può fare sua questa epistemologia se accetta che l'evidenza piena e incontrovertibile sia una meta ideale, mai raggiungibile (se non per quanto riguarda l'esistenza del soggetto trascendentale).

Inoltre, si può valutare se anche i gradi di evidenza di Husserl possano essere fatti corrispondere ai gradi di evidenza di Heyting. I gradi di Husserl sono stadi che si attraversano in ogni messa a fuoco degli oggetti. Invece, per i gradi delineati da Heyting innanzitutto non è neppure chiaro se essi siano condivisi da tutti oppure se sia prevista per ciascuno la possibilità di considerare evidente qualcosa che non è tale per un altro, mentre l'evidenza husserliana è qualcosa di condiviso, perché è riferita all'ego trascendentale (che affronteremo tra poco). Poi, se anche si ipotizzasse una oggettività-intersoggettività della scala delle evidenze di Heyting, questa sarebbe comunque qualcosa di fisso, di connesso intrinsecamente con i vari oggetti in questione. I gradi non sarebbero tappe verso una eventuale migliore evidenza dell'oggetto, ma sarebbero legati in modo intrinseco ad essi.

Ciò per cui, invece, l'approccio fenomenologico potrebbe essere risolutivo è la doppia questione dello psicologismo e della unicità della matematica. È l'ego trascendentale a risolvere entrambe le questioni. Esso è definito come ciò che rimane se si attua l'*epoché*, cioè se ci si libera di tutti quei preconcetti della quotidianità legati al mondo delle scienze e degli atti psichici propri. L'ego trascendentale appare come unica evidenza originaria ed apodittica, ed è colto come intenzionante, secondo tipi costitutivi di

[14] Vedi Heyting (1931a, 113).

oggetti pensabili:

> Ogni costituzione di effettiva e reale possibilità pura porta implicitamente con sé, come suo orizzonte esterno, un ego possibile in senso puro, una pura variazione di possibilità del mio essere di fatto […] Se dunque pensiamo la fenomenologia come formata puramente secondo il metodo eidetico come scienza intuitiva a priori, tutte le ricerche di essenze non sono altro che rivelazioni dell'universale ego trascendentale in generale contenente in sé tutte le variazioni pure di possibilità del mio io esistente di fatto e quest'io stesso come possibilità (1950, 97).

Se si intende la matematica come prodotto dell'ego trascendentale, che è ottenuto come variazione di tutti i possibili ego individuali, essa si configura come esperienza di ogni possibile soggetto e quindi si libera dai particolarismi dello psicologismo, vedendosi garantita anche la sua unicità, grazie all'universalità dell'ego stesso. Tuttavia, se si prendono in considerazione le successioni di libera scelta, si pongono alcuni interrogativi che attendono una risposta: quando, nei famosi controesempi brouweriani a proprietà classiche, ci si riferisce alla *conoscenza* di un problema matematico che il soggetto, che produce un certo numero reale, ha durante i vari passi, a quale conoscenza si allude? a quella dell'*intera umanità* in quel dato momento oppure alla massima conoscenza possibile che l'umanità può avere su quel problema? Come si può stabilire quale sia questa conoscenza massima? Possiamo pensare ad un ego trascendentale in evoluzione?

Inoltre, Husserl aveva riconosciuto l'omnitemporalità come una caratteristica dell'oggetto matematico: come si concilia essa con la temporalità intrinseca alle successioni di libera scelta? Van Atten (2006) propone come soluzione a questo dubbio di risalire alla motivazione originaria di Husserl che l'aveva portato a stabilire questa condizione: sarebbe stata la monotonicità della matematica, cioè il fatto che ciò che è dimostrato, è dimostrato per sempre. Poiché questo fatto non viene messo in dubbio dall'esistenza di successioni di libera scelta, non ci sarebbero obiezioni fenomenologiche ad accettarle come oggetti matematici.

Rimane, tuttavia da considerare, se si intende applicare la fenomenologia all'intuizionismo, che le definizioni di matematica e di logica in Brouwer e in Husserl differiscono molto. Per Husserl, secondo quanto egli afferma in *Formale und transzendentale Logik* (*Logica formale e trascendentale*), al culmine di un lungo e tortuoso percorso di riflessioni e ripensamenti sul tema, la logica è "teoria del *logos* nella forma della scienza" (1929, 13), cioè fissa le condizioni generali per una scienza possibile. Essa si presenta, dunque, in primo luogo come analitica apofantica (predicativa), cioè morfologia dei giudizi e logica delle conseguenze, e, in quanto tale, ha per tema le oggettualità categoriali in generale: "Ciò che è giudicato in un giudizio è l'oggettualità categoriale intenzionata nel giudicare" (1929, 164). È solo in un giudicare di secondo grado che la proposizione nel senso della logica diventa oggetto – la proposizione come senso, l'oggettualità categoriale intenzionata come tale. La matematica, d'altro canto, o è direttamente apofantica (tratta forme proposizionali computando con esse come coi numeri) oppure (ad esempio, la teoria degli insiemi) ha per oggetto il "qualcosa in generale" e, per questo, viene detta ontologia formale ("formale" perché lascia fuori gioco ogni determinazione concreta di oggetti). Apofantica formale e ontologia formale vengono a identificarsi nel loro riferirsi ad oggettualità generali. Esse non si pongono la questione della verità. Per questa, occorre interrogarsi sull'evidenza, cioè passare al livello di riflessione della logica trascendentale, che si interroga sull'evidenza dei principi logici. Si tratta, dunque, di una concezione essenzialmente differente da quella intuizionista. Nella fenomenologia, viene rimarcata la natura formale della matematica: si sottolinea il fatto che essa non s'interroga sul vero, ma si limita alla consequenzialità, alla non-contraddittorietà. La matematica rimane fuori dall'area dell'evidenza, che è proprio l'area della verità. La logica apofantica, oggettiva, viene a coincidere con la matematica (senza che nessuna delle due inglobi l'altra), ma la logica trascendentale si colloca ad un livello superiore ad esse. Una concezione capovolta rispetto a quella intuizionista. Non stupisce, dunque, che Husserl accetti il principio del terzo escluso, purché si intenda in riferimento solo a giudizi contenutisticamente forniti di senso (giudizi del tipo "la somma degli angoli di un triangolo è uguale al colore rosso" non sono forniti di senso):

> grazie alla loro genesi, è dato a priori il fatto che siano in rapporto con un terreno unitario di esperienza. Appunto perciò, per ogni giudizio del genere, e in questo rapporto, vale il fatto che esso deve essere portato all'adeguazione; che, nel realizzarla, o esplicita e coglie categorialmente ciò che è dato nell'esperienza concordante, o conduce alla negazione dell'adeguazione. […] Tuttavia, per l'ulteriore territorio dei giudizi, cui appartengono anche quelli che contenutisticamente sono privi di senso, questa disgiunzione non vale più. Il 'terzo' non è qui escluso e consiste in ciò, che giudizi con predicati che non hanno alcuna relazione 'sensata' al soggetto, si sollevano, per così dire, nella loro mancanza di senso, al di sopra della verità e della falsità (1929, 274).

Husserl recupera la validità del principio del terzo escluso per gli enunciati forniti di senso, quindi Husserl accetta tale validità. E, si noti bene, la spiegazione è proprio in quell' "è dato a priori il fatto che siano in rapporto con un terreno unitario di esperienza”. Invece, per Brouwer, il principio del terzo escluso richiede – usando una terminologia husserliana – che vi sia evidenza del fatto che il soggetto abbia portato il giudizio all’adeguazione e che abbia dunque colto l’esperienza come concordante oppure come discordante. Non è sufficiente ciò che Husserl considera tale, ossia il rapporto *a priori* dei giudizi con l’esperienza. Deve esserci anche l’effettivo controllo di quale sia il dato di fatto dell’esperienza.

L’utilizzo della fenomenologia a supporto dell’intuizionismo richiede, dunque, una serie di ulteriori approfondimenti e ripensamenti teorici prima di poter essere adeguatamente utilizzato per rispondere alle questioni aperte che abbiamo analizzato.

Bibliografia

van Dalen, D., 1997, «A bibliography of L.E.J. Brouwer», *Utrecht Logic Group Preprint Series*, no.176 (disponibile al link: http://www.phil.uu.nl/preprints/preprints/PREPRINTS/preprint175.pdf)

Un ulteriore aggiornamento si trova in:

van Atten, M., Boldini, P., Bourdeau, M., and Heinzmann, G. (eds.), 2008, *One Hundred Years of Intuitionism (1907–2007). The Cerisy Conference*, Basel: Birkhäuser, pp. 343–390.

Brouwer, L.E.J., 1975, *Collected Works 1. Philosophy and Foundations of Mathematics*, A. Heyting (ed.), Amsterdam: North-Holland.

—, 1976, *Collected Works 2. Geometry, Analysis, Topology and Mechanics*, H. Freudenthal (ed.), Amsterdam: North-Holland.

La maggior parte degli articoli pubblicati da Brouwer è presente in questa raccolta. Gli articoli che erano originariamente in francese o in tedesco sono stati riprodotti in quelle lingue; gli articoli in olandese sono stati tradotti in inglese.

Il pamphlet *Leven, Kunst en Mystiek* del 1905 è stato tradotto in inglese da W.P. van Stigt nel *Notre Dame Journal of Formal Logic* 37, pp. 389–429, ed è comparso in italiano col titolo *Vita, arte e mistica*, Milano, Adelphi, 2015.

Brouwer, L.E.J., 1992, *Intuitionismus*, D. van Dalen (ed.), Mannheim, BI-Wissenschaftsverlag. (Si tratta della raccolta delle lezioni tenute da Brouwer a Berlino)

—, 1981, *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, D. van Dalen (ed.), Cambridge, Cambridge University Press. (*L.E.J. Brouwer. Lezioni sull'intuizionismo*, trad. it., Torino, Boringhieri, 1983.

Brouwer, L.E.J., and Adama van Scheltema, C.S., 1984, *Droeve Snaar, Vriend van Mij. Brieven*, D. van Dalen (ed.), Amsterdam: De Arbeiderspers. (Corrispondenza, in olandese, tra Brouwer e l'amico poeta C.S. Adama van Scheltema negli anni 1898-1924)

Van Dalen D., 2012, *The Selected Correspondence of L.E.J. Brouwer*, London, Springer.

La traduzione italiana di una parte di queste lettere compare in:

Brouwer L.E.J., 2013, *Lettere scelte* (a cura di Miriam Franchella), Milano, Mimesis.

Bibliografia secondaria

Alexandroff, P. 1969, «Die Topologie in und um Holland in den Jahren 1920-1930». *Nieuw Archief voor Wiskunde* 16, pp. 109-127.

van Atten, M., 2004, *On Brouwer*, Belmont (CA), Wadsworth.

—, 2007, *Brouwer Meets Husserl: On The Phenomenology of Choice Sequences.* Dordrecht, Springer Netherlands.

van Atten, M., and Tragesser, R., 2003, «Mysticism and Mathematics: Brouwer, Gödel and the Common Core Thesis », in Deppert, W. and Rahnfeld, M., (eds.), *Klarheit in Religionsdingen*, Leipzig, Leipziger Universitatsverlag, pp. 145–160.

van Atten, M., Boldini, P., Bourdeau, M., and Heinzmann, G. (eds.), 2008, *One Hundred Years of Intuitionism (1907–2007). The Cerisy Conference*, Basel, Birkhäuser.

Barzin M., Errera A., 1927, «Sur la logique de M. Brouwer», *Académie*

Royal de Belgique: Bulletin de la classe des sciences, 13, pp. 56-71.

Becker O., 1927, «Mathematische Existenz», *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung 8*, pp. 441-809, poi ristampato come Becker (1973) *Mathematische Existenz*, Max Niemeyer, Tübingen.

van Dalen, D., 1990, «The War of the Frogs and the Mice, or the Crisis of the *Mathematische Annalen*», *The Mathematical Intelligencer,* 12 (4), pp. 17-31.

—, 1999/2005, *Mystic, Geometer, and Intuitionist*, 2 volumi, Oxford, Clarendon Press.

—, 1999 «From Brouwerian Conterexamples to the Creating Subject", *Studia Logica*, 1999, 62(2), pp. 305-314.

—, 2000, «Brouwer and Fraenkel on Intuitionism», *Bulletin of Symbolic Logic*, 6(3), pp. 284-310.

—, 2008, «Another look at Brouwer's dissertation», in van Atten *et al*. (eds.) 2008, pp. 3–20.

Detlefsen M., 1999, «Brouwerian intuitionism», *Mind*, 99(396), pp. 501-534.

Diez, G.F., 2000, «Brouwer's Understanding of the Logical Constants», *Indian Philosophical Quarterly*, 27(3), pp. 215-228.

Dummett M., 2000, *Elements of Intuitionism.* Oxford, OUP.

Feigl H., 1969, «The Wiener Kreis in America» in Flemming and Bailyn 1969 (eds.), *The intellectual migration. Europe and America, 1930-1960*. Cambridge Mass., Harvard UP, pp. 630-673.

Franchella M., 1994, *L.E.J. Brouwer pensatore eterodosso*, Milano, Guerini.

—, 2008, *Con gli occhi negli occhi di Brouwer*, Milano, LED.

—, 1994, «Brouwer and Griss on Intuitionistic Logic», *Modern Logic,* 4(3), pp. 256-265.

—, 1995, «L.E.J. Brouwer: Toward Intuitionistic Logic», *Historia*

Mathematica 22 (3), pp. 304-322.

—, 2007 «Philosophies of Intuitionism: Why We Need Them», *Teorema,* 26, pp. 73-82.

Freudenthal H. 1981, «L.E.J. Brouwer - Topoloog, intuitionist, filosoof», *Nieuw Archief voor Wiskunde,* 29, pp. 249-253

Glivenko V. 1928, «Sur la logique de M. Brouwer», *Académie Royal de Belgique: Bulletin de la classe des sciences,* 14, pp. 225-228

—, 1929, «Sur quelques points de la logique de M. Brouwer», *Académie Royal de Belgique: Bulletin de la classe des sciences* 15, pp. 183-188

Griss G.F.C., 1946a, «Negationless intuitionistic mathematics» in *Indagationes Mathematicae,* 8, pp. 675-681.

—, 1946b, *Idealistische filosofie,* Arnheim, Van Loghum Slaterus.

—, 1948a, «Sur la négation (dans les mathématiques et la logique)», *Synthese* VII, pp. 71-74.

—, 1948b, «Mathématiques, mystique et philosophie» in *Bibliotheque du Xème Congres International de Philosophie. Mélanges philosophiques* , L.J. Veen, Amsterdam pp. 156-175.

—, 1948d, «Logique des mathématiques intuitionistes sans négation» in *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l' Académie des Sciences* 227, pp. 946-948.

—, 1950, «Negationless intuitionistic mathematics II», *Indagationes Mathematicae,* 12*,* pp. 108-115.

—, 1951a, «Negationless intuitionistic mathematics III, IVa, IVb», *Indagationes Mathematicae,* 13, pp.193-199, pp. 452-462, pp.463-471

—, 1951b, «Logic of negationless intuitionistic mathematics», *Indagationes Mathematicae,* 13, pp. 41-49

—, 1955, «La mathématique intuitioniste sans négation», *Nieuw Archief voor Wiskunde* (3) 3 pp. 134-142

Hesseling, D.E., 2003, *Gnomes in the Fog. The Reception of Brouwer's Intuitionism in the 1920s*, Basel, Birkhauser.

Heyting A., 1931, «Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik», *Erkenntnis,* 2*,* pp. 106-115.

—, 1956, *Intuitionism. An introduction*, Amsterdam: North-Holland. 2nd, revised edition, 1966. 3rd, revised edition, 1971.

—, 1958, «Blick von der intuitionistischen Warte», *Dialectica,* 12*,* pp. 332-345.

—, 1968, «L.E.J. Brouwer», in Klibansky (ed.) *Contemporary philosophy. A survey. I* , Firenze, La Nuova Italia, pp. 308-315.

—, 1980, *Collected paper*s, Amsterdam, Mathematical Institute, University of Amsterdam.

Husserl E., 1900, *Logische Untersuchungen. Erster Teil: Prolegomena zur reinen Logik,* Halle a.d.S., Max Niemeyer; Husserliana 18, The Hague Nijhoff, 1975 (trad. it. *Ricerche logiche, Volume primo*, Milano, Il Saggiatore, 1968).

—, 1901, *Logische Untersuchungen. Zweiter Teil: Untersuchungen zur Phänomenologie und Theorie der Erkenntnis.* Halle a.d.S., Max Niemeyer, Husserliana 19, The Hague, Nijhoff, 1984 (trad. it. *Ricerche logiche, Volume secondo*, Milano, Il Saggiatore, 1968).

—, 1929, *Formale und transzendentale Logik: Versuch einer Kritik der logischen Vernunft*, *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, 10, pp. 1-298, Husserliana 17, The Hague, Nijhoff, 1974 (trad. it. *Logica formale e trascendentale: saggio di critica della Ragione Logica,* Bari, Laterza, 1966).

—, 1950, *Cartesianische Meditationes und Pariser Vorträge*, Den Haag, Nijhoff, Husserliana 1, The Hague, Nijhoff, 1973 (trad. it. *Meditazioni cartesiane,* Milano, Bompiani, 1994).

Johnson D.M., 1987, «L.E.J. Brouwer's coming of age as a topologist», in Phillips E.R. (ed.), *Studies in the History of Mathematics* vol. 26., Washington D.C., The Mathematical Association of America, 1997, pp.

61-97.

Koetsier T., van Mill J., 1997, «General Topology, in Particular Dimension Theory, in The Netherlands: the Decisive Influence of Brouwer's Intuitionism», in Aull C.E., Lowen R. (eds.) *Handbook of the History of General Topology*, Berlin, Springer, 135-180.

Kuiper N.H., 1978, «Commentary to L.E.J. Brouwer on triangulation», in Bertin E.M.J., Bos H.J.M., Grootendorst (eds.) *Two decades of mathematics in the Netherland* vol. 1, Mathematical Centre, Amsterdam, pp. 14-18.

Lévy P., 1926, «Sur le principe du tiers exclu et sur les théorèmes non susceptibles de dé monstration», *Revue de metaphysique et de morale*, 33*, pp. 253-258.*

—, 1927, «Logique classique, logique Brouwerienne et logique mixte», *Académie Royal de Belgique: Bulletin de la classe des sciences*, 13, pp. 256-266.

Mawhin J., 2002, «Brouwer degree, topological degree», in Hazewinkel M. (ed.) *Encyclopaedia of Mathematics. Supplement III*, Dordrecht, Kluwer, 83-84.

Monk. R., 1990, *Ludwig Wittgenstein: The Duty of Genius*, London, Vintage.

Placek, T., 1999, *Mathematical Intuitionism and Intersubjectivity*, Dordrecht, Kluwer.

Niekus, J., 2010, «Brouwer's Incomplete Objects», *History and Philosophy of Logic*, 31(1), pp. 31-46.

van Stigt, W., 1990, *Brouwer's Intuitionism*, Amsterdam, North-Holland.

Thom, R., 1971, «Le degré brouwerien en topologie différentielle moderne», *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 19, pp. 10-16.

Tieszen R., 1984, «Mathematical Intuition and Husserl's Phenomenology», *Noûs*, l8(3), pp. 395-421.

—, 1988, «Phenomenology and Mathematical Knowledge», *Synthese*, 75, pp. 373-403.

—, 1989, *Mathematical intuition: phenomenology and mathematical knowledge*, Dordrecht, Kluwer.

—, 1995, «Mathematics», in Smith, B. and Smith, D. (eds.), *Cambridge Companions to Philosophy: Husserl*, Cambridge, Cambridge University Press, pp. 438-462.

—, 2008, «The intersection of intuitionism (Brouwer) and phenomenology (Husserl)», in van Atten M. *et al.* (eds.), pp. 78-95.

Troelstra A. S., 1982, «On the origin and development of Brouwer's concept of choice sequences» in Troelstra A. S. and van Dalen D. (eds.), pp. 465-488.

Troelstra A.S. and van Dalen D., 1982, *The L.E.J. Brouwer Centenary Symposium* (eds.), Amsterdam, North-Holland.

Wang H., 1987, *Reflections on Kurt Gödel*, Cambridge, Mass., and London, The MIT Press.

Wavre R., 1924, «Y a-t-il une crise des mathématiques?», *Revue de metaphysique et de morale*, 31, pp. 435-467.

—, 1926, «Logique formelle et logique empiriste», *Revue de metaphysique et de morale*, 33, pp. 65-75.

Periodico On-line / ISSN 2036-9972