Forme modulari e valori speciali di funzioni L

Fabrizio Andreatta

December 16, 2020

Abstract

Questo articolo è dedicato allo studio dei valori speciali della funzione ζ di Riemann e delle funzioni L associate a caratteri di Hecke di campi quadratici immaginari. Partendo dallo sviluppo storico del tema, descriveremo dei risultati recenti ottenuti dall'autore in collaborazione con Adrian Iovita. Particolare enfasi è data all'uso di idee e strumenti geometrici nell'approccio a tali questioni.

1 Introduzione

Le funzioni L sono particolari funzioni olomorfe, definite sull'aperto del piano complesso dei numeri con parte reale sufficientemente grande, associate a varietà su campi di numeri, più generalmente a motivi. Congetturalmente codificano informazioni aritmetiche significative della varietà da cui provengono.

Ad esempio, se si considera il campo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, la funzione L-associata è la funzione ζ di Riemann:

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \big(1 - \frac{1}{p^s}\big)^{-1}$$

(dove la seconda uguaglianza è lo sviluppo come prodotto infinito sui primi $\mathcal{P}$). Possiamo definire funzioni L associate a campi di numeri K:

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{N}\geq 0} \frac{1}{\mathrm{Norm}(\mathfrak{N})^s} = \prod_{\mathfrak{P}\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{\mathrm{Norm}(\mathfrak{P})^s}\right)^{-1}$$

(dove la somma è sugli ideali non nulli dell'anello degli interi di K e il prodotto è sugli ideali massimali).

Vi sono varianti e generalizzazioni di tali definizioni dovute a Dirichlet ed Hecke. Quest'ultimo considera funzioni $L(s,\chi)$ associate a Grössencharacters, o caratteri di Hecke χ, del gruppo degli idele I_K di K, ovvero caratteri continui $\chi\colon I_K \to \mathbb{C}^*$ che sono banali su $K^* \subset I_K$. In questo articolo considereremo *i caratteri di Hecke algebrici* di K, ovvero quei caratteri χ per cui la restrizione χ_∞ a $I_{K,\infty} = K \otimes \mathbb{R}$ proviene da un carattere algebrico. Questo significa che, se $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r_1}$ sono le immersioni reali $K \to \mathbb{R}$ e $\tau_1, \overline{\tau}_1, \ldots, \tau_{r_2}, \overline{\tau}_{r_2}$ sono le immersioni complesse

$K \to \mathbb{C}$ ma non reali, chiediamo che esistano interi $a_1, \dots, a_{r_1}, m_1, \dots . m_{r_2}, n_1, \dots, n_{r_2}$, detti *tipo di* ∞ di χ, tali che per ogni $\alpha \in K$ si abbia

$$\chi_\infty(\alpha \otimes 1) = \prod_{i=1}^{r_1} \sigma_i(\alpha)^{-a_i} \prod_{j=1}^{r_2} \tau_i(\alpha)^{-m_i} \overline{\tau}_i(\alpha)^{-n_i}.$$

Una delle principali proprietà delle funzioni L qui descritte, e in generale di quelle associate a forme automorfe, è di ammettere una continuazione meromorfa a tutto il piano complesso e di soddisfare una equazione funzionale. Nel caso della funzione ζ di Riemann essa assume la forma

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s),$$

che mette in relazione i valori in s ed in $1-s$. La funzione $\Lambda(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$ è detta funzione L completata e per definizione assume gli stessi valori in s e nell'immagine di s rispetto alla simmetria $s \mapsto 1-s$ rispetto all'asse $s = \frac{1}{2}$. Inoltre si conoscono i poli delle funzioni L, che sono semplici, e il residuo in tali poli. Ad esempio, le funzioni $\zeta_K(s)$ ammettono poli semplici in $s = 0$ ed $s = 1$, dove il residuo è espresso in termini di invarianti fondamentali del campo di numeri (class number formula). Le funzioni L, associate più generalmente a motivi su campi di numeri e a forme automorfe, e soprattutto la relazione, ancora in gran parte congetturale, fra queste due classi di funzioni (il programma di Langlands) costituiscono uno degli oggetti di studio principali della moderna teoria dei numeri. Basti ricordare che la congettura di Shimura-Tanyiama, dimostrata da Wiles e Breuil-Conrad-Diamond-Taylor e che implica l'ultimo Teorema di Fermat, equivale a dimostrare la funzione L di Hasse associata ad una curva ellittica definita su $\mathbb{Q}$ coincide con la funzione L associata ad una forma modulare di peso 2 (un particolare tipo di forma automorfa di cui parleremo più avanti).

In queste note non ci spingeremo in questa direzione. Vogliamo invece considerare un'altra questione, ovvero i valori speciali di funzioni L. Come primo esempio, torniamo al caso della funzione ζ di Riemann. Ricordiamo la definizione dei numeri di Bernoulli tramite la formula

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \frac{x^6}{30240} + \cdots .$$

Si tratta di numeri razionali e vale la sorprendente uguaglianza

$$\zeta(1-2k) = -\frac{B_{2k}}{2k}.$$

In particolare, la funzione ζ valutata in interi negativi dispari ha valori razionali, proprietà che una generica funzione olomorfa non soddisfa. Grazie all'equazione funzionale deduciamo anche le uguaglianze:

$$\zeta(-2k) = 0, \qquad \zeta(2k) = -\frac{\pi^k \Gamma\left(\frac{1-2k}{2}\right)}{\pi^{\frac{1-2k}{2}} \Gamma(k)} \frac{B_{2k}}{2k}.$$

Sappiamo inoltre da risultati di Clausen-Von Staudt che gli unici primi che appaiono nel denominatore di una scrittura ridotta di B_k come frazione sono i primi p tali che $p-1$ divide k. Infine, le congruenze di Kummer ci dicono che se $2k$ e $2k'$ non sono divisibili per $p-1$ ma $2k \equiv 2k'$

modulo $p^n(p-1)$ allora $(1-p^{2k-1})\zeta(1-2k) \equiv (1-p^{2k'-1})\zeta(1-2k')$ modulo p^{n+1}. Possiamo allora raccogliere tali informazioni per dimostrare l'esistenza della cosiddetta *funzione ζ p-adica di Kubota e Leopoldt*:

$$\zeta_p^* \colon (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p,$$

dove $\mathbb{Z}_p$ è l'anello dei numeri p-adici. Si tratta di una applicazione continua caratterizzata dalla proprietà che per interi positivi pari $2k$, tali che $2k \neq 0$ modulo $p-1$, si ha

$$\zeta_p(2k) = (1-p^{2k-1})\zeta(1-2k).$$

Congetture di Deligne, Beilinson e Bloch-Kato inseriscono queste osservazioni in un contesto molto generale. Dato un motivo M di peso w su un campo di numeri e la sua funzione $L(M,s)$, le congetture prevedono che $L(M,s)$ ammetta un'estensione meromorfa a tutto il piano complesso e che la funzione completata $\Lambda(M,s)$, ottenuta moltiplicando $L(M,s)$ per un'opportuna funzione Γ, soddisfi una certa equazione funzionale rispetto alla simmetria $s \mapsto w+1-s$. La funzione $L(M,s)$ è definita, per s con parte reale sufficientemente grande, come un prodotto di Eulero $L(M,s) = \prod_\ell L_\ell(M,s)$ sui primi ℓ e per ciascuno di tali primi il fattore locale $L_\ell(M,s)$ è definito utilizzando la realizzazione ℓ-adica del motivo. Deligne descrive con precisione il fattore Γ come il contributo del primo archimedeo $L_\infty(M,s)$ in termini di teoria di Hodge. Un intero n tale che $L_\infty(M,s)$ non ha uno zero in n o in $w+1-n$ è detto *un punto critico* ed il valore $L(M,n)$, se definito, oppure il valore della sua derivata m-esima se n è uno zero di ordine m, è detto *un valore critico*. Nel caso in cui w sia dispari e $n = \frac{w+1}{2}$ sia un punto critico, $L(M,n)$ è detto *un valore critico centrale*. Le congetture prevedono quale debba essere l'ordine dell'eventuale zero di $L(M,s)$ ed il valore della derivata m-esima di $L(M,s)$ in $s=n$, identificando sia la parte trascendente che la parte algebrica in termini dell'aritmetica del motivo M.

Non ci addentreremo nei dettagli, limitandoci a trattare due casi significativi, quello in parte già discusso dei valori speciali della funzione ζ di Riemann e, soprattutto, il caso di funzioni L associate a caratteri di Hecke algebrici per campi quadratici immaginari, descrivendo il contributo recente dell'autore e del collega Iovita. La trattazione non vuole essere esaustiva. L'aspetto secondo l'autore più rilevante e sorprendente, che cercheremo di tratteggiare nella sua genesi e nel suo sviluppo storico, è il collegamento con la teoria delle forme modulari (ellittiche).

2 Forme modulari ellittiche

Iniziamo con una rapida ricapitolazione della teoria delle forme modulari ellittiche. Vedremo nelle sezioni successive come tale teoria offra degli strumenti geometrici utili per lo studio dell'aritmetica dei valori critici di funzioni L. La relazione misteriosa fra questi due mondi, realizzata tramite le serie di Eisenstein, è sicuramente uno dei temi più affascinanti delle Teoria dei Numeri moderna.

2.1 Forme Modulari - Teoria analitica

Sia $\overline{\mathbb{H}}$ il semipiano di Poincaré completato

$$\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(\tau) > 0\} \subset \overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$$

con l'azione di $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ tramite trasformazioni di Möbius:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Un *sottogruppo di congruenza* $\Gamma \subset \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ è un sottogruppo contenente il gruppo $\Gamma(N)$ delle matrici congrue all'identità modulo N, per un qualche intero positivo N. Ad esempio,

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}) | c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

e

$$\Gamma_1(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) | a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\}$$

sono sottogruppi di congruenza.

Fissato un sottogruppo di congruenza Γ e un intero positivo k, definiamo una **forma modulare** di peso k e di livello Γ come una funzione olomorfa $f \colon \overline{\mathbb{H}} \to \mathbb{C}$ tale che per ogni $A \in \Gamma$ abbiamo

$$f(A \cdot \tau) = j(A, \tau)^k f(\tau), \qquad j\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tau \right) = (c\tau + d)^k.$$

Il fattore $j(A)$ è detto *fattore di automorfia*. In particolare, se $\Gamma_1(N) \subset \Gamma$ per un qualche N allora una tale funzione è invariante per traslazione $\tau \mapsto \tau + 1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \tau$ e quindi ammette una scrittura della forma

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n, \qquad q = e^{2\pi i \tau},$$

detta q-espansione.

Un esempio di forma modulare di peso $k \in \mathbb{N}$ e di livello $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ è dato dalla *serie di Eisenstein* che ha q-espansione

$$\mathbb{E}_k = \zeta(1-k) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n, \qquad \sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}.$$

Rimandiamo al libro di Serre [S2] per dettagli.

2.2 Forme Modulari - Teoria algebrica

Come spiegato in [S2], il quoziente topologico $\overline{\mathbb{H}}/\Gamma$ è una superficie di Riemann compatta e quindi è lo spazio analitico di una curva algebrica complessa. Infatti, ha una struttura più ricca e coincide con lo spazio analitico $X_\Gamma(\mathbb{C})$ corrispondente alla curva modulare X_Γ, una curva proiettiva su $\mathrm{Spec}\big(\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]\big)$, con $\Delta = [\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z} : \Gamma]$, che è lo spazio dei moduli (grezzo) delle curve ellittiche generalizzate. Per $\tau \in \mathbb{H}$ la corrispondente curva ellittica, vista come toro complesso da un punto di vista analitico, è $A_\tau := \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$. Si veda [KM] per l'approccio tramite rappresentabilità di problemi di moduli.

Per Γ sufficientemente piccolo, ad esempio se Γ è contenuto in $\Gamma(N)$ per $N \geq 3$, la curva modulare X_Γ è infatti uno spazio di moduli fine. In particolare, abbiamo una curva ellittica (generalizzata) $A \to X_\Gamma$. Questo permette di definire $\omega := \omega_{A/X_\Gamma}$, il fascio invertibile di $\mathcal{O}_{X_\Gamma}$-moduli dei differenziali invarianti di A relativamente a X_Γ.

Definiamo allora **forma modulare** di peso $k \in \mathbb{N}$ e livello Γ su una $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$-algebra R una sezione

$$f \in \mathrm{H}^0\big(X_{\Gamma,R}, \omega_R^k\big),$$

dove $X_{\Gamma,R}$ è il cambiamento di base di X a $\mathrm{Spec}(R)$. Ad esempio, $\mathbb{E}_k$ è una forma modulare di peso $k \in \mathbb{N}$ e livello $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ su $\mathbb{Q}$. Se $\Gamma_1(N) \subset \Gamma$ per un qualche N, esiste una definizione algebrica della q-espansione che fornisce un'applicazione

$$\mathrm{H}^0\big(X_{\Gamma,R}, \omega_R^k\big) \longrightarrow R[\![q]\!].$$

Se $R = \mathbb{C}$ le due nozioni di forme modulari di peso k e livello Γ, quella algebrica e quella analitica, coincidono così come le nozioni di q-espansione. La ragione risiede nel fatto che il pull-back del fascio ω a $\mathbb{H}$ diventa banale, avendo $\omega_{A_\tau/\mathbb{C}}$ un generatore canonico dz ottenuto tramite l'uniformizzazione complessa $A_\tau := \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$ (dove z è la coordinata su $\mathbb{C}$). Questo permette di identificare le sezioni di ω^k su $\mathbb{H}$ con funzioni su $\mathbb{H}$.

Un esempio della potenza di strumenti algebrici nella teoria è il seguente:

Teorema 2.1. *Abbiamo $\zeta(1-k) \in \mathbb{Q}$.*

Proof. (Idea) Per ogni $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ abbiamo che $\gamma(\mathbb{E}_k) - \mathbb{E}_k = \gamma\big(\zeta(1-k)\big) - \zeta(1-k)$ è una costante ed allo stesso tempo una forma modulare di peso $k > 0$. Si mostra infine che, di conseguenza, l'unica possibilità è che tale espressione sia 0. $\square$

2.3 Forme Modulari - Teoria p-adica

Sia $p \geq 3$ primo che non divide Δ e supponiamo che $\Gamma_1(N) \subset \Gamma$ per un qualche N. Sia R una $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$-algebra, p-adicamente completa e separata.

Seguendo J.-P. Serre [S1] definiamo una **forma modulare p-adica** su R di livello Γ come una serie $f(q) \in R[\![q]\!]$ che sia limite p-adico della q-espansione $(f_i(q))_{i\in\mathbb{N}}$ di forme modulari $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ su R, di livello Γ. Questo significa che per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste un $i(m) \in \mathbb{N}$ tale che $f(q) \equiv f_i(q) \in R/p^m R[\![q]\!]$ per ogni $i \geq i(m)$.

Serre dimostra inoltre che i pesi k_i delle forme f_i convergono p-adicamente ad un $k \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}_p$, che non risulta dipendere dalla successione (f_i). Tale numero p-adico è chiamato il *peso* di f. Ecco un fenomeno tipicamente p-adico. Se pensiamo alla definizione analitica o algebrica delle forme modulari risulta chiaro che i pesi possano essere solo interi. Ad esempio nel caso algebrico il peso è la potenza di $\omega := \omega_{A/X_\Gamma}$ di cui prendiamo le sezioni. Non ha senso prenderne una potenza p-adica!

Un primo esempio è costituito dalla *serie di Eisenstein di peso* $k \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}_p$:

$$\mathbb{E}_k = \zeta_p^*(1-k) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}^*(n) q^n, \qquad \sigma_{k-1}^*(n) = \sum_{p \nmid d \mid n} d^{k-1}$$

con ζ_p^* la funzione ζ p-adica di Kubota-Leopoldt.

Infatti, e qui sta l'interesse nella definizione, Serre dimostra un analogo p-adico del Teorema 2.1. Dati degli interi postivi k_i che convergono ad un $k \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}_p$, dalla convergenza p-adica $\sigma^*_{k_i-1}(n) \to \sigma^*_{k-1}(n)$ deduce la convergenza $\zeta_p^*(1-k_i) \to \zeta_p^*(1-k)$ permettendo una costruzione alternativa della funzione ζ_p^*.

2.4 Variazione p-adica di fasci automorfi

Continuiamo con la notazione delle sezioni precedenti. Scriveremo X invece di X_Γ per semplificare la notazione.

Ricordiamo che una curva ellittica su $\mathbb{C}$ ha p-torsione isomorfa a $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$. Questo non vale per una curva ellittica A definita su un campo di caratteristica positiva p, ad esempio $\overline{\mathbb{F}}_p$. In questo caso si danno due possibilità: $A[p](\overline{\mathbb{F}}_p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, ed A è detta *ordinaria*, oppure $A[p](\overline{\mathbb{F}}_p) = \{0\}$, ed A è detta *supersingolare*. Le curve ellittiche supersingolari sono definite dagli zeri di una forma modulare non nulla di peso $p-1$ e livello $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$, detta *invariante di Hasse* e denotata Ha. In particolare, il luogo delle curve ordinarie definisce un aperto denso $X^{\mathrm{ord}}_{\mathbb{F}_p}$ della curva modulare $X_{\mathbb{F}_p}$.

Definiamo $X^{\mathrm{ord}}_{\mathbb{Z}_p}$, il luogo ordinario di $X_{\mathbb{Z}_p}$, come lo schema formale i cui $\mathcal{O}_K$-punti, per ogni campo locale p-adico K, classificano curve ellittiche generalizzate A la cui riduzione è ordinaria. In [K1] Nick Katz ha dato una interpretazione geometrica delle forme p-adiche di Serre. Katz costruisce per ogni $k \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}_p$ un fascio invertibile ω^k su $X^{\mathrm{ord}}_{\mathbb{Z}_p}$ e, dato un anello p-adicamente completo e separato R, una mappa di q-espansione

$$\mathrm{H}^0\big(X^{\mathrm{ord}}_R, \omega^k_R\big) \longrightarrow R[\![q]\!]$$

tale che le forme modulari p-adiche di peso k e di livello Γ, definite su R, coincidono con l'immagine di tale mappa. Inoltre per $k \in \mathbb{Z}$ il fascio ω^k è la potenza k-esima di ω.

Vale la pena soffermarsi sulla novità di questo fenomeno, che mostra la ricchezza del mondo p-adico rispetto a quello analitico classico e algebrico. Dato un fascio invertibile come ω, sappiamo prenderne potenze intere su X. Il teorema ci dice che a meno di passare allo schema formale $X^{\mathrm{ord}}_{\mathbb{Z}_p}$ riusciamo a definirne anche potenze p-adiche o addirittura famiglie di fasci in cui la potenza varia, *la variazione p-adica* delle potenze intere del fascio automorfo ω cui allude il titolo della sezione!

Possiamo definire anche degli intorni "tubulari" $X^{\mathrm{ord}}_{\mathbb{Z}_p} \subset X^{(r)}_{\mathbb{Z}_p} \to X_{\mathbb{Z}_p}$, indicizzati da $r \in \mathbb{N}$, richiedendo che l'ordine di annullamento dell'invariante di Hasse sia piccolo. Più precisamente gli $\mathcal{O}_K$-punti di $X^{(r)}_{\mathbb{Z}_p}$ classificano curve ellittiche generalizzate A tali che $\mathrm{Ha}(A \mod p) \in \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ è un elemento di valutazione p-adica $\leq \frac{1}{r}$.

Il seguente teorema riassume uno dei risultati principali ottenuti in collaborazione con Adrian Iovita e Vincent Pilloni, si veda [ICM18]:

Teorema 2.2. *Esiste un $r_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $X^{(r)}_{\mathbb{Z}_p}$ con $r \geq r_0$ ed ogni $k \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}_p$ esiste un fascio invertibile di ω^k la cui restrizione a $X^{\mathrm{ord}}_{\mathbb{Z}_p}$ è il fascio definito da Katz.*

L'immagine delle sezioni $\mathrm{H}^0\big(X_R^{(r)}, \omega_R^k\big)[1/p]$ tramite la restrizione a X_R^{ord} e la mappa di q-espansione di Katz sono dette *forme modulari sovraconvergenti* di peso k e livello Γ, definite su $R[1/p]$. Esse sono molto meno delle forme di Serre o Katz ed hanno trovato applicazioni importanti nella teoria delle rappresentazioni Galoisiane grazie al lavoro di Robert Coleman e di Barry Mazur [Co], [C-M]. Coleman tuttavia ha introdotto una definizione *ad hoc*. La possibilità di definire le forme p-adiche sovraconvergenti come sezioni di potenze p-adiche di certi fasci si è dimostrata molto fruttuosa permettendo, ad esempio, di studiare simili fenomeni per altre varietà di Shimura come, ad esempio, le varietà di Siegel o di Hilbert, una questione aperta da più di vent'anni. Si vedano [AIPS] e [AIPH] con applicazioni alla definizione di autovarietà e allo studio di rappresentazioni Galoisiane in questi casi.

Proof. (Idea - Fibrati con sezione marcata) Su intorni $X_{\mathbb{Z}_p}^{(r)}$ di X^{ord} per r sufficientemente grande ho un $\mathbb{F}_p$-sottospazio V di ω modulo $p^{1/p}$. Questo segue da qualche elemento della Teoria di Hodge p-adica che permette di confrontare coomologia étale e coomologia di de Rham, in analogia con la Teoria di Hodge usuale su $\mathbb{C}$ che confronta cohomologia di Betti (ossia singolare) e coomologia di de Rham. Su X^{ord} tale spazio V è l'immagine della parte étale C^{ord} della p-torsione della curva ellittica universale A. In un intorno $X_{\mathbb{Z}_p}^{(r)}$ la teoria del sottogruppo canonico permette di estendere tale C^{ord} ad uno schema in gruppi $C^{(r)}$ di ordine p la cui immagine risulta essere V.

Prendiamo $\omega^\sharp \subset \omega$ il sottofascio invertibile generato dalla retroimmagine di un generatore $s \in V$. Esso coincide con ω solo sul luogo ordinario. Partiamo osservando che ω^k, per $k \in \mathbb{N}$ è il sottofascio dell'algebra simmetrica di ω, che definisce il fibrato in rette associato a ω, su cui gli scalari, o meglio il toro algebrico $\mathbb{G}_m$, agiscono tramite il carattere $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$, definito dall'elevamento alla potenza k-esima. Abbiamo ora a disposizione un fascio invertibile $(\omega^\sharp, V)$ con un sottospazio su cui agisce il gruppo p-adico $\mathbb{G} := \mathbb{Z}_p^* \cdot \big(1 + p^{1/p}\mathbb{G}_a\big)$. Quest'ultimo ha molti più caratteri, anche p-adici. Fissiamone uno, ε, ad esempio definito da $k \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}_p$.

Sia $g_0 \colon \mathbb{V}_0(\omega^\sharp, s) \to X_{\mathbb{Z}_p}^{(r)}$ tale che, per $\rho \colon T \to X_{\mathbb{Z}_p}^{(r)}$, i T-punti sopra ρ sono

$$t \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}\big(\rho^*(\omega^\sharp), \mathcal{O}_T\big), \quad t(s) = 1 \bmod p^{1/p},$$

l'analogo del fibrato in rette associato a $\omega^\sharp$. Esso ammette un'azione di $\mathbb{G}$ e poniamo

$$\omega^\varepsilon = g_{0,*}\big(\mathcal{O}_{\mathbb{V}_0(\omega^\sharp, s)}\big)[\varepsilon],$$

il fascio delle funzioni $g_{0,*}\big(\mathcal{O}_{\mathbb{V}_0(\omega^\sharp, s)}\big)$ su cui $\mathbb{G}$ agisce tramite il carattere ε.

□

3 Funzioni L di campi quadratici immaginari

Fissiamo ora K, un campo quadratico immaginario, che pensiamo come sottocampo dei numeri complessi tramite un'immersione $\iota \colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$. In queste note supponiamo, solo per semplicità, che $\mathrm{Pic}\mathcal{O}_K = \{1\}$. Studiamo il valore critico in $s = 0$ della funzione $L(s, \chi)$ associata ad un carattere di Hecke algebrico χ. Ad esempio, possiamo considerare $\chi = \chi_{m,n}$ definito dal carattere algebrico $K^* \to \mathbb{C}^*$, $\alpha \mapsto \alpha^{-m}\overline{\alpha}^{-n}$:

$$L\big(0, \chi_{m,n}\big) = \sum_{0 \neq \alpha \in \mathcal{O}_K} \frac{1}{\alpha^m \overline{\alpha}^n} \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

(dove la formula è ben definita se m ed n sono interi positivi sufficientemente grandi, altrimenti si intende il valore della funzione $L(s, \chi_{m,n})$ definita usandone l'estensione olomorfa al piano complesso di cui abbiamo accennato nella Introduzione).

3.1 La parte algebrica di $L(0, \chi_{m,n})$

Fissiamo un intero positivo k ed un intero non negativo j. Abbiamo allora il seguente risultato che collega i valori $L\big(0, \chi_{k+j,-j}\big)$ alle forme di Eisenstein ([K2]):

Teorema 3.1. *(Damerell) Abbiamo l'uguaglianza*

$$\delta_k^j(\mathbb{E}_k)\big(A_0, \alpha_0, \omega_0\big) = \frac{(k+j-1)!N^{k+2j+1}\pi^j}{\mathrm{disc}_K^j \Omega_\infty^{k+2j}} L\big(0, \chi_{k+j,-j}\big).$$

Inoltre, tale quantità è in $\overline{\mathbb{Q}}$.

dove

- disc_K è il discriminante di $\mathcal{O}_K$;
- A_0 è la curva ellittica tale che $A_0(\mathbb{C}) = \mathbb{C}/\mathcal{O}_K$, con azione dell'anello $\mathcal{O}_K$. Grazie alla teoria della *moltiplicazione complessa* sappiamo che A_0 e l'azione di $\mathcal{O}_K$ sono definite su K.
- α_0 è una struttura di livello Γ che permette di identificare (A_0, α_0) con un punto $X(\overline{\mathbb{Q}})$, dove Γ è tale che $X = X_\Gamma$ sia uno spazio di moduli fine.
- ω_0 è un differenziale algebrico che utilizziamo per banalizzare il fascio $\omega^{k+2j}|_{A_0(\mathbb{C})} = \mathbb{C}\omega_0^{k+2j}$ di modo che il pull-back di $\delta_k^j(\mathbb{E}_k)$ al punto $(A_0, \alpha_0) \in X(\mathbb{C})$ si scriva appunto come $\delta_k^j(\mathbb{E}_k)\big(A_0, \alpha_0, \omega_0\big)\omega_0^{k+2j}$;
- Ω_∞ è il periodo complesso definito da $\omega_0 = \Omega_\infty dz$, dove z è la variabile sul rivestimento universale $\mathbb{C}$ di $A_0(\mathbb{C})$;
- δ_k è il cosiddetto *operatore di Shimura-Maass*. Se f è forma modulare analitica di peso k allora $\delta_k(f)$ è una forma modulare (ora solo C^∞) di peso $k+2$

$$\delta_k(f) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\partial(f)}{\partial\tau} + \frac{kf}{\tau - \overline{\tau}}\right).$$

  Poniamo inoltre $\delta_k^j = \delta_{k+2j} \circ \cdots \circ \delta_k$.

Deduciamo quindi che i numeri complessi $L\big(0, \chi_{k+j,-j}\big)$ sono trascendenti. Tuttavia possiamo isolarne, dividendo per una quantità trascendente data da opportuni periodi complessi e potenze di π, una parte algebrica

$$L_{\mathrm{alg}}\big(\chi_{k+j,-j}\big) := \delta^j(\mathbb{E}_k)\big(A_0, \alpha_0, \omega_0\big),$$

come atteso dalle congetture di cui abbiamo accennato nella Introduzione.

Il teorema di Damerell vale infatti per tutti i caratteri di Hecke algebrici χ di K di tipo di ∞ dato da interi $(k+j,-j)$ con k un intero positivo e j un intero non negativo. Anche in questo caso si costruisce una parte algebrica $L_{\mathrm{alg}}\big(\chi\big)$ di $L(0,\chi)$. Essa viene definita come combinazione lineare della valutazione di $\delta^j(\mathbb{E}_k)$ in punti di $X(\mathbb{C})$ associati a curve ellittiche con azione di un *ordine* di $\mathcal{O}_K$, ovvero un sottoanello della forma $\mathbb{Z}+c\mathcal{O}_K$ per un certo intero c detto *conduttore* associato al carattere χ. Nel caso semplificato sopra esposto il conduttore risulta banale ($c=1$) e grazie all'ipotesi che $\mathrm{Pic}\mathcal{O}_K=\{1\}$ basta la valutazione nel punto (A_0,α_0)

3.2 Una spiegazione geometrica

In questa sezione daremo un accenno di dimostrazione del fatto che $\delta^j(\mathbb{E}_k)\big(A_0,\alpha_0,\omega_0\big)\in\overline{\mathbb{Q}}$.

Sia $H_{A/X}$ la coomologia di de Rham relativa della curva ellittica generalizzata A relativamente alla curva modulare X. Si tratta di un fascio localmente libero di rango 2 che ammette la filtrazione di Hodge:

$$0\to\omega_A\to H_{A/X}\to\omega_A^{-1}\to 0.$$

Grazie alla Teoria di Hodge su $X(\mathbb{C})$, e dopo aver tensorizzato con il fascio C^∞_X delle funzioni C^∞ su $X(\mathbb{C})$, tale filtrazione ammette uno spezzamento

$$\vartheta^{\mathrm{Hdg}}\colon H_{A/X}\to\omega_A\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathrm{C}^\infty_X.$$

Dato $\tau\in\mathbb{H}$, tale spezzamento proviene dalla identificazione

$$H_{A_\tau/\mathbb{C}}\cong\mathrm{H}^1\big(A_\tau,\mathbb{C}\big)=\omega_{A_\tau}\oplus\overline{\omega}_{A_\tau},$$

della coomologia di de Rham con la coomologia di Betti e dalla decomposizione di quest'ultima nelle parti $\mathrm{H}^{0,1}$ e $\mathrm{H}^{1,0}$ data dalla teoria di Hodge. Tale spezzamento definisce uno spezamento anche sulle potenze simmetriche $\mathrm{Sym}^k\big(H_{A/X}\big)$, con $k\in\mathbb{N}$:

$$\vartheta_k^{\mathrm{Hdg}}\colon\mathrm{Sym}^k\big(H_{A/X}\big)\to\omega_A^k\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathrm{C}^\infty_X.$$

Inoltre abbiamo una connessione, detta di Gauss-Manin:

$$\nabla\colon H_{A/X}\to H_{A/X}\otimes_{\mathcal{O}_X}\omega_A^2.$$

La connessione ha infatti valori in $\Omega_X(\log)$, i differenziali di Kähler di X a poli logaritmici sul luogo di X dove la curva ellittica generalizzata A ha singolarità. Grazie all'isomorfismo di Kodaira-Spencer tale fascio è isomorfo a ω_A^2. Questo isomorfismo permette di identificare, per esempio, le forme modulari di peso intero positivo pari $2k$ e livello Γ con le sezioni di $\Omega_X(\log)^k$. In particolare, ∇ definisce un'applicazione

$$\nabla_k\colon\mathrm{Sym}^k\big(H_{A/X}\big)\to\mathrm{Sym}^k\big(H_{A/X}\big)\otimes_{\mathcal{O}_X}\omega_A^2\subset\mathrm{Sym}^{k+2}\big(H_{A/X}\big),$$

dove l'inclusione utiliza il fatto che $\omega_A^2\subset\mathrm{Sym}^2\big(H_{A/X}\big)$, grazie alla filtrazione di Hodge, e il fatto che abbiamo una contrazione $\mathrm{Sym}^k\big(H_{A/X}\big)\times\mathrm{Sym}^2\big(H_{A/X}\big)\to\mathrm{Sym}^{k+2}\big(H_{A/X}\big)$.

Abbiamo allora il sguente risultato, che offre un'interpretazione geometrica dell'operatore di Shimura-Maass, per la cui dimostrazione rimandiamo a [K3]:

Proposizione 3.2. *Se f è forma modulare analitica di peso k e livello Γ su $\mathbb{C}$ allora*

$$\delta_k^j(f) = \vartheta_{k+2j}^{\mathrm{Hdg}}\left(\nabla_k^j(f)\right),$$

dove $\nabla_k^j := \nabla_{k+2j-2} \circ \cdots \circ \nabla_k$.

Ricordiamo la curva ellittica A_0 su K tale che $A_0(\mathbb{C}) = \mathbb{C}/\mathcal{O}_K$. Allora $H_{A_0/K}$ ha un'azione di K e posso decomporre $H_{A_0/K} = H^{\iota}_{A_0/K} \oplus H^{\bar{\iota}}_{A_0/K}$ come somma di due K-spazi vettoriali di dimensione 1, definiti dalla proprietà che $\mathcal{O}_K$, che agisce tramite endomorfismi di A_0, agisce su $H^{\iota}_{A_0/K}$ tramite l'inclusione $\mathcal{O}_K \subset K$ e agisce su $H^{\bar{\iota}}_{A_0/K}$ tramite l'inclusione $\mathcal{O}_K \subset K$ composta con il coniugio complesso $K \to K$, $z \mapsto \overline{z}$. La decomposizione di Hodge $H_{A_0(\mathbb{C})}$ coincide con la decomposizione in autospazi per l'azione di K testé definita e risulta essere quindi definita su K. Siccome ∇_k è definita algebricamente su $\mathbb{Z}[\Delta^{-1}]$, abbiamo allora dimostrato quanto volevamo:

Corollario 3.3. $L_{\mathrm{alg}}\big(\chi_{k+j,-j}\big) := \delta_k^j(\mathbb{E}_k)\big(A_0, \alpha_0, \omega_0\big) \in \overline{\mathbb{Q}}$.

4 La funzione L p-adica

In questa sezione vogliamo studiare le congruenze dei numeri algebrici $L_{\mathrm{alg}}\big(\chi\big)$, in analogia con i risultati di Clausen-Von Staudt sulle congruenze fra i valori della funzione ζ di Riemann. Come abbiamo visto, questo è legato all'esistenza di una funzione L p-adica che interpoli la parte algebrica dei valori critici $L_{\mathrm{alg}}\big(\chi\big)$ (a meno di una fattore di Eulero). In questo caso i caratteri algebrici di Hecke di conduttore fissato c e tipo di ∞ $(k+j, -j) \in \mathbb{Z}^2$ con k intero positivo e j intero non-negativo, variano in uno spazio p-adico due dimensionale $\widehat{\Sigma}_c$. Gli elementi di $\widehat{\Sigma}_c$ hanno un tipo di ∞ che varia in $\big((\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}_p\big)^2$. Si presentano due casi molto diversi fra loro.

4.1 Caso 1: p spezza in K

In questa sezione supponiamo che $p\mathcal{O}_K$ spezzi come il prodotto $\mathfrak{P}\overline{\mathfrak{P}}$ di due ideali primi distinti. Questo equivale a richiedere che la curva ellittica A_0 abbia riduzione ordinaria, ovvero (A_0, α_0) definisce un punto di $X^{\mathrm{ord}}_{\mathbb{Z}_p}\big(\overline{\mathbb{Z}}_p\big)$. In questo caso, Katz dimostra in [K2] il seguente risultato,

Teorema 4.1. *Esiste una funzione localmente analitica $L_p\big(\chi\big)$ con $\chi \in \widehat{\Sigma}_c$ tale che per χ un carattere di Hecke algebrico di tipo di ∞ $(k+j, -j)$ si ha*

$$L_p\big(\chi\big) := \left(1 - \frac{\mathfrak{P}^{k+j}}{p\overline{\mathfrak{P}}^j}\right)\left(1 - \frac{\mathfrak{P}^j}{\overline{\mathfrak{P}}^{k+j}}\right)\Omega_p^{k+2j} L_{\mathrm{alg}}\big(\chi\big),$$

per un certo periodo p-adico Ω_p.

Il fatto cruciale è un'intepretazione p-adica dell'operatore di Shimura-Mass. Più precisamente, abbiamo visto nella Proposizione 3.2 che lo spezzamento di Hodge $\vartheta_k^{\mathrm{Hdg}}$ nel punto (A_0, α_0) ammette una definizione algebrica. Il punto fondamentale della dimostrazione di Katz è la definizione di uno spezzamento p-adico $\vartheta^{\mathrm{p-adic}}$ su $X^{\mathrm{ord}}_{\mathbb{Z}_p}$ della filtrazione di Hodge che coincide con lo spezzamento algebrico nel punto $(A_0, \alpha_0) \in X^{\mathrm{ord}}_{\mathbb{Z}_p}\big(\overline{\mathbb{Z}}_p\big)$ (per funtorialità rispetto all'azione

di $\mathcal{O}_K$ come endomorfismi di A_0). Tale spezzamento usa la teoria dei cristalli: la coomologia di de Rham $H_{A/X}$ ha un'azione di Frobenius φ sopra $X^{\mathrm{ord}}_{\mathbb{Z}_p}$ e la decomposizione cercata proviene dalla decomposizione in un sottospazio su cui φ agisce come un operatore nilpotente e in un sottospazio su cui φ agisce come un isomorfismo. Segue allora che

Proposizione 4.2. *Se f è forma modulare di peso k e livello Γ, allora*

$$\delta^j_k(f)\big(A_0,\alpha_0,\omega_0\big) = \vartheta^{\mathrm{p-adic}}_{k+2j}\left(\nabla^j_k(f)\right)\big(A_0,\alpha_0,\omega_0\big).$$

A livello di q-espansioni, l'operatore $\Theta^j_k := \vartheta^{\mathrm{p-adic}}_{k+2j}\circ\nabla^j_k$ manda $f(q)=\sum_n a_nq^n$ in $\sum_n n^ja_nq^n$. Vediamo che questa operazione ha senso anche per $j\in\mathbb{Z}_p$ se la q-espansione $f(q)$ è tale che $a_n=0$ se p divide n. Se questo vale, diremo che f è *p-impoverita*. Per le forme modulari p-adiche è possibile definire un'operazione di *p-impoverimento*

$$f\mapsto f^{[p]},\quad f^{[p]}(q)=\sum_{p\nmid n}a_nq^n.$$

Katz dimostra che è possibile definire Θ^j_k per forme modulari di p-adiche p-impoverite e per interi p-adici $j\in\mathbb{Z}_p$.

Scelto ora un generatore p-adico ω_p dei differenziali di A_0, si ha la naturale definizione delle funzione L p-adica cercata, almeno per conduttore banale $c=1$. Dato $\chi\in\widehat{\Sigma}_1$ di tipo di ∞ dato da $\eta\in(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})\times\mathbb{Z}_p$ e $\nu\in(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})\times\mathbb{Z}_p$ poniamo:

$$L_p\big(\chi\big) := \Theta^\nu_\eta\big(\mathbb{E}^{[p]}_\eta\big)\big(A_0,\alpha_0,\omega_p\big).$$

Essa ha la proprietà che per χ un carattere di Hecke algebrico classico coincide con $L_{\mathrm{alg}}\big(\chi\big)$ a meno di moltiplicare per il periodo p-adico Ω^{k+2j}_p definito dalla proprietà che $\omega_p=\Omega_p\omega_0$ e per il fattore di Eulero $\left(1-\frac{\mathfrak{P}^{k+j}}{p\overline{\mathfrak{P}}^j}\right)\left(1-\frac{\mathfrak{P}^j}{\overline{\mathfrak{P}}^{k+j}}\right)$, che misura la differenza fra $\mathbb{E}_k$ ed il suo p-impoverimento $\mathbb{E}^{[p]}_k$.

4.2 Caso 2: p non spezza in K

Insieme a Iovita abbiamo mostrato in [AI1] la seguente generalizzazione del risultato di Katz (Teorema 4.1):

Teorema 4.3. *Assumendo che p^2 divida il conduttore c, esiste una funzione localmente analitica $L_p\big(\chi\big)$ per $\chi\in\widehat{\Sigma}_c$ il cui valore in un carattere di Hecke algebrico classico χ di tipo di ∞ $(k+j,-j)$ risulta essere:*

$$L_p\big(\chi\big) := \Omega^{k+2j}_p L_{\mathrm{alg}}\big(\chi\big).$$

Sia $\chi\in\widehat{\Sigma}_c$ con tipo di ∞ $(\eta+\nu,-\nu)\in\big((\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})\times\mathbb{Z}_p\big)^2$. Le idee principali sono:

- la costruzione di fasci $\mathbb{W}_\varepsilon$ su intorni $X^{\mathrm{ord}}_{\mathbb{Z}_p}\subset X^{(r)}_{\mathbb{Z}_p}$ t.c. per $\varepsilon=k$ ho $\mathrm{Sym}^kH_{A/X}[1/p]|_{X^{\mathrm{ord}}_{\mathbb{Z}_p}}\subset\mathbb{W}_k[1/p]$;
- l'iterazione p-adica della connessione di Gauss-Manin di modo che $\nabla^\nu\big(\mathbb{E}^{[p]}_\eta\big)$ sia estenda ad una sezione $\mathbb{W}_{\eta+2\nu}$ sopra $X^{(r)}_{\mathbb{Z}_p}$;

- la proiezione $\mathrm{pr}_{\eta+2\nu}\colon \mathbb{W}_{\eta+2\nu}|_{(A_i,\alpha_i)} \to \omega^{\eta+2\nu}|_{(A_i,\alpha_i)}$, dove A_i varia fra le curve ellittiche con azione dell'ordine $\mathbb{Z} + c\mathcal{O}_K$, tale che per $\varepsilon = k$ e $\nu = j$ questa sia la proiezione $\mathrm{Sym}^k H_{A_i}[1/p] \to \omega_{A_i}^{k+2j}[1/p]$ definita dalla decomposizione in autospazi rispetto all'azione di K (che agisce tramite endomorfismi di A_i).

Si veda [AI2] per i dettagli sui primi due punti. Osserviamo che nel caso in cui p non spezzi in K il punto $(A_0, \alpha_0) \in X(\overline{\mathbb{Z}}_p)$ NON giace in $X^{\mathrm{ord}}_{\mathbb{Z}_p}$. È questa la ragione per cui dobbiamo lavorare su un intorno $X^{(r)}_{\mathbb{Z}_p}$, con un controllo molto preciso di r. A questo punto si procede come nel caso p spezzato, definendo $L_p\big(\chi\big)$ come la combinazione lineare della valutazione di $\mathrm{pr}_{\eta+2\nu}\left(\nabla^\nu\big(\mathbb{E}^{[p]}_\eta\big)\right)$ nei punti (A_i, α_i). La richiesta che p^2 divida c implica che tali punti giacciono nella regione $X^{(r)}_{\mathbb{Z}_p}$.

4.3 Ulteriori sviluppi: valori speciali di funzioni L p-adiche

Nelle sezioni precedenti ci siamo occupati di funzioni L di campi quadratici immaginari con gruppo delle classi banali. Più in generale gli stessi strumenti permettono di studiare valori critici di funzioni L di caratteri di Hecke di campi quadratici immaginari K e di funzioni L di forme modulari twistate per tali caratteri, in cui la serie di Eisenstein è sostituita da forme modulari più generali. Si veda [BDP] per il caso p spezzato in K e [AI1] per il caso generale.

Un aspetto estremamente interessante, oltre all'introduzione delle funzioni L p-adiche in questi casi, è lo studio dei loro valori speciali. Nel caso affrontato nelle sezioni precedenti si tratta della *formula limite di Kronecker* p-adica. Essa lega i valori della funzione L p-adica in $k = 2$ e $j = -1$, valori che sono al di fuori della regione di interpolazione, con il valore del logaritmo p-adico di unità di Siegel, opportune funzioni meromorfe su $X(\mathbb{C})$, in punti della forma (A_0, α_0). Si veda [K2] per il caso p spezzato in K e [AI1] per il caso generale. L'analogo di tali formule per funzioni L p-adiche di forme modulari twistate per caratteri di Hecke permette di legare i loro valori in $k = 2$ e $j = -1$ con il valore del logaritmo p-adico in punti di Heegner per curve ellittiche modulari con importanti applicazioni allo studio dei punti razionali di queste ultime. Si veda l'articolo [BDP] di Bertolini, Darmon e Prasanna, iniziatori di questo tema di ricerca.

5 Ringraziamenti

L'autore ringrazia il referee per gli utili commenti che hanno contribuito a migliorare l'esposizione. L'autore ringrazia la fondazione Cariplo per il supporto finanziario nell'ambito del progetto *p-adic Mock modular forms*. L'autore dichiara che non sussite alcun conflitto di interessi.

References

[AI1] F. Andreatta, A. Iovita: *Katz type p-adic L-functions for primes p non-split in the* CM *field*, preprint (2019).

[AI2] F. Andreatta, A. Iovita: *Triple product p-adic L-functions associated to finite slope p-adic families of modualr forms*. With an Appendix by E. Urban. To appear in Duke Math. J.

[AIPS] F. Andreatta, A. Iovita, V. Pilloni: *p-adic families of Siegel modular cuspforms*, Annals of Math. **181**, 1–75 (2015).

[AIPH] F. Andreatta, A. Iovita, V. Pilloni: *On overconvergent Hilbert modular cusp forms*, Astérisque **382**, 163–193 (2016).

[ICM18] F. Andreatta, A. Iovita, V. Pilloni: *p-Adic variation of automorphic sheaves.* Proceedings of the ICM 2018.

[BDP] M. Bertolini, H. Darmon, K. Prasanna: *Generalized Heegner cycles and p-adic Rankin L-series*, Duke Math. Journal **162**, 1033–1148 (2013).

[Co] R. Coleman: *p-Adic Banach spaces and families of modular forms.* Invent. Math. **127** (1997), 417–479.

[C-M] R. Coleman, B. Mazur: *The eigencurve*, In *Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **254** (1998), 1–113. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[K1] N. Katz: *P-adic properties of modular schemes and modular forms*, In "Modular functions of one variable III" LNM **350**, 69–190, Springer, Berlin, 1973.

[K2] N. Katz: *p-adic Interpolation of Real Analytic Eisenstein Series*, Annals of Math. **104**, 459–571 (1976).

[K3] N. Katz: *p-Adic L-functions for CM-fields*, Invent. Math. **49**, 199–297 (1978).

[KM] N. Katz, B. Mazur: *Arithmetic Moduli Of Elliptic Curves*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1985.

[S1] J.-P. Serre: *Formes modulaires et fonctions ζ p-adiques*, in "Modular functions of one variable, III", LNM **350**, 191–268 (1973),

[S2] J.-P. Serre: *A Course in Arithmetic*. GTM **350**, Springer-Verlag, New York, 1973.