Istituto Lombardo (Rend. Scienze) 155, (2021)

LA LEGGE GRAVITAZIONALE DELL'INVERSO DEL QUADRATO NEI PRINCIPIA DI NEWTON

ANTONIO GIORGILLI (*) e NICCOLÒ GUICCIARDINI (**)

(Adunanza del 21 ottobre 2021)

SUNTO. – Si propone una rilettura della sezione IX, libro I dei *Principia* di Newton e delle sezioni del libro III in cui si pone il problema dell'accuratezza della legge gravitazionale dell'inverso del quadrato. Si mostra come il problema sia stato ampiamente trattato, e sostanzialmente risolto, da Newton stesso. In particolare si mette in evidenza la connessione con il ben noto *Teorema di Bertrand*, che affronta lo stesso problema in termini più astratti e facendo uso degli strumenti dell'Analisi. Si osserva però che gran parte della dimostrazione di Bertrand è sostanzialmente contenuta nei *Principia*.

* * *

ABSTRACT. – We revisit the question concerning the accuracy of the inverse-square gravitational law, as raised in section IX, book I of Newton's *Principia*, and in some sections of book III. We argue that the problem has been thoroughly discussed and basically solved by Newton himself. We point out in particular the relations with the well-known *Bertrand's theorem*. Bertrand approached the same problem in more abstract terms. We remark, however, that much of Bertrand's proof is essentially contained in *Principia*.

1. INTRODUZIONE

Si legge spesso, in particolare nei nostri testi di Meccanica, che Newton dedusse la legge di gravitazione universale a partire dalla tre leggi di Kepler.

(*) Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere, Milano. Università degli Studi di Milano, Italy. E-mail: antonio.giorgilli@unimi.it

(**) Università degli Studi di Milano, Italy. E-mail: niccolo.guicciardini@unimi.it

Certamente, le leggi di Kepler giocano un ruolo importante nei *Principia*, e l'esposizione che troviamo nei nostri testi fa appello alle prime sezioni, fino all'ottava, del trattato di Newton. È meno conosciuto il fatto che Newton dimostrò un teorema notevole al fine di stabilire l'accuratezza della legge dell'inverso del quadrato.[1]

Nella prima metà del secolo XVIII la validità della legge di gravitazione newtoniana era argomento di discussione. In breve, possiamo ricordare due fatti, del resto noti a Newton stesso. Il primo è la precessione del perielio dell'orbita lunare: l'orbita non ha forma ellittica. Il secondo è la cosiddetta 'grande ineguaglianza' nei moti di Giove e Saturno: già Kepler, confrontando i suoi calcoli con le osservazioni dei secoli precedenti, aveva notato che Giove sembra accelerare e Saturno sembra rallentare; si può trovare un breve resoconto in [6]. Ambedue i problemi sono stati ampiamente discussi, e non sono mancati i tentativi di correggere la legge di gravitazione. Ad esempio, Clairaut nei suoi studi sul moto della Luna suggeriva di aggiungere al termine newtoniano un termine $1/r^4$, o eventualmente altre potenze, determinando i coefficienti tramite le osservazioni [4]; un'ipotesi respinta in seguito da lui stesso. Quasi due secoli dopo Newton il problema della dipendenza della legge di gravitazione dall'inverso del quadrato venne ripreso da Joseph Louis François Bertrand, in forma astratta e facendo uso dei metodi dell'analisi; le sue conclusioni sono oggi note come 'teorema di Bertrand', frequentemente citato nei trattati di Meccanica Celeste [1].

Ciò che è meno noto è che l'accuratezza della legge dell'inverso del quadrato è stata ampiamente discussa, e sostanzialmente dimostrata, dallo stesso Newton. In questo articolo proponiamo alcune informazioni sul contesto storico in cui Newton ha dimostrato il teorema e ne offriamo una nuova versione analitica comprensibile ai matematici dei giorni nostri. Il linguaggio matematico che utilizzeremo non era disponibile a Newton, ma la nostra dimostrazione ricalca in modo piuttosto fedele quanto si può leggere nei *Principia*. Speriamo con questo articolo di favorire la lettura di un classico della storia della scienza da parte dei matematici a noi contemporanei.

[1]Su questo ha insistito spesso George Smith, per esempio in [21].

2. Il contesto storico

2.1 La mela di Newton

Secondo una versione basata su ricordi senili di Newton — ricordi tramandati dai suoi corrispondenti e primi biografi, come John Conduitt, William Stukeley, Bernard le Bovier de Fontenelle — il giovane Isaac, allora studente a Cambridge, avrebbe concepito la teoria della gravitazione durante l'isolamento dovuto al diffondersi della peste in Inghilterra, quindi nel 1665, in seguito all'osservazione della caduta di una mela.[2] Effettivamente, i manoscritti che ci sono pervenuti mostrano come Newton si sia posto, negli anni 1665-1669, domande relative al moto della Luna e dei pianeti.

Va però subito detto che i manoscritti giovanili di mano newtoniana concernenti la matematizzazione del sistema solare sono veramente pochissimi: qualche riga nella prima pagina del cosiddetto 'Waste Book' (MS Add. 4004, fol. 1r), qualche conto piuttosto confuso sul retro di un documento legale in pergamena (MS Add. 3958, fol. 45v), e due pagine di appunti scritti con una grafia nitida e con poche correzioni (MS Add. 3958, fol. 87r-v). A questi è possibile aggiungere delle note sul moto dei corpi, sempre nel 'Waste Book' (MS Add. 4004, fols. 10-15, 38v). È molto difficile interpretarli con una qualche certezza. È possibile leggere in questi manoscritti una anticipazione della teoria matura dei *Principia* proprio perché, vista la loro brevità, è possibile completare e correggere quello che troviamo scritto da uno studente che prende appunti per sé stesso, più che per farsi capire da un lettore. Tuttavia, sembra a molti una grave forzatura leggere la teoria della gravitazione universale nei manoscritti giovanili newtoniani degli anni Sessanta del Seicento. Diamo una veloce occhiata a questi testi un po' enigmatici.[3]

Dallo studio dei (pochi) manoscritti giovanili dedicati al moto dei corpi e dei pianeti si ricava che Newton pensava, con Cartesio, che il moto circolare uniforme desse luogo a un 'conato a recedere dal centro' (*conatus a centro*), una sorta di forza centrifuga (*the force by which it endeavours from the center*), che deve essere controbilanciato da un 'conato' verso il

[2] Un'antologia commentata di biografie newtoniane settecentesche è [13].

[3] Tutti i manoscritti citati sono custoditi alla Cambridge University Library e sono facilmente accessibili on line alla sezione 'Newton Papers' della Cambridge Digital Library, https://cudl.lib.cam.ac.uk/collections/newton/1. Un'edizione consistente in una trascrizione, traduzione e commento è [11].

centro per mantenere il corpo a distanza costante dal centro stesso (per es. vedi MS Add. 4004, fol. 11v, in [11], pp. 146-7).

Con un semplice ragionamento geometrico, probabilmente già nel 1665, Newton dimostra, indipendentemente da Christiaan Huygens, che nel moto circolare uniforme il 'conato' centrifugo è proporzionale al quadrato della velocità e inversamente proporzionale al raggio dell'orbita circolare (MS Add. 4004, fol. 1r in [11], pp. 129-130). Questo risultato, che qui abbiamo formulato in termini moderni, verrà utilizzato da Newton negli anni seguenti, e resterà fondamentale anche nei *Principia*, dove però egli si riferisce a una 'forza centripeta' come causa del moto circolare uniforme.

In alcuni manoscritti giovanili risalenti alla seconda metà degli anni Sessanta (MS Add. 3958, fol. 45v (1665-6?) e MS Add. 3958, fol. 87r-v (1669?), in [11], pp. 183-191 e 193-195) Newton mette in relazione la gravità col moto circolare per rispondere ad una vecchia obiezione anticopernicana secondo la quale se la Terra ruotasse attorno al proprio asse allora la forza centrifuga scaglierebbe i corpi posti sulla superficie terrestre verso l'alto. Newton mostra che all'equatore terrestre la tendenza a recedere dal centro della Terra dovuta alla rotazione giornaliera (*conatus recedendi a centro*) è molto inferiore rispetto alla tendenza a muoversi verso il centro della Terra dovuta alla gravità (*conatus accedendi ad centrum virtute gravitatis*). E quindi 'la gravità impedisce che la rotazione della Terra causi l'allontanamento dei corpi e che essi salgano in alto nell'aria' ([11], p. 194).

Sempre in uno di questi manoscritti vergato con ogni probabilità alla fine degli anni Sessanta, vi è un passo in cui Newton compara la gravità dei corpi sulla superficie terrestre alla tendenza della Luna a recedere dal centro della sua orbita attorno alla Terra. Sulla base dei dati (erronei) in suo possesso Newton ottiene che la forza di gravità alla superficie terrestre è più di 4.000 volte maggiore rispetto alla tendenza della Luna a recedere dalla Terra (MS Add. 3958, fol. 87r-v in [11], p. 194). Forse Newton stava pensando alla gravità come ad una forza la cui intensità varia con l'inverso del quadrato della distanza, che si estende dalla Terra fino alla Luna (la cui distanza dalla Terra è pari a circa 60 raggi terrestri), e che controbilancia la tendenza della Luna a recedere dal centro della sua orbita?

Infine, Newton assume che le orbite planetarie siano circolari. Usando la legge 'di Huygens' per la determinazione del 'conato' centrifugo dei pianeti (*conatus a sole recedendi*) e la terza legge di Kepler, deduce che la tendenza dei pianeti a recedere dal Sole è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal Sole (MS Add. 3958, fol. 87v in [11], p. 195).

Che Newton fosse arrivato alla conclusione che la gravità varia con l'inverso del quadrato della distanza lo si può solo sostenere forzando i testi a nostra disposizione. Si noti che Newton nei manoscritti giovanili non prende in considerazione la seconda legge di Kepler e non dice che la gravità è una forza universale grazie alla quale tutti i corpi si attraggono mutualmente. Inoltre, Newton sembra considerare con favore la possibilità che i moti dei pianeti siano dovuti a vortici di materia sottile in rotazione attorno al Sole, una concezione cartesiana che due decenni più tardi egli rifiuterà nettamente come incompatibile con la teoria della gravitazione esposta nei *Principia*. Per esempio, in alcuni marginalia (1670 ca.) nella sua copia (Trinity College, Cambridge, NQ. 18.36) della *Astronomia Britannica* (London, 1669) di Vincent Wing Newton spiega la deviazione dell'orbita della Luna dalla sua orbita ellittica come dovuta al vortice circumsolare. Ancora nel 1681, nella corrispondenza con l'astronomo reale John Flamsteed, Newton parla dei moti delle comete come influenzati dai vortici di materia responsabili dei moti planetari ([17], p. 341). Il carattere poco sistematico di queste notazioni newtoniane sui vortici planetari non autorizza conclusioni certe sull'adesione di Newton alla teoria dei vortici, ma l'evidenza dei documenti a nostra disposizione scoraggia una retrodatazione della scoperta della teoria della gravitazione a prima degli anni Ottanta.

Senza dubbio il documento più importante per valutare le idee di Newton sulla gravità antecedenti un carteggio con Hooke a cui dedichiamo la prossima sezione è un importante saggio sulla natura della luce inviato nel dicembre del 1675 a Henry Oldenburg, segretario della Royal Society. Newton specula sulla gravità come dovuta a un etere diffuso nel sistema planetario. Lo 'spirit' che causa la gravitazione, spiega Newton, non è il 'main body of the flegmatic aether', ma qualcosa di più sottile di una natura 'untuosa, appiccicosa, tenace e elastica' (*unctuous, gummy, tenacious and springy nature*). Questo spirito sottile e untuoso discende rapidamente e si condensa nei 'pori della Terra', trascinando con sé i corpi che incontra. Newton aggiunge:

> *And, as the Earth, so perhaps may the Sun imbibe this Spirit copiously, to conserve his Shineing, & keep the Planets from receding further from him. And they that will, may also suppose, that this Spirit affords or carryes with it thither the solary fewel & material Principle of Light; And that the vast æthereal Spaces between us & the stars are for a sufficient repository for this food of the Sunn & Planets.* [16], p. 366.

Ci sembra quindi di poter concludere che, nonostante l'interesse di questi manoscritti giovanili, il giovane studente davanti al famoso melo fosse ancora lontano dall'aver concepito la teoria della gravitazione. La teoria della gravitazione non si costruisce in un singolo 'momento Eureka'. La teoria della gravitazione — e aggiungeremmo anche l'idrostatica di Archimede — richiede uno sforzo concettuale e di calcolo che non permette facili scorciatoie. Il che emergerà molto chiaramente in questa nota. La strada che porta Newton alla gravitazione universale è tortuosa ed è affascinante ripercorrerla, seppur brevemente.

Si deve in primo luogo osservare che Newton non è una mente isolata che si interroga sull'universo che si estende all'infinito, non è — come vuole William Wordsworth — un genio isolato. Il poeta ricorda l'immagine quasi inquietante che gli evocava la statua del grande scienziato collocata nell'anti-cappella di Trinity College:

> *'And from my pillow, looking forth by light*
> *Of moon or favoring stars, I could behold*
> *The antechapel where the statue stood*
> *Of Newton, with his prism and silent face,*
> *The marble index of a mind forever*
> *Voyaging through strange seas of thought, alone'.*

L'Inghilterra in cui si forma il giovane studente proveniente dal Lincolnshire è dominata da pensatori, come Francis Bacon, William Gilbert e Henry More, che concepiscono la Natura come non riducibile a forze puramente meccaniche, ai corpuscoli e agli urti della 'filosofia meccanica', difesa da Cartesio e da Hobbes. Le interazioni fra i corpi possono avvenire, secondo questi pensatori anti-cartesiani, grazie ad attrazioni e repulsioni a distanza, grazie quindi a forze che in qualche modo dotano la materia di 'poteri attivi'.[4]

Durante gli studi a Cambridge Newton legge con attenzione questi pensatori e condivide, forse anche per scrupoli religiosi, il loro atteggiamento anti-cartesiano e anti-hobbesiano, un atteggiamento che apre la strada a una visione della Natura come non retta da leggi puramente meccaniche. Newton, quindi, non è una mente isolata: è un pensatore che si forma intellettualmente leggendo le opere dei suoi contemporanei, opere che ispirano la sua nuova teoria del moto dei pianeti. È un grande

[4]Sugli argomenti trattati in questa e nella prossima sezione, ci permettiamo di riferire il lettore a [9].

sperimentatore inglese, di poco più anziano, a dargli un suggerimento importante relativo alle cause dei moti planetari. Questo importante filosofo della natura risponde al nome di Robert Hooke.

2.2 Il ruolo di Hooke

Hooke aveva iniziato la sua brillante carriera scientifica come collaboratore di Robert Boyle, col quale realizzò alcuni importanti esperimenti con la pompa a vuoto. Nel novembre del 1679 Hooke, appena eletto segretario della Royal Society, scrisse una breve e conciliante lettera a Newton nella quale manifestava l'intenzione di riallacciare i contatti deterioratisi durante la polemica sull'*experimentum crucis* di qualche anno prima e per proporgli una sua ipotesi sul moto dei pianeti. L'ipotesi in questione non era una novità: era già stata in parte comunicata da Hooke in alcune lezioni tenute alla Royal Society nel 1666 e nel 1670, e poi pubblicata nel 1674 in calce a un saggio intitolato *An Attempt to Prove the Motion of the Earth from Observations* dedicato alle sue osservazioni astronomiche volte a rilevare la parallasse stellare [2] [12]. Hooke proponeva all'attenzione dei suoi lettori un 'Sistema del Mondo' che differiva 'in molti dettagli da quelli finora conosciuti' e che era in accordo con le 'regole della meccanica'. Il nuovo sistema hookeano dipendeva da tre 'supposizioni'.

La prima era che tutti i corpi celesti sono dotati di un'attrazione o 'potere di gravitazione' verso i propri centri grazie al quale essi attraggono non solo le proprie parti ma anche gli altri corpi celesti 'all'interno della loro sfera di attività'. Sembra che Hooke pensasse a questa sfera di attività come finita. La seconda supposizione era che tutti i corpi si muovono in linea retta di moto uniforme fino a quando non sono deflessi da 'qualche potenza . . . in un cerchio, un'ellisse, o una curva più complessa'. La terza supposizione era che i 'poteri gravitazionali' sono più 'potenti' vicino ai centri di attrazione. Hooke descriveva il modo in cui i pianeti del sistema solare sarebbero attratti dal potere gravitazionale del Sole e come essi si attraggano l'un l'altro influenzando 'in modo considerevole' i propri moti, ed auspicava che gli astronomi si dedicassero alla determinazione della legge di variazione dei poteri gravitazionali in modo da ridurre 'tutti i moti celesti ad una regola certa'.

Dal carteggio fra Hooke e Newton intercorso fra il 1679 e il 1680 si evince che queste tre supposizioni colsero il professore lucasiano del tutto impreparato. Come sappiamo, fino ad allora Newton aveva pensato il moto dei pianeti in termini che presentano alcune analogie con la dottrina cartesiana: il moto di rivoluzione dei pianeti attorno al Sole genererebbe un conato centrifugo (una tendenza dei pianeti ad allontanarsi dal Sole) controbilanciato da una forza diretta verso il Sole. La forza diretta verso il Sole sarebbe generata da un etere che riempie lo spazio, come aveva ribadito in una famosa lettera indirizzata a Boyle nel febbraio 1679.[5]

È notevole come Hooke comprenda che le interazioni gravitazionali fra il Sole e i pianeti sono reciproche: si intuisce da quello che egli scrive che proprio per questo motivo le orbite planetarie sono irregolari, non sono dei semplici cerchi o ellissi, ma delle 'curve più complesse' (*some other more compounded Curve Line*). Hooke scrive:

> *all Cœlestial Bodies whatever, have an attraction or gravitating power towards their own Centers, whereby they attract not only their own parts, and keep them from flying from them, as we observe the Earth to do, but that they do also attract all other Cœlestial Bodies that are within the sphere of their activity; and consequently not only the Sun and Moon have an influence upon the body and motion of the Earth , and the Earth upon them, but that ☿ also ♀, ♂, ♃, and ♄ by their attractive powers, have considerable influence upon its motion as in the same manner the corresponding attractive power of the Earth hath a considerable influence upon every one of their motion also.* ([12], p. 28)

L'intuizione fisica di Hooke sembra formidabile. Siamo di fronte alla prima intuizione delle perturbazioni planetarie dovute alla reciproca interazione gravitazionale fra i corpi del sistema solare? Forse interpretiamo le sue affermazioni alla luce della teoria della gravitazione sviluppata da Newton qualche anno più tardi.

È certo che il carteggio con Hooke squarciò un velo davanti agli occhi di Newton consentendogli di vedere molto lontano. Dall'evidenza documentaria che è a disposizione degli storici non è chiaro, però, fino a che punto Newton si sia spinto nel 1680. Secondo alcuni egli sarebbe già allora giunto ad un abbozzo della teoria della gravitazione. Secondo altri le cose non stanno così.

2.3 Verso i Principia

Comunque sia, siamo certi che nel dicembre del 1684 Newton aveva in mano una dimostrazione del fatto che le prime due leggi di Kepler implicano che un 'corpo' è attratto verso un fuoco da una forza che varia con l'inverso del quadrato della distanza. Questa dimostrazione si trova in un

[5] Newton a Boyle (28 febbraio 1679) in [17], pp. 288-96.

manoscritto, intitolato *De motu corporum in gyrum*, che Newton inviò a Edmond Halley (MS Add. 3965.7, fols. 55r-62r). In questo breve trattatello Newton affronta il problema del moto di un 'corpo' in un 'campo di forze centrali' (come diremmo oggi). Egli, in primo luogo, dimostra che la legge delle aree vale se e solo se il corpo è attratto (o respinto) da una forza centrale. Successivamente, dimostra che, se l'orbita è ellittica e la legge della aree vale per un fuoco S, allora la forza varia con l'inverso del quadrato della distanza dal fuoco S.

Newton intuì subito l'importanza di questo risultato matematico per la matematizzazione dei moti del sistema planetario e certamente a questo punto capì che l'intuizione di Hooke era fondata. Una forza gravitazionale che varia con l'inverso del quadrato poteva essere identificata come la causa dei moti planetari. Ma Newton era ben consapevole che il modello a un corpo del *De motu* era solo una semplificazione della realtà. Egli non poteva aver dimenticato la formidabile intuizione di Hooke sulle perturbazioni delle orbite planetarie. Newton dimostra presto che in un sistema a due corpi la terza legge di Kepler deve essere modificata. Infine, se la gravitazione è una forza universale le prime due leggi di Kepler non possono valere per un sistema a tre corpi, come il sistema Terra-Sole-Luna.

In un trattatello di poco successivo a quello inviato a Halley, intitolato 'De motu sphæricorum corporum in fluidis' (MS Add. 3965.7, fols. 40r-54r), leggiamo:

> *Cæterum totum cœli Planetarij spatium vel quiescit (ut vulgò creditur) vel uniformiter movetur in directum et perinde Planetarum commune centrum gravitatis (per Legem 4) vel quiescit vel una movetur. Utroque in casu motus Planetarum inter se (per Legem 3) eodem modo se habent, et eorum commune centrum gravitatis respectu spatij totius quiescit, atque adeo pro centro immobili systematis totius Planetarij haberi debet. Inde verò systema Copernicæum probatur a priori. Nam si in quovis Planetarum situ computetur commune centrum gravitatis hoc vel incidet in corpus solis vel ei semper proximum erit. Eo solis a centro gravitatis errore fit ut vis centripeta non semper tendat ad centrum illud immobile et inde ut planetæ nec moveantur in Ellipsibus exactè neque bis revolvant in eadem orbita. Tot sunt orbitæ Planetæ cujusque quot revolutiones, ut fit in motu Lunæ et pendet orbita unaquæque ab omnium Planetarum motibus conjunctis, ut taceam eorum omnium actiones in se invicem. Tot autem motuum causas simul considerare et legibus exactis calculum commodum admittentibus motus ipsos definire superat ni fallor vim omnem humani ingenij.* (fol. 4r).

Newton ha quindi subito chiare due idee. In primo luogo, per sviluppare un approccio matematico ai moti planetari basato sulla teoria della gravitazione universale non basta il modello a due corpi: bisogna almeno affrontare il problema a tre corpi. In particolare Newton ha in mente il moto della Luna, così importante per la determinazione della longitudine in mare. In secondo luogo, il metodo matematico cercato non può essere un calcolo facile (*commodum*), basato su leggi esatte. Una buona parte dei *Philosophiæ naturalis principia mathematica* (in breve i *Principia*), che vedono la luce pochi anni dopo, nel 1687, è dedicata proprio alla teoria matematica delle perturbazioni planetarie.

I *Principia* sono divisi in tre libri e si aprono con le celebri definizioni e le le tre 'leggi o assiomi' del moto. Nel Libro I, dopo aver posto i fondamenti del metodo dei 'primi e ultimi rapporti' — una sorta di metodo geometrico dei limiti — nella prima sezione, Newton procede nelle Sezioni 2 e 3 a esporre il modello a un corpo. Qui egli dimostra (Proposizioni 11-13. Sezione 3) che se un corpo si muove lungo una sezione conica e la legge delle aree vale per un fuoco, allora la forza è centrale, diretta verso un fuoco, e varia con l'inverso del quadrato della distanza. Nelle Sezione 4 e 5 vengono dimostrate una serie di interessantissime proposizioni relative alle coniche. Nella Sezione 6 viene affrontato il problema di Kepler (ovvero la determinazione approssimata della posizione in funzione del tempo di un pianeta che si muove lungo un'ellisse quando vale la legge delle aree). Nelle Sezioni 7 e 8 Newton riduce a quadratura il problema della determinazione della traiettoria di un corpo accelerato da una generica forza centrale (il caso preso in considerazione è quello di una forza che varia con l'inverso del cubo della distanza).

È nella Sezione 9 che Newton comincia ad affrontare il problema delle perturbazione delle orbite ellittiche. Chiaramente, egli ha in mente il moto della Luna, che sembra orbitare attorno alla Terra lungo una ellisse dotata di un moto di precessione. L'apogeo lunare infatti non è fisso ma è soggetto a un lento moto di precessione. Newton dimostra che, nel caso di orbite ellittiche con una ellitticità vicina a zero, la precessione può essere attribuita a un piccolo discostamento dalla legge dell'inverso del quadrato.

Questo risultato, a cui dedichiamo questa nota, ha una notevole importanza per la dimostrazione della gravitazione universale. Infatti, quando, nel Libro III dei *Principia*, Newton dimostra la legge dell'inverso del quadrato a partire dai fenomeni planetari, cita la quiescenza degli afeli come la miglior dimostrazione della dipendenza della legge di gravitazione dall'inverso del quadrato della distanza. Un piccolo discostamento dall'esponente 2 porterebbe, in virtù dei risultati ottenuti nella Sezione 9 del Libro I (Proposizioni 43-45) a una precessione degli afeli planetari facilmente osservabile. Si deve sottolineare che la dimostrazione che le orbite ellittiche implicano la legge dell'inverso del quadrato (Proposizione 11, Libro I) è di poca utilità, dato che le orbite planetarie sono quasi circolari e possono essere approssimate da curve non ellittiche (per esempio le orbite proposte da Gian Domenico Cassini).

Newton, nel terzo libro, non dimostra la legge di gravitazione a partire dalla orbite ellittiche dei pianeti. Piuttosto, assume che le orbite siano circolari e in forza della terza legge di Kepler deduce la legge dell'inverso del quadrato. Si tratta di una dimostrazione semplicissima, che — come sappiamo — Newton aveva già ottenuto in gioventù, e che egli espone nella Proposizione 4 del Libro I. Ma poi Newton, nella Proposizione 2, del Libro III, scrive:

> *Vires, quibus Planetæ primarii perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in Orbibus suis retinentur, respicere Solem, & esse reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro.*
>
> [. . .] *Accuratissime autem demonstratur hæc pars [pars posterior] propositionis per quietem apheliorum. Nam aberratio quam minima a ratione duplicata (per corol. 1. prop. xlv. lib. i.) motum apsidum in singulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet. [15], p. 395–396.*

Ecco perché è così importante conoscere la Proposizione 45 del Libro I: è in forza di questo elegante risultato matematico che Newton ottiene una dimostrazione 'accuratissima' della legge dell'inverso del quadrato.

3. Geometria e calcolo: una possibile lettura dei Principia

Prima di procedere, è opportuno premettere qualche osservazione sul linguaggio decisamente anacronistico che adotteremo, un linguaggio basato sul calcolo che è ben lontano da quello utilizzato da Newton nei *Principia*.

Va detto che utilizzare un linguaggio anacronistico, ovvero non accessibile agli autori del passato, non deve essere visto come un delitto commesso contro le regole del metodo storico. In un certo senso, utilizzare il linguaggio familiare a un matematico dei giorni nostri è inevitabile. Guardiamo sempre al passato da un punto di vista situato nel nostro presente. Inoltre, una trattazione condotta con un linguaggio in uso oggi può favorire l'accesso ai testi del passato da parte di matematici attivi nella ricerca e nell'insegnamento. Favorire il dialogo fra storici e matematici ha un valore che non deve essere sottostimato.[10]

Certamente, la traduzione del linguaggio matematico di Newton nel nostro comporta alcuni rischi di cui dobbiamo essere consapevoli. Spesso, le traduzioni proiettano sugli autori del passato concetti e metodi che non facevano parte della loro cultura matematica, una cultura che lo storico cerca — per quanto possibile – di ricostruire.

In verità, l'interpretazione storica dei testi matematici del passato è sempre frutto di un processo di 'fusione' fra il nostro presente e l' 'altro presente', per usare un termine di Giulio Preti ripreso da Paolo Rossi, degli attori storici.[19] Leggere un autore del passato implica un lavoro di traduzione che oscilla sempre fra un momento di 'familiarizzazione', in cui riscriviamo il testo nel nostro linguaggio, e un momento di 'distanziamento', in cui apprezziamo l'alterità del testo.

Tale alterità, tale lontananza, dipende dal fatto che la matematica del passato è stata praticata con obiettivi, accettando criteri di dimostrazione, e infine intendendo la disciplina stessa — che cosa insomma si intende per 'matematica' — secondo prospettive molto diverse dalla nostra, prospettive che sono situate in culture, appunto, lontane dal nostro presente. Non dobbiamo dimenticare che Newton non avrebbe definito sé stesso come uno 'scienziato', ma piuttosto come un 'filosofo della natura'.

Ma quali erano i metodi matematici adottati da Newton? In cosa differiscono dai nostri? Non possiamo rispondere qui a queste domande. Il discorso che dovremmo sviluppare sarebbe troppo complesso. Limitiamoci alle due seguenti osservazioni.

I metodi matematici dei Principia *newtoniani sono geometrici*. Chi sfoglia le prime tre sezioni dell'opera di Newton non può non rimanere sorpreso dall'assenza di una formula come $F = ma$ e dall'abbondanza di diagrammi geometrici, spesso molto complessi. Eppure, la geometria di Newton non è la geometria di Euclide, Apollonio o Archimede: è una geometria concepibile solo da chi, come Newton, ha contribuito in modo fondamentale alla scoperta del calcolo.

I metodi matematici dei Principia *newtoniani non sono solo geometrici*. Chi ha il coraggio di sfogliare le sezioni più avanzate dell'opera di Newton trova serie infinite, metodi di interpolazione, quadrature (ovvero, diremmo oggi, integrazioni). Per affrontare gli ardui problemi di Meccanica Celeste trattati nel Libro III, Newton aveva bisogno di metodi che forniscono predizioni numeriche (per esempio sulla precessione degli equinozi o sui moti delle comete) da confrontare con le osservazioni astronomiche. Tali metodi sono spesso simbolici, non geometrici.

Fatta questa doverosa premessa, passiamo ad un'analisi della dimostrazione di Newton di quello che oggi chiamiamo 'teorema di Bertrand'.

4. Il teorema di Newton sulle orbite soggette a precessione

La sez. IX dei *Principia* contiene un teorema, citato da Whittaker come *Newton's theorem on revolving orbits*.[6] Si tratta di un risultato notevole, ma poco noto. Chandrasekhar in [3] osserva che tra i testi più comuni di Meccanica Celeste non si trovano riferimenti al teorema di Newton, fatta eccezione per il solo trattato di Whittaker [23]; a questo possiamo aggiungere il trattato classico di Tisserand [20], e qualche raro articolo più recente [14][22][21]. Si tratta in realtà di un teorema molto rilevante al fine di stabilire l'accuratezza della legge dell'inverso del quadrato.

Newton enuncia il problema nel modo seguente:

> *Efficiendum est ut corpus in trajectoria quacunque circa centrum virium revolvente perinde moveri possit, atque corpus aliud in eadem trajectoria quiescente.*

Possiamo enunciare il problema in una forma a noi più abituale riferendoci alla *Fig. 1.* Supponiamo che un corpo, inizialmente in A, percorra un'orbita piana AP, rispettando la legge delle aree rispetto al centro O. Sia $\theta = \widehat{AOP}$ l'angolo descritto dal corpo dopo un tempo Δt. Supponiamo poi che una seconda orbita $A'P'$ coincida inizialmente con AP, ma nello stesso intervallo di tempo Δt ruoti rigidamente intorno a O di un angolo $\delta = \widehat{AOA'}$ proporzionale a θ; nel frattempo il punto P', inizialmente in $A = A'$, descrive l'angolo $\theta = \widehat{A'OP'}$. Nel nostro linguaggio, facendo uso di coordinate polari con origine in O, denotiamo con

[6]Nel testo latino Newton usa 'in orbibus mobilibus' che viene tradotto da Motte 'in movable orbits'. La traduzione italiana letterale adottata da Alberto Pala nell'edizione UTET [[18]] è 'lungo orbite mobili', ma preferiamo rendere con 'in orbite soggette a precessione' al fine di mettere in evidenza che si tratta di un movimento di rotazione; del resto Newton stesso scrive 'corpus ... movebitur in perimetro figurae revolventis'. Più avanti diremo anche, più brevemente, 'orbite mobili'.

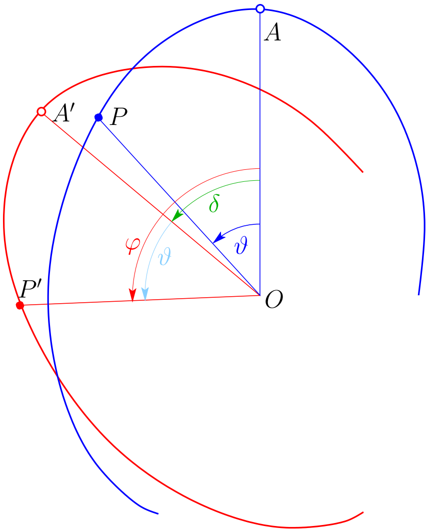

Fig. 1. L'orbita fissa (blu) e l'orbita soggetta a precessione (rossa).

$r(\theta)$ l'equazione dell'orbita AP e con $\varrho(\varphi)$ l'equazione dell'orbita $A'P'$. Allora, tenuto conto che δ è proporzionale a θ, abbiamo

$$\varphi = \delta + \theta = \gamma\theta\,, \quad \varrho(\varphi) = r(\varphi/\gamma)\,,$$

con una costante γ.

Teorema 4.1. *Si considerino le orbite $r(\theta)$ e $\varrho(\varphi)$ appena descritte; sia $f(r)$ la forza centripeta che agisce sul punto P, e sia C la costante della velocità areolare. Allora l'orbita mobile $\varrho(\varphi)$ soddisfa la seconda legge di Kepler con una costante $C' = \gamma C$, e viene descritta sotto l'azione della forza centripeta*

$$F(\varrho) = f(\varrho) + \frac{C'^2 - C^2}{\varrho^3}\,. \tag{1}$$

La dimostrazione si svolge in modo abbastanza semplice se si ricorre ai metodi analitici che usiamo comunemente. Osservando che $\dot\varphi = \gamma\dot\theta$ si ricava subito

$$C' = \varrho^2\dot\varphi = r^2\Big|_{\theta=\varphi/\gamma}\gamma\dot\theta = \gamma r^2\dot\theta = \gamma C\,;$$

pertanto C' è costante, essendo proporzionale a C. Questo dimostra che l'orbita mobile soddisfa la seconda legge di Kepler, come affermato.

L'equazione dell'orbita fissa si scrive in modo alquanto semplice tramite la nota *formula di Binet*, e si ha

$$\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\right)=f(r)\,.$$

L'equazione per l'orbita mobile, in coordinate polari ϱ, φ, si scrive in modo analogo grazie alla formula di Binet, pur di sostituire $C'=\gamma C$ per la costante della velocità areolare; si calcola così

$$\begin{aligned}\frac{\gamma^2C^2}{\varrho^2}\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right)&=\frac{\gamma^2C^2}{r^2}\left(\frac{1}{\gamma^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\right)\bigg|_{\theta=\varphi/\gamma}\\&=\left[\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\right)\right]_{\theta=\varphi/\gamma}+\frac{C^2(\gamma^2-1)}{r^3}\bigg|_{\theta=\varphi/\gamma}\,.\end{aligned}$$

La sostituzione $\theta=\varphi/\gamma$ non ha effetto sul primo termine di quest'ultima espressione, in quanto esso dipende solo da r e coincide con $f(\varrho)$; nel secondo termine invece basta sostituire r con ϱ. Pertanto l'equazione dell'orbita $\varrho(\varphi)$ diventa

$$\frac{C'^2}{\varrho^2}\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right)=F(\varrho)\,,$$

con la forza

$$F(\varrho)=f(\varrho)+\frac{C^2(\gamma^2-1)}{\varrho^3}\,.$$

Ricordando che $C'=\gamma C$ si ottiene l'espressione della forza riportata nell'enunciato.

Come esempio particolarmente interessante consideriamo un'orbita ellittica, generata da una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza; ciò è considerato come dimostrato da Newton. Scriviamo la forza come $f(r)=\frac{C^2}{pr^2}$, dove $p=b^2/a=a(1-e^2)$ è il parametro, o semilatus rectum, dell'ellisse, avendo denotato con a e b i semiassi maggiore e minore. L'angolo polare θ dell'orbita fissa si incrementa di $\Delta\theta=2\pi=360^\circ$ ad ogni rivoluzione, sicché la linea degli apsidi (congiungente l'apocentro col pericentro) resta fissa.

Passiamo a considerare l'orbita generata dalla forza

$$F(r) = \frac{C^2}{pr^2} + \frac{C^2(\gamma^2 - 1)}{r^3} \,. \tag{2}$$

Per il teorema 4.1 l'angolo θ deve essere sostituito da $\gamma\theta$, e nel passaggio da un apocentro al successivo si incrementa di $\gamma\Delta\theta = 2\pi\gamma$. Ne segue che l'apocentro dell'ellisse è soggetto a una precessione $2\pi(\gamma - 1)$ (*Principia,* Prop. XLIII, Corol. 2).

4.1 Orbite quasi circolari

Il teorema appena dimostrato, e in particolare l'esempio del caso di un'orbita kepleriana, permette a Newton di elaborare una risposta ingegnosa al problema seguente: *determinare il movimento della linea degli apsidi per un'orbita quasi circolare* (*Principia*, Libro I, sez. IX, probl. XXXI).

In termini più espliciti, sia data un'orbita circolare descritta sotto l'azione della forza $f(r)$ assegnata; supponiamo che le orbite vicine ad essa siano limitate, così da possedere un apocentro (e un pericentro). Ci si propone di assegnare all'orbita circolare un angolo di precessione $\Delta\theta_{\mathrm{circ}}$ visto come il limite dell'angolo $\Delta\theta$ per un'orbita infinitamente vicina.

Newton affronta il problema immaginando di deformare l'orbita circolare, trasformandola in un'orbita ellittica (o kepleriana), ma soggetta a precessione come descritto alla fine del paragrafo precedente. Propone poi di modificare $f(r)$ secondo la formula del teorema 4.1, imponendo la condizione che l'apocento dell'orbita kepleriana diventi fisso. La precessione indotta dal termine cubico diventa la quantità $\Delta\theta_{\mathrm{circ}}$ cercata.

Come abbiamo mostrato, l'orbita kepleriana mobile è generata dalla forza

$$F(r) = \frac{C^2}{pr^2} + \frac{C^2(\gamma^2 - 1)}{r^3} = \frac{C^2\left(r + p(\gamma^2 - 1)\right)}{p\, r^3} \,. \tag{3}$$

Proposizione 4.2. *Supponiamo che l'orbita circolare di raggio $\overline{r}$ sia generata dalla forza centripeta $f(r)$, e sia $\Phi(r) = r^3 f(r)$. Sotto l'ipotesi che le orbite prossime a quella circolare siano limitate possiamo assegnare all'orbita circolare la quantità*

$$\Delta\theta_{\mathrm{circ}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Phi(\overline{r})}{\overline{r}\Phi'(\overline{r})}} = 2\pi\left(3 + \frac{\overline{r}f'(\overline{r})}{f(\overline{r})}\right)^{-1/2} \,. \tag{4}$$

Denotiamo con $r_{\max}$, l'apocentro dell'orbita ellittica deformata, e definiamo la variabile ϱ mediante la relazione $r = r_{\max} - \varrho$. Per ϱ abbastanza piccolo sviluppiamo in serie il numeratore di $\Phi(r)/r^3$, scrivendo

$$\frac{\Phi(r)}{r^3} = \frac{\Phi(r_{\max}) - \varrho\Phi'(r_{\max}) + \varrho^2\Phi''(r_{\max})/2 + o(\varrho^2)}{r^3} \tag{5}$$

(qui gli apici indicano le derivate rispetto a r).

Lo sviluppo del numeratore dell'espressione (3) si riduce alla sostituzione di r con $r_{\max} - r$, e abbiamo

$$F(r) = \frac{C^2\left(r_{\max} + p(\gamma^2 - 1) - \varrho\right)}{pr^3} \ ,$$

Confrontando i termini dello stesso ordine in ϱ nei numeratori delle ultime due espressioni, e trascurando i termini $o(\varrho)$, possiamo identificare

$$\frac{C^2}{p}\big(r_{\max} + p(\gamma^2 - 1)\big) = \Phi(r_{\max}) \ , \qquad \frac{C^2}{p} = \Phi'(r_{\max}) \ .$$

Nel limite $\varrho \to 0$ sia $r_{\max}$ che p tendono al raggio $\overline{r}$ dell'orbita circolare; quindi le due equazioni appena scritte danno

$$\gamma^2 = \frac{\Phi(\overline{r})}{\overline{r}\Phi'(\overline{r})} \ . \tag{6}$$

Ponendo questa quantità nella (2) e ricordando che per l'orbita kepleriana si ha $\Delta\theta_{\mathrm{circ}} = 2\pi(\gamma - 1)$ si ricava immediatamente la (4).

Per noi è del tutto spontaneo rappresentare le posizioni successive degli apocentri di una data orbita su una circonferenza. Riconduciamo così il problema a quello della cosiddetta *mappa della rotazione del cerchio*: la distanza angolare tra due apocentri (o due pericentri) successivi è l'angolo $\Delta\theta_{\mathrm{circ}}$. L'orbita in esame risulta chiusa se e solo se $\Delta\theta_{\mathrm{circ}}/\pi$ è un numero razionale. Questo fatto è ben noto a Newton, anche se non descritto in termini moderni.

Tra gli esempi proposti da Newton se ne trovano due particolarmente interessanti. Il primo è quello della forza centripeta $f(r) = kr^\alpha$, proporzionale a una potenza $\alpha > -3$ della distanza; si dimostra facilmente che una tale forza ammette sempre un'orbita circolare. Ponendo

$\Phi(r) = kr^{3+\alpha}/r^3$, dalla proposizione 4.2 si ricava

$$\Delta\theta_{\mathrm{circ}} = 2\pi\sqrt{\frac{k\overline{r}^{3+\alpha}}{k(3+\alpha)\overline{r}^{3+\alpha}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3+\alpha}}\,. \tag{7}$$

Nel caso kepleriano, $\alpha = -2$, si trova $\gamma = 1$ e $\Delta\theta_{\mathrm{circ}} = 2\pi$, sicché la linea degli apsidi resta quiescente. Nel caso armonico, $\alpha = 1$, si trova $\Delta\theta_{\mathrm{circ}} = \pi$. In ambedue i casi l'orbita è un'ellisse, ma il centro delle forze coincide con uno dei fuochi nel caso kepleriano, e col centro dell'ellisse nel caso armonico; Newton lo ha già dimostrato nelle sezioni 7 e 8. Nel caso armonico dunque la linea degli apsidi non è quiescente, ma ruota di π tra un apocentro e il successivo.

Il secondo esempio di Newton è una forza $f(r) = br^\alpha + cr^\beta$ con costanti reali b, c, α e β. Posto $\Phi(r) = (br^{3+\alpha} + cr^{3+\beta})/r^3$ la proposizione 4.2 ci dà

$$\Delta\theta_{\mathrm{circ}} = 2\pi\sqrt{\frac{b + c\overline{r}^{\beta-\alpha}}{b(3+\alpha) + c(3+\beta)\overline{r}^{\alpha-\beta}}}\,. \tag{8}$$

Pertanto, per α e β fissati, troviamo una quantità che dipende da tre parametri, ivi compreso il raggio $\overline{r}$ dell'orbita circolare. Newton pone $\overline{r} = 1$, il che è possibile pur di riaggiustare i parametri b e c.

Gli esempi portati da Newton hanno la funzione di illustrare un procedimento affatto generale, valido per una forza generica: Newton rimanda esplicitamente al suo metodo di sviluppo in serie di potenze (*Principia,* Prop. XLIV, Exem. 3.)

Aggiungiamo un commento alla discussione di Newton. Il caso della forza $f(r) = kr^\alpha$ ha una caratteristica interessante: l'espressione (7) mostra che l'angolo $\Delta\theta_{\mathrm{circ}}$ non dipende dal raggio dell'orbita circolare; si tratta di un fatto certamente rilevante per il problema planetario, perché le osservazioni mostrano che le orbite sono quasi circolari, e non ci sono differenze osservabili nel comportamento delle linee degli apsidi dei Pianeti. Non è così invece se la forza è composizione di due o più potenze: l'espressione (8) suggerisce con tutta evidenza che $\Delta\theta_{\mathrm{circ}}$ debba dipendere da $\overline{r}$. Se vogliamo rendere l'argomento più rigoroso, secondo i nostri canoni, ci basta dimostrare la proprietà che segue.

Proposizione 4.3. *Le sole forze centripete per cui l'angolo* $\Delta\theta_{\mathrm{circ}}$ *è indipendente dal raggio dell'orbita circolare hanno la forma* $f(r) = kr^{\alpha}$, *con* $\alpha > -3$. *In tal caso si ha*

$$\Delta\theta_{\mathrm{circ}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3+\alpha}} \,. \tag{9}$$

La dimostrazione richiede un calcolo alquanto semplice. Grazie alla proposizione 4.2 ricaviamo che $\Phi(r)$ debba soddisfare l'equazione differenziale

$$r\Phi'(r) = n\Phi(r)$$

con una costante n arbitraria. La soluzione si calcola per separazione delle variabili, e si trova $\Phi(r) = kr^{n}$ con una costante di integrazione k. Posto $\alpha = n - 3$, la conclusione è immediata.

5. La legge dell'inverso del quadrato

Come abbiamo già detto, Newton perviene alla formulazione della legge di gravitazione nel Libro III dei *Principia*, Propositio II. Qui è utile richiamare succintamente il percorso che troviamo comunemente nei nostri testi, fondato sulle leggi di Kepler. Dalla legge delle aree, tramite la formula di Binet, si ricava che l'accelerazione debba essere diretta verso il Sole. Dalla prima legge di Kepler, ossia la forma ellittica dell'orbita, si ricava che l'accelerazione è diretta verso uno dei fuochi dell'ellisse ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza. La terza legge di Kepler mostra poi che la costante di proporzionalità dell'accelerazione è la stessa per tutti i Pianeti, sicché si può pensare a un campo di forza generato dal Sole. Infine si giustifica la legge di gravitazione universale grazie al principio di azione e reazione, ammettendo che la forza gravitazionale possa essere generata da ciascun corpo celeste o, ancor più in generale, da qualunque massa.

In effetti le argomentazioni che troviamo nel primo libro dei *Principia*, fermandoci alla fine della sezione VIII, sembrano suggerire il procedimento che abbiamo sintetizzato. In realtà Newton segue un percorso molto più articolato, che ci suggerisce di ampliare in modo significativo gli argomenti che troviamo comunemente nei nostri testi. Sembra ragionevole interpretare il percorso intellettuale di Newton come ricerca di risposta a una domanda cruciale: *Quanto è accurata la legge gravitazionale dell'inverso del quadrato?*

Newton parte dalla considerazione che nel Sistema Solare si possono identificare tre sottosistemi: quello dei satelliti di Giove, quello dei satelliti di Saturno, e quello formato dai cinque pianeti primari. Per ciascuno di essi le osservazioni astronomiche disponibili mostrano che le orbite sono prossime a cerchi, vale la legge delle aree rispetto al centro del sottosistema, e i periodi di rivoluzione concordano con le previsioni della terza legge di Kepler.

La Terra e la Luna vengono considerate a parte. Anzitutto, prendendo in considerazione i cinque pianeti primari, si osserva che la legge delle aree non vale se si pone la Terra al centro. La legge delle aree vale invece se si considera il moto del Sole rispetto alla Terra, o, equivalentemente, della Terra rispetto al Sole; ciò induce a equiparare la Terra ai Pianeti primari.

Il moto della Luna presenta qualche anomalia. L'orbita è approssimativamente circolare, con centro nella Terra, e rispetta la legge delle aree, ma la linea degli apsidi non è fissa: ad ogni rivoluzione l'apogeo avanza di circa $3^\circ\, 3'$; di conseguenza l'orbita non è esattamente ellittica. Non sembra dunque possibile, in prima battuta, mettere in relazione il sottosistema Terra-Luna con i sottosistemi di Giove o di Saturno. Come spiegare questo comportamento singolare?

Newton prende anzitutto in considerazione l'idea di correggere la forza centripeta agente sulla Luna, assumendo $f(r) \propto r^\alpha$, calcolando l'esponente α grazie alla formula (7). Trova così $\alpha \approx -2.0167$, un valore molto vicino a -2; ciò induce a pensare che si possa spiegare il fenomeno senza modificare la legge dell'inverso del quadrato.

Una via d'uscita possibile consiste nel prendere in considerazione la forza centripeta che il Sole esercita sia sulla Terra che sulla Luna. A tal fine Newton propone di sfruttare la formula (8), valida per una forza somma di due potenze. Suppone dunque che la forza totale agente sulla Luna possa scriversi come $f(r) = 1/r^2 - cr$ con una costante c da valutare in qualche modo. Ciò corrisponde a considerare l'orbita lunare come risultato della composizione del moto kepleriano con un secondo moto su un'ellisse che ha centro nella Terra. Posto $b = 1$ nella (8), il valore della costante c viene determinato tramite il rapporto tra la forza esercitata dalla Terra sulla Luna e la componente della forza esercitata dal Sole sulla Luna lungo la direzione congiungente il pianeta col satellite. Newton trova un valore approssimato valutando il rapporto tra le distanze Terra-Luna e Sole-Luna, e calcola $c \approx 1/357.45$. Posta $\overline{r} = 1$ la distanza media Terra-Luna, si trova $\Delta\theta_{\mathrm{circ}} = 2\pi\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}} \approx 2.00847\pi$; ciò corrisponde a un incremento di circa $1^\circ\, 31'\, 28''$ su 360°, pari a circa la metà dell'incremento osservato dell'apogeo della Luna (*Principia,* Libro I, Prop. XLV, Probl. XXXI, Corol. 2). Newton osserva anche che raddoppiando il valore di c, ossia ponendo $c = 2/357.45 = 1/178.725$ si ottiene un'approssimazione molto migliore (*Principia*, Libro III, Prop. III, Probl. III). La conclusione è che a patto di trascurare la perturbazione dovuta al Sole è lecito assumere che la legge $f(r) \propto 1/r^2$ valga anche per l'azione esercitata dalla Terra sulla Luna. Questa ipotesi viene sviluppata in seguito studiando la dinamica di un sistema formato da tre corpi.

Resta ora da mostrare che la legge dell'inverso del quadrato è la sola accettabile. Anzitutto si devono escludere tutte le forze rispondenti a una legge $f(r)$ che non sia una singola potenza della distanza. La motivazione si fonda sulla proposizione 4.3: se $\Delta\theta_{\mathrm{circ}}$ dipendesse dal raggio dell'orbita circolare non potrebbe accadere che tutti i Pianeti e i satelliti posseggano una linea degli apsidi praticamente quiescente.

Il caso della forza $f(r) \propto r$, pur generando orbite ellittiche, è da escludere sia perché il Sole non è al centro dell'orbita, sia perché l'orbita si chiuderebbe ogni due apocentri, contro la quiescenza della linea degli apsidi; questi sono fatti che risultano dalle osservazioni. Resta da esaminare il caso di una forza $f(r) \propto r^{\alpha}$ con $\alpha \neq -2,\ 1$. Supponiamo, ad esempio, che sia $\alpha = -2 + \varepsilon$. Allora la formula (7) ci dà

$$\Delta\theta_{\mathrm{circ}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}} \sim 2\pi \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) .$$

Dal momento che le orbite dei pianeti sono quasi circolari, l'angolo appena calcolato fornisce un'ottima approssimazione di quello dell'orbita vera. Ne risulta un'orbita 'a rosetta', in cui l'angolo tra due apocentri successivi differisce da 2π di una quantità $\varepsilon\pi$; un tal fenomeno viene detto *precessione degli apsidi*. Ad esempio, ponendo $\varepsilon = 10^{-4}$, che è un valore molto piccolo, avremmo un angolo di precessione di circa 0.0001π, pari a circa $1'\,5''$ per ciascuna rivoluzione. Inoltre tale precessione sarebbe praticamente la stessa per ogni pianeta, e si accumulerebbe nel tempo. Con un rapido calcolo si vede che dovremmo osservare una deviazione di oltre un grado in 60 anni per la Terra, un secolo per Marte e 6 secoli per Giove. Un tal fenomeno non potrebbe sfuggire alle osservazioni degli astronomi, che mostrano invece che gli apsidi sono praticamente quiescenti da molti secoli.

Alla luce di tutto questo Newton conclude che la legge dell'inverso del quadrato è la sola accettabile (*Principia*, Liber III, Prop. II, Teor. II). La sua conclusione è riportata nella citazione alla fine del paragrafo 2.3.

Dopo Lagrange sappiamo che gli afeli dei Pianeti sono soggetti a precessione. Tuttavia ciò non invalida l'argomento di Newton. In effetti la teoria sviluppata da Lagrange, e ancor oggi in uso, spiega la precessione come effetto delle perturbazioni mutue dei Pianeti; ciò era già stato previsto, anche se non calcolato, da Newton.

5.1 Il teorema di Bertrand

Il problema dell'accuratezza della legge dell'inverso del quadrato è stato ripreso da Bertrand, quasi due secoli dopo Newton, in una forma più astratta e facendo uso dei metodi dell'analisi, ormai ampiamente sviluppati [1]. Possiamo riprendere l'enunciato del problema nella forma datagli da Tisserand [20]: *Supponiamo che un Pianeta sia attratto dal Sole con una forza centrale, dipendente dalla sola distanza, e che l'orbita sia chiusa per qualunque dato iniziale. Si chiede di determinare la legge della forza.*

A differenza di Newton, Bertrand non fa alcun riferimento alla linea degli apsidi, che invece per Newton assume un ruolo fondamentale. L'ipotesi che l'orbita sia chiusa non esclude orbite a rosetta, purché lo spostamento $\Delta\theta$ dell'afelio sia in rapporto razionale con 2π. Ad esempio, l'ellisse del caso armonico viene subito esclusa da Newton, con l'argomento che abbiamo esposto, ma non da Bertrand. Il teorema di Bertrand afferma:

Teorema 5.1. *Le sole forze centrali per cui tutte le orbite limitate siano anche chiuse sono la forza armonica $f(r) = -kr$ e la forza gravitazionale $f(r) = -k/r^2$, con k costante.*

Si noti che in questo enunciato e nel seguito c'è un cambiamento di segno rispetto alle notazioni di Newton: per Newton la forza centripeta ha segno positivo; nella notazione di Bertrand, che adottiamo in questo paragrafo, il segno è negativo.

La dimostrazione di Bertrand segue la traccia di quella di Newton, solo riesposta in termini analitici a noi più abituali, e se ne discosta solo alla fine, quando si escludono orbite chiuse a rosetta, ma non ellittiche. Ne diamo una breve traccia.

Seguendo un procedimento comune nel secolo XIX, sostituiamo il raggio r con il suo inverso $w = 1/r$ e introduciamo l'angolo θ come variabile indipendente al posto del tempo. Facendo uso della formula di Binet, riscriviamo dunque l'equazione dell'orbita nella forma

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = -\frac{f(1/w)}{L^2 w^2} , \quad \dot{\theta} = Lw^2 .$$

La seconda equazione altro non è che la conservazione del momento angolare in cui si ponga $m = 1$, ovvero, ponendo $L = 2C$, la legge delle aree. La prima equazione può sostituirsi con la conservazione dell'energia introducendo il potenziale $V(r)$ tramite la relazione $f(r) = -\frac{dV}{dr}$, e il potenziale efficace $\mathcal{V}^*(w)$ definito come

$$\mathcal{V}^*(w) = \frac{1}{2}w^2 + \mathcal{V}(w)\,, \quad \mathcal{V}(w) = \frac{1}{L^2}V\left(\frac{1}{w}\right)\,.$$

La conservazione dell'energia assume così la forma

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{d\theta}\right)^2 + \mathcal{V}^*(w) = h\,,$$

con una costante h. Questa è un'equazione ben nota in Meccanica; richiamiamo in breve alcuni fatti noti. Un punto stazionario $\overline{w}$ del potenziale efficace corrisponde a un'orbita circolare di raggio $\overline{r} = 1/\overline{w}$. Supponiamo che $\overline{w}$ sia un minimo e in particolare che valga $1+\mathcal{V}''(\overline{w}) > 0$. Allora esiste un intervallo di valori di $h > \mathcal{V}^*(\overline{w})$ per cui $w = 1/r$ oscilla entro due estremi $[w_{\min}, w_{\max}]$. Il periodo $\Delta\theta$ di oscillazione rappresenta precisamente l'incremento $\Delta\theta_{\mathrm{circ}}$ dell'angolo θ tra due apocentri (o pericentri) consecutivi. Per orbite molto vicine a quella circolare possiamo approssimare $\mathcal{V}^*(w)$ con la sua parte quadratica; questo ci permette di calcolare l'approssimazione

$$\Delta\theta_{\mathrm{circ}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{\overline{w}\mathcal{V}''(\overline{w})}{\mathcal{V}'(\overline{w})}}}\,.$$

Questo coincide col valore (4) di $\Delta\theta_{\mathrm{circ}}$ calcolato da Newton.

Nel seguito servirà anche determinare il periodo $\Delta\theta$ in funzione dell'ampiezza dell'oscillazione. A tal fine occorre calcolare l'integrale

$$\Delta\theta = 2\int_{w_{\min}}^{w_{\max}} \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{2[h - \mathcal{V}^*(w)]}}\,, \tag{10}$$

Veniamo ora al caso di una forza a potenza. In termini di potenziale la proposizione 4.3 si riformula come segue: *i soli potenziali per cui* $\Delta\theta_{\mathrm{circ}}$ *risulta indipendente dal raggio dell'orbita circolare sono*

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{k}{\beta}r^\beta\,, \quad \beta \neq 0\,, \beta > -2\,, \\ V(r) &= k\ln r\,. \end{aligned}$$

Qui l'esponente β in $V(r)$ corrisponde a $\alpha + 1$ se la forza è $f(r) \propto r^{\alpha}$; il caso del potenziale logaritmico corrisponde a $\alpha = -1$; la formula (9) di Newton si riscrive come (si noti che $\beta = \alpha + 1$)

$$\Delta\theta_{\mathrm{circ}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2+\beta}}\ , \tag{11}$$

Qui viene l'aggiunta di Bertrand ai risultati di Newton. Volendo considerare anche il caso di orbite chiuse a rosetta occorre selezionare i potenziali per cui il periodo $\Delta\theta$ risulta essere in rapporto razionale con 2π anche per tutte le orbite non circolari. D'altra parte le orbite non circolari, per fissato L, sono parametrizzate da h. Dunque si deve imporre che $\Delta\theta$ debba coincidere con $\Delta\theta_{\mathrm{circ}}$ per tutti i valori di $h > h_{\mathrm{min}} = \mathcal{V}(\overline{w})$ tali che l'orbita risultante sia limitata. Questo è vero per $h_{\mathrm{min}} \leq h$ nel caso $\beta > 0$ e nel caso logaritmico, mentre per $-2 < \beta < 0$ si deve imporre $h_{\mathrm{min}} \leq h < 0$. Nel caso kepleriano, ossia $\beta = -1$, e in quello armonico, $\beta = 2$, sappiamo già che l'orbita è sempre chiusa. In tutti gli altri casi si calcola che $\Delta\theta$ non è costante al variare di h. In effetti, osserva Bertrand, basta verificare che per un valore di $h > h_{\mathrm{min}}$ si ha $\Delta\theta \neq \Delta\theta_{\mathrm{circ}}$; ciò segue dalla continuità di $\Delta\theta$ al variare di h. Seguendo un suggerimento di Arnold basta verificare che ciò accade nel limite $h \to \infty$ nel caso $\beta > 0$ e nel caso di potenziale logaritmico, e per $h \to 0^-$ nel caso $\beta < 0$. A tal fine occorre calcolare il limite dell'integrale (10) per i potenziali che stiamo esaminando.

Con calcoli elementari si verifica che

$$\lim_{h\to+\infty} \Delta\theta = \pi$$

per $\beta > 0$ e per il caso logaritmico, e che

$$\lim_{h\to 0^-} \Delta\theta = \frac{2\pi}{2+\beta}$$

per $-2 < \beta < 0$. Per confronto con la formula (11) si vede che la condizione $\Delta\theta = \Delta\theta_{\mathrm{circ}}$ è verificata solo per $\beta = -1,\ 2$. Questo conclude la dimostrazione del teorema di Bertrand.

6. Conclusioni

Nelle nostre intenzioni questo articolo mostra che il 'teorema di Bertrand', o meglio dovremmo dire il 'teorema di Newton', a volte citato di sfuggita da parte dei colleghi che insegnano Meccanica Celeste, riveste un'importanza storica notevole, essendo centrale nella dimostrazione newtoniana della legge di gravitazione universale. La dimostrazione moderna che abbiamo proposto apre la spinosa questione della lettura dei testi matematici del passato [10]. Newton utilizza un linguaggio geometrico, nel quale emergono però anche tecniche analitiche. In questo caso Newton utilizza serie di potenze, e lo fa non in manoscritti preparatori, ma nel testo a stampa stesso dei *Principia*. Comprendere storicamente il testo di Newton comporterebbe una familiarizzazione con il linguaggio dell'autore, una complessa combinazione di metodi geometrici e algebrici, che qui non abbiamo tentato. D'altronde, la lettura dei testi del passato, situati come sono nell' 'altro' presente, per usare un'espressione di Preti e Rossi, dei nostri predecessori non può che prendere le mosse dal 'nostro' presente [19]. Come primo passo nel processo di interpretazione del testo non possiamo che partire dal nostro linguaggio. In un secondo momento, per pervenire a una lettura storica, dobbiamo distanziare il testo per ricollocarlo nella cultura in cui è stato concepito. Sarebbe interessante mettere in luce come le nozioni di funzione o di potenziale, per fare due esempi, siano emerse lentamente nel Settecento, a partire da intuizioni che certamente sono presenti nelle opere di Newton, di Leibniz, e dei loro contemporanei. La lettura di un testo matematico del passato, comunque, non è mai un processo semplice: è un'avventura intellettuale che ci obbliga a un esercizio a un tempo di familiarizzazione e di distanziamento, il cui fascino, speriamo, è evidente da quanto abbiamo proposto al lettore in questo nostro lavoro.

Ringraziamenti. La ricerca di Niccolò Guicciardini è stata finanziata dal Dipartimento di Filosofia 'Piero Martinetti' dell'Università degli Studi di Milano nell'ambito del progetto 'Dipartimenti di Eccellenza 2018-2022' attribuito dal Ministero dell'Istruzione, Università e Ricerca (MIUR).
La ricerca di Antonio Giorgilli rientra nell'ambito del progetto MIUR-PRIN 20178CJA2B 'New Frontiers of Celestial Mechanics: theory and Applications'.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Bertrand: *Théorème relatif au mouvement d'un pont attiré vers un centre fixe,* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **LXXVII**, 849–853 (1875).

[2] T. Birch: *The History of the Royal Society of London*, Millar, Londra (1756), pp. 191-2; ristampa in R. T. Gunther: *Early Science in Oxford*, vol. 6, Oxford University Press, Londra (1930), p. 256.

[3] S. Chandrasekhar: *Newton's Principia for the common reader*, Oxford University Press (1995).

[4] A-C. Clairaut: *Du système du monde dans les principes de la gravitation universelle*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences (1745).

[5] *Leonhardi Euleri Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, Typographia Academiæ Scientiarum, Petropoli (1736). Ristampato in: *Opera Omnia*: Series 2, Volumes 1 and 2.

[6] A. Giorgilli: *A Kepler's note on secular inequalities,* Rendiconti dell'Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere, Classe di Scienze Matematiche e Naturali, **145**, 97-119 (2011).

[7] A. Giorgilli: *The unaccomplished perfection of Kepler's world,* in *I-CELMECH Training School. New frontiers of Celestial Mechanics: theory and applications.* G. Bau, S. di Ruzza, R.I. Paez, T. Penati, M. Sansottera eds., Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, in press.

[8] N. Guicciardini: *Reading the Principia: The Debate on Newton's Mathematical Methods for Natural Philosophy from 1687 to 1736*, Cambridge University Press (1999).

[9] N. Guicciardini: *Newton,* Carocci Editore (2011).

[10] N. Guicciardini: *Introduction: The historical interpretation of mathematical texts and the problem of anachronism*, in: *Anachronisms in the History of Mathematics: Essays on the Historical Interpretation of Mathematical Texts*, Proceedings of the Bacon Conference held at Caltech, Pasadena, April 13–14, 2018, Cambridge University Press (2021), pp. 1-41 .

[11] J. Herivel: *The Background to Newton's Principia: A Study of Newton's Dynamical Researches in the Years 1664-84*, Oxford at Clarendon Press (1965).

[12] R. Hooke: *An Attempt to Prove the Motion of the Earth from Observations*, Londra (1674), ristampa in R. T. Gunther: *Early Science in Oxford*, vol. 8, Oxford University Press, Londra (1931), pp. 1-28.

[13] R. Iliffe: *Early Biographies of Isaac Newton (1660-1885), vol. 1: Eighteenth-Century Biographies of Isaac Newton, the Unpublished Manuscripts and Early Texts*, London, Pickering and Chatto (2006).

[14] D. Lynden-Bell, R. M. Lynden-Bell: *On the Shapes of Newton's Revolving Orbits,* Notes and Records of the Royal Society of London **51**, 195-198 (1997).

[15] I. Newton: *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, autore Is. Newton, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali, Londini, jussu Societatis Regiæ ac typis Josephi Streater, Anno MDCLXXXVII. Terza edizione: Guil & Joh. Innys, Regiæ Societatis typographos, Londini (MDCCXXVI).

[16] I. Newton: *The Correspondence of Isaac Newton, vol. I 1661-1675*, a cura di H. W. Turnbull, Cambridge University Press (1960).

[17] I. Newton: *The Correspondence of Isaac Newton, vol. II 1676-1687*, a cura di H. W. Turnbull, Cambridge University Press (1960).

[18] I. Newton: *Principi matematici della filosofia naturale, a cura di Alberto Pala* Torino, UTET (1965).

[19] P. Rossi: *Un altro presente: saggi sulla storia della filosofia*. Bologna, Il Mulino (1999).

[20] F. Tisserand: *Traité de mécanique célèste*, Gauthier–Villard, Parigi (4 volumi: 1891–1896).

[21] G. Smith: *Newton's Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2008 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = `https://plato.stanford.edu/archives/win2008/entries/newton-principia/`.

[22] S. R. Valluri, P. Yu, G. E. Smith, P. A. Wiegart, *An Extension of Newton's Apsidal Precession Theorem,* Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **358**, 1273–1284 (2005).

[23] E.T. Whittaker: *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, quarta edizione, Cambridge University Press, London (1937). Le edizioni precedenti sono del 1904, 1917 e 1927.