Il terzo escluso: genesi e critiche di un principio

di Miriam Franchella

Copyright Edizioni dell'Arco
via Meravigli, 18
20123 Milano
Prima edizione: ottobre 1995

PREFAZIONE

Il principio del terzo escluso, considerato in riferimento ad un sistema formale, viene inteso a livello di linguaggio oggetto come l'asserto "$P(x) \vee \neg P(x)$" e a livello di metalinguaggio come l'asserto "è vero P o è falso P". Quando comparve per la prima volta, in Aristotele, esso non presentava ancora questa sue forme chiaramente delineate: da un lato esso venne espresso assieme al principio di non contraddizione (senza che né l'uno né l'altro ricevessero un nome); dall'altro i suoi due stessi livelli non venivano distinti. Tuttavia, pur in questa situazione iniziale ancora magmatica, esso suscitò subito perplessità e critiche, che si concretizzarono nel capitolo 9 del Περὶ ἑρμενείας. Genesi e critica del terzo escluso, quindi, si intrecciarono fin dall'inizio, e ad ogni nuova genesi del principio, ossia ad ogni rilettura che di esso veniva data all'interno di un nuovo sistema formale, questa situazione si ripeté, associando alla genesi il ripensamento e poi la critica del principio.

È una storia affascinante che attraversa tutti i secoli e che ha conosciuto una splendida fioritura in quest'ultimo. È una storia che suscita e tocca tutta una varietà di problematiche filosofiche. Perciò ho deciso di esporla nei suoi nodi focali in questo volume, realizzando un desiderio che avevo nel cuore da anni.

Per amore di chiarezza, ho ritenuto necessario, seguendo una tradizione abbastanza consolidata[1], mantenere tra le due

[1] Si vedano, tra gli altri, Zinov'ev (1963), Rescher (1969) e Usberti (1980).

espressioni la distinzione di livelli linguistici, in modo da non confondere le tematiche toccate dall'una piuttosto che dall'altra.

Nella letteratura spesso si trova il termine "bivalenza" come sinonimo per "terzo escluso": io conserverò il termine "terzo escluso" – d'ora in poi "TE"– per indicare l'espressione nel linguaggio oggetto, cioè "$P(x) \vee \neg P(x)$", e userò, invece, "bivalenza" per quella nel metalinguaggio, cioè "è vero P o è falso P".

Il volume si articola lungo questa duplice scansione: una prima parte riguarda le problematiche connesse con l'accettazione del TE ed una seconda riguarda quelle connesse con l'accettazione della bivalenza come leggi logiche[2].

Lo dedico a mia figlia, che dovrebbe venire alla luce contemporaneamente ad esso. Lei ha vissuto con me tutte le tappe di preparazione del volume. Chissà se ha potuto godere con me della mia gioia di lavorare a qualcosa che appassiona ...

---

[2] Preciso che in tutte le citazioni di testi che hanno un'edizione italiana il riferimento delle pagine che farò sarà a quest'ultima.

PRIMA PARTE

INTRODUZIONE

Il TE fa la sua prima comparsa nella storia all'interno della trattazione logica di Aristotele. Analogamente agli altri due princìpi - di identità e di non-contraddizione -, esso non riceve una denominazione a se stante, né viene chiaramente individuato rispetto agli altri due. Infatti, il principio di identità (o, meglio, quello che poi verrà chiamato così) viene accennato solo di sfuggita[3] e come principio che concerne una caratteristica dell'essere, e non anche del pensiero; gli altri due princìpi[4], invece, vengono presentati come inerenti sia l'essere che il pensiero, e vengono espressi per così dire conglobati nel principio di non contraddizione nel libro Γ della *Metafisica*:
"Poniamo che A indichi 'essere bene'; che B indichi 'non essere bene'... Senza dubbio, a qualsivoglia oggetto apparterrà o A, oppure B, e d'altra parte, in nessun caso A e B apparterranno a un medesimo oggetto".

In alcuni passi, però, Aristotele concentra l'attenzione su una parte (cioè su un principio) piuttosto che sull'altra, esprimendole, quindi, separatamente. In particolare, dedica il

[3] Bochenski (1956, 86).

[4] Welding (1984) sostiene che sarebbe più opportuno non usare il termine "princìpi" a proposito di queste espressioni di Aristotele, in quanto esse sono finalizzate a chiarire piuttosto due aspetti caratterizzanti le proposizioni contraddittorie (non possono essere né entrambe vere né entrambe false), cioè sono finalizzate a definire queste ultime.

capitolo 8 del libro Γ a difendere l'espressione che noi oggi chiamiamo del TE[5]:

"È necessario che una parte della contraddizione sia vera; inoltre, se è necessario, nei confronti di qualsivoglia cosa, affermarla oppure negarla, è impossibile che entrambe siano in pari tempo false".

Mancando la distinzione fra linguaggio e metalinguaggio, sembra difficile che ci potesse essere una distinzione consapevole fra le formulazioni dei vari princìpi nei due livelli, in particolare fra TE e bivalenza. Tuttavia su ciò alcuni autori discordano. Ad esempio, J. Bochenski[6], riferendosi alle seguenti formulazioni del principio di non-contraddizione:

"Lo stesso attributo non può contemporaneamente appartenere e non appartenere allo stesso soggetto dallo stesso punto di vista"

"È impossibile che enunciati contraddittori siano contemporaneamente veri"

"È impossibile affermare e negare contemporaneamente secondo verità"

afferma:

"Le prime due di queste formule appartengono al linguaggio oggetto, le ultime due al metalinguaggio, e l'autore è evidentemente consapevole della differenza."

---

[5] Secondo Viano (1955, 33) il TE rappresenta in Aristotele la base per costruire un linguaggio perfetto, che esprime l'essere "nella sua purezza e nella sua necessità più rigorosa", scartando ciò che sta di mezzo tra affermazione e negazione. Viano sottolinea che il principio di non-contraddizione era già presente negli eleati, e in suo nome Parmenide aveva condannato il linguaggio. Ad Aristotele, quindi, il TE avrebbe permesso di riabilitare il linguaggio correggendo le conseguenze del solo principio di non-contraddizione.

[6] Bochenski (1956, 86).

Successivamente, la prima interpretazione del capitolo 9 del Περι,` ε,'ρμενει,'ας di Aristotele (che tratteremo nella seconda parte di questo volume) concentrò l'attenzione su quell'enunciato (che alternativamente venne poi considerato o del TE o della bivalenza), isolandolo, così, dagli altri due, pur senza denominarlo. Collegato a questa problematica, il principio rimase individuato durante tutto il medioevo e agli inizi dell'età moderna.

È difficile datare con esattezza il momento in cui i tre princìpi ricevettero un nome. Nella *Monadologia* Leibniz già parla del principio di contraddizione, mentre, per quanto riguarda il principio del terzo escluso, Abbagnano[7] suggerisce la *Metafisica* di Baumgarten come punto iniziale (Leibniz solo cita l'espressione del terzo escluso nei *Nouveaux Essais* IV 2,1, ma non le dà un nome specifico). In essa, in effetti, (§ 7-10), Baumgarten precisa che: "0=A+nonA. Questa proposizione è detta principio di contraddizione e assolutamente primo" e "Tutto il possibile o è A o non A. Questa proposizione è detta principio del terzo (ossia del medio, tra due contraddittori) escluso". Nel XX secolo, poi, con la distinzione fra linguaggio oggetto e metalinguaggio, si precisa in modo chiaro la distinzione fra terzo escluso e bivalenza e, d'altro canto, hanno luogo le critiche a entrambe queste sue forme.

Nella prima parte del presente volume mi dedicherò all'analisi delle problematiche connesse con la questione dell'accettazione o del rifiuto come legge logica del principio del terzo escluso[8] (TE) considerato a livello di linguaggio oggetto. Poiché

---

[7] Abbagnano (1971, 873).

[8] A proposito dei tre princìpi della logica classica, Largeault (1994, 306), ricordando che nei paesi sovietici essi furono ad un certo punto condannati come prodotto della borghesia, nota come sia ovvio "secondo il buon senso"

si tratta di un livello sintattico, le problematiche saranno connesse con l'accettazione o meno dell'espressione "$P(x) \vee \neg P(x)$" come schema d'assiomi. Per individuarle, bisogna vedere a che cosa è dovuta innanzitutto tale accettazione (o rifiuto): evidentemente essa dipende dalla lettura che viene compiuta in ogni sistema dei simboli di cui è costituito il TE. È plausibile – e vedremo che così è di fatto – che vi siano due filoni di lettura: uno secondo la teoria della verità che sta dietro al sistema e l'altro secondo i motivi che hanno portato alla costruzione di quella certa logica. Questa prima parte avrà un primo capitolo che si occuperà del primo caso, considerando la logica classica e quella intuizionista, ed un secondo capitolo che si occuperà della seconda possibilità, considerando le logiche polivalenti. Tuttavia, anche nell'ambito di una lettura classica del TE possono intervenire ugualmente motivi per una discussione sulla sua accettabilità: in particolare l'esistenza dei paradossi. Ad essi verrà dedicato un capitolo a parte: il terzo.

---

che essi siano un prodotto della società e non siano qualcosa di assoluto e constata come attualmente essi non giochino un ruolo di primo piano nei vari sistemi di logica, ma "dimorino impliciti e silenziosi dietro lo sviluppo delle tecniche". Tra questi princìpi, solo quello del terzo escluso fa ancora parlare di sé: "Il terzo escluso è più creativo e selettivo; si è imparato che ci possono essere dei buoni motivi per lasciarlo cadere". Insomma, il terzo escluso è ancora importante, perché si mette in discussione la sua validità.

I. L'INTUIZIONISMO

Questo capitolo si articola nella presentazione della teoria classica della verità, della sua lettura del TE e della conseguente accettazione di tale principio come schema d'assiomi; poi della teoria intuizionista della verità, della sua lettura del TE, del conseguente rifiuto di tale principio come schema d'assiomi e di ciò che questo fatto comporta.

1. Teorie della verità e lettura del TE

Consideriamo in primo luogo la teoria classica della verità. La verità viene generalmente espressa come corrispondenza con qualcosa che esiste indipendentemente dal nostro riconoscimento e dalla nostra volontà e ha efficacia oggettiva ed eterna. È chiaro il motivo per cui questa teoria viene definita realista-aristotelico-platonica: realista, perché presuppone una corrispondenza con la realtà, aristotelico-platonica, perché questa realtà è vista come "essere" eterno e oggettivo.

In base alla suddetta teoria, i connettivi presenti nel TE, cioè la disgiunzione ("oppure") e la negazione ("non"), vanno intesi nel modo seguente: la disgiunzione come "aut" (netta opposizione, non alternativa di e/o, che andrebbe contro il principio di non-contraddizione) e la negazione come contraddittorietà, cioè reciprocamente esclusiva ed esaustiva rispetto all'affermazione (scarta l'affermazione, e la loro estensione copre l'intero universo del discorso).

Il TE è, quindi, letto come "per ogni proprietà si può dire che un ente ne gode oppure che non ne gode". Posta l'avvertenza che la proprietà deve essere accuratamente precisata[9], il TE è accettato come schema d'assiomi perché non si richiede che si sappia quale delle due possibilità vale nei casi specifici per dire che la sua espressione è sempre vera, ma si richiede solo che lo stato di cose stia realmente così. E in effetti ogni cosa deve rientrare nel campo d'affermazione di una proprietà data o in quello della sua negazione, dal momento che i due campi esauriscono l'intero universo.

La logica intuizionista assume, invece, che la verità, per essere tale, debba essere sperimentata introspettivamente, "vista" intellettualmente: il vero non è qualcosa che esiste eternamente e indipendentemente da noi, né è creato liberamente, fatto e disfatto a nostro piacimento, ma è qualcosa che viene ad essere non appena è riconosciuto come evidenza dall'intelletto[10]. Questa teoria della verità conserva della teoria realista la caratteristica che qualcosa è vero solo se c'è qualcos'altro in virtù del quale è vero, ma pretende che questo qualcosa, perché se ne possa affermare l'esistenza, sia riconoscibile dal nostro intelletto[11]. Non arriva all'idealismo,

---

[9] V. nota 105.

[10] Si vede chiaramente da questo l'inconsistenza dell'obiezione di Charles Baylis (1936) secondo il quale la teoria intuizionista della verità comporterebbe solo un cambiamento terminologico.

Una simile obiezione varrebbe se:

a) gli intuizionisti non si proponessero dichiaratamente di dare una visione alternativa della verità;

b) nel loro linguaggio un'altra parola assumesse il significato che "verità" aveva classicamente;

c) nella loro teoria, l'atteggiamento corrispondentista avesse ancora il ruolo classico in ambito gnoseologico, di fondazione della matematica, ecc. Ma tutto ciò, come ho appena illustrato, non è.

[11] Dummett (1959: 110-111).

ovvero all'asserzione del nostro assoluto e libero potere di creare mentalmente questi enti: limita il nostro potere al riconoscimento intellettuale della verità.

La posizione intuizionista è motivata in due modi diversi dai suoi autori:

1) Luitzen Egbertus Jan Brouwer, il suo fondatore, partiva dichiaratamente da una *Weltanschauung* mistica[12] che indicava nel mondo dell'interiorità la fonte di felicità per l'uomo, mettendo in rilievo come i tentativi di cercare qualcosa fuori dal Sé non abbiano mai fine e siano, quindi, non appaganti. Le fasi di quest'uscita - che costituiscono la "caduta" dell'uomo - sono: la percezione - per mezzo dell'inquadramento (spazio)-temporale[13], il dominio sulla natura - per mezzo della scienza -, il dominio sugli esseri umani - per mezzo del linguaggio. L'uomo, finché resta imprigionato nel corpo, continua perlomeno a percepire e, quindi, non può raggiungere completamente e definitivamente l'interiorità. Deve, però mirare ad essa il più possibile, cercando di trattenersi dalle forme di dominio.

Anche la matematica, in quanto scienza (perché ha scopi applicativi) e linguaggio (perché è calcolo), è un esempio di uscita dal Sé: per questo motivo Brouwer s'impegnò a cercare di ridelinearla come moralmente positiva. Le condizioni basilari perché ciò si realizzasse erano che la matematica si sviluppasse interiormente e senza intenti applicativi. Occorreva allora innanzitutto cercare qualcosa di interiore da cui la matematica potesse partire e poi fornire una teoria dell'esistenza e della verità

---

[12] V. Brouwer (1905) e (1907).

[13] L'intuizione spaziale, presente nel testo del 1905 *Leven, kunst en mystiek*, scompare poi definitivamente da quelli successivi con la motivazione che l'esistenza delle geometrie non-euclidee non poteva permettere l'affermazione dell'assolutezza dell'inquadramento spaziale.

matematica che fosse coerente con quest'ottica. Ispirato dal Kant della *Critica della Ragion Pura*, ritenne che come punto di partenza per la matematica fosse plausibilmente ipotizzabile l'"intuizione temporale": lo schema del tempo, ovvero la possibilità (intrinseca all'uomo) di isolare l'istante, conservarlo nella memoria, isolare da questo un altro istante, conservarli nella memoria, ecc., garantiva la possibilità di produrre i numeri naturali (e perciò venne da Brouwer anche chiamato "intuizione della duo-unità"). Per sviluppare, poi, la matematica in modo "interiore", non si poteva più far riferimento a una teoria dell'esistenza degli enti matematici indipendente dall'uomo, e a una teoria della verità classica, come corrispondenza con qualcosa di esterno, indipendente dal riconoscimento umano: Brouwer trovò più appropriate una teoria degli enti matematici che consenta di affermarli esistenti solo se si è in grado di costruirli mentalmente, e una teoria della verità come esperienza interiore di evidenza mentale.

In quanto attività interiore, la matematica è alinguistica: il linguaggio può servire per comunicare i risultati o per richiamarli alla memoria, ma non per ottenerli. Inoltre, per la natura stessa del linguaggio come strumento per piegare la volontà dell'interlocutore, nulla può mai garantire il raggiungimento dello scopo. Anche nel caso del discorso che mira a comunicare risultati scientifici e, quindi, a indurre l'interlocutore a edificare una costruzione mentale analoga a quella del parlante, nulla - e in particolare nessun linguaggio, neppure quello simbolico - può assicurare la riuscita della comunicazione. Il linguaggio, pertanto, oltre a non contribuire alla produzione della matematica,

neppure dà certezza per quanto riguarda la trasmissione dei risultati matematici[14].

2) Arend Heyting, allievo di Brouwer, intuizionista della seconda generazione, si impegnò nella divulgazione dell'intuizionismo in un periodo di particolare tensione tra i formalisti e gli intuizionisti (culminata, nel 1928, con l'espulsione di Brouwer dalla redazione della rivista *Mathematische Annalen*, dietro pressione di Hilbert[15]). Deciso alla mediazione, convinto com'era della necessità e utilità della cooperazione fra matematici, cercò di mostrare come gli aspetti del pensiero di Brouwer che potevano apparire più strani e poco accattivanti agli occhi del matematico medio non entrassero nel nucleo essenziale dell'intuizionismo. Perciò affermò chiaramente che il nucleo dell'intuizionismo è l'"intuizione", intesa come capacità di "distinguere" (quindi di tenere separati i concetti)[16]. La concezione brouweriana della verità si poteva basare su questa capacità, che è intrinseca ad ogni uomo e che, quindi, può come tale essere accettata da tutti, senza comportare l'accettazione di alcuna metafisica. Anche l'accettazione della duo-unità poteva essere dissociata dalla sua origine kantiana, peraltro dubbia[17], proprio perché il suo concetto consiste nella capacità di isolare sensazioni, e questa capacità è intrinseca e

[14] Per un'analisi del ruolo del linguaggio nel pensiero di Brouwer, si legga van Dalen (1991).

[15] Per un resoconto dettagliato della vicenda, si veda van Dalen (1990).

[16] Heyting (1935, 14).

[17] La questione dell'adeguatezza dell'intuizione della duo-unità rispetto al pensiero kantiano è stata discussa parecchio nella letteratura. Già il *supervisor* della tesi di dottorato di Brouwer, K.J. Korteweg, gli aveva espresso dubbi sulla sua corretta lettura di Kant. Per approfondire il problema, si vedano van Stigt (1971, 85; 1990, 127-128, 168) e Franchella (1994b, 43-45).

riscontrabile in ogni uomo. Per accettarla e lavorare in base ad essa, non occorre fare della "metafisica", cioè chiedersi donde tale concezione venga, come si formi, ma basta sapere che è disponibile.

Per quanto lo riguarda personalmente, Heyting dice di credere, come tutti i matematici, nell'esistenza di verità (matematiche) eterne, ma di bandirne del tutto il concetto di fronte al dato di fatto dell'impossibilità di definire precisamente il senso di queste parole, altrimenti introdurrebbe della "metafisica" nella matematica[18]. Come si vede, secondo Heyting la metafisica non è necessaria all'intuizionismo, ma, anzi, sarebbe annidata nella concezione classica della verità. La *Weltanschauung* da cui Brouwer era partito andava piuttosto intesa come una teoria dei valori[19] che non occorreva per fare matematica in modo intuizionista, ma solo, eventualmente, per preferire questa matematica a quella classica.

Ci soffermeremo, poi, nel seguito sulla sua concezione del ruolo del linguaggio, che si è evoluta nel corso degli anni: per ora basti notare che già nell'idea di una necessità di cooperazione fra i matematici si vede un atteggiamento di fondo diverso da quello di Brouwer.

La verità così delineata per entrambi gli autori è "vista intellettualmente", ma non con un'unica intuizione senza mediazioni. Si parte da verità matematiche più semplici per giungere a verità più complesse: si comincia con alcuni oggetti matematici (ottenuti estraendo le potenzialità contenute nella duo-unità); si passa a costruire con essi strutture; si mettono in luce relazioni degli oggetti con alcune componenti delle strutture (verità

[18] Heyting (1956a, 3).
[19] Heyting (1968, 312).

iniziali) e si procede enucleando le relazioni con altre componenti. In particolare, per quanto riguarda gli enti matematici, Brouwer ritiene che la duo-unità, oltre a fondare i numeri naturali, fondi anche la nozione di continuo e di specie. Infatti, da un lato, la duo-unità contiene l'idea di (ovvero la possibilità di) isolare un'unità, conservarla nella memoria, ricavare da essa un'ulteriore unità, conservare entrambe nella memoria, ecc., idea che fonda i numeri naturali. D'altro lato, la duo-unità contiene l'idea dell'infinita scindibilità, che può essere rappresentata sotto forma di albero che cresce indefinitamente per successive biforcazioni. Se si associa ad ogni nodo (cioè ad ogni punto di biforcazione) il numero 0 o il numero 1, si vede subito che l'albero esprime tutti i numeri reali sotto forma di notazione binaria (a ogni ramo corrisponde un numero reale[20]). Questa rappresentazione rispecchia il caso della costruzione tramite frazioni duali, ma è chiaro che è possibile impostarne altre variando il numero delle ramificazioni e i termini da attribuire ad ogni nodo (ponendo, ad esempio, numeri razionali). Quindi, la duo-unità contiene anche la possibilità di generare il continuo, cioè tutti i numeri reali, come successioni illimitate, i cui termini sono scelti a partire dagli enti matematici già acquisiti in precedenza, con una quantità di libertà che può variare anche all'interno del medesimo procedimento di formazione della successione[21]. Infine, sempre la duo-unità contiene

[20] Questa rappresentazione ad albero venne denominata da Brouwer *spiegamento* (*spread*).
[21] Libertà, espressa così genericamente, permette tutto e, quindi, può anche permettere una sua progressiva restrizione e una restrizione della restrizione. Brouwer ebbe numerosi ripensamenti sull'argomento, ma dalle *Cambridge Lectures* in poi mantenne un'opinione definitiva, sostendo che l'ammissione di restrizioni di libertà delle future restrizioni di libertà, ecc. fosse superflua e comportasse inutili complicazioni. (Brouwer 1981, 36) Ad Arend Heyting, come

l'idea di "insieme", nel senso di proprietà attribuibili a enti matematici che già si possiedono (per quest'ultima caratteristica si differenziano dagli insiemi classici: perciò Brouwer li ribattezza "specie").

Il potere generativo appena descritto è in piena sintonia col contesto né realista né idealista dell'intuizionismo: non è un atto realista perché non constata una realtà già esistente, ma la costruisce; non è un atto idealista perché in entrambi i casi parte da enti matematici già esistenti e nel secondo caso richiede anche l'effettiva appartenenza degli elementi alla specie.

Le costruzioni mentali pongono una grossa problematica sulla possibilità di una loro definizione precisa: la considererò a fine capitolo. Per ora è interessante concentrarsi sulla loro caratteristica essenziale: la non-standardizzazione. Si può, infatti, dire che sono illimitatamente inventabili non solo per il fatto psicologico che i nostri poteri creativi superano quelli della comprensione, ma perché i metodi di prova sono infinitamente esten-sibili. Usando le parole di Heyting[22]: "È in sé assurdo volere limitare la possibilità del pensiero nel quadro di principi di costruzione fissati in anticipo. Ci si deve limitare a suscitare nell'uditore l'attitudine di spirito matematico per mezzo di considerazioni più o meno vaghe".

Il fatto che non esistano più schemi fissi comporta: 1) che la logica non possa più prestare i suoi; 2) che la formalizzazione non valga più come tale; 3) che i simboli logici vadano sempre ridefiniti[23].

---

vedremo nel seguito, la nozione di successione di libera scelta non risulterà comunque mai del tutto convincente.

22 Heyting (1934, 14).

23 Sulla logica in Brouwer e Heyting si legga Troelstra (1983).

La matematica non si svolge più utilizzando gli schemi, le leggi della logica, non è più un'applicazione della logica, non dipende da essa ma, anzi, è la logica stessa ad essere uno speciale tipo di ragionamento matematico: quello limitato alle relazioni intero/parte.

Tale posizione può condurre all'affermazione solipsistica che, quando si tenta di trasmettere ad altri o di ricordare a se stessi l'esperienza interiore della verità tramite il linguaggio, esso riesce ad esprimerla – come nel caso di tutte le esperienze interiori – lasciando un certo margine di equivoco, perfino se si usa un linguaggio logico-formale.

Comunque, anche se non si arriva fino a questa conclusione, rimane pur sempre essenziale che l'espressione formale delle prove non ha valore in quanto deduzione formale, ma in quanto si riferisce al significato dei suoi segni, alla loro costruzione mentale, in quanto rimanda all'esperienza introspettiva e rispecchia una prova già avvenuta mentalmente (o. almeno, a una prova mentale possibile). Di qui la conseguenza che le costanti logiche indicano cosa conta come prova delle proposizioni in cui esse compaiono, posto che noi siamo in grado di riconoscere le prove delle loro componenti atomiche perché ci sono evidenti all'intelletto. Quest'ultima presupposizione, data la non specificabilità di ciò che si intende per prova, fa sì che le spiegazioni delle costanti siano soltanto degli abbozzi da reinterpretare di continuo, man mano che si conoscono nuovi metodi di prova.

Fatte queste premesse, si possono considerare, per avvicinarsi allo scopo d'interpretare il TE, i vari connettivi nel loro significato[24]:

---

24 Heyting (1956, 98).

1) la disgiunzione "$P(x) \vee Q(x)$" è caratterizzata come avere la prova di P o avere la prova di Q;
2) la congiunzione "$P(x) \wedge Q(x)$" è caratterizzata come avere la prova sia P sia di Q;
3) l'implicazione "$P(x) \rightarrow Q(x)$" è caratterizzata come una costruzione che trasforma una qualunque prova di P in una prova di Q;
4) la negazione "$\neg P(x)$" è caratterizzata come una costruzione che trasforma una qualunque prova di P in una contraddizione[25].

Il problema che parrebbe presentarsi con la negazione definita in termini di se stessa – perché "contraddizione" è un'espressione "$P(x) \wedge \neg P(x)$" – è risolubile vedendo la negazione come caso dell'implicazione. Infatti la si può intendere come equivalente a "$P(x) \rightarrow 0=1$", ammettendo o stipulando che $0=1$ sia contraddittorio in quanto una sua prova porterebbe alla prova di qualunque altra espressione, contro l'evidenza dell'esperienza mentale.

Ora è possibile affrontare la lettura intuizionista del TE: esso risulta affermare che "per ogni proprietà è provato che un ente ne gode o che il fatto che un ente ne goda porterebbe a una contraddizione", proprio perché la negazione è interpretata in senso forte (cioè come portare a contraddizione, come *prova dell'assurdità*, *non* come *mancanza* di prova) e, quindi, contraria e non contraddittoria all'affermazione.

[25] I quantificatori sono caratterizzati come segue:
$\forall x P(x)$: metodo di costruzione di $P(a)$ per ogni elemento a della specie su cui x varia;
$\exists x P(x)$: è effettivamente costruito un a tale che $P(a)$ è provato.

2. La critica intuizionista al TE come schema d'assiomi.

La lettura intuizionista del TE comporta la sua questionabilità come schema d'assiomi perché significherebbe l'ammissione della solubilità (anche se non addirittura della soluzione) di ogni quesito, e la cosa diventa difficoltosa quando ci si imbatte in asserti su domini infiniti o in numeri infiniti di asserti. Brouwer ha distinto le due possibilità perché, anche se un'applicazione del TE a un dominio infinito può essere tradotta nella sua applicazione ad un numero infinito di asserti (tutti uguali salvo nell'ente cui si riferiscono), l'applicazione del TE ad un numero infinito di asserti può consistere anche nella congiunzione di esemplificazioni del TE l'una diversa dall'altra. Ad esempio, "Raz $(x) \vee$ Irraz (x)" può essere sia l'applicazione del TE ad un dominio infinito sia l'applicazione ad un numero infinito di asserti, mentre "Raz(3) $\vee$ Irraz(3) $\wedge$ Primo (3) $\vee$ $\neg$Primo (3) $\wedge$..." così via con un elenco infinito di proprietà sul medesimo numero può solo essere un'ap-plicazione del TE ad un numero infinito di asserti. Si può dire che nel primo caso si tratta di una compressione a livello enunciativo di un'espressione logica del primo ordine e che nel secondo caso si tratta di una compressione sempre a livello enunciativo di un'espressione logica del secondo ordine.

È opportuno, quindi, soffermarsi sulla questione, distinguendo i due casi di applicazione del TE:
1) a domini finiti/infiniti;
2) a un solo asserto/ a un numero finito di asserti / a un numero infinito di asserti.

1) nel caso di domini finiti il TE vale sempre, perché in essi una costruzione può essere tentata solo in un numero finito di modi e

ogni tentativo può essere portato a compimento oppure essere continuato finché ogni ulteriore progresso sia impossibile, per cui in essi per ogni proprietà si dà una prova che un ente ne gode oppure che il goderne porta a contraddizione. Così ogni problema è solubile.

Nel caso di domini infiniti, invece, abbiamo immediatamente due esempi di non validità del TE, tratti dallo storico problemi dell'espressione decimale di π.[26] Finora, infatti, non si è riusciti a provare che in essa occorra una cifra un maggior numero di volte delle altre, né a provare che non vi occorra, e non si è riusciti a provare che vi occorra la sequenza 0123456789, né a provare che non vi occorra; perciò non valgono i due asserti particolari del TE: a) è provato che nell'espressione decimale di π una cifra occorra un maggior numero di volte delle altre, o è provato che questa occorrenza porterebbe a una contraddizione; b) è provato che nell'espressione decimale di π occorra la sequenza 0123456789, o è provato che questa occorrenza porterebbe a una contraddizione.

2) Nel caso di un singolo asserto α, l'enunciazione del TE è non contraddittoria, perché, se fosse contraddittoria, cioè se valesse $\neg(A \vee \neg A)$, svolgendo le parentesi si avrebbe $\neg A \wedge \neg\neg A$, che è una contraddizione.

Anche nel caso di un numero finito di asserti, l'enunciato del TE risulta non-contraddittorio: la non-contraddittorietà è finitamente additiva, cioè, se vale per ciascun membro di una congiunzione, vale anche per quest'ultima. Infatti, dato $C \equiv A \wedge B$, C potrebbe essere falso, cioè contraddittorio, solo se (almeno) A o B lo fosse. Nel caso del TE, però, abbiamo già visto che un

[26] Brouwer (1908: CW I, 110).

suo singolo asserto è non-contraddittorio, quindi sia A sia B sono non-contraddittori, rendendo tale l'intera congiunzione.

Nel caso di un numero infinito di asserti di TE Brouwer dà addirittura una dimostrazione di contraddittorietà, ricavandola dal teorema (intuizionista) di continuità delle funzioni[27]. In base ad esso, infatti, il continuo non può scindersi in due sottospecie proprie disgiunte non vuote. Il TE come schema d'assiomi è contraddittorio perché esiste almeno uno proprietà la cui decidibilità, se riferita a tutto il continuo, è contraddittoria (cioè è contraddittorio il TE riferito ad esso). La proprietà è la razionalità dei numeri reali: la sua decidibilità comporterebbe la scissione del continuo nelle due sottospecie dei numeri razionali e di quelli irrazionali, contraddicendo, appunto, il teorema[28].

Si noti, comunque, che se il TE è contraddittorio, ciò non comporta che valga una sorta di "terzo incluso", ovvero che si possa negare $A \vee \neg A$ perché ciò è già stato dimostrato contraddittorio nel punto 2).

Va inoltre precisato che nelle sue opere Brouwer tese a sottolineare maggiormente gli esempi di sospensione di validità piuttosto che di contraddittorietà del TE, probabilmente per la minore complessità espositiva e, quindi, immediatezza che essi presentano.

La cessazione della validità del TE, rispetto alla sua precedente accettazione classica, è considerata da Brouwer come una "rivoluzione copernicana": il TE (come l'affermazione che

[27] Brouwer (1928: CW I, 413).

[28] Forse il discorso risulta più chiaro se si considera il TE espresso, seguendo Barnes (1969) e Lear (1980) in un linguaggio del secondo ordine: $\forall P \forall x(P(x) \vee \neg P(x))$. È questa espressione ad essere contraddittoria, cioè: $\neg\forall P \forall x(P(x) \vee \neg P(x))$, *non* $\forall P \forall x \neg(P(x) \vee \neg P(x))$.

la terra è al centro dell'universo) sarebbe stato accettato finora perché, entro un ambito di enti matematici dato arbitrariamente, è facile riconoscere la sua non-contraddittorietà per un singolo asserto e, studiando anche un vasto gruppo di semplici fenomeni quotidiani del mondo esterno, non si è mai scoperto che un'attenta applicazione della logica classica portasse ad un errore[29].

3. *La centralità della critica al TE nell'intuizionismo*

Brouwer pose molta enfasi sul rifiuto intuizionista del TE: lo rimarcò di continuo e intitolò una serie di articoli "Fondazione della matematica senza il principio del terzo escluso"[30]. Alcuni autori, tuttavia, negano un autentico ruolo chiave al TE nella produzione brouweriana: in particolare, Michael Detlefsen spiega[31] che, a ben riflettere, alla critica al TE va attribuita minore importanza di quel che sembrerebbe a prima vista. Secondo lui, infatti, Brouwer in generale criticò le leggi logiche classiche per due motivi: la logica classica è non valida (perché contiene il TE, che non vale) e incompleta (non può dimostrare il teorema di continuità delle funzioni). Ora, per Detlefsen solo il secondo motivo è utile per minare gli argomenti tradizionali a supporto della logica classica: si deve usare quella intuizionista, altrimenti l'esperienza matematica non sarebbe sufficientemente ampia (alcuni teoremi andrebbero persi). Quindi, il TE, che è coinvolto dal primo punto, non sarebbe tanto importante.

In realtà, il TE è il perno su cui si basa la non-validità di alcune (altre) leggi, proprietà e teoremi classici. Infatti, la caduta del TE dà luogo direttamente alla caduta del "principio di reci-

[29] Brouwer (1955: CW I, 551; 1981, 31-32).

[30] Brouwer (1918 e 1919).

[31] Detlefsen (1990, 519-520).

procità della complementarità" $\neg\neg A \rightarrow A$, che classicamente gli equivale, e alla necessità di sfumare la nozione di differenziabilità. Inoltre, ha come conseguenza la non-validità di: $\forall P(\forall x(P(x) \vee \neg P(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \vee \forall x \neg P(x)))$. Brouwer chiamò le proprietà P che invalidano quest'ultima implicazione *proprietà sfuggenti*, definendole (a partire dal 1948) come proprietà f che soddisfano i seguenti requisiti:

1) per ogni numero naturale n si può decidere se possiede o no la proprietà f;
2) non si conosce alcun metodo per calcolare un numero n che possiede f;
3) l'ipotesi che almeno un numero naturale n possieda f non è dimostrata contraddittoria.

Sono queste a determinare, poi, a loro volta, la non-validità di proprietà e teoremi classici.

a. Il principio di reciprocità della complementarità

Classicamente il "principio di reciprocità della complementarità" ($\neg\neg A \rightarrow A$) è equivalente al TE ed è il cardine della dimostrazione per assurdo. Infatti la dimostrazione per assurdo giunge a dimostrare una formula A: 1) facendo vedere che dalla negazione di A si giunge a una contraddizione, cioè passando da $\neg A$ a $\neg\neg A$; 2) ricavando A da $\neg\neg A$ tramite, appunto, la legge $\neg\neg A \rightarrow A$[32].

Vedremo in un paragrafo a se stante che Brouwer mette in luce il fatto che questo principio non è equivalente al TE. Qui consideriamo solo il problema della sua non-validità.

[32] Si noti, comunque, che la dimostrazione per assurdo vale se si vuole dimostrare $\neg A$. In questo caso, infatti, si dimostra che $\neg\neg A$ implica una contraddizione, cioè che vale $\neg\neg\neg A$, e poi si deduce $\neg A$ tramite la legge $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$.

Come nel caso del TE, Brouwer dà in questo caso dimostrazioni di sospensione di validità e una dimostrazione di contraddittorietà del principio in generale, insistendo sulle prime.

Vedremo un esempio di sospensione di validità di questo principio nel paragrafo c. (perché in essi fa uso delle proprietà sfuggenti). La dimostrazione teoreticamente più forte è, comunque, la seconda, che egli diede nel 1928[33]. Egli considerò la specie G dei punti del continuo unitario C per i quali è decidibile se sono razionali oppure no. La specie complementare della specie complementare in C di G è identica a C (perché la specie complementare in C di G è vuota), perciò se $\neg\neg G \rightarrow G$ valesse, G sarebbe identica a C. Ma, per come è definita G e per il fatto che il continuo non può scindersi in due sottospecie prioprie disgiunte, ciò significherebbe che o nessun punto di C è razionale oppure che tutti i punti di C lo sono, il che è assurdo.

Il fatto che non valga più il principio di reciprocità della complementarità comporta un'ulteriore conseguenza, questa volta di carattere "positivo", fecondo: cioè il raffinamento dell'analisi concettuale, perché, salvo casi specifici, le nozioni definite tramite doppia negazione costituiscono un concetto a se stante, non appiattito (come invece accade classicamente) sulle nozioni definite in modo totalmente affermativo. È possibile, quindi, sdoppiare tutte le nozioni classiche in questo modo. Si noti, però, che il principio $\neg\neg A \rightarrow A$ vale per tutte le negazioni di proprietà, perché da un lato da $\neg\neg\neg A$ segue $\neg A$ per contrapposizione da $A \rightarrow \neg\neg A$; dall'altro da $\neg A$ segue $\neg\neg\neg A$, per $B \rightarrow \neg\neg B$ dove B è $\neg A$.

Questo consente di eliminare le doppie negazioni - dalla terza in poi -, e, quindi, di delimitare l'ambito di scindibilità

[33] Brouwer (1928: CW I, 410-411).

delle definizioni. Infatti, esso rende sensato scindere ogni nozione in una positiva e in una con la doppia negazione, mentre chiarisce che sarebbe inutile proseguire quest'operazione aggiungendo nozioni con tre, quattro o più negazioni.

b. La nozione di differenziabilità

Nell'ambito della ricerca su come le definizioni classiche vengono sfumate nell'intuizionismo rientra la distinzione fra differenziabilità forte e differenziabilità debole presentata da Brouwer nel 1954[34].

Siano: $F(x)$ una funzione reale totale sul continuo; P un valore di x; p la successione i_1, i_2, ... degli intervalli chiusi (e i cui estremi sono distinti tra loro) che convergono a P; d_ν il coefficiente differenziale corrispondente a i_ν.

Diremo che $F(x)$ è debolmente differenziabile in $x=P$ (e che possiede il quoziente differenziale debole c in $x=P$) se si può costruire un numero reale c tale che è impossibile scegliere p in modo che, per un opportuno numero naturale m, per ogni ν, $|d_\nu - c| > 2^{-m}$:

$$\exists c \neg \exists p \exists m \forall \nu |d_\nu - c| > 2^{-m}.$$

Diremo che $F(x)$ è fortemente differenziabile in $x=P$ (e che possiede il quoziente differenziale forte c in $x=P$) se si può costruire un numero reale c tale che a ogni numero naturale n può essere associato un numero naturale m tale che, per ogni p e ogni i_ν, $i_\nu < 2^{-m}$ comporta $|d_\nu - c| < 2^{-n}$:

$$\exists c \forall n \exists m \forall p (i_\nu < 2^{-m} \rightarrow |d_\nu - c| < 2^{-n}).$$

c. Le proprietà sfuggenti

L'esistenza di proprietà sfuggenti è testimoniata dal medesimo esempio addotto sopra per mostrare la non-validità del

[34] Brouwer (1954a).

TE per domini infiniti: se si considera come proprietà (di un numero) "avere 0123456789" nel proprio sviluppo decimale alla cifra n-esima, si vede immediatamente che questa è una proprietà sfuggente.

La loro esistenza ha notevoli conseguenze negli ambiti seguenti.

c.1. Princìpi classicamente equivalenti al TE

Nel paragrafo precedente si è accennato al fatto che il principio di complementarità della contraddittorietà è classicamente equivalente al TE. Un altro principio equivalente al TE è il cosiddetto "principio di valutabilità" $\neg A \vee \neg\neg A$ (ovvero $\neg P(x) \vee \neg\neg P(x)$), che è il TE riferito a proprietà negative.

Brouwer dimostra che i due princìpi in questione non solo intuizionisticamente non valgono, ma neppure sono equivalenti al TE: infatti essi non valgono più, ma in modo indipendente dal TE. Gli esempi presentati sono i seguenti:

1) Un caso in cui non vale nessuno dei tre princìpi.

Egli prende come proprietà P "essere razionale" e fa variare x sul continuo. Poi introduce l'asserto α di cui non si è dimostrata né l'assurdità né l'assurdità dell'assurdità" e definisce un *drift* come l'unione di: a) una successione fondamentale[35] di numeri razionali $c_1(\gamma)$, $c_2(\gamma)$, ... "distinti"[36] l'uno dall'altro e b) di un numero irrazionale $c(\gamma)$, limite della successione e tale che $c_\nu(\gamma)^\circ\!>c(\gamma)$ per ogni numero naturale ν. A questo punto si costruisce la successione convergente $c_1(\gamma,\alpha)$, $c_2(\gamma,\alpha)$, ...

[35] Cioè predeterminata, in cui la libertà di scelta è ridotta a zero.

[36] Due numeri reali a e b sono *distinti* se tra loro vale la relazione $^\circ\!>$ (misurabilmente maggiore), che fu definita da Brouwer come segue: $a^\circ\!>b$ vale se vale $a\text{-}b>2^{-n}$ per qualche opportuno numero naturale n e $a<^\circ b$ vale se vale $b\text{-}a>2^{-n}$ per qualche opportuno numero naturale n.

scegliendo $c_1(\gamma,\alpha)= c(\gamma)$ per ogni numero naturale ν se durante la scelta di $c_\nu(\gamma,\alpha)$ non si è dimostrata la verità di α; $c_{r+\nu}(\gamma,\alpha) = c_r(\gamma,\alpha) = c_r(\gamma)$ per ogni numero naturale ν se tra la scelta di $c_{r-1}(\gamma,\alpha)$ e quella di $c_r(\gamma,\alpha)$ si è dimostrata la verità di α. La successione converge al numero $C(\gamma,\alpha)$.

In questo caso, la verità di α e la razionalità del numero $C(\gamma,\alpha)$ sono equivalenti; quindi, la validità sia del TE che del principio di valutabilità rimane sospesa quando entrambi si riferiscono alla razionalità del numero $C(\gamma,\alpha)$. Inoltre, dal momento che la non-contraddittorietà di α non implica che α sia vera, anche la non-contraddittorietà della razionalità di $C(\gamma,\alpha)$ non implica la sua razionalità e, quindi, anche il principio di reciprocità della contraddittorietà non vale se riferito alla razionalità di $C(\gamma,\alpha)$.

2) Un caso in cui vale solo il principio di valutabilità.

È dato modificando il caso precedente. Come proprietà P si prende ancora "essere razionale"; la differenza sta nella costruzione del numero in questione, che, per distinguerlo dal precedente, indicheremo con $D(\gamma,\alpha)$. Si sceglie $c_\nu(\gamma,\alpha) = c(\gamma)$ per ogni numero naturale ν se durante la scelta di $c_\nu(\gamma,\alpha)$ non si è dimostrata né la verità né l'assurdità di α; $c_{r+\nu}(\gamma,\alpha) = c_r(\gamma,\alpha) = c_r(\gamma)$ per ogni numero naturale ν se tra la scelta di $c_{r-1}(\gamma,\alpha)$ e quella di $c_r(\gamma,\alpha)$ si è dimostrata o la verità o l'assurdità di α. $D(\gamma,\alpha)$ non può essere irrazionale perché potrebbe esserlo solo se non si dimostrasse mai né la verità né l'assurdità di α. Ma questo sarebbe già una dimostrazione sia della verità che dell'assurdità di α, il che è una contraddizione. Quindi abbiamo una dimostrazione della non-irrazionalità di $D(\gamma,\alpha)$. L'esempio, pertanto, non tocca la validità del principio di valutabilità. Tocca, invece, la validità degli altri due princìpi, in quanto non possiamo affermare la razionalità di $D(\gamma,\alpha)$ perché non sappiamo esattamente com'è il numero.

3) Un caso in cui vale il principio di valutabilità ma non il TE. Brouwer prende di nuovo per P la proprietà "essere razionale" e fa variare x sulla specie $A = B \cup C$, dove B è una specie di numeri irrazionali e C è la specie dei numeri reali $D_1(\gamma,\alpha), D_2(\gamma,\alpha), \ldots$ costruiti secondo le indicazioni del caso precedente, ma ciascuno rispetto a un diverso asserto α_n con le stesse caratteristiche dell'α di cui sopra (i suoi elementi sono non-irrazionali). L'esempio non tocca la validità del principio di valutabilità mentre causa la non-validità del TE perché non si è in grado di dimostrare la razionalità degli elementi di C.

4) Un caso in cui vale il principio di reciprocità della complementarità ma non il TE.

Brouwer dà come "proprietà" (meglio, come relazione) "essere uguale a" e fa variare la x sulla specie A definita nell'esempio precedente. Questo esempio non tocca il principio di reciprocità della complementarità, perché la relazione di uguaglianza è stabile (cioè è equivalente alla sua doppia negazione), ma non si è in grado di affermare per ogni coppia di elementi di A se sono uguali oppure no, perché non si sa com'è ogni elemento di C.

c.2. Proprietà e teoremi classici invalidati

Come ulteriore conseguenza non valgono più (tra l'altro):

- la decidibilità del carattere finito di una specie;
- l'esistenza di tre soli rapporti possibili fra rette (coincidenza, parallelismo, incontro in un punto) e del quinto postulato euclideo;
- la seconda dimostrazione di Gauss dell'esistenza di radici;

- l'esistenza di un valore massimo per una funzione continua ovunque definita su un intervallo chiuso;
- la proprietà della tricotomia dei numeri reali;
- i teoremi di Jordan, Bolzano-Weierstrass e quello di Heine-Borel.

c.2.1. Decidibilità del carattere finito di una specie

Come esempio, Brouwer considerò[37] la specie dei numeri naturali k_n, dove k_n è il passo dello sviluppo decimale di π in cui occorre per l'n-esima volta uno 0 seguito da 123456789. Di questa specie non si è in grado di stabilire se è finita né se è assurda la sua finitezza, perché non si è neppure in grado di stabilire se ha un elemento, in quanto non si è ancora trovata nello sviluppo decimale di π una sequenza 0123456789.

c.2.2 Rette coincidenti, parallele, secanti

Come esempio, Brouwer considerò[38] la retta che passa per i punti $(1,p)$ $(-1,q)$, dove p è il limite della successione a_1, a_2,... definita relativamente alla proprietà sfuggente "f" in questo modo: se k_1 è il numero critico di f - cioè il primo numero ipotetico per cui essa vale -, $a_n=(-1/2)^n$ per $n<k_1$ e $a_n=(-1/2)^{k_1}$ $n>,\_k_1$; e q è il limite della successione b_1, b_2,... dove $b_n=(1/2)^n$ se $n<k_1$, $b_n=(1/2)^{k_1}$ se $n>,\_k_1$. Di questa retta e dell'asse X non si sa dire se coincidono, perché né di p né di q si sa se sono $=0$; non si sa dire se sono parallele o secanti perché in generale non si conoscono esattamente p e q.

Della retta qui costruita non si sa neppure trovare la parallela (non solo giudicare se un'altra retta data le è parallela), quindi cade anche il quinto postulato euclideo.

[37] Brouwer (1923a: CW I, 270).
[38] Brouwer (1929: CW I, 426).

c.2.3 La seconda dimostrazione di Gauss dell'esistenza di radici

Brouwer prese in considerazione come esempio[39] l'equazione $x^3-3x+2b^3=0$, che, secondo Gauss, dovrebbe avere radici. Se si prende $b=1+p$ con p definito come nei precedenti controesempi: allora il discriminante $(-108(1-b^6))$ non è provato $= 0$ né è provato $\neq 0$, in quanto non si conosce esattamente p. Ma, se il discriminante non è provato $= 0$ né è provato $\neq 0$, non si può neppure dimostrare che l'equazione abbia radici né che è assurdo che l'equazione abbia radici.

c.2.4. L'esistenza di un valore massimo per una funzione ovunque definita in un intervallo chiuso

Sia $f_n(x)$ la funzione definita nel modo seguente[40]:
data la successione $\delta_1, \delta_2, \ldots$ determinata da una legge,
$f_n(x)=2^{-n}$ per $x=\delta_n$; $f_n(x)$ si annulla sia per $x=0$ sia per $x=1$; $f_n(x)$ è lineare per $0<x<\delta_n$ e per $\delta_n<x<1$.

Sia k_1 il numero critico della proprietà sfuggente "avere 0123456789 nel proprio sviluppo decimale" riferita a π.

La funzione $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ controesempio del teorema classico in questione viene costruita in relazione alla $f_n(x)$ e a k_1: $g_n(x)=f_n(x)$ per $n=k_1$, $g_n(x)=0$ altrimenti.

c.2.5. La tricotomia

Si chiama "tricotomia" la confrontabilità tra numeri. Brouwer diede nel 1923[41] una dimostrazione di "improbabilità"

[39] Brouwer (1929: CW I, 427).
[40] Brouwer (1923a: CW I, 271).

dell'asserto che afferma che, dati due qualunque numeri reali a e b, si è in grado o di provare che sono uguali o di provare che l'uno è maggiore dell'altro.

La dimostrazione consisteva nel prendere come numero reale b lo 0 e come numero reale a (limite della successione infinita convergente $a_1, a_2, \ldots$) quello costruito nel modo seguente. Sia k_1 definito come sopra, cioè sia il passo dello sviluppo decimale di π dopo la virgola in cui per la prima volta occorre uno 0 seguito da 123456789. Si scelga $a_n=(-1/2)^{k_1}$ se $n \geq k_1$, altrimenti si scelga $a_n=(-1/2)^n$. È chiaro che non si è in grado di provare $a=0$ né $a>0$ né $a<0$, perché non si sa se nello sviluppo decimale occorre 0123456789 e, quindi, non si sa se la successione $a_1, a_2, \ldots$ (di cui a è il limite) converge a 0 oppure ad un certo numero $(-1/2)^{k_1}$.

È possibile dare anche una dimostrazione di contraddittorietà della tricotomia usando il teorema di continuità delle funzioni e un altro teorema detto "teorema del ventaglio", ma in questo contesto ci limitiamo a riportare questo dato, senza entrare in dettagli, perché la loro trattazione comporterebbe un appesantimento inutile in questo contesto[42].

c.2.6. Il teorema di Jordan

Il teorema di Jordan letto intuizionisticamente afferma[43] che insiemi di punti omeomorfi ad una circonferenza (quali i perimetri dei quadrati) dividono il piano in due luoghi in modo tale che si può provare che ogni punto del piano appartiene all'insieme oppure si può provare che si trova in uno di questi due luoghi. Ora, si prenda su un sistema d'assi ortogonale un

[41] Brouwer (1923a: CW I, 270).
[42] Per approfondire l'argomento, si veda Franchella (1994b, 154-156).
[43] Brouwer (1929: CW I, 426).

quadrato con vertici (0,0), (1,0), (0,1), (1,1): del punto (p, p) - con p definito come nel controesempio c.2.2 - non si sa provare che appartenga al lato del quadrato né si sa provare l'assurdità della sua appartenenza, proprio perché non lo si conosce esattamente.

c.2.7. Il teorema di Bolzano-Weierstrass

Nel 1952 Brouwer distingue due forme del teorema[44]:

A- ogni specie infinita di numeri reali compresi nell'intervallo unitario ha un punto di accumulazione[45];

B- ogni specie di numeri reali compresi nell'intervallo unitario senza punti di accumulazione è limitata in numero[46].

Il controesempio alla forma *A* consiste nella costruzione di una successione infinita $a_1, a_2,$... in relazione ad una proprietà sfuggente f con numero critico k_1 nel modo seguente:

$a_n=1/3 + 2^{-n}$ se $n<k$; $a_n=1/4+ 2^{-n}$ altrimenti.

Un controesempio alla forma *B* consiste nella costruzione, in relazione ad un asserto α non valutato, di una specie di punti compresi fra 0 e 1 che contenga un numero della successione $b_1, b_2, \ldots$ di razionali infinita convergente così definita: $b_n=2^{-n}$ finché non si dimostra né la verità né l'assurdità di α; da b_m in poi $=2^{-m}$ se tra la scelta di $b_{(m-1)}$ e quella di b_m si è provato o che α è vero o che è assurdo.

Infatti, una qualunque specie che contenga un b_n:

[44] Brouwer lo tratta negli articoli 1919, 1923b e 1952.

[45] "Punto di accumulazione" della specie di punti Q è un punto p tale che per due punti qualunque a e b tali che $a<°p<°b$ l'intervallo aperto $[ab]$ contiene una sottospecie infinita di Q.

[46] Una specie è "limitata in numero" se per qualche numero naturale n è assurdo che esista una sua sottospecie con cardinale n.

- non ha punto di accumulazione s, perché per questo, se esiste, deve valere che o $s°>0$ o $s<°0$ o $s= 0$, mentre con la definizione di b_n appena data non può valere nessuno dei tre casi. Infatti, non può essere $s<°0$ perché nessun numero $m<-2^{-n}$ può contenere in un suo intorno infiniti punti di un intervallo compreso fra 0 e 1. Non può neppure essere $s°>0$ né $s=0$, perché in questo caso bisognerebbe sapere se il b_n che appartiene alla specie è stato determinato nella fase di non valutazione di α oppure in quella di valutazione, il che non è dato;
- non può essere limitata in numero perché, non conoscendo quell'elemento particolare in modo esatto, non possiamo escludere alcuna cardinalità per le sue sottospecie.

c.2.8. Il teorema di Heine-Borel

Intuizionisticamente non vale più il teorema di Heine-Borel nella sua forma: se a ogni nucleo[47] di una specie consolidata Q[48] del piano cartesiano è associato un intorno[49], allora

[47] "Nucleo" è il numero reale inteso come classe di equivalenza di successioni di scelta relativamente alla relazione "≡" definita tra due qualunque successioni di scelta di numeri razionali (ovvero di intervalli) a_1, a_2... e b_1, b_2... come $\forall n|a_n-b_n|<2^{-m}$, per ogni m infinitamente piccolo. Si noti che in questo contesto Brouwer si riferisce a punti definiti nel piano anziché sulla retta, perciò parla di punti *bidimensionali*, cioè definiti come successioni di λ_v-quadrati, ovvero di coppie ordinate di λ_v-intervalli (e chiama la specie di questi punti *piano cartesiano*).

[48] Una specie Q è consolidata se è limitata (cioè se si può indicare un λ-quadrato all'esterno del quale Q non può avere quadrati) e se ogni successione infinita convergente D di nuclei di Q tra loro differenti ha un punto di accumulazione (cioè un punto tale che all'interno di ogni suo quadrato giacciono due quadrati di Q esterni tra loro) anch'esso appartenente a Q.

[49] Un intorno di un punto P è la specie dei punti che sono a una distanza $d<\_2^{-n}$ da P.

dalla specie O di detti intorni si può scegliere una sottospecie finita O_1 nella quale ogni nucleo P di Q ha almeno un intorno[50]. I controesempi al teorema consistono nell'indicare una successione di nuclei d_i tali che:

1) il punto di accumulazione appartiene a Q;

2) ad essi si sa attribuire un intorno ma non si riesce a dare un numero finito di intorni tali che la successione e il punto di accumulazione appartengano ad essi.

Nelle lezioni di Cambridge dà i due seguenti controesempi[51]:

A) 1) introduce una successione di nuclei P_v tali che per ogni v P_v ha coordinate $(c_v, 0)$ con c_v definito in relazione al numero critico k_1 di una proprietà sfuggente f come $c_v=2^{-v}$ se $v \leq k_1$ e come $c_v=2^{-k_1}$ se $v>k_1$;

2) a ogni nucleo P_v attribuisce come intorno il λ-quadrato avente come centro P_v e lato di lunghezza $1/2c_v$; a ogni punto di accumulazione della successione attribuisce come intorno il λ-quadrato avente centro nell'origine e lato di lunghezza 1.

B) 1) introduce una successione di nuclei P_v tali che per ogni v P_v ha coordinate $(c_v, 0)$ con c_v definito in relazione al numero critico k_1 di una proprietà sfuggente f come $c_v=1$ se $v \leq k_1$ e $c_v=0$ se $v>k_1$;

2) a ogni nucleo P_v della successione viene assegnato come intorno il λ-quadrato avente come centro il nucleo P_v e lato di lunghezza 1.

In entrambi i controesempi non c'è garanzia che l'origine appartenga a Q e, quindi, non risulta che il λ-quadrato con lato di lunghezza 1 sia un elemento di O_1.

[50] Brouwer (1981, 92).

[51] Brouwer (1981, 92).

4. *La problematicità dell'intuizionismo*

Accennerò ora, tra i numerosi punti problematici dell'intuizionismo, solo a quelli basilari e che sono connessi con il rifiuto del TE:

1) il linguaggio ha un ruolo solo marginale (perlomeno nell'intuizionismo brouweriano);

2) la teoria intuizionista della verità è solo adatta a descrivere la verità matematica, non qualunque tipo di verità;

3) la formalizzazione del concetto di costruzione è difficile;

4) il concetto di prova/costruzione non è ben delineato;

5) l'accettabilità della nozione di metodo di costruzione oltre a quella di costruzione effettiva è discutibile;

6) la definizione di negazione non è del tutto in linea con l'impostazione generale intuizionista;

7) lo *status* di un enunciato prima di diventare asserto non è chiaro.

Per quanto riguarda il primo punto, ho ricordato a proposito dell'intuizionismo di Brouwer che egli vedeva la matematica come un'attività interiore, non finalizzata e alinguistica. La problematicità di questa posizione è costituita dal fatto che rischia di far diventare la matematica un'esperienza personale[52], che non riesce a andare al di fuori dell'intimità della persona che l'ha compiuta, ponendo da un lato la questione di principio di come si può allora parlare di unicità della matematica, dall'altro

[52] Una "pagina di diario", secondo l'espressione di Casari (1964, 185).

il contrasto con la realtà che Brouwer stesso aveva comunque pubblicato i suoi lavori.

È bene precisare subito che il dichiarato atteggiamento di disprezzo del linguaggio è presente solo in Brouwer. Heyting, nella sua divulgazione, rettifica, per così dire, il tiro. Come Brouwer, Heyting pensa che il linguaggio in ogni caso ha scopo persuasivo e che in matematica si tratta di indurre l'ascoltatore a edificare una costruzione mentale analoga alla propria (in matematica, come in un romanzo[53], si vogliono suscitare determinate reazioni nell'ascoltatore): perciò il linguaggio matematico ha senso solo in quanto esprime costruzioni mentali. Inoltre, Heyting di Brouwer condivide l'idea che non si può mai escludere la possibilità di un fraintendimento (neppure se si usa un linguaggio formale).

A diversità di Brouwer, ritiene il linguaggio indispensabile nella costruzione della matematica proprio perché egli la considera frutto della collaborazione fra i vari studiosi: stranamente, però, egli afferma che è stato proprio Brouwer che "qualche volta descrisse la matematica come un'attività della comunità matematica presa globalmente"[54], ma comunque non porta prove di questo fatto.

Per il resto, invece, Heyting si pone "a mezza strada" nei confronti di Brouwer in quanto sostiene l'ammissibilità (teoretica) e la fruttuosità dell'uso in matematica sia di un linguaggio non simbolico[55] che di uno simbolico. Seguendo la le-

[53] Heyting (1935, 127).

[54] Heyting (1968, 312).

[55] Heyting sottolinea comunque che la terminologia di tale linguaggio non coincide con quella comune, ma che va appresa con l'uso, come si fa con la lingua madre.

zione di Gerrit Mannoury[56] sulla "taalgradatie" (gradazione fra i linguaggi), Heyting ritiene che tra i due tipi di linguaggi non ci sia una netta differenza, in quanto la duplice componente - emotiva e indicativa - è presente, anche se in quantità diversa, in entrambi i tipi: la scelta dell'uno o dell'altro, quindi, va considerata una questione di gusto individuale[57].

Infine, è interessante far presente che Heyting passò ad affermare la inevitabilità del linguaggio in matematica sottolineando, nel 1949, che si tratta di una mera idealizzazione pensare che la matematica possa realizzarsi senza che il linguaggio intervenga almeno per sostenere la memoria del singolo matematico. Si può pensare che questa sia stata una rilettura, uno scoprire un aspetto implicito dell'espressione "ipotetico essere umano con una memoria illimitata" che Brouwer aveva presentato nel testo del 1933 *Willen, weten, spreken*. Brouwer l'aveva introdotta per sottolineare la debolezza del linguaggio, ma essa, affermando che solo un essere umano ipotetico può avere memoria illimitata e che il linguaggio serve da sostegno per la memoria, sottintendeva il fatto che una matematica come attività alinguistica fosse solo una idealizzazione.

In questo discorso Heyting precisò anche il confronto fra intuizionismo e formalismo, suggerendo di vederli come due modi diversi di dare senso al linguaggio: il primo ponendolo in relazione con una certa realtà, il secondo in modo olistico, cioè tutto chiuso all'interno del linguaggio stesso. Tali modi - egli sottolineò - sono comunque già presenti nell'àmbito di altre discipline: in particolare, la metafisica riesce a fornire un senso ai suoi termini solo nel suo stesso interno.

[56] Per un approfondimento del pensiero di Mannoury, si legga Heijerman (1990).

[57] Heyting (1934, 127).

Per quanto riguarda il problema di come la teoria della verità possa costituire il sostrato gnoseologico per campi di realtà diversi dalla matematica, in particolare, è ardua la sua conciliazione con la possibilità di formulare leggi fisiche: che senso hanno queste rispetto all'universo, se la loro verità è intesa come esperienza mentale e non reale? Anche se non si vuole attribuire loro una connotazione realista ma solo un valore ipotetico, rimane ugualmente inspiegabile come possano avere una qualsiasi presa sul reale.

A questo proposito interviene Heyting[58], dicendo che vede effettivamente scarse indicazioni per l'uso dell'intuizionismo in fisica, mentre vede maggiori possibilità in filosofia, storia e nelle scienze sociali. Egli, però, non pensa che l'utilità costituisca la sola misura di valore, e propone l'analogia con l'arte, il cui valore è sentito da ogni persona educata a percepirlo, anche se nessuno è mai riuscito a definirlo. Il problema, comunque, rimane aperto.

Per quanto riguarda la possibilità di definire formalmente le costruzioni, Kleene ha avanzato la proposta di interpretare le formule provabili intuizionisticamente come "realizzabili ricorsivamente". Egli parte dall'idea di leggere, ad esempio, $\forall x A(x)$ come una comunicazione incompleta di un metodo generale effettivo per trovare, per ogni x, l'informazione che completa la comunicazione di $F(x)$ per quell'x, e sfrutta la tesi che i metodi effettivi generali sono quelli ricorsivi e il fatto che le funzioni ricorsive possono venire enumerate tramite gödelizzazione. Così Kleene interpreta[59] gli enunciati intuizio-

[58] Heyting (1956a, 10).
[59] Kleene (1952, 502-503).

nisti come attese di una costruzione che si può rintracciare attraverso lo schema che riporto sotto, perché:
a) la costruzione è una funzione ricorsiva generale;
b) questa è indiciabile con numeri;
c) lo schema dà il numero "e" per le formule atomiche, i connettivi e i quantificatori.

Ecco lo schema. Diciamo che il numero naturale "e" realizza una formula p teoretico-numerica chiusa (cioè "e" è il numero di una costruzione che completa p) se:
1) p è atomica: $e=0$ e p è vera;
2) $p=A \wedge B$: $e=2^a.3^b$, dove a realizza A e b realizza B;
3) $p=A \vee B$: $e=2^0.3^a$, dove a realizza A o $e=2^1.3^b$, con b che realizza B;
4) $p=A \rightarrow B$: e è il gödeliano di una funzione ricorsiva parziale ϕ a una variabile e tale che ogniqualvolta a realizza A, $\phi(a)$ realizza B;
5) $p=\neg A$: e realizza $A \rightarrow 0=1$;
6) $p=\exists x A(x)$: $e=2^x.3^a$, dove a realizza $A(x)$;
7) $p=\forall x A(x)$ se e è il gödeliano di una funzione ricorsiva generale ϕ a una variabile e tale che, per ogni x, $\phi(x)$ realizza $A(x)$.

Kleene ha dimostrato che davvero le formule dimostrabili intuizionisticamente nell'aritmetica sono realizzabili da un e, cioè aspettano una costruzione che si rintraccia attraverso quel numero, ma questo non è sufficiente a dare una definizione di costruzione possibile, in quanto G.F. Rose[60] ha dimostrato in seguito che non solo le formule provabili nell'aritmetica intuizionista sono così realizzabili.

[60] Rose (1953).

Heyting[61] suggerì che la nozione di costruibilità fosse da considerare come primitiva all'interno dell'intuizionismo. Ciò venne interpretato dalla Haack[62] nel senso di "implicitamente definito dai princìpi della logica intuizionista" e per questo motivo l'idea fu da lei criticata, perché le sembrava che rendesse infondato il rifiuto intuizionista di alcuni princìpi della logica classica. In realtà, il concetto di prova, non solo non è precisato intuizionisticamente (e si potrebbe giustificare il fatto appellandosi al disinteresse brouweriano per la formalizzazione, per il linguaggio simbolico), ma dichiaratamente viene lasciato aperto, nel senso che si presuppone che l'uomo sia in grado di riconoscere che una costruzione mentale costituisce una prova per una certa cosa, ma che non si può fissare in anticipo ciò che costituisce una prova, non si possono elencare i metodi dimostrativi standard ammessi, perché ciò significherebbe porre un limite alle capacità umane di pensare sempre nuove possibilità. Detlefsen fa notare[63] in particolare che questa "vaghezza" vale anche nella definizione dei connettivi: quando si dice che, date le prove di A e di B rispettivamente, siamo in grado di combinare una prova di $A \wedge B$, non viene specificato in che cosa consista questa "combinazione".

Il problema era già stato colto da Paul Bernays[64], che ne aveva visto come conseguenza il fatto che intuizionisticamente non si sarebbe potuto parlare di "metodo di prova" (dal momento che questo non poteva essere codificato) e, quindi, non si sarebbero potute fare affermazioni universali. La conclusione che ne traeva era che, nel fare enunciati generali, l'intuizionismo

[61] Heyting (1959).
[62] Haack (1974, 101-103).
[63] Detlefsen (1990, 531).
[64] Bernays (1935).

si dimostrava non fedele alla sua promessa di attenersi ai soli dati dell'evidenza e dimostrava, così, la necessità di un'integrazione di evidenza e astrazione ("platonismo moderato").

In questo modo si approda al punto successivo, che è stato messo a fuoco, tra gli altri, dalla Haack[65]. Il problema consiste nel fatto che è dubbia l'accettabilità della nozione di costruzione possibile al posto di quella attualmente effettuata.

Se si opta per la "costruzione possibile", sia come metodo generale sia come costruzione ipotetica, si è passibili delle medesime critiche della matematica classica da parte dello stretto finitista, in quanto così si potrebbe permettere l'ammissione dell'esistenza di un oggetto matematico anche se la costruzione per ottenerlo è troppo lunga o troppo complicata per portarlo a termine. Se, invece, si opta per la seconda alternativa, cioè per la costruzione attualmente effettuata, ci si scontra subito col problema della comunicabilità dei risultati mentali e, perciò, di quando una costruzione si consideri "attualmente effettuata": se basta che sia compiuta da qualche membro della comunità matematica o se deve essere compresa da tutti. Anche ammettendo di avere superato questo scoglio, con questa scelta si impongono forti restrizioni temporali e si riduce notevolmente il campo dei risultati matematici.

Secondo W.P. van Stigt[66], già in Brouwer si può trovare traccia di un passaggio tra le due concezioni di costruzione. Quando, nel 1908, Brouwer analizza il TE e afferma la solubilità di ogni problema che si riferisce ad un ambito finito di enti matematici, Brouwer avrebbe dato segno (rispetto alla sua tesi dell'anno prima) di un cambiamento di prospettiva costruttivista

[65] Haack (1974, 100).
[66] van Stigt (1981, 145).

a favore della mera *possibilità* di costruzione. In realtà, questo tipo di costruttivismo era presente già nel 1907, all'origine - si potrebbe dire - dell'intuizionismo brouweriano: infatti nel vedere la base e la garanzia della matematica nell'intuizione della duo-unità, nel vedere assicurata l'esistenza dei numeri naturali dal fatto che l'uomo *di principio* è in grado di compiere l'operazione di individuazione - ritenzione nella memoria - individuazione, Brouwer si era già staccato da uno stretto costruttivismo.

Già Oskar Becker aveva sottolineato[67] il fatto che, se ci si deve attenere ai limiti delle capacità umane, la nozione di "finito" deve diventare particolarmente ristretta: non si devono neppure accettare i numeri "grossi", cioè quelli che per essere contati richiederebbero un tempo ben più lungo della vita di un uomo. Quest'idea è stata poi ripresa da van Dantzig[68], Parikh[69], Essenin-Volpin[70] specificamente a proposito dell'intuizionismo. In realtà, il problema si è rivelato di portata più ampia, non riguardante solo l'intuizionismo, nel momento in cui è entrato l'uso dei computers nelle dimostrazioni (ad esempio, del teorema dei quattro colori), computers la cui potenza supera quella umana al punto che è arduo, se non impossibile, perfino per un'équipe di matematici il mero controllo dei passi delle prove: allora ci si è resi conto dell'importanza e ampiezza della questio-ne della effettuabilità umana delle costruzioni[71].

La nozione di costruibilità presenta, poi, un ulteriore aspetto, cioè l'accettabilità della nozione di costruzione

---

[67] Becker (1927, 772-773).
[68] van Dantzig (1956).
[69] Parikh (1971).
[70] Essenin-Volpin (1961, 1970).
[71] V., ad esempio, Tymoczko (1986).

ipotetica. E qui ci si allaccia alla problematica della definizione brou-weriana (che è rimasta nella letteratura) di negazione, che fu messa in evidenza dal matematico olandese George François Cornelis Griss negli anni 1946-1951.

L' obiettivo contro cui Griss si rivolge non è il concetto di negazione, ma la definizione di negazione come "ragionamento per assurdo", ovvero come asserto corrispondente ad un ragionamento che termina con una contraddizione[72]. Griss evidenzia l'incompatibilità di tale significato con l'impostazione intuizionista prendendo in considerazione un esempio di ragionamento per assurdo e confrontandolo con uno che lui ritiene perfettamente condotto.

La critica di Griss si basa, dunque, su questa riflessione: il "ragionamento per assurdo" si conclude con una contraddizione, perciò l'ipotesi da cui parte non può avere una realtà mentale, perché è impossibile che qualcosa di vero diventi poi falso; per l'intuizionismo, però, i ragionamenti matematici sono quelli che partono da verità e giungono ad altre verità, quindi il ragionamento per assurdo non può essere annoverato all'interno della matematica.

Al ragionamento per assurdo Griss riconosce una collocazione in quello che chiama lo stadio "prematematico" di ricerca della dimostrazione e che ritiene sia analogo alla "synthèse globale" di G. Bouligand. In effetti, questi, nel delineare la sua epistemologia[73], aveva distinto la "sintesi globale" dalla soluzione definitiva di problemi, definendo la prima come "sistema in espansione e base comune alla quale i matematici ricorrono,

---

[72] Da non confondere con la dimostrazione per assurdo, che parte negando l'asserto A che si vuole provare, ricava da ciò una contraddizione e conclude A tramite la legge $\neg\neg A \rightarrow A$.
[73] Bouligand (1947).

in questo istante, per affrontare i problemi", che "si accontenta della sola assenza di contraddizione, il che permette di ragionare per assurdo, una volta accettato il terzo escluso", e la seconda come il fatto che "il matematico si sforzerà di *costruire* la soluzione".

Il nuovo significato che Griss dà alla negazione[74] è di confronto fra due enti (già costruiti[75]) e rilevamento che essi hanno caratteristiche diverse (che non sono sovrapponibili[76]).

---

[74] In ciò, Griss si rifà al Bergson de *L'evolution créatrice*. Questi (1914, 298-322), prendendo in considerazione il significato del nulla, aveva dato una spiegazione parallela per il nulla (sul piano ontologico) e per la negazione (sul piano logico-linguistico). Dal momento che il pensiero è sempre pensiero di qualcosa, il "nulla" in realtà non c'è, ma è il riferimento a due esistenze: quella della cosa che manca e quella della cosa presente, e nasce dal confronto fra le due, dal riscontrare che le caratteristiche di quella presente sono distinte dalle caratteristiche di quella assente. Come il nulla in realtà è la sostituzione di un oggetto con un altro (è la presenza di un oggetto al posto di un altro desiderato), così la negazione, intesa aristotelicamente come contraddittoria (e non contraria) all'affermazione, è la sostituzione di un asserto affermativo con un altro meno definito (dire "non rosso" dà poche indicazioni relativamente alla qualità precisa dell'oggetto).

Da tutto questo discorso, come si vede, Griss estrapola (per condividerla) l'idea che "il negativo" consiste nel confronto di due realtà positive e nel rilevamento di diversità nelle loro caratteristiche.

Griss (1948, 73) accenna al fatto che questa definizione di negazione corrisponde a quella di "negazione di scelta" data da Mannoury. Quest'ultimo, infatti, aveva introdotto l'espressione "negazione di scelta" e "negazione di esclusione" per indicare ciò che aristotelicamente veniva chiamato rispettivamente "contrario" e "contraddittorio".

[75] Si noti che questo permette di rappresentarli "visivamente" sotto forma di segni e, quindi, di "fermarli" in modo da rendere possibile un confronto tra loro.

[76] Si noti che non c'è circolarità in questa definizione: "non sovrapponibili" significa che, se si porta un ente sull'altro, l'uno avrà caratteristiche in più rispetto all'altro (e anche viceversa).

L'ammissibilità intuizionista di tali operazioni è garantita dall'intuizione originaria della duo-unità: essa, fondando l'unità e la duità, fonda anche la capacità di distinguerle.

Griss fa notare che il cambiamento di significato della negazione richiede una revisione anche della teoria delle specie: la specie vuota non può più essere accettata, perché la sua definizione cade sotto la medesima critica rivolta alla negazione - cioè che tratta di proprietà solamente ipotetiche senza corrispettivo mentale -, in quanto la specie vuota è data tramite una proprietà contraddittoria. Precisa comunque che, anche se si definisce la specie vuota come intersezione di due specie disgiunte, essa risulta non accettabile, perché richiede di postulare l'esistenza dell'intersezione in ogni caso, in contrasto con l'esigenza costruttivista. Per quanto riguarda le relazioni tra specie, egli conserva, di quelle date da Brouwer, "l'uguaglianza" e la "devianza": due specie sono uguali se è possibile trovare per ogni elemento della prima uno della seconda identico ad esso e viceversa; una specie "devia" da un'altra se è possibile trovare un suo elemento che è "diverso"[77] da ciascun elemento dell'altra. Ovviamente scarta la relazione di "differenza" intesa come assurdità dell'identità tra le specie.

Modifiche all'interno della matematica comportano nella prospettiva intuizionista cambiamenti nella logica. In tale àmbito il punto di riferimento diretto per Griss ovviamente non è Brouwer, ma Heyting, dal momento che era stato quest'ultimo ad elaborare un sistema formale intuizionista[78].

---

[77] Dove la "diversità" si intende definita già preventivamente in modo accettabile secondo l'ottica di Griss.

[78] A questo proposito, si noti che in seguito all'elaborazione di un sistema formale intuizionista da parte di Heyting, Ingebrigt Johansson ebbe l'idea di costruire a sua volta una logica ancor più ridotta di quella di Heyting,

Griss evidenzia in primo luogo che la lettura heytinghiana degli asserti come problemi che attendono una soluzione[79], in una matematica intuizionista (senza negazione) non può più reggere, in quanto in un sistema logico che rispecchi quest'ultima si devono solo avere formule vere, questioni risolte, costruzioni effettuate. Come rilettura alternativa propone che ogni asserto esprima una specie non vuota.

Poi rivede la logica proposizionale. Il primo a subire modifiche è il connettivo negazione che viene introdotto tramite la nozione di specie "complementare" $-A$, intesa come la sottospecie propria di tutti gli elementi di una specie data U che sono distinguibili dagli elementi di A. La negazione, però, non è l'unico connettivo che viene ridefinito. Sempre per evitare la presenza di asserti falsi, cambia pure il significato dell' "implicazione": si può affermare $A \rightarrow B$ solo se B segue da A e A è vera. Infine viene riletta la disgiunzione. Anch'essa deve presentare solo asserti veri, perciò $A \vee B$ non può più voler dire che è vera A o è vera B; d'altra parte deve avere un suo status che la distingue dalla congiunzione. Quindi Griss la utilizza per esprimere due proprietà alternative che valgono per gli elementi di una specie, tali che, però, per ogni proprietà (cioè per ogni disgiunto) ci sia almeno un elemento della specie che ne goda. Ad esempio, se si è in grado di provare per ogni elemento di una specie se è pari (P) o se è dispari (D), e se c'è almeno un elemento della specie che è pari e uno che è dispari, si può asserire $P \vee D$[80].

Brouwer aveva anticipato (e condiviso) la critica di Griss ai ragionamenti contenenti ipotesi e, però, aveva ritenenuto di aver provato che certi ragionamenti ritenuti ipotetici (tra cui quello che si conclude con una contraddizione) lo sono solo in apparenza. Brouwer aveva descritto[81] il ragionamento che termina con una contraddizione come quello che parte costruendo un oggetto che soddisfa alcune delle relazioni date; ricava da quelle relazioni altre; confronta queste con quelle di partenza non ancora utilizzate; termina constatando che due relazioni sono reciprocamente in contrasto e, quindi, prendendo atto che non si può completare la costruzione dell'oggetto in modo che esso soddisfi tutte le relazioni date. Il punto di forza di Brouwer era che in questi ragionamenti veniva effettivamente dato un oggetto che soddisfaceva parte delle relazioni iniziali. L'argomento, tuttavia, non regge fino in fondo, perché si conclude con un confronto fra due termini di cui uno è l'oggetto dato, mentre l'altro è costituito da proprietà per le quali non si è esibito un oggetto che le goda.

Brouwer prese visione degli articoli di Griss (addirittura egli ne presentò personalmente alcuni come comunicazioni a convegni), non restò insensibile di fronte alla provocazione e si impegnò a rispondere alla critica. La sua strategia consistette nel mostrare la necessità del concetto di negazione nella matematica, indicando che non sempre si è in grado di avere definizioni

scartando l'assioma $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$. Il suo sistema (che, ovviamente, non accetterà il TE come schema d'assiomi) venne da lui denominato "calcolo minimale", in quanto "Si può difficilmente pensare una logica più stretta in cui appaia la negazione" (Johansson 1937, 120). Si vedano sull'argomento Galvan (1994) e von Kutschera (1985).

[79] Vedi oltre.

[80] Il tentativo di Griss di costruire una matematica e una logica intuizioniste senza negazione fu poi riconsiderato, reinterpretato e sviluppato da Gilmore (1953), Lopez-Escobar (1972), Nelson (1959), Valpola (1955) e Vredenduin (1953), e, sotto certi aspetti, da van Dantzig (1947).

[81] Brouwer (1907: CW I, 72-73).

positive degli enti: esistono proprietà "essenzialmente negative", ovvero non riconducibili a proprietà esprimibili con asserti affermativi.

Come esempi egli dimostrò[82]: 1) che non si è in grado di provare se $\rho =/0$ equivale a "$\rho \,^{\circ}\!> 0$ o $\rho <^{\circ} 0$", cioè che non si è in grado di provare se la proprietà[83] negativa di diversità è traducibile nell'espressione "misurabilmente maggiore ($^{\circ}\!>$) o misurabilmente minore ($<^{\circ}$)" definita in termini puramente affermativi[84]; 2) che non si è in grado di provare se, quando vale $\rho > 0$ [85], vale anche $\rho \,^{\circ}\!> 0$ [86].

Tale risposta, però, contiene un vizio di fondo. Mostrando la non traducibilità di nozioni negative in nozioni costruttive, Brouwer ha solo evidenziato la perdita concettuale che la matematica viene a subire se privata della definizione di negazione come "portare all'assurdo". Tale argomentazione in difesa di questa definizione in primo luogo risulta particolarmente

[82] Brouwer (1948a: CW I, 478-479).

[83] Questo è il termine usato nel 1948: nel 1949 ha, invece, parlato di "relazione", come del resto si dice solitamente nella letteratura.

[84] Si ricordi che Brouwer definiva $a \,^{\circ}\!> b$ come $a\text{-}b > 2^{-n}$ per qualche opportuno numero naturale n e $a <^{\circ} b$ come $b\text{-}a > 2^{-n}$ per qualche opportuno numero naturale n.

[85] Questa è una relazione definita in termini negativi, in quanto è equivalente a "$a =/ b$ & $-a < b$".

[86] In uno scritto successivo - del 1949 - *De non aequivalentie van de constructieve en de negatieve orderelatie in het continuum* - Brouwer ha dato un risultato ancora più forte di questo: anziché la sola "improbabilità" dell'equivalenza delle relazioni ">" e "°>" sul continuo, ha ottenuto la contraddittorietà di tale equivalenza. Possiamo però - per non appesantire eccessivamente la trattazione - soffermarci ad analizzare il solo articolo del 1948, perché l'essenziale è il modo di affrontare la questione che Brouwer ha avuto, e il modo si evince già in quell'articolo.

debole proprio perché compiuta da Brouwer, che in nome della sua *Weltanschauung* aveva sostenuto la necessità di una riedificazione della matematica anche a costo di drastici tagli; inoltre non affronta né risolve la questione di principio della compatibilità di questa definizione con l'impostazione intuizionista. La questione resta aperta in tutta la sua complessità.

Si noti, però, d'altro canto, che il collocamento delle costruzioni ipotetiche nell'ambito prematematico, di ricerca della soluzione ai problemi, costituisce, comunque, una risposta alla questione sollevata da Cooper[87]. Secondo lui, se si identificano verità e verificabilità, se ne ottiene l'impossibilità di comprendere i semplici enunciati dei teoremi e, quindi, la matematica senza prima averli provati. L'autore, perciò, propone una lettura dell'intuizionismo come ridefinizione di quelli che sono gli asserti accettabili come matematici, e non come teoria della verità, perché questa, oltretutto, non terrebbe conto del linguaggio realista, il cui significato non può essere ignorato.

Alla questione aveva già in certo qual modo risposto Heyting con una delle sue interpretazioni degli enunciati intuizionisti. Questa era stata una questione dibattuta, perché agli inizi gli estremi esatti della critica brouweriana al TE non erano chiari. Pertanto, tra la fine degli anni venti e metà degli anni trenta si sviluppò il cosiddetto dibattito attorno alla "logica di Brouwer" (cui, peraltro, Brouwer non prese parte), che servì a mettere in luce i malintesi che si erano creati e a fissare, ad opera di Heyting, l'esatta interpretazione da dare alla "non-validità" intuizionista del TE e a chiarire la distinzione enunciato-asserto all'interno dell'intuizionismo.

[87] Cooper (1978).

Nel 1924 Rolin Wavre[88], nel riassumere le differenze tra formalismo e intuizionismo, pose il problema se la non-validità del TE comportasse l'esistenza di un "terzo", cioè la dimostrazione dell'indimostrabilità di una proprietà matematica. Nell'articolo successivo, invece, affermò[89] che Brouwer aveva aperto la possibilità di un "terzo" ma non aveva dato il "terzo" stesso.

Nel 1926 Paul Lévy stabilì[90] che l'indimostrabilità di una proprietà matematica non può essere dimostrata; in ogni momento una proprietà matematica è:
1) o dimostrata vera;
2) o dimostrata falsa;
3) o non ancora dimostrata vera o falsa.

Un anno più tardi Marcel Barzin e Alfred Errera riconsiderarono il problema[91], interpretando la non-validità come un terzo valore e dimostrando che esso porterebbe a contraddizione.

Lévy reagì immediatamente[92], presentando una distinzione fra "enunciato" e "enunciato brouweriano", per sottolineare che "non-validità" significa uno stato di aspettativa di un valore di verità, non un valore di verità già trovato.

Infine, nel 1930 Arend Heyting accettò questa distinzione[93]: l'*enunciato* manifesta l'attesa di una prova (=ciò che è ritenuto tale dalla mente). Dietro suggerimento di O. Becker,

[88] Wavre (1924, 444).
[89] Wavre (1926, 74).
[90] Lévy (1926, 256).
[91] Barzin e Errera (1927).
[92] Lévy (1927).
[93] Heyting (1930d).

che legge[94] la negazione brouweriana in termini husserliani come "delusione" (*Enttäuschung*), Heyting adotta, in alcuni scritti[95], il termine fenomenologico di "intenzione", ovviamente non riferito ad uno stato di affari provato esistere indipendentemente dall'uomo, ma ad un'esperienza pensata come possibile. In quest'ottica, l'*asserto*, che è l'affermazione di una proposizione, significa il compimento dell'intenzione, l'esistenza di una prova - sottolineando, rispetto a Lévy, che questo significa l'esistenza effettiva di una prova, cioè una *costruzione*.

Un teorema, prima di essere provato, è espresso come enunciato; soltanto dopo come asserto, perciò non è vero che per l'intuizionismo non si è in grado di comprendere un teorema finché non lo si è provato, perché il suo enunciato esprime la sola aspettazione della prova, supponendo che venga immediatamente distinto dall'intelletto quale costruzione mentale è una prova.

Heyting, però, modificò più volte la sua interpretazione[96] e, quindi, il suggerimento di Griss si rivela particolarmente interessante.

Un'ultima osservazione: la problematicità dell'evidenza di alcune nozioni intuizioniste - quelle che abbiamo visto sopra, legate al rifiuto del TE, e altre, quali la nozione stessa di specie e di numero reale come successione di libera scelta - non è stata ignorata dagli intuizionisti, anzi, è stata recepita già da Heyting, e in modo particolarmente attento. Egli stesso aveva espresso

[94] Becker (1927, 498-499).
[95] Heyting (1930d, 958).
[96] Per un resoconto dettagliato delle varie fasi dello sviluppo della sua interpretazione, si legga Franchella (1994c, 154-159).

dubbi personali fin dall'inizio sull'accettabilità (quindi sull'evidenza) della nozione di successione di libera scelta. A seguito delle critiche di Griss e di Bernays, egli si sentì impegnato in una replica e stese in primo luogo una lista di costruzioni ipotetiche: i numeri naturali "grossi", la nozione di negazione, le espressioni quantificate, le successioni di libera scelta, le specie. Egli ripeté questa lista più volte, dapprima[97] sottolineando il fatto che la discussione sulla loro evidenza è qualcosa di marginale all'interno dell'intuizionismo, dove, invece, comunque regna tra gli autori l'accordo sulle linee di fondo. Negli anni sessanta[98], invece, a coronamento delle sue riflessioni sull'evoluzione delle teorie fondazionali nel corso del ventesimo secolo, indicò le discussioni sull'evidenza delle suddette nozioni come un segno della debolezza dell'intuizionismo, inteso come corrente fondazionale che pretende di essere assoluta, segno da mettere sullo stesso piano del ricorso all'intuizione a cui deve appellarsi il formalismo quando accetta il principio d'induzione, e dello scacco che aveva avuto ormai da tempo il logicismo. La lezione che Heyting ne trasse fu quella di vedere nelle tre scuole fondazionali l'enucleazione di tre aspetti da sempre presenti nella matematica classica: quello intuitivo, quello platonico, quello formale. Il compito per tutte le scuole doveva quindi essere una ricerca all'interno della matematica di tutte le caratteristiche di quel suo specifico aspetto che esse mettono rispettivamente in luce, consapevoli, appunto, che si tratta di *un* aspetto, e non dell'intera matematica.

In questa prospettiva, tutte le debolezze dell'intuizionismo che ho elencato si ridimensionano, in quanto esse

[97] Heyting (1949, 307).
[98] Heyting (1962, 195).

prendevano consistenza proprio dall'assolutezza della posizione intuizionista.

II. LE LOGICHE POLIVALENTI

Nell'introduzione a questa parte dedicata al TE ho distinto due approcci di lettura della scritta "$P(x) \vee \neg P(x)$": l'uno a partire dalla teoria della verità che è sottintesa da una logica data, l'altro a partire dai motivi che hanno determinato il sorgere di una logica in questione. Del primo mi sono occupata nel capitolo precedente, sull'intuizionismo; del secondo mi occupo qui, trattando delle logiche polivalenti.

Allo scopo va chiarito innanzitutto che: 1) le tautologie delle logiche polivalenti sono tali anche per quella bivalente; 2) le negazioni delle tautologie della bivalente non possono mai essere tautologie delle polivalenti, mentre non è detto *a priori* che una tautologia della bivalente valga in quelle polivalenti. Si comprendono queste due osservazioni considerando che le logiche polivalenti sono generalizzazioni della bivalente e che: a) ciò che vale in generale vale anche in particolare; b) se vale un caso particolare, la legge generale non può negarlo, anche se non è detto che lo affermi come regola generale, perché può esserci un altro caso particolare negativo. Comunque, le osservazioni 1) e 2) dicono che si è certi che nelle logiche polivalenti – come nell'intuizionismo – non vale la negazione del TE come schema d'assiomi e che, per sapere se vale il TE stesso come schema d'assiomi, le si deve considerare una per una e analizzare che tipo particolare di generalizzazione della bivalente esse siano. Di ognuna, quindi, si vedranno in questo capitolo i motivi che l'hanno originata e la conseguente definizione dei valori di verità per i connettivi, e si cercheranno, poi, nelle tavole di verità, i valori attribuiti al TE.

L'ordine di esposizione sarà impostato nella sua linea più generale secondo i criteri di costruzione delle logiche polivalenti. Si presentano prima le logiche di base, che non derivano cioè da altre logiche, per poi passare a quelle di grado più complesso, che derivano dalle prime per un'esigenza di sviluppo formale, tramite estensione, prodotto ed espansione. Di questi due sottocapitoli, il primo, che ha costituito un terreno molto approfondito, avrà un ordine di esposizione delle varie logiche polivalenti secondo il tipo di tavola di verità proposto per la negazione, sia perché essa è una caratteristica di spicco che, quindi, di per sé si offre come criterio di raggruppamento, sia perché è qui il connettivo decisivo per il TE, dal momento che la disgiunzione è definita nel modo classico. I tre paragrafi del primo sottocapitolo verteranno, perciò, rispettivamente sulle logiche polivalenti: 1) con la negazione *a specchio*, cioè che assume il valore opposto a quello di partenza; 2) con la negazione *a commutazione ciclica*, cioè tale che la negazione del primo termine di partenza assume il valore del secondo, la negazione del secondo il valore del terzo, ... la negazione dell'ultimo il valore del primo; 3) con la negazione *completa*, cioè che assume il maggiore dei valori rimanenti rispetto a quello del termine di partenza.

All'interno di ogni paragrafo, infine, l'esposizione delle singole logiche avverrà secondo la successione cronologica di quando sono state pubblicate le prime opere degli autori sull'argomento, e ciascuna verrà indicata sotto il nome di questi.

1. Le logiche di base

1.1. Le logiche con la negazione a specchio.

1.1.1. L,/ukasiewicz

Il primo sistema di logica polivalente che tratto è quello di L,/ukasiewicz, pubblicato nel 1920. Le motivazioni che lo hanno spinto alla formulazione di una logica alternativa a quella bivalente sono di due ordini: 1) emotivo (come viene definito da lui stesso)[99], consistente nel desiderio di liberazione dalla forma di costrizione sull'uomo che è data dalla necessità logica: se ci sono più logiche, siamo liberi di scegliere (fra loro) e significa che la logica non è pura descrizione inequivocabile di un esistente, ma è frutto di un atto creativo (e, quindi, libero); 2) interno alla ricerca logica, consistente nell'incompatibilità fra logica modale e bivalenza. La logica modale, infatti, tiene conto degli operatori di possibilità e di necessità, ed esprime la sua essenza nei tre teoremi che affermano: I) ciò che è impossibile non accade; II) ciò che non accade è impossibile; III) esiste qualcosa possibile (ossia tale che possano accadere quella e il suo opposto). Questi teoremi, se espressi in una logica bivalente dànno luogo ai seguenti problemi[100]:

a) il I e il II portano all'abolizione proprio delle distinzioni modali fra accadimento, necessità e possibilità;

b) il III – se si utilizza il cosiddetto sistema *prototetico* – porta al fatto che tutto è possibile, contro le nostre intuizioni;

c) il II e il III si contraddicono;

d) il II e b) portano ad affermare che tutto è vero.

[99] L,/ukasiewicz (1918: SW, 84).

[100] L,/ukasiewicz (1930: SW, 153-176).

Prima di considerare ognuno di questi problemi singolarmente, scriviamo in simboli i tre teoremi modali: I) $\neg Mp \rightarrow \neg p$; II) $\neg p \rightarrow \neg Mp$; III) $\exists p(Mp \wedge M\neg p)$, dove "*M*" sta per "möglich", cioè per "possibile".

a) Per considerare questo primo caso si diano come regole d'inferenza la sostituzione e il modus ponens, come premesse i primi due teoremi modali, la contrapposizione e la transitività, cioè:

1) $\neg Mp \rightarrow \neg p$;
2) $\neg p \rightarrow \neg Mp$;
3) $(\neg q \rightarrow \neg p)\rightarrow(p\rightarrow q)$;
4) $(\neg p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q \rightarrow p)$;
5) $(p\rightarrow\neg q) \rightarrow (q\rightarrow\neg p)$;
6) $(p\rightarrow q) \rightarrow ((q\rightarrow r)\rightarrow (p\rightarrow r))$.

Da queste si inferisce:

7) $p\rightarrow Mp$ per sostituzione in 3) di q con Mp e per successivo modus ponens da 1);
8) $\neg p\rightarrow M\neg p$ per sostituzione in 7) di p con $\neg p$.
9) $\neg M\neg p\rightarrow p$ per sostituzione in 4) di q con $M\neg p$ e successivo modus ponens da 8);
10) $\neg M\neg p\rightarrow Mp$ per sostituzione in 6) di p con $\neg M\neg p$, di q con p e di r con Mp e per due modus ponens successivi, da 9) e poi da 7);
11) $\neg Mp\rightarrow M\neg p$ per sostituzione in 4) di p con $M\neg p$, di q con Mp; e successivo modus ponens da 10);
12) $Mp\rightarrow p$ per sostituzione in 5) di q con Mp, di p con $\neg p$, e successivo modus ponens da 2);
13) $M\neg p\rightarrow\neg p$ per sostituzione in 12) di p con $\neg p$;
14) $p\rightarrow\neg M\neg p$ per sostituzione in 5) di p con $M\neg p$, di q con p, e per successivo modus ponens da 13);

15) $Mp \to \neg M \neg p$ per sostituzione in 6) di p con Mp, di q con p, di r con $\neg M \neg p$ e per due successivi modus ponens, da 12) prima e da 14) poi;
16) $M \neg p \to \neg Mp$ per sostituzione in 5) di p con Mp, di q con $M \neg p$, e per successivo modus ponens da 15).

Quest'inferenza fa sì che per 7) e 12) siano equivalenti "p" e "è possibile p", che per 9) e 14) siano equivalenti "p" e "è impossibile non p" (ovvero "è necessario p"), che per 10) e 15) siano equivalenti "è possibile p" e "è impossibile non p" (ovvero "è necessario p"): ovvero, che siano equivalenti "p", "è possibile p", "è necessario p".

Così per 8) e 13) sono equivalenti "non p" e "è possibile non p", per 11) e 16) sono equivalenti "è possibile non p" e "è impossibile p", per 1) e 2) sono equivalenti "non p" e "è impossibile p": ovvero sono equivalenti "non p", "impossibile p" e "è possibile non p".

Con queste equivalenze crollano le distinzioni modali: il I e il II teorema modale portano, quindi, all'abolizione delle distinzioni modali stesse, il che è assurdo.

b) In questo secondo caso si utilizza, oltre al calcolo proposizionale, il sistema prototetico di Lesniewski, in cui occorrono anche le variabili "funtori" (ad esempio, l'"M" in questione) e in cui vale l'affermazione (*) "$(\phi p \wedge \phi \neg p) \to \phi q$" – del tipo "ex falso quodlibet" – che ha come caso particolare "$(Mp \wedge M \neg p) \to Mq$". Le regole d'inferenza sono la sostituzione, il modus ponens e l'introduzione di quantificatore (se nel conseguente di un'implicazione c'è una variabile proposizionale libera p che non occorre nell'antecedente, si può mettere prima del conseguente "$\forall p$"); le premesse sono il III teorema modale (scritto in due maniere diverse ma equivalenti), la proposizione (*) e altre formule, cioè:

17) $\exists p(Mp \wedge M \neg p)$
18) $\neg \forall p \neg (Mp \wedge M \neg p)$
19) $(Mp \wedge M \neg p) \to Mq$
20) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
4) $(\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$

Da qui si può inferire:

21) $\neg Mq \to \neg (Mp \wedge M \neg p)$ per sostituzione in 20) di p con $(Mp \wedge M \neg p)$, di q con Mq, e per successivo modus ponens da 19);
22) $\neg Mq \to \forall p \neg (Mp \wedge M \neg p)$ per introduzione del quantificatore in 21);
23) Mp per sostituzione in 4) di p con Mp, di q con $\forall p \neg (Mp \wedge M \neg p)$; per modus ponens da 22) con p invece di q e per ulteriore modus ponens da 18).

Insomma, il III teorema nel sistema prototetico porta a dire che ogni cosa è possibile, cioè niente è impossibile e niente è necessario, contrariamente alle nostre intuizioni.

c) Per questo caso si hanno come regole d'inferenza la sostituzione, il modus ponens e l'introduzione di quantificatore, e come premesse la proposizione 12) – che è stata inferita dal II teorema modale – e le seguenti proposizioni:

24) $\neg (p \wedge \neg p)$
25) $p \to (q \to p)$
26) $(p \to q) \to ((r \to s) \to ((p \wedge r) \to (q \wedge s)))$.

Da qui si può inferire che:

27) $(Mp \wedge M \neg p) \to (p \wedge \neg p)$ per sostituzione in 26) di p con Mp, di q con p, di r con $M \neg p$, di s con $\neg p$; per doppio modus ponens da 12) (la seconda volta si sostituisce p con $\neg p$);

28) $\neg(Mp \wedge M\neg p)$ per sostituzione in 20) di p con $(Mp \wedge M\neg p)$, di q con $(p \wedge \neg p)$, per due successivi modus ponens, da 27) prima e da 24) poi;

29) $q \rightarrow \neg(Mp \wedge M\neg p)$ per sostituzione in 25) di p con $\neg(Mp \wedge M\neg p)$ e successivo modus ponens da 28);

30) $q \rightarrow \forall p \neg(Mp \wedge M\neg p)$ per introduzione del quantificatore in 29);

31) $\forall p \neg(Mp \wedge M\neg p)$ per sostituzione in 30) di q con $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$ e successivo modus ponens da 25).

Questa conclusione contraddice il III teorema espresso nella forma 18). Dal momento che questa conclusione è stata tratta a partire da (una conseguenza del) II teorema, si ha che il II e III teorema si contraddicono.

d) Per il quarto caso basta considerare la conseguenza 12) del II teorema, cioè $Mp \rightarrow p$, e la conseguenza 23) del II, cioè Mp: per modus ponens si ottiene p. Cioè, a partire dal II e III teorema si ottiene qualunque cosa, il che è un'affermazione di incoerenza del sistema che li comprende.

Questi problemi non possono essere risolti rinunciando al II o al III teorema, perché essi, anche separatamente (casi a e b), danno conseguenze inaccettabili. Quindi, se si vuole mantenere la logica modale, occorre esprimerla con una simbologia diversa, non bivalente.

La medesima esigenza emerge se si definisce il sistema bivalente tramite il metodo delle matrici, ovvero assegnando valori ai connettivi di una formula partendo dai valori delle sue componenti atomiche. Infatti, prendendo come connettivi base "$\neg$" e "$\rightarrow$", e indicando "falso" con "0" e "vero" con "1", si hanno le seguenti matrici:

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \rightarrow q$
0	1	1
0	0	1
1	0	0
1	1	1

In questo sistema possono essere formate solo quattro differenti funzioni a un argomento:

1) $\phi 0=0$ e $\phi 1=0$, dove ϕ è inteso come "operatore di falsità" perché dà sempre come risultato "0";

2) $\phi 0=0$ e $\phi 1=1$, dove ϕ è inteso come "operatore di realtà" perché lascia inalterato il dato di partenza;

3) $\phi 0=1$ e $\phi 1=0$, dove ϕ è inteso come "operatore di negazione" perché dà come risultato il valore opposto a quello di partenza;

4) $\phi 0=1$ e $\phi 1=1$, dove ϕ è inteso come "operatore di verità" perché dà come risultato sempre "1".

L'operatore modale "*M*" deve coincidere con uno di questi quattro casi, ma:

a) ognuno dei tre teoremi modali esclude certi casi, per cui non c'è un caso che vada bene per tutti e tre i teoremi;

b) i casi che vanno bene a un teorema (o a una coppia di teoremi) mostrano direttamente i problemi dei teoremi modali che prima si erano evidenziati tramite dimostrazione.

Vediamo innanzitutto come M non si adatti a nessuno dei quattro tipi di operatori unari bivalenti:

A) il primo teorema vale solo per M operatore di realtà (in base al quale Mp e p hanno gli stessi valori e, dunque, vale $\neg Mp \rightarrow \neg p$) o di verità (in base al quale Mp ha sempre valore 1 e, quindi, $\neg Mp$ ha sempre valore 0: perciò, secondo le matrici bivalenti dell'implicazione, $\neg Mp \rightarrow \neg p$ ha valore 1);

B) il II teorema vale solo per M operatore di realtà (in base al quale Mp e p hanno gli stessi valori e, dunque, vale $\neg p \rightarrow \neg Mp$) o di falsità (in base al quale Mp ha sempre valore 0 e, quindi, $\neg Mp$ ha sempre valore 1: perciò, secondo le matrici bivalenti dell'implicazione, $\neg p \rightarrow \neg Mp$ ha pure valore 1);
C) il III teorema vale solo per M operatore di verità (in base al quale sia Mp sia $M\neg p$ hanno valore 1 e, quindi, pure $Mp \wedge M\neg p$ ha valore 1, secondo le matrici bivalenti della congiunzione).

Insomma, nessuna delle quattro funzioni possibili va bene per tutti e tre i teoremi contemporaneamente.

Inoltre, dai punti A) B) C) appena presentati emerge che:
1) il I e II teorema valgono per Mp operatore di realtà, cioè, uniti, portano all'annullamento della logica modale;
2) il III teorema vale solo per Mp operatore di verità, cioè porta a dire che tutto è possibile (l'operatore di possibilità dà il vero, a qualunque cosa esso venga applicato);
3) il II e il III teorema sono incompatibili perché nessun Mp li verifica simultaneamente.
Questi 1) 2) 3) sono proprio i problemi che avevamo messo in evidenza sopra.

Tutto ciò comporta l' esigenza di un sistema alternativo a quello bivalente, e L,/ukasiewicz ne propone uno con le seguenti matrici a tre valori (0, ½, 1), dove ½ viene considerato come il valore della possibilità, perché è inteso come valore delle formule né vere né false[101]:

p	$\neg p$	p	q	$p \rightarrow q$
0	1	0	0	1
½	½	0	½	1
1	0	0	1	1
		½	0	½
		½	½	1
		½	1	1
		1	0	0
		1	½	½
		1	1	1

[101] Rescher (1969, 24).

Va sottolineato che L,/ukasiewicz: a) conserva i medesimi valori della logica bivalente per i connettivi quando la formula cui si applicano assume o il valore "0" o il valore "1"; b) sceglie per la negazione, quando la formula cui si applica assume il valore ½, lo stesso ½ per l'essenza stessa della "possibilità"; c) dà per definizione di disgiunzione : "$p \vee q \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow q$" e di congiunzione: "$p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$", in modo da verificare direttamente con le matrici il III teorema.

Con i tre valori dati è possibile definire l'operatore M come segue:

$$M0=0 \qquad M½=1 \qquad M1=1$$

e risolvere con tale definizione i contrasti (che scaturivano dalla logica bivalente) fra i teoremi modali, perché il I teorema vale solo per $M1=1$, il II solo per $M0=0$, il III solo per $M½=1$, senza che i valori richiesti dall'uno interferiscano con quelli richiesti dagli altri. Quest'ultimo fatto mostra anche che la suddetta definizione è l'unica possibile per M, se si vogliono salvare i tre teoremi modali.

Vediamo adesso da vicino come tale definizione di M effettivamente concordi con i tre teoremi, mostrando come, al variare dei valori di p, si debba attribuire un particolare valore a Mp, se si vogliono far valere i teoremi. Ovviamente indichiamo qui solo i casi determinanti: ci sono, infatti, alcuni valori di p per cui i teoremi sono comunque veri indipendentemente dal valore di Mp, e questi non vengono qui considerati. Per evidenziare il caso determinante del I teorema, bisogna applicare all'enunciato la contrapposizione, ottenendo "$p \rightarrow Mp$": per il valore 1 di p, perché l'espressione sia vera, Mp deve essere =1, mentre per gli altri valori di p l'espressione è sempre vera.

Il II teorema ha il caso determinante nell'antecedente =1, cioè con p=0: affinché tutta l'implicazione sia vera, $\neg Mp$ deve essere =1, ovvero Mp deve essere =0, ovvero $M0$ deve essere =0. Il III teorema può essere vero solo se p=½ (altrimenti la congiunzione è falsa) e cioè solo se $M½$=1.

A questo punto, chiarita la necessità per L/ukasiewicz di una logica trivalente, e l'adattabilità al caso di quella da lui proposta, si può passare a considerare il TE all'interno di tale sistema ($L/_3$): non è una tautologia, perché assume il valore ½ quando p assume il valore ½. Infatti, per la definizione di "$p \vee q$" come equivalente a $(p \rightarrow q) \rightarrow q$, si ha "$p \vee \neg p \equiv (p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$", che, secondo le matrici date, assume i seguenti valori:

$(p$	$\rightarrow$	$\neg p)$	$\rightarrow$	$\neg p$
0	$\underline{1}$	1	$\underline{1}$	$\underline{1}$
½	$\underline{1}$	½	$\underline{½}$	$\underline{½}$
1	$\underline{0}$	0	$\underline{1}$	$\underline{0}$

Rescher fa notare[102] che, con la medesima definizione di negazione, se L/ukasiewicz avesse adottato come definizione di disgiunzione: $p \vee,^{\vee} q \equiv \neg p \rightarrow q$, il TE, espresso nella forma $p \vee,^{\vee} \neg p$, sarebbe stato una tautologia del sistema, perché sarebbe stato equivalente a $\neg p \rightarrow \neg p$, tautologia che si vede immediatamente osservando la tavola dell'implicazione, che dà valore 1 quando antecedente e conseguente hanno lo stesso valore. Solo che con questa implicazione si avrebbero effetti indesiderati, quali il fatto che, per esempio, $(p \vee p) \rightarrow p$ non potrebbe più essere tautologia, contro ogni nostra intuizione in proposito. Va rilevato che, a differenza di quanto avviene nella logica intuizionista in cui il TE non è più una tautologia mentre il principio di non-contraddizione ($\neg(p \wedge \neg p)$) rimane una tautologia, in $L/_3$ anche il principio di non-contraddizione non assume più sempre il valore 1, ma ½ quando p assume valore ½.

Il sistema $L/_3$ può essere sviluppato, a partire dai tre valori di verità 0 1 ½, con tavole di verità ricavabili direttamente dalle seguenti regole aritmetiche:

$/\neg p/ = 1 - /p/$

$/p \vee q/ = \max [/p/, /q/]$

$/p \rightarrow q/ = 1$ (se $/p/ \leq /q/$); $= 1 - /p/ + /q/$ (se $p > q$)

$/p \wedge q/ = \min [/p/, /q/]$.

Le ho esposte così, seguendo Rescher[103], per maggiore comodità nel trattamento, mentre di esse nella esposizione originale di L/ukasiewicz[104] erano espresse solo la regola della negazione e dell'implicazione, assieme alle solite definizioni di

[102] Rescher (1969, 26-27)
[103] Rescher (1969, 36).
[104] L/ukasiewicz (1920).

disgiunzione ($p \vee q \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow q$) e di congiunzione ($p \wedge q \equiv \equiv (\neg p \vee \neg q)$).

È chiaro che, partendo da altri valori di verità, con le medesime regole aritmetiche si possono ricavare altri sistemi di logica: in particolare, tenendo come valori estremi sempre 0 e 1 e dividendo l'intervallo fra tali estremi in n parti, si ottiene la serie $L/_n$ di logiche di L/ukasiewicz a più valori; tenendo sempre gli stessi valori estremi, ma assieme a tutti i numeri razionali o a tutti i reali compresi fra 0 e 1, si ottengono i sistemi $L/_{\aleph_0}$ e $L/_{\aleph_1}$ (essenzialmente equivalenti per la logica proposizionale, in quanto a quel livello hanno le medesime tautologie)[105].

---

[105] Il sistema $L/_{\aleph_1}$ fu preso come base di partenza da L. Zadeh (1965) per costruire logiche sfumate (*fuzzy logics*), ossia logiche che tengano conto anche di predicati vaghi - ad esempio "fresco" oppure "vecchio" - cioè per i quali non si è in grado di dire sempre con esattezza quando un "oggetto" ne gode e quando non ne gode. L'utilità di tali logiche era stata messa in luce da M. Black (1937), in riferimento all'articolo in cui Russell (1923) aveva notato il fatto che la logica manipolava simboli supponendoli definiti in modo preciso, mentre i predicati delle scienze empiriche presentano una certa vaghezza. Black propose, dunque, di colmare questo iato fra logica e realtà, abbozzando l'idea di una logica che tenesse conto anche di questi predicati. Per avere un quadro degli sviluppi di quest'idea, si vedano, ad esempio, Kosko (1993) e (1994).

A proposito dei predicati vaghi, vale la pena di ricordare la posizione di M. Farber (1942) che dà un'interpretazione del TE proprio come principio che specifica le proposizioni definite di un sistema. Farber parte da una concezione delle logiche come finalizzate ai vari sistemi di conoscenza e, quindi, come doventisi adattare alla crescita della conoscenza: per questo, il loro nucleo - costituito dai tre princìpi di identità, non-contraddizione e TE - deve essere ridefinito di volta in volta. In particolare, del TE va precisato di volta in volta il campo di applicazione, in quanto esso esprime quali sono le proposizioni α determinate del sistema e, quindi, quali possono essere messe in questione, perché per esse c'è sicuramente una scelta fra α e non α, anche

In tutti questi sistemi il TE non è una tautologia, in quanto, per le regole suddette: $p \vee \neg p$ = max [$/p/$, 1-$/p/$], che è sicuramente diverso da 1 per $/p/ \neq 1$ e per $/p/ \neq 0$.

1.1.2. Reichenbach e Zawirski

La seconda logica polivalente che presento è quella prodotta da Reichenbach e Zawirski negli anni 1932-1936[106], da distinguere da quella quantistica alla quale mi riferirò in seguito quando farò il solo nome di Reichenbach come autore. Questa che tratto ora è la logica probabilistica, adatta ad un tipo di verità che possieda una gradazione continua. Per questo essa corrisponde alla fisica classica e non alla meccanica quantistica: si parla di "gradi" di verità, non di "indeterminazione" di verità. Gli autori hanno pensato di utilizzare la probabilità e non, per esempio, la desiderabilità o il costo di uno stato di cose per indicare i gradi di verità, poiché essa ha un intimo legame con i concetti semantici di verità e falsità: la probabilità 0 è garanzia di falsità, la 1 di verità. Posto questo, è chiaro che le assegnazioni numeriche ad ogni formula devono rispettare alcune condizioni

---

se magari non siamo in grado di trovare quale delle due alternative vale. Insomma, il TE viene letto come delimitante le proposizioni definite di un sistema, e così la definizione del suo campo di applicabilità è intesa come delineazione dell'insieme di tali proposizioni, che deve variare all'evolversi del sistema conoscitivo stesso.

Dal canto suo, Rekha Verma (1970), analizzando le espressioni vaghe, propone, per dare loro uno status all'interno della logica, una logica con i tre valori: definitamente vero, definitamente falso, indefinitamente vero. Questi non modificano il concetto che riguardano (non lo fanno diventare definito), ma solo si applicano ad esso: la non-validità del TE, per questo, continua a perdurare. Vale, invece, quella che Rekha Verma chiama la seconda forma del TE o "quarto escluso": "ogni cosa è definitamente o indefinitamente vera".

[106] Rescher (1969:184-188).

di base per essere realmente misure di probabilità (e, quindi, essere qui considerate valori di verità):

1) $0 \leq \Pr(p)$, per qualsiasi espressione p – con $\Pr(p)$=probabilità di p –;

2) $\Pr(p \vee \neg p) = 1$;

3) $\Pr(p \vee q) = \Pr(p) + \Pr(q)$, posto $\Pr(p \wedge q)=0$;

4) $\Pr(p)=\Pr(q)$ quando p e q sono logicamente equivalenti.

Da qui derivano le seguenti regole di verità:

1) $/p/=\Pr(p)$;

2) $/\neg p/=1-\Pr(p)$;

3) $/p \vee q/=\Pr(p)+\Pr(q)$ se p e q sono mutualmente esclusivi, altrimenti il valore è un certo λ tale che $\lambda \leq \Pr(p)+\Pr(q)$ e $\lambda \geq \Pr(p)$ e $\lambda \geq \Pr(q)$;

4) $/p \wedge q/=\Pr(p)+\Pr(q)-\Pr(p \vee q)$;

5) $/p \rightarrow q/=/\neg p \vee q/$. Questo sistema di logica ha la peculiarità di non essere vero-funzionale. La vero-funzionalità è la dipendenza del valore di una formula complessa dal valore delle sue componenti atomiche: formalmente la si può definire come $/\phi(p, q)/=F_{\phi}(/p/, /q/)$, dove $\phi(p, q)$ indica la funzione complessa a componenti atomiche p e q, e F_{ϕ} indica una funzione che dipende – in questo caso – da p e q. Si può dare subito la dimostrazione che la vero-funzionalità non vige in questo sistema, fornendo un esempio del valore di una congiunzione che non è fisso, ma varia, pur rimanendo costante il valore delle componenti.

Si cerchi il valore di $\frac{1}{2} \wedge \frac{1}{2}$ posto $/p/=\Pr(p)=\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2} \wedge \frac{1}{2} = /p \wedge p/= \Pr(p \wedge p) = \Pr(p)+\Pr(p)-\Pr(p \vee p) = 2\Pr(p)-\Pr(p) = \Pr(p) = \frac{1}{2}$, mentre, d'altro canto, quando $\Pr(p)=\frac{1}{2}$, allora $/\neg p/ = \Pr(\neg p) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, per cui $\frac{1}{2} \wedge \frac{1}{2} = /p \wedge \neg p/ = \Pr(p \wedge \neg p) = \Pr(p)+\Pr(\neg p)-\Pr(p \vee \neg p) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} -1 =0$. Quindi $\frac{1}{2} \wedge \frac{1}{2}$ non ha

un valore fisso, ma può variare tra 0 e ½. Perciò la logica in questione *non* è verofunzionale.

Nonostante questa differenza, la logica probabilistica di Reichenbach e Zawirski e quella classica bivalente hanno esattamente le stesse tautologie, come si può dimostrare vedendo da un lato che le regole di verità di C_2 (=la logica classica) concordano con quelle di PL (=la logica probabilistica) quando solo i valori 0 e 1 sono coinvolti, e dall'altra che tutti gli assiomi di C_2 sono tautologie di PL.

Per il discorso sul TE, comunque, basta osservare le condizioni di base che sono state imposte alle assegnazioni numeriche per essere considerate misure di probabilità e, quindi, valori di verità: la seconda richiede $\Pr(p \vee \neg p)=1$, cioè, dato che $\Pr(q)=/q/$, richiede $/p \vee \neg p/=1$, ossia è già implicito nelle condizioni di base che il TE sia una tautologia.

1.1.3. Kleene

La terza logica polivalente che qui presento è quella di Kleene, perché le sue pubblicazioni in proposito appaiono nel 1938[107]. Il suo sistema trivalente nasce in riferimento a quei predicati matematici $P(x)$ a una variabile x sul dominio D, definiti solo per una parte di questo dominio. Ad esempio, sia $P(x)$ se e solo se $1 \leq 1/x \leq 2$: esso è vero per $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, è falso per $0<x<\frac{1}{2}$ o $x>1$, ed è indeterminato per $x=0$. Insomma, per quella parte di dominio in cui i predicati non sono definiti, noi non possiamo determinare il valore. Così, tenendo in considerazione questi casi, Kleene ha progettato le tavole di verità che riporto qua di seguito, che comprendono anche l'eventualità di dover attribuire un valore ai predicati matematici suaccennati: in esse, oltre ai

107 Kleene (1938 e1952: 332-340).

valori "T" (vero) e "F" (falso), c'è anche I (indeterminato), proprio come valore associato a quelle formule con predicato che non è definito su tutto il dominio della variabile. Va notato che Kleene non riteneva che il fatto di non definire un predicato fosse determinato ontologicamente, bensì lo intendeva causato dai limiti delle nostre possibilità conoscitive.
Ecco le tavole:

p	$\neg p$
T	F
I	I
F	T

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	I	I	I	I
T	F	F	T	F
I	T	I	T	T
I	I	I	I	I
I	F	F	I	I
F	T	F	T	T
F	I	F	I	T
F	F	F	I	T

Chiaramente in questo sistema il TE non può essere una tautologia perché ha la seguente tavola di verità:

p	$\vee$	$\neg p$
T	T	F
I	I	I
F	T	T

cioè, non sempre assume il valore vero, ma c'è un caso in cui è indeterminato.

Oltre a questo sistema, Kleene ne ha introdotto un altro[108] ("debole") in riferimento a proposizioni aritmetiche il cui valore di verità è determinato tramite una procedura di calcolo effettiva: tale procedura, quando si trova (in formule non atomiche) in entrata il valore "I", è incapace di elaborarlo ulteriormente, per cui lo riporta anche in uscita. Ne derivano tavole di verità identiche a quelle del "sistema interno" di Bochvar di cui si parlerà tra poco: quest'ultimo, infatti, si pose come Kleene (anche se per motivi diversi) di lasciare in uscita l'indecidibilità quando la trova in entrata. Per il TE, quindi, vale qui il medesimo discorso che faremo poi per Bochvar: anticipiamo che neppure in questo caso esso è una tautologia. Vedremo dopo di preciso, sulle tavole, il perché.

1.1.4. Bochvar

Bochvar propone nel 1939[109] le sue tavole per risolvere il problema dei paradossi, di cui ci si occuperà nel III capitolo. Qui basta ricordare che i paradossi sono enunciati problematici perché sono veri se e solo se sono falsi.

Bochvar legge i paradossi come gli enunciati il cui valore è indecidibile, e pensa di risolvere la questione accettando che l'indecidibilità rimanga tale, in modo da non trovarsi più di fronte allo scoglio del "vero se e solo se falso". Così il segno "I" è presente nelle sue tavole non come un valore di verità intermedio fra gli altri due, ma come un segnaposto per un valore che, a causa dell'indecidibilità, non siamo in grado di trovare. Inoltre, il segno "I", proprio per l'accettazione

108 Kleene (1956, 334.) e Rescher (1969: 35-36).
109 Bochvar (1939) e Rescher (1969, 43-44).

dell'indecidibilità, ogniqualvolta si trova in entrata, viene riportato in uscita. Come risultato si ha una tavola per la negazione definita nello stesso modo che nel sistema di L/ukasiewicz, con "*F*" per 0, "*T*" per 1 e "*I*" per ½, fatta salva la differenza di significato fra la "possibilità" di L/ukasiewicz e l'"indecidibile" di Bochvar.

L'altro connettivo di base qui non è l'implicazione, ma la congiunzione: essa non potrà più assumere come valore il minimo, ossia il più falso, dei valori delle formule atomiche cui si riferisce, ma assumerà valore *I* non appena si presenti qualche elemento di indecidibilità, ovvero quando almeno una delle sue formule atomiche assume valore *I*.
Ecco la tavola[110]:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	I	I
T	F	F
I	T	I
I	I	I
I	F	I
F	T	F
F	I	I
F	F	F

A partire da queste matrici, gli altri connettivi sono così definiti: $p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$ e $p \rightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$. In tale sistema il TE non può essere una tautologia, come, però, nient'altro può esserlo, sempre perché, ogni volta che c'è in entrata delle matrici il valore *I*, necessariamente questo si ripresenta anche in

110 Rescher (1969, 29).

uscita. Se, allora, si vuol rendere applicabile a questo sistema il concetto di tautologia o, alternativamente, quello di quasi-tautologia (ossia una formula che non assume mai il valore "falso"), il sistema va esteso. Bochvar propone di modificarlo attraverso l'aggiunta di un modo speciale di asserire una formula, oltre a quello normale (detto "interno") per cui l'asserzione di qualsiasi formula p è semplicemente p. Il nuovo modo, detto "esterno", indica come asserzione delle formule atomiche p "Ap" con la seguente tavola di verità di Ap rispetto a p[111]:

p	Ap
T	T
I	F
F	F

Per quanto riguarda le formule complesse, il modo esterno si articola rispetto a quello interno secondo questo schema:

connettivo	forma interna	forma esterna
negazione	$\neg p$	$\neg,\neg p \equiv \neg \mathrm{A}p$
congiunzione	$p \wedge q$	$p\wedge,\wedge q \equiv \mathrm{A}p \wedge \mathrm{A}q$
disgiunzione	$p \vee q$	$p\vee,\vee q \equiv \mathrm{A}p \vee \mathrm{A}q$
implicazione	$p \rightarrow q$	$p \Rightarrow q \equiv \mathrm{A}p \rightarrow \mathrm{A}q$

111 Rescher (1969, 30-31).

È evidente che il sistema così ottenuto lavora soltanto coi due valori classici di verità e, quindi, concorda interamente col sistema classico a due valori: in particolare, il TE, qui espresso come "A$p \vee \neg$Ap", sarà una tautologia, perché il primo membro della disgiunzione può solo assumere valori T o F (secondo la tabella dell'operatore Ap), come pure il secondo (perché la negazione, quando riceve in entrata solo i valori T o F dà i risultati classici), e noi sappiamo che il sistema di Bochvar già in partenza era normale, cioè concordava coi risultati classici quando in entrata aveva soltanto T o F.

È possibile fare delle generalizzazioni del sistema interno di Bochvar, come per quello di L/ukasiewicz, tenendo come valori estremi 0 e 1, e prendendo gli altri a seconda del numero n di parti in cui si divide l'intervallo tra 0 e 1 (sistemi B_n) e avendo come regole di verità le seguenti[112]:

$/\neg p/=1-/p/$

$/p \wedge q/ = /p/ \times /q/$ se sia $/p/$ sia $/q/ \in \{0, 1\}$

$= Z(n)$ altrimenti, con $Z(n)=½$ per n dispari e $Z(n)=\frac{n-2}{2(n-1)}$ per n pari;

$/p \vee q/ = \min [1, /p/+/q/]$ se sia $/p/$ sia $/q/ \in \{0, 1\}$

$= Z(n)$ altrimenti, con $Z(n)$ definita come sopra;

$/p \rightarrow q/ = \min [1, 1-/p/+/q/]$ se sia $/p/$ sia $/q/ \in \{0, 1\}$

$= Z(n)$ altrimenti, con $Z(n)$ definita come sopra.

In tutta questa famiglia di generalizzazioni del sistema interno trivalente di Bochvar il TE non è una tautologia, perché i suoi valori possibili sono:

$/p \vee \neg p/ = \min [1, /p/+(1-/p/)]=1$ se $/p/\in \{0, 1\}$;

$= Z(n)=½$ altrimenti, per n dispari;

[112] Rescher (1969, 43-44).

$= Z(n)=\frac{n-2}{2(n-1)} \neq 1$ altrimenti, per n pari (perché l'unico n che renderebbe l'espressione =1 sarebbe 0, il che comporterebbe di non dare alcun valore di verità a qualsiasi espressione del sistema B_0).

Da questo si vede che, per qualsiasi valore di partenza di p, non si ha mai in uscita sempre 1, perché le due combinazioni possibili di valori in uscita, cioè la I con la III e la I con la II presentano comunque un tipo di valore $\neq 1$.

1.1.5. Gödel

Consideriamo un'altra famiglia di logiche polivalenti, dovute a Gödel principalmente[113] e importanti per le relazioni fra i teoremi del calcolo proposizionale intuizionista IPC e le loro tautologie. Infatti, mentre Gödel ha dimostrato che nessun sistema di logica finitamente a più valori può essere tale che le sue tautologie corrispondano esattamente ai teoremi di IPC, Dummett ha, a sua volta, dimostrato che, se al sistema di assiomi di IPC si aggiunge "$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$", le tautologie del sistema ottenuto sono esattamente le tautologie di $G_{\aleph}$, e L/ukasiewicz ha stabilito[114] che, se si aggiunge "$(\neg p \rightarrow q) \rightarrow$ $\rightarrow(((q \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow q)$" al sistema di assiomi di IPC, i teoremi del sistema ottenuto sono esattamente le tautologie di G_3. Tale famiglia di sistemi polivalenti è ottenuta prendendo sempre come valori estremi 0 e 1 e come valori intermedi quelli dati dal seguente schema:

$/\neg p/= 1$ se $/p/=0$

[113] Rescher (1969, 44-46).

[114] L/ukasiewicz (1952) e Rescher (1969, 45).

$= 0 \quad$ se $/p/ \neq 0$
$/p \wedge q/ = \min [/p/, /q/]$
$/p \vee q/ = \max [/p/, /q/]$
$/p \rightarrow q/ = 1 \quad$ se $/p/ \leq /q/$
$= /q/ \quad$ se $/p/ > /q/$.
In nessuno di questi sistemi di Gödel il TE è una tautologia perché, per tutti i valori di $p \neq 0$, il TE assume proprio questi valori, dal momento che $/p \vee \neg p/ = \max [/p/, /\neg p/]$ e che, nel caso suddetto, $/\neg p/=0$ per le regole di verità date.

1.2. Le logiche con la negazione a commutazione ciclica

Tutte le tavole di verità della negazione presentate fin qui hanno in comune la configurazione a "immagine speculare", cioè in esse la negazione assume il valore di verità del suo opposto nell'ordine di verità. Tenendo ferma questa caratteristica, assieme alla solita costruzione dei valori di verità di base e alle tavole della congiunzione e della disgiunzione che mandano in uscita rispettivamente "il più falso" e "il più vero" dei valori dei congiunti e dei disgiunti, è possibile, mutando la tavola dell'implicazione, ottenere la successione standard dei sistemi a più valori e le sue varianti[115].

Per tutti, comunque, il TE non è una tautologia perché, quando p assume uno tra i valori di verità intermedi tra vero e falso, "$\neg p$" ne assume un altro (l'opposto) sempre tra questi intermedi; così il valore di "$p \vee \neg p$" è comunque un valore intermedio, quindi diverso da "vero".

[115] Rescher (1969, 46-52).

Consideriamo, adesso, un tipo di logica a più valori con una negazione non a immagine speculare ma a commutazione ciclica. A rigore si dovrebbero indicare due sistemi di questa logica, cioè quello di Emil Post e quello di Hans Reichenbach. In realtà in questo paragrafo si tratta solo il sistema di Post, perché Reichenbach ha posto nel suo sistema tutti e tre i tipi di negazione e, perciò, si preferisce analizzarlo nel paragrafo dedicato al tipo di negazione che ha solo quello ("completo").

La logica di Post[116] è stata costruita sulla base di considerazioni puramente formali, cioè senza alcun riferimento alla possibile interpretazione dei valori di verità[117]. Egli, infatti, semplicemente permise alle formule di assumere altri valori oltre a quello di vero e di falso (che qui si indicano rispettivamente con 1 e m) e propose le sue tavole di verità prendendo come connettivi base la negazione e la disgiunzione, sulle orme dei *Principia Mathematica* di Whitehead e Russell.

Alla negazione assegna, al posto della tavola (a immagine speculare):

p	$\neg p$
T	F
I_1	I_{n-2}
I_2	I_{n-3}
.	.
.	.
.	.
I_{n-3}	I_2
I_{n-2}	I_1

[116] Post (1921, 163-185) e Rescher (1969, 53).
[117] Rescher (1969, 52-55).

F *T*

la tavola (a commutazione ciclica):

p	$\neg p$
1	2
2	3
3	4
.	.
.	.
.	.
m-2	m-1
m-1	m
m	1

La disgiunzione è governata da tavole di verità basate sul principio, già familiare da $L/_n$ e dalle successioni standard, che il valore di verità è il "più vero" dei costituenti: in questo caso, per come si è indicata la scala dei valori, è il più piccolo, ovvero $/p \vee q/ = \min[/p/, /q/]$. Gli altri connettivi sono così definiti: $p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$; $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q)$.

Osserviamo innanzitutto cosa succede del TE nel sistema trivalente di Post P_3 attraverso la sua tabella:

p	$\vee$	$\neg p$
1	$\underline{1}$	1
2	$\underline{2}$	3
3	$\underline{1}$	1

Il TE non è una tautologia, perché in un caso assume valore 2. Però è una tautologia il principio del quarto escluso: $p \vee \neg p \vee \neg\neg p$. Infatti, ecco la sua tabella:

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$p \vee \neg p \vee \neg\neg p$
1	2	3	1
2	3	1	1
3	2	2	1

Grazie alla ciclicità dei valori della negazione, il valore 1 nel caso del principio del quarto escluso compare ad ogni riga, permettendo così alla tavola di riportarlo sempre in uscita in quanto valore minimo dei componenti.

Osserviamo ora cosa succede del TE e del quarto escluso nel sistema quadrivalente di Post P_4: nessuno dei due è una tautologia, come secondo le tabelle:

p	$\vee$	$\neg p$	p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$p \vee \neg p \vee \neg\neg p$
1	$\underline{1}$	1	1	2	3	1
2	$\underline{2}$	3	2	3	4	2
3	$\underline{3}$	4	3	4	1	1
4	$\underline{1}$	1	4	1	2	1

mentre è una tautologia il principio del "quinto escluso": $p \vee \neg p \vee \neg\neg p \vee \neg\neg\neg p$.

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$\neg\neg\neg p$	$p \vee \neg p \vee \neg\neg p \vee \neg\neg\neg p$
1	2	3	4	1

2	3	4	1	1
3	4	1	2	1
4	1	2	3	1

La stessa cosa succede per tutti i sistemi di Post a più valori (ma finiti) P_n, ovvero non sono tautologie i principi dell' "n-, (n-1)-, (n-2)-,... -esimo escluso", mentre è una tautologia l'"(n+1)-esimo escluso" poiché la p compare n volte nella disgiunzione ed assume in ogni riga della tavola tutti gli n valori, dando in uscita il minimo fra loro che, così, è sempre il medesimo, cioè 1. Che la p nel principio dell' (n+1)-esimo escluso sia presente n volte è implicito nell'espressione stessa, che significa che valgono solo n disgiunzioni con p, $\neg p$, ecc. e che la (n+1)-esima possibilità di p come disgiunto (preceduto da n segni di negazione) è da escludere. Che in ogni riga ci siano tutti gli n valori è dovuto alla ciclicità della negazione. Infatti, poiché ci sono n disgiunti di cui ciascuno è la negazione del precedente, si ha, per la ciclicità della negazione, che in ogni riga ci sono tutti gli n valori.

In un secondo tempo Post si è preoccupato di dare un'interpretazione semantica a questa sua logica in termini non proposizionali, ma di insiemi di proposizioni: si tratta, comunque, di un'interpretazione non-standard, perché ci fa ottenere non una logica proposizionale – come in tutti i casi precedentemente illustrati –, ma di insiemi di proposizioni, in cui gli operatori proposizionali che rappresentano la negazione e la disgiunzione sono solo uno straniato senso di questi termini[118].

[118] *Ibid.*, 55.

1.3. La logica con la negazione "completa"

Si è già detto precedentemente che la logica di Hans Reichenbach poteva essere presentata nei paragrafi 1 e 2 perché essa comprende tutti e tre i tipi di negazione, ma che la si tratta in questo perché è l'unica logica che comprende la negazione completa. Essa viene proposta da Reichenbach[119] per risolvere il problema delle anomalie causali che si presentano in meccanica quantistica, cioè di quelle contraddizioni riscontrate a livello microscopico delle leggi stabilite per gli eventi osservabili: ad esempio, il fatto che il numero di particelle che colpiscono uno schermo al di là di due fenditure, entrambe aperte, non è uguale alla somma delle particelle che passano da ognuna delle due singolarmente quando l'altra è chiusa. Questo sistema ha come valori di verità "vero", "falso" e "indeterminato" (nel senso che è impossibile per sempre, non per fattori tecnici ma per principio, effettuare quella certa valutazione) e ha come tavole di verità:

[119] Reichenbach (1935a-b; 1949, 251-280).

p q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \supset q$	$p \to q$	$p \Rightarrow q$
T T	T	T	T	T	T
T I	T	I	I	F	I
T F	T	F	F	FF	
I T	T	I	T	T	I
I I	I	I	T	T	I
I F	I	F	I	T	I
F T	T	F	T	T	I
F I	I	F	T	T	I
F F	F	F	T	T	I

dove la disgiunzione e la congiunzione sono le solite, mentre ci sono tre tipi di implicazione, perché tanti sono i tipi di operazioni qui possibili che soddisfano i seguenti requisiti: 1) il procedimento di inferenza, cioè se A e $A \to B$ sono veri anche B è vero; 2) se A è vero e B è falso, l'implicazione risulta falsa; 3) $A \to A$ (tranne la "pseudo-implicazione", che è l'ultima nell'ordine). I tre tipi di negazione sono i seguenti:

p	$\sim p$	$-p$	$\bar{p}$
T	I	F	I
I	F	I	T
F	T	T	T

La prima negazione, in quanto ciclica, viene chiamata "post-A"; la seconda, in quanto a specchio e, quindi, corrispondente alla funzione del segno aritmetico "-" (se I viene interpretato come 0), viene chiamata "meno A", e la terza, in quanto completa, poiché trasforma un valore di verità nel valore

maggiore tra i restanti, viene chiamata "non A". Prima di vedere cosa succede del TE in questo sistema, mostriamo che esso permette effettivamente di evitare le anomalie causali perché, offrendo una distinzione fra disgiunzioni chiuse e disgiunzioni complete, non permette l'applicazione del principio di sovrapposizione corpuscolare e, quindi, sospende il meccanismo della formazione dell'anomalia causale. Allo scopo: 1) prima definiamo la disgiunzione suddetta, 2) poi indichiamo come nella logica di Reichenbach le due disgiunzioni non coincidono, 3) infine analizziamo come questo fatto risolva il problema delle anomalie causali[120].

1) Una disgiunzione di n termini è chiusa se è tale che, quando n-1 termini sono falsi, l'n-esimo è vero; una disgiunzione è completa se ha almeno un membro vero, risultando così vera essa stessa. Nella logica bivalente una disgiunzione chiusa è anche completa perché in essa gli n-1 termini possono essere solo veri o falsi, per cui se ce n'è qualcuno vero, la disgiunzione è completa, mentre, se sono tutti falsi, la disgiunzione è completa in quanto la definizione di chiusa ci dice che in questo caso l'n-esimo termine è vero.

2) Nella logica trivalente, invece, non si può affermare a priori che una disgiunzione chiusa sia completa, perché la chiusura ci dice cosa succede solo quando gli n-1 termini sono falsi: è un'indicazione solo per questo caso. Qui essi possono essere veri, falsi o indeterminati. Se gli n-1 termini non sono tutti veri, né tutti falsi, né alcuni veri e alcuni falsi, né alcuni veri e alcuni indeterminati, ma sono alcuni falsi e alcuni indeterminati o tutti indeterminati, il fatto che la disgiunzione sia chiusa non suggerisce niente su come deve essere l'ultimo termine, perciò non possiamo dire che sia completa: per noi è indeterminata.

[120] *Ibid.*, 270-271.

Attenzione: si è detto che nella logica trivalente l'implicazione di chiusa e completa per una disgiunzione non vale.

Questo potrebbe far pensare che la specifica logica di Reichenbach non porti un contributo particolare alla questione, perché ogni altra logica trivalente darebbe il medesimo risultato.

In realtà, la logica di Reichenbach dà il suo peculiare contributo in quanto si propone come schema generale delle logiche trivalenti, com-prendendo tutte le varianti possibili delle tavole dell'impli-cazione e della negazione. Insomma, questa distinzione fra disgiunzioni è tipica della logica di Reichenbach in quanto è tipica di tutte e sole le logiche trivalenti, e quella di Reichenbach è il "sunto" di tutte le logiche trivalenti, le rappresenta tutte.

3) Per spiegare come questa distinzione risolva il problema delle anomalie causali, si deve considerare come si traduce a livello sperimentale la disgiunzione $B_1 \vee B_2 \vee ... \vee B_n$: se si indica con B_i il fatto che la particella è passata attraverso la fenditura i, $B_1 \vee B_2 \vee$ ... $\vee B_n$ significa che la particella è passata attraverso una delle fenditure 1, 2,...n. Corrispondentemente, il fatto che una disgiunzione sia chiusa significa che, se una particella non è effettivamente passata attraverso le fenditure 1, 2,... (n-1), allora è passata attraverso la fenditura n. Che una disgiunzione sia completa significa che è effettivamente vero che la particella è passata attraverso una delle fenditure. Ora, se una disgiunzione chiusa non è detto che sia completa, essa risulta indeterminata: corrispondentemente non si può affermare come vero che la particella è passata attraverso una delle fenditure se non la vediamo durante la traiettoria, o se non la vediamo non passare effettivamente attraverso le altre fenditure e poi comparire su uno schermo al di là delle fenditure.

Così non si può più affermare il principio di sovrapposizione corpuscolare. L'espressione matematica di questo principio è:

$$P(A.[B_1 \vee B_2 \vee ... \vee B_n], C)=\textbf{Errore.}$$

che descrive la probabilità P che una particella che lascia la sorgente di radiazione A e passa attraverso le fenditura B_1 o B_2 o ... o B_n raggiunga C. Essa afferma che le frange statistiche che si riscontrano sullo schermo quando sono aperte tutte le fenditure simultaneamente è una sovrapposizione delle frange singole che si ottengono allorché è aperta una sola fenditura. La formula può essere applicata solo quando sono vere le due affermazioni A e $B_1 \vee B_2 \vee ... \vee B_n$. A è vera, perché afferma che la particella proviene dalla sorgente A, mentre abbiamo visto che $B_1 \vee B_2 \vee ... \vee B_n$ non può essere dimostrata vera. Quindi la formula non può essere applicata quando tutte le fenditure sono aperte: la probabilità deve essere calcolata in un modo diverso, non tramite il principio di sovrapposizione. Quindi non c'è più contrasto fra principi e realtà osservata, cioè non si hanno più anomalie causali[121].

Notiamo che la logica di Reichenbach ben si adatta alla fisica quantistica anche perché permette la formulazione della regola della complementarità che afferma che, se conosciamo esattamente una di due grandezze complementari (come posizione e velocità di una particella), l'altra risulterà indeterminata. Questa regola viene espressa tramite una lettura a livello di valori di verità di "$A \vee \sim A \rightarrow \sim\sim B$", cioè "se A è vero o falso, B è indeterminato": tale lettura è possibile perché, quando il primo membro è vero (quando A è vero o A è falso),

[121] *Ibid.*, 273.

anche il secondo deve esserlo, e sarà così solo se B è indeterminato, mentre quando il primo membro è indeterminato (quando A lo è), non c'è restrizione di valore sul secondo membro e, quindi, su B[122].

Ora ritorniamo al TE, per il quale non si può dare una risposta unica in tutto il sistema, in quanto esso contiene tre diversi tipi di negazione: vediamo, dunque, che valore assume il TE al variare del tipo di negazione presente nella sua espressione. Il caso della negazione a specchio e della negazione a commutazione ciclica sono già stati analizzati nei paragrafi precedenti: per entrambi il TE non è una tautologia, ma per il secondo vale il "quarto escluso". Per il caso della negazione completa, "$A \vee A,^{-}$" è una tautologia perché $A,^{-}$ può essere solo vera o indeterminata, come risulta dalla tavola di verità. Se $A,^{-}$ è vera, tutta la disgiunzione è vera; se $A,^{-}$ è indeterminata, allora A è vera, così tutta la disgiunzione è ancora vera. Questo principio è detto "pseudo-tertium-non-datur", perché in realtà è una disgiunzione di tre termini: infatti, $A,^{-} = A \vee \sim\sim A$ e, quindi, $A \vee A,^{-} = A \vee \sim A \vee \sim\sim A$.

2. *Le logiche derivate*

Finora si sono considerate le logiche polivalenti di base, cioè quelle non costruite a partire da altre logiche polivalenti, ma punto di partenza loro stesse per altre logiche polivalenti. Queste ultime possono evidentemente essere definite derivate e sono costruite in tre modi: per estensione, per prodotto e per espansione. A ciascuna dedico un paragrafo specifico.

[122] *Ibid.*, 263.

2.1. *Le logiche derivate per estensione*

Esiste la possibilità, dato un qualsiasi sistema di logiche a più valori n finiti, di estenderlo a un sistema a $n+1$ valori che conservi le medesime tautologie. La procedure è dovuta essenzialmente a Jas,'kowski (1936)[123]. Per mostrarla, vanno indicati innanzitutto i tre tipi di estensioni che sono stati proposti: la E-estensione, la F-estensione e la G-estensione, indicando con n il numero dei valori della logica di partenza e con $n+1$ il numero dei valori delle logiche così derivate.

Questa è la E-estensione[124]:

p	$\neg,^{\neg}p$
1	$n+1$
$i\ (\neq 1)$	$\langle\neg(i-1)\rangle$

p	q	$p\wedge,^{\wedge}q$	$p\vee,^{\vee}q$	$p\Rightarrow q$
$i\ (\neq n+1)$	$j\ (\neq n+1)$	$\langle i \wedge j\rangle$	$\langle i \vee j\rangle$	$i \rightarrow j$
$i\ (\neq n+1)$	$n+1$	$n+1$	i	$\langle i \rightarrow n\rangle+1$
$n+1$	$j\ (\neq n+1)$	$n+1$	j	1
$n+1$	$n+1$	$n+1$	$n+1$	1.

[123] V. Rescher (1969, 91-96).
[124] *Ibid.*, 92.

dove $<\neg i>$ è il valore di verità assegnato dalla tavola di verità iniziale a n valori per la negazione alla negazione del valore di verità i; $<i\emptyset j>$ è il valore di verità assegnato dalla tavola di verità iniziale a n valori per un connettivo binario qualunque $\emptyset$ alle combinazioni i,j di valori di verità.

La F-estensione differisce dalla precedente estensione per la matrice dell'implicazione, che è[125]:

p	q	$p \Rightarrow q$
$i\ (\neq n+1)$	1	1
$i\ (\neq n+1)$	$j \neq 1$	$<i \rightarrow (j-i)> +1$
$n+1$	1	1
$n+1$	$j \neq 1$	1

Definiamo la G-estensione chiamando "ψp" i connettivi ad un posto e "$p \phi q$" i connettivi a due posti:

p	ψp
$i \leq n$	$z_i = <\perp i>$
$n+1$	z_n

p	q	$p \phi q$
$i \leq n$	$j \leq n$	$x_{i,j} = <i\emptyset j>$
$i \leq n$	$n+1$	$x_{i,n}$
$n+1$	$j \leq n$	$x_{n,j}$
$n+1$	$n+1$	$x_{n,n}$

dove $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$.

---

125 *Ibid.*, 94.

Da tutte queste tavole si rileva che concordano interamente con quelle a n valori quando sono in questione solo gli n valori, e trattano il valore di verità $n+1$ esattamente come il valore n, per cui le tautologie dei sistemi a n valori si conservano in quelli a $n+1$ valori. Perciò, dato qualunque sistema a n valori finiti, se ne può sempre trovare uno arbitrariamente più grande col medesimo insieme di tautologie. Non vale, però, il viceversa, perché un sistema a $n+1$ valori ha un numero di connettivi maggiore di quello del sistema a n valori, quindi avrà anche formule tautologiche non equivalenti a nessuna nel sistema a n valori.

Fatte queste premesse, è agevole considerare il TE: se è una tautologia nel sistema a n valori, continuerà ad esserlo in quello a n+1 valori e viceversa.

2.2. Le logiche derivate per prodotto

Un'altra possibilità per ottenere logiche polivalenti derivate è quella di fare il prodotto di logiche polivalenti. Il metodo risale ancora a Jas,´kowski (1936)[126]. I valori di verità del sistema prodotto X_1 x X_2 sono coppie ordinate $<v_1, v_2>$ di valori di verità, dove v_1 è un valore di verità di X_1 e v_2 di X_2. Essi vengono calcolati secondo le regole seguenti[127]:

$\neg<v_1, v_2> = <\neg v_1, \neg v_2>$

$<v_1, v_2> Ø <v'_{,1}, v'_{,2}> = <v_1 Ø v'_{,1}, v_2 Ø v'_{,2}>$,

dove Ø sta per un qualunque connettivo binario.

Per dare un'indicazione generale sul fatto che in questi sistemi il TE valga o no, bisogna introdurre i concetti di "designato" e di "antidesignato", e ridefinire le tautologie e le contraddizioni come quegli asserti che danno in uscita nelle matrici solo valori designati o solo valori antidesignati.

"Designati" sono quei valori di verità scelti come rappresentanti valori "simili alla verità" e "antidesignati" quelli scelti come rappresentanti valori "simili alla falsità"[128], tenendo conto che il numero dei valori antidesignati deve essere strettamente minore di quello dei non-designati, se si vuole ottenere una logica non bivalente: è ovvio che se gli antidesignati fossero

126 *Ibid.*, 96-101.

127 *Ibid.*, 97.

128 I valori designati vengono fatti precedere dal segno "+"; i valori antidesignati dal segno "-".

proprio tutti i non-designati, l'insieme dei valori si dividerebbe esattamente in due sottoinsiemi e, quindi, si avrebbe una logica non-bivalente.

Perché i valori siano designati in un sistema prodotto, ci sono due alternative:

1) o sono designati quei valori designati sia nel primo che nel secondo sistema di partenza,

2) o sono designati quei valori che sono designati o nel primo o nel secondo sistema di partenza.

Si possono dimostrare i seguenti teoremi:

1) se il sistema-prodotto ha i designati del tipo 1), le sue tautologie sono quelle formule che sono tautologie sia del primo che del secondo sistema di partenza;

2) se il sistema-prodotto ha i designati del tipo 2), le sue tautologie sono quelle formule che sono tautologie o nel primo o nel secondo sistema di partenza.

Vediamo il teorema 1), che può essere formalizzato come:

$T(X_1 \boxed{\times} X_2)=T(X_1)\cap T(X_2)$,

indicando con "T" le tautologie, con X_i i sistemi di partenza e con $X_1 \boxed{\times} X_2$ il sistema prodotto avente i designati del primo tipo. Questo teorema si prova dimostrando:

A) $T(X_1 \boxed{\times} X_2)\subseteq T(X_1)\cap T(X_2)$;

B) $T(X_1)\cap T(X_2)\subseteq T(X_1 \boxed{\times} X_2)$.

A) è evidente, perché una formula che è una tautologia in questo prodotto, cioè che ha sempre in uscita valori designati in questo prodotto, ha i valori designati sia nel primo che nel secondo sistema di partenza, cioè è una tautologia in entrambi i sistemi;

B) vale perché una formula che è una tautologia sia nel primo che nel secondo sistema di partenza, ovvero che ha sempre valori designati in entrambi, avrà sempre valori designati anche in questo sistema prodotto per come è stato definito e, quindi, sarà una sua tautologia.

Analogamente si dimostra il teorema 2), che può essere formalizzato come:

$T(X_1 \otimes X_2)=T(X_1)\cup T(X_2)$,

indicando con $X_1 \otimes X_2$ il sistema prodotto avente i designati del secondo tipo. Il teorema si prova ancora in due tempi:

C) $T(X_1)\cup T(X_2)\subseteq T(X_1 \otimes X_2)$

D) $T(X_1 \otimes X_2)\subseteq T(X_1)\cup T(X_2)$.

C) è subito provato notando che se una formula appartiene all'unione delle tautologie di X_1 e X_2, vuol dire che ha i valori sempre designati o in X_1 o in X_2 o in entrambi, e così comunque rientra nella definizione dei valori sempre designati nel prodotto, cioè nelle tautologie del prodotto.

D) si prova tramite *reductio ad absurdum:* a partire dall'appartenenza di una formula alle tautologie di questo prodotto, si nega che essa appartenga alla unione delle tautologie dei sistemi di origine e si fa vedere che così si contraddice l'ipotesi iniziale. Infatti, negare che una formula appartenga all'unione di $T(X_1)$ e $T(X_2)$ significa affermare che non appartiene né alle tautologie del primo sistema né a quelle del secondo. Questo, a sua volta, significa che per certi valori $v_1, v_2,..., v_n$ del primo sistema la formula non avrà in uscita valori designati in X_1, e che per certi altri $v_1', v_2', ..., v_n'$ del secondo sistema non avrà in uscita valori designati in X_2. Quindi, per come è stato definito questo prodotto, per i valori $<v_1, v_1'>, <v_2, v_2'>, ..., <v_n, v_n'>$ la formula assume in esso valori non designati, perché essi non sono

designati né nel primo né nel secondo sistema di partenza e, perciò, non può essere una tautologia del prodotto, contro l'ipotesi iniziale.

I due teoremi qui dimostrati forniscono l'indicazione generale cercata, che se si ha un sistema prodotto col primo tipo di designazione, il TE sarà una tautologia solo se lo è in entrambi i sistemi di partenza, mentre se si ha un sistema prodotto col secondo tipo di designazione, il TE sarà una tautologia semplicemente se lo è anche in uno solo dei sistemi di partenza. È chiaro che se si fa il prodotto di un sistema per se stesso i due casi concideranno, per cui il TE darà una tautologia solo se già lo era nel sistema di partenza.

2.3. Le logiche derivate per espansione

Esiste anche la possibilità di ottenere un sistema di logica polivalente verofunzionale S_w come "espansione" di un sistema quasi-verofunzionale S_r, cioè come estensione tale che ogni tautologia di S_r è tautologia di S_w. Un sistema quasi-verofunzionale è un sistema con matrici che danno in uscita un'alternativa tra valori di verità (a differenza dei sistemi non-verofunzionali, che danno in uscita un rango di variazione dei valori di verità). Questa possibilità è stata avanzata in forma ancora iniziale da Rescher stesso nel 1962[129] e poi ripresa in considerazione da lui stesso cinque anni più tardi[130].

In particolare, egli precisò che un sistema verofunzionale S_w è espansione di un sistema quasi-verofunzionale S_r se c'è una

[129] Rescher (1962, 1-10).

[130] Rescher (1969, 166-183).

corrispondenza uno-a-molti tra i valori di verità di S_r e quelli di S_w che soddisfa le seguenti quattro condizioni[131]:
1) associa ogni valore di verità di S_r a qualche valore di S_w;
2) non associa mai il medesimo valore di S_w a distinti valori di S_r;
3) associa sempre valori designati a designati e antidesignati a antidesignati;
4) se si rimpiazza ogni valore di S_w con quello che gli è associato in S_r in ogni parte delle tavole di verità di S_w, queste si ridurranno alle tavole di S_r.

Se S_w, oltre ad essere espansione di S_r, è anche tale che ogni tautologia di S_r è tautologia di S_w, S_w si dice "espansione caratteristica". In questo modo, le tautologie dei due sistemi sono le medesime: se anche le contraddizioni sono le stesse, l'espansione è detta "fortemente caratteristica".

Rescher ha dimostrato che per ogni sistema quasi-verofunzionale a due valori ne esiste uno a quattro valori fortemente caratteristico.

Egli ha presentato (solo) le tavole di un qualsiasi connettivo binario:

sistema quasi-verofunzionale:

p/q	$p \varnothing q$
	$T \quad F$
$+T$	
$-F$	$[v_{i,j}]$

dove $j \in \{1,2\}$, $i \in \{1,2\}$, $v_{i,j} \in \{T, F\}$

[131] *Ibid.*, 175.

sistema verofunzionale:

p/q	$p \varnothing q$
	$T \; F \; I_1 \; I_2$
$+T$	
$-F$	$[u_{i,j}]$
$+I_1$	
$-I_2$	

dove $i \in \{1,2,3,4\}$, $i \in \{1,2,3,4\}$, $u_{i,j} \in \{T, I_1, I_2, F\}$ e i valori in uscita vengono calcolati in accordo con le seguenti regole:
1) se $v_{i,j}=T$, allora $u_{i,j}=T$ e $u_{i+2,j+2}= u_{i+2,j}= u_{i,j+2}= I_1$
2) se $v_{i,j}=F$, allora $u_{i,j}=F$ e $u_{i+2,j+2}= u_{i+2,j}= u_{i,j+2}= I_2$
3) se $v_{i,j}=(T,F)$, allora $u_{i,j}=I_1$ e $u_{i+2,j+2}= u_{i+2,j}= u_{i,j+2}= I_2$
4) a piacere, le tavole di verità risultanti dall'applicazione di 1)-3) possono essere alterate rimpiazzando (in qualunque posto delle matrici) I_1 con T e I_2 con F.

Se designiamo T e I_1 e antidesigniamo F e I_2 (visto che il sistema di partenza preso come esempio era bivalente), definendo così le tautologie come quelle formule che in uscita danno solo T o I_1, si può mostrare che le tautologie del sistema finale a quattro valori sono esattamente le stesse di quello di partenza:
1) identificando I_1 con T e I_2 con F, si ottengono le matrici originali bivalenti cosicché ogni tautologia o contraddizione a quattro valori deve essere tale anche a due valori; 2) ogni tautologia a due valori deve esserlo anche a quattro, perché, se non lo fosse, cioè, se avesse in uscita qualche F o I_2, avrebbe anche nel sistema a due valori il valore "F", contraddicendo l'ipotesi (il medesimo ragionamento vale per le contraddizioni).

i) se "n"=gd(A) e $n \in V$, allora $N \Vdash T$(gd[A]);

ii) se "n"=gd(A) e $n \notin V$, allora non $N \Vdash T$(gd[A]), dove gd(A) significa "gödeliano di A" e $T(x)$ è la formula che definisce V,

ne segue: $N \Vdash A$ se e solo se $N \Vdash T$(gd[A]).

Perché sia soddisfatto il requisito diagonale, deve essere rappresentabile la funzione di diagonalizzazione diag(x_1,x_2) come diag(A) ≡ A("A"/x), ovvero deve essere teorema in T una formula che dica che il risultato dell'applicazione di questa funzione a una formula A con la variabile libera x è l'enunciato ottenuto da quello dato A sostituendo alla x il nome di A ("A"). A sua volta, la rappresentabilità di questa funzione dipende dalla rappresentabilità delle funzioni di sostituzione e denominazione. Prima di mostrarlo, diciamo che:

a) la sostituzione è rappresentabile dalla formula Sost(x_1,x_2,x_3,x_4) di L quando, per ogni funzione enunciativa con una sola variabile libera F, per ogni nome n, per ogni enunciato E, per ogni variabile x:

se E=F(n/x), allora $\vdash_T$ ∀y(Sost("F","n","x",y)) ≡ y= "E",

cioè è teorema di T la formula della funzione che ha come risultato la sostituzione di n a x;

b) la denominazione è rappresentabile da una formula N(x_1,x_2) quando, per tutte le espressioni e_1,e_2,

se e_2="e_1", allora $\vdash_T$ ∀y(N("e_1", y) ≡ y = "e_2",

cioè è teorema di T la formula della funzione che ha come risultato e_2 nome di e_1.

A partire da queste due funzioni, si può definire quella di diagonalizzazione come:

∀y∀z(N("A",z) ≡ z = "n") ∧ Sost("A","n","x",y) ≡ y = "B",

dove B ≡ A(n/x) ≡ A("A"/x), cioè la diagonalizzazione è composta dalla funzione denominazione che dà il nome della formula A

e dalla funzione sostituzione che pone in A al posto della sua variabile x il nome di A stessa. La diagonalizzazione sarà sicuramente rappresentabile quando le funzioni di cui è composta lo sono secondo le condizioni a) e b) indicate.

Se si prende come teoria Q che soddisfa queste condizioni l'aritmetica di Robinson[134], i nomi per le espressioni potranno essere i loro numeri di Gödel (gd[A]="A"). Ora, posto che Q soddisfa le condizioni in questione, mostriamo come in essa si possono formalizzare i paradossi. Dal momento che, nella teoria Q scelta, la diagonalizzazione è rappresentabile addirittura mediante un termine, mentre in altri casi può esserlo solo mediante una formula, si ha il compito facilitato. Diciamo che la diagonalizzazione è rappresentabile qui mediante un termine dg(x) tale che:

se b è la diagonalizzazione di a, allora $\vdash_T$dg(gd[a])=gd(b).

Posto questo, vediamo come si ricava il paradosso dall'enunciato del mentitore rafforzato:

1) ~T(dg(x)), costruita supponendo che $T(x)$ definisca V;

2) J ≡ ~T(dg("k")), dove "k" è il gödeliano della 1) e J è il nome con cui si indica tutto l'enunciato: J è la diagonalizzazione di 1);

3) "J"=gd[J]

---

[134] I suoi assiomi sono i seguenti (Usberti 1980, 45-46):

A1. ∀x∀y(x'=y'→x=y)

A2. ∀x(0≠x')

A3. ∀x(x≠0 → (∃y) x=y')

A4. ∀x(x+0=x)

A5. ∀x∀y(x+y' = (x+y)')

A6. ∀x(x.0 = 0)

A7. ∀x∀y(x.y' = (x.y)+x).

Per quanto riguarda il rapporto bivalenza-criterio di verità di Tarski, la Haack fa notare[139] che la bivalenza può essere derivata dal criterio di Tarski nel modo seguente:

1) $\mathrm{T}p \equiv p$	
2) $p \rightarrow \mathrm{T}p$	da 1) per definizione di $\equiv$;
3) $\neg p \rightarrow \mathrm{T}\neg p$	da 2) per sostituzione di p con $\neg p$;
4) $\neg \mathrm{T}p \rightarrow \neg p$	da 2) per contrapposizione;
5) $\neg \mathrm{T}p \rightarrow \mathrm{T}\neg p$	da 4) e 3) per transitività;
6) $\neg\neg \mathrm{T}p \vee \mathrm{T}\neg p$	da 5) per definizione di $\vee$ rispetto a $\neg$ e $\rightarrow$;
7) $\mathrm{T}p \equiv \neg\neg p$	da $\vdash p \equiv \neg\neg p$ per sostituzione di p con $\mathrm{T}p$;
8) $\mathrm{T}p \vee \mathrm{T}\neg p$	da 6) e 7) per sostituzione;
9) $\mathrm{T}p \vee \mathrm{F}p$	da 8) per definizione di $\mathrm{F}p$.

Infine, se vale il TE e se vale "$\mathrm{T}(p \vee q) \rightarrow \mathrm{T}p \vee \mathrm{T}q$", il TE viene a coincidere con la bivalenza, perché, dalla validità del TE – $\mathrm{T}(p \vee \neg p)$ –, si ricava ($\mathrm{T}p \vee \mathrm{T}\neg p$), che, per definizione di $\mathrm{F}p$, equivale a $\mathrm{T}p \vee \mathrm{F}p$[140].

Come vedremo, l'ambiguità tra TE e bivalenza è stata presente anche nelle critiche ad essi, a partire da quella aristotelica. Dal momento, però, che molto spesso le problematiche in questione nelle critiche del XX secolo rivolte dichiaratamente alla bivalenza hanno la loro lontana origine ancora in quella aristotelica, ho ritenuto opportuno riunire tutte queste critiche in questa seconda parte del volume, dedicata alla bivalenza.

In un primo capitolo esporrò le critiche degli autori antichi e medioevali; in un secondo capitolo, invece, tratterò le critiche degli autori contemporanei, dopo di aver spiegato come la

[139] Haack (1974, 67-68).
[140] McCall (1970, 84).

questione sia rimasta per lo più sotto silenzio negli autori moderni.

Per evitare ridondanze inutili, non riprenderò le tematiche più legate a questioni matematiche o comunque formali, interne alla logica, che hanno dato origine alle logiche polivalenti: esse sono già state trattate necessariamente nella prima parte come problematiche alle quali si è rimandati quando si vuol capire il motivo che fa accettare o meno il TE nei singoli sistemi polivalenti. Mi concentrerò, dunque, sulle tematiche più strettamente filosofiche che sono state interessate dal "caso bivalenza".

Da ultimo ho ritenuto interessante proporre, anche se la ricerca appare nella letteratura in modo ancora abbozzato, un terzo capitolo dedicato al principio del terzo escluso a livello di metametalinguaggio. A rigore, un tale capitolo non dovrebbe comparire nella parte dedicata alla bivalenza, ma il fatto che, comunque, si tratta sempre di un livello semantico, mi ha permesso di collocarlo al termine di questa parte e di completare così il discorso sulle tematiche connesse con l'accettazione come legge logica del principio del terzo escluso a qualsiasi livello esso venga inteso.

I. LE CRITICHE DI AUTORI ANTICHI E MEDIOEVALI ALLA BIVALENZA

A motivo dei collegamenti delineati nel primo capitolo, il TE e la bivalenza sono stati spesso confusi tra loro: qui illustrerò, attraverso notevoli prese di posizione critiche, alcune problematiche relative all'accettazione della bivalenza, intendendo con questo termine il principio del terzo escluso nel metalinguaggio, e usando proprio questo termine per tale significato anche se, magari, nel testo originale dell'autore se ne adottava un altro.

La presentazione si articola per autori, seguendo l'ordine cronologico.

1. Aristotele

La prima presa di posizione nota sui limiti di validità della bivalenza avviene storicamente ad opera di Aristotele, almeno secondo un'interpretazione del capitolo 9 del suo Περι,` ε,'ρμενει,'ας che si è consolidata nella tradizione. Il testo in questione è, però, estremamente ambiguo e particolarmente difficile da rendere in un linguaggio formale attuale, per cui già nell'antichità, e ancora ai giorni d'oggi, numerose interpretazioni alternative sono state avanzate.

Ciò che è abbastanza chiaro (oserei dire comunemente accettato) è il nucleo centrale del problema messo in luce da Aristotele:

"Certo, per necessità ogni oggetto è o non è, come pure, sarà o non sarà, ma non è davvero necessario dire una delle due cose, separata dall'altra. Con ciò intendo dire, ad esempio, che necessariamente domani vi sarà una battaglia navale, oppure non vi sarà; ma che non è tuttavia necessario che domani vi sia una battaglia navale, né d'altra parte è necessario che domani non vi sia una battaglia navale"[141].

Cioè, eventi individuali futuri sono aperti a entrambe le possibilità, di accadere o di non accadere, quindi si deve evitare nell'enunciare i princìpi della logica di arrivare ad avere come conclusione la necessità degli eventi individuali futuri, ossia il determinismo[142].

Tuttavia, già nel cercare di precisare quest'affermazione, ci si imbatte in una duplice ambiguità[143]:

1) tra $Tp \vee Fp$ e $Tp \vee T\neg p$ (cioè tra $\Box(Tp \vee Fp)$ e tra $\Box(Tp \vee T\neg p)$) e

2) tra $\Box Tp \vee \Box Fp$, $\Box Tp \vee \Box T\neg p$ e $\Box p \vee \Box\neg p$ (dove $\Box$ significa "necessario"),

cioè non si sa dire esattamente quale dei due princìpi 1) sia la premessa e quale dei tre princìpi 2) sia la conclusione che Aristotele vuole evitare. Ovviamente nella storia si sono avute come interpretazioni le varie combinazioni possibili. Tuttavia, esiste una differenza ancora più fondamentale tra le varie interpretazioni: la soluzione che Aristotele offrirebbe al problema. In questo senso, come ha messo in luce Rescher (1963) e come ha poi accettato più recentemente Laurence Horn[144], si possono individuare due linee interpretative fondamentali.

La prima vede come soluzione aristotelica la non accettazione del TE (ovvero della bivalenza) nel caso di enunciati

[141] Aristotele (1982, 63).

[142] Secondo Viano (1955, 34) il referente polemico di Aristotele in questo passo sarebbe stato Diodoro Crono.

[143] V. Rescher (1963, 43-54).

[144] Horn (1990, 98-102).

singolari futuri. In questo modo, la verità e la falsità implicano la necessità della verità e la necessità della falsità, ma è il TE (o la bivalenza) a non essere vero né falso, bloccando, quindi, all'origine le conseguenze relative alla necessità dei singoli suoi enunciati. Questo filone interpretativo, secondo quando tramanda Cicerone nel *De fato*, ebbe origine già in Epicurei e Stoici. Ad esso aderirono, poi, Ammonio[145] e Boezio[146] nell'antichità, J.L./u-kasiewicz[147], M. Kneale[148], R. Taylor[149], C. Baylis[150], L. Linsky[151], A. Prior[152], D. Frede[153] in questo secolo.

La seconda, invece, vede come principio da sospendere nel caso di enunciati singolari futuri quello che prevede il passaggio da "vero" a "necessario/ necessariamente vero" (anche in questo caso c'è una doppia possibilità fra $\Box p$ $\Box Tp$). In questo modo, il TE (o bivalenza) può continuare a valere senza innescare nessun problema relativo alla necessità dei suoi membri. Questo filone interpretativo, secondo quanto afferma Rescher[154] risale al filosofo arabo al-Farabi[155] e fu poi condiviso nell'antichità da Averroè[156], Tommaso d'Aquino[157], Ockham[158], più di

[145] Ammonius (1897, 154:43-155:5).

[146] Boethius (1891, 495-518).

[147] L./ukasiewicz (1930: SW 176).

[148] Kneale (1962, 60-68).

[149] Taylor (1957,2).

[150] Baylis (1936, 156).

[151] Linsky (1954, 250-252).

[152] Prior (1957, 86).

[153] Frede (1970).

[154] Rescher (1963, 45).

[155] al-Farabi (1960, 81-101).

[156] Averroè (1962, 82)

[157] Tommaso d'Aquino (1872).

[158] William of Ockham (1958, 420-441).

recente da J. Maritain[159], G.E.M. Anscombe[160], J. Hintikka[161] e C. Strang[162].

Come sostengono sia N. Rescher sia L. Horn, dare un'interpretazione definitiva è estremamente arduo. La prima intepretazione (anche se personalmente non condivisa da Rescher) resta quella filosoficamente più feconda, nel senso che ha originato le riflessioni profonde nell'antichità e nel medioevo che ora andiamo a esaminare.

2. Epicurei e Stoici

In tutto il capitolo 9 del Περι,' ε,'ρμενει,'ας l'attenzione aristotelica è puntata sull'aspetto logico della questione, senza soffermarsi particolarmente su aspetti etico-metafisici, quali il libero arbitrio, l'onniscienza divina, ecc.

A questi diedero più spazio, invece, gli epicurei, e proprio in tale contesto presero netta posizione per la non validità della bivalenza nel caso di proposizioni riguardanti eventi futuri: tali enunciati, infatti, non sarebbero né veri né falsi, perché altrimenti il mondo sarebbe deterministico, cosa che gli epicurei negano, a garanzia della possibilità di liberazione dell'uomo da ogni forma di schiavitù. Tale posizione viene tramandata da Cicerone nel *De fato* 37. Fu accolta da Nicostrato, del quale viene riportata da Simplicio in *In Aristotelis categorias* l'espressione: "né 'ci sarà una battaglia navale' è vera né 'non ci sarà', ma entrambe capitano per caso".

[159] Maritain (1937, 135-136).
[160] Anscombe (1956, 1-15).
[161] Hintikka (1959, 65-90).
[162] Strang (1960, 447-465).

In antitesi, invece, si pongono gli stoici, dichiaratamente deterministi, ed in particolar modo Crisippo, che fissò la bivalenza come principio fondamentale della loro dialettica. Questo ci è tramandato da Cicerone nel *De fato* 20 e negli *Academica priora* II 95, dove riporta la necessità razionale di risalire di causa in causa per ogni evento come argomento di persuasione per l'accettazione di detto assioma[163].

3. Duns Scoto, Ockham, Pierre d'Auriole

La problematica aristotelica della bivalenza, trasmessa attraverso Boezio, viene ripresa in modo particolarmente interessante nel XIV secolo all'interno della questione teologica della compatibilità dell'onniscienza e dell'onnipotenza divina con la volontà libera dell'uomo.

Il primo che consideriamo è Duns Scoto a Oxford[164]. Egli ammette in questo contesto che Dio determina le azioni umane. A partire da ciò e dal sottointendimento di una visione corrispondentista della verità e anche di un'idea di un Dio temporalizzato, in cui c'è un prima e un poi, Duns Scoto teorizza che, prima della determinazione divina, l'affermazione che l'evento non accadrà e l'affermazione che l'evento accadrà non sono né vere né false: solo dopo la determinazione assumono un valore di verità. Insomma, qui onnipotenza e "temporalizzazione" di Dio propongono, su motivazione teologica, l'esistenza di proposizioni che non obbediscono alla bivalenza[165].

[163] L/ukasiewicz (1930, 176-178).
[164] Anche se, come fa notare Michalski (1937, 297), nelle affermazioni di Duns Scoto sul pensiero divino le tracce della loro origine prima aristotelica sono scomparse.
[165] Michalski (1937, 297-299).

A Parigi Pierre d'Auriole si rifà esplicitamente ad Aristotele, sostenendo l'esistenza di proposizioni neutre, perché, se fossero solo vere o false, lo sarebbero eternamente e, quindi, sarebbero predeterminate: Dio, però, conosce ugualmente cosa accadrà, senza che la sua conoscenza faccia diventare vere le affermazioni sui futuri contingenti, analogamente al fatto che Dio conosce passato e presente senza che la sua conoscenza faccia diventare vere piuttosto che false affermazioni su eventi già accaduti. Anche qui si accoglie la neutralità con un ragionamento "aristotelico", ma la si ritiene *a priori* conciliabile con onnipotenza e onniscienza divine[166].

Ockham, nel commento al Περι,᾽ ε,῾ρμενει,΄ας (e, quindi, nel pieno riconoscimento dell'origine del problema), nel *De Praedestinatione* e nel commento a Pier Lombardo, espone, senz'altra giustificazione della derivazione aristotelica, la piena indubitabilità del punto di vista filosofico dell'esistenza di proposizioni neutre (quelle sui futuri contingenti). Contemporaneamente, però, afferma l'impossibilità di tale esistenza dal punto di vista teologico, perché, se si considera che c'è scienza solo del vero e che, quindi, non c'è scienza di proposizioni né vere né false, l'esistenza di proposizioni né vere né false comporterebbe l'esistenza di qualcosa che Dio non conosce, in contrasto con la sua onniscienza. Insomma, Ockham dà per scontata l'esistenza di proposizioni neutre[167], e presenta però

[166] *Ibid.*, 317-320.

[167] Normore (1993) ricostruisce storicamente la genesi della posizione di Ockham: deriverebbe dalla sintesi dell'argomento di Pierre d'Auriole da un lato (vero è immutabilmente vero, necessario) e di Scoto (Walter Burley e Richard of Campsall) dall'altro (esistono proposizioni neutre), su cui egli avrebbe poi compiuto le ulteriori considerazioni che lo portarono a rilevare il contrasto fra onniscienza divina e proposizioni neutre.

l'insolubilità da parte della ragione umana del contrasto fra onniscienza divina e proposizioni neutre, contrasto esemplare di quello più generale tra filosofia e teologia[168].

Le contestazioni a Pierre d'Auriole da parte di Thomas Bradwardine, Gregorio da Rimini, Pierre d'Ailly e Henry de Hesse sono compiute sulle orme del collegamento compiuto da Ockham tra onniscienza e necessità che le affermazioni sia o vere o false. Tra questi, però, solo Gregorio si rende conto e fa presente che le opinioni di Duns Scoto, Ockham e Pierre d'Auriole sono in violazione del "principio del terzo escluso"[169].

Dal XIV secolo ai giorni nostri, la bivalenza non ha più suscitato dibattiti di particolare interesse per quanto concerne il nucleo di questo volume: ad esempio, Descartes e Leibniz, che hanno discusso sullo status dei princìpi della logica, l'hanno fatto dandoli per scontati, ricercando la compatibilità della loro necessità con l'onnipotenza di Dio. Descartes, infatti, riteneva che essi fossero stati deliberati da Dio che, se avesse voluto, avrebbe potuto porli diversamente. Leibniz, invece, pensava che essi fossero necessari non perché Dio li avesse posti come tali, ma per la loro stessa costituzione, per cui anche Dio vi si adeguerebbe. Comunque, entrambi non criticano i princìpi della logica, ma partono dalla loro indubitabilità per porsi poi altri interrogativi.

D'altro canto, Hegel criticò solo in un certo senso il TE: egli, infatti, nell' *Enzyklopädie*, al § 199, affermava[170]: "Il principio del terzo escluso è il principio della ragione determinata, che vuole tenere lontana da sé la contraddizione, e, facendo ciò, le va incontro. A deve essere o +A o -A; con ciò viene posto

[168] Michalski (1937, 299-302).

[169] *Ibid.*, 321-322.

[170] Hegel (1830, 150).

anche il terzo, che esprime A, che non è né + né -, e che parimenti è anche +A e -A. " Più che criticare il TE, quindi, Hegel rettificò l'interpretazione da dare ad esso all'interno del suo sistema: il TE non elimina la contraddizione, ma la pone, perché presuppone sia una possibile combinazione di A e non A, sia l'esistenza di un "terzo", che non è né A né non A.

II. LE CRITICHE DEGLI AUTORI CONTEMPORANEI ALLA BIVALENZA

Nel XX secolo, la problematica della bivalenza viene ripresa nella connessione tradizionale col determinismo per poi ampliarsi a tematiche meno specificamente ed esclusivamente filosofiche e più legate alla matematica e alla logica. Questo comporta il moltiplicarsi delle visuali con le quali è osservata la bivalenza e anche una maggiore ampiezza delle conseguenze delle critiche alla bivalenza. Infatti non ci si limita più ad esporre le questioni, ma si sviluppano sistemi di logica polivalente con ben precise tavole di verità. Ho già trattato alcuni di questi motivi nella prima parte, per forza di cose: qui analizzerò i rimanenti.

1. L/ukasiewicz

L/ukasiewicz ha dato un grosso contributo alla discussione sulla bivalenza, studiandone il suo sviluppo storico[171]. Questo l'ha portato all'osservazione della distinzione TE/bivalenza (almeno in una parte dei suoi scritti) e della problematica bivalenza-determinismo, e alla scoperta dell'incompatibilità fra bivalenza e teoremi modali. Ho già discusso la compatibilità fra bivalenza e teoremi modali nella prima parte. Resta ora da considerare quanto egli ha detto sul rapporto bivalenza-determinismo. In *On determinism*[172] egli offre due argomenti a favore del determinismo, dei quali il primo deriva il determinismo dalla bivalenza; il secondo, invece, non riguarda

[171] L/ukasiewicz (1930: SW, 176-178).
[172] L/ukasiewicz (1923).

la bivalenza ma la causalità: lo considero ugualmente perché, come illustrerò poi, il suo crollare è collegato con la possibile caduta della bivalenza e, con essa, di tutto il primo argomento.

Prima di passare ai dettagli della trattazione, va notato che questo è uno degli scritti in cui L/ukasiewicz non coglie la distinzione fra TE e bivalenza: si è certi che discute della bivalenza, perché enuncia il principio in questione come "almeno uno dei due contraddittori è vero", cioè come "$Tp \vee T\neg p$", e si può giustificare la confusione dei due termini presupponendo l'accettazione di L/ukasiewicz di "$T(p \vee q) \rightarrow \rightarrow Tp \vee Tq$", che si è già mostrato far coincidere bivalenza e TE. L/ukasiewicz, comunque, non è consapevole di questo passaggio e dichiara "intuitivo" l'uso alternativo dei due termini.

Esaminiamo ora il primo argomento sul determinismo:

A) posta la bivalenza, vale come sua esemplificazione "O è vero all'istante *t* che John domani non sarà a casa, o è vero all'istante *t* che John domani sarà a casa";

B) per l'implicazione $Tp \rightarrow p$, vale come suo esempio "Se è vero all'istante *t* che John non sarà a casa domani, allora John non sarà a casa domani";

C) per "se $p \rightarrow \neg q$ allora $q \rightarrow \neg p$", la B) implica "se John sarà a casa domani, allora non è vero a *t* che John non sarà a casa domani";

D) per "se $p \vee q$ allora $\neg p \rightarrow q$", la A) implica "se non è vero a *t* che John non sarà a casa domani, allora è vero a *t* che John sarà a casa domani";

E) per transitività, da C) e D) risulta: "se John sarà a casa domani, allora è vero a *t* (con *t* qualsiasi) che John sarà a casa domani", che è la tesi del determinismo.

Quindi, dalla bivalenza si arriva al determinismo[173].

Esaminiamo il secondo argomento.

Data la definizione di causalità come ciò sta dietro "due fatti successivi e connessi da una legge che dal primo ricava il secondo", e data la transitività della causalità, ad ogni istante che precede *t* occorre qualche fatto che sia causa dell'evento in questione; ma, se ad ogni istante *t* esistono le cause, allora sappiamo che inevitabilmente esistono gli effetti, cioè ad ogni istante *t* sono veri gli effetti, che è la tesi del determinismo[174].

Vediamo ora l'errore che L/ukasiewicz rileva nel secondo argomento: se associamo biunivocamente un certo intervallo di tempo al segmento di retta compreso fra 0 e 1, e poniamo che le cause di un fatto in 1 avvengano dopo 1/2, abbiamo una sequenza causale infinita e senza inizio – come ci aspettiamo per la transitività – ma che appartiene interamente al futuro (è dopo 1/2, mentre lo 0 rappresenta l'attualità). Perciò è un errore dalla causalità e della transitività che la caratterizza dedurre il determinismo[175].

L'erroneità del secondo argomento sembra intaccare il primo già all'origine, nel senso che se non ci sono cause ad un istante *t* per dire che John sarà a casa domani o che non lo sarà, si può rifiutare "è vero che John sarà a casa domani o è vero che John non sarà a casa domani", ossia la bivalenza. L/ukasiewicz, però, evidenzia che non è diretto passare dal non avere la causa di qualcosa ad un tempo *t* a rifiutare che questo qualcosa sia vero, piuttosto che a sospendere il giudizio. Allora il passaggio è dovuto ad una scelta, che si compie sapendo che la posta in gioco, alla fin fine, è il determinismo. In pratica si fa una scelta

---

[173] L/ukasiewicz (1930: SW, 114-117).

[174] *Ibid.*, 117-119.

[175] *Ibid.*, 119-121.

pro o contro la bivalenza per farne una pro o contro il determinismo[176].

Da parte sua, L/ukasiewicz prende posizione contro il determinismo per la sua esigenza di liberazione dell'uomo, che estende a passato e futuro: come i futuri con cause non ancora presenti sono nel regno della possibilità e non ci toccano, così anche i passati che non causano più il presente sono nel regno del possibile e non ci toccano più. Per questo allarga gli orizzonti della logica oltre la bivalenza, supportato anche dalle considerazioni sui tre teoremi modali che ho già esposto nel secondo capitolo della prima parte[177].

Per inciso, si può aggiungere che sulla scelta di ritenere la mancanza di una causa per p ad un tempo t sufficiente per rifiutare che sia vero p, interviene Toms[178] per affermare la bivalenza, invocando, in realtà, il significato classico di $\neg p$. Egli, infatti, vede $\neg p$ non come una proprietà, ma come l'assenza di una proprietà, per cui, per dire che è vero p, dobbiamo (e ci basta) avere dei dati che gli corrispondano e per dire che è vero $\neg p$ ci basta la mancanza dei dati per p: la verità è sempre la corrispondenza attuale coi fatti, per cui, se oggi non ci sono dati che dicono che qualcosa avverrà (e Toms cita il caso dei futuri contingenti, cioè frutto di un atto di libera scelta), che questa cosa avvenga o no, oggi è vero che vale $\neg p$ e, quindi, vale sempre la bivalenza.

2. *Taylor*

[176] *Ibid.*, 123-124.

[177] *Ibid.*, 124.

[178] Toms (1941).

Sempre sul problema determinismo-bivalenza, si apre in epoca più recente il dibattito sul fatalismo ad opera di Richard Taylor. Egli, infatti, dimostra che, se si parte da sei presupposti accettabili comunemente, tra cui la bivalenza, si giunge necessariamente al fatalismo, cioè alla convinzione che non abbiamo nessun potere sul futuro, oltre che sul passato/presente.

Ecco i sei presupposti[179]:

1) principio di bivalenza;

2) definizione di condizione sufficiente: se una condizione è sufficiente per l'accadere di un'altra, la prima non può accadere senza che ne consegua la seconda, pur non essendo la loro connessione di tipo logico;

3) definizione di condizione necessaria: se una condizione è necessaria (non logicamente) per l'accadere di un'altra, quest'ultima non può accadere senza che sia accaduta la prima;

4) se una condizione è sufficiente per un'altra, quest'ultima è necessaria per la prima (per Taylor quest'affermazione è una conseguenza logica di 2) e di 3));

5) nessuno può portare a termine un atto se ne mancano le condizioni necessarie;

6) il tempo da solo non è efficace.

Ora applichiamo questi presupposti a due situazioni e così otteniamo un fatalismo comunemente accettato sul passato/presente e quello meno accettato sul futuro:

1) Poniamo che se "ieri c'è stata una battaglia navale" (P), "oggi vedo una certa intestazione sul giornale" (S), mentre se "ieri non c'è stata battaglia navale" (P'), "oggi non vedo alcuna intestazione particolare sul giornale" (S'):

A) se P è vera, non è in mio potere S';

[179] Taylor (1962).

B) se *P'* è vera, non è in mio potere *S*;

C) per la bivalenza, "vero *P* o non vero *P*", cioè "vero *P* o vero *P'*";

D) quindi, "o non è in mio potere *S'*, o non è in mio potere *S*", cioè "è in mio potere *S* ed è in mio potere *S'*" è falso: fatalismo comunemente accettato su passato/presente.

2) Poniamo che se "il comandante dà l'ordine di battaglia" (*O*), "domani ci sarà una battaglia navale" (*Q*); se "il comandante non dà l'ordine di battaglia" (*O'*), "domani non ci sarà una battaglia navale" (*Q'*):

A) se *Q* è vera, non è nel potere del comandante *O'*;

B) se *Q'* è vera, non è nel potere del comandante *O*;

C) per la bivalenza "vero *Q* o vero non *Q*", cioè "vero *Q* o vero *Q'*";

D) quindi "o non è nel potere del comandante *O'* o non è nel potere del comandante *O*", cioè "è nel potere del comandante *O* o lo è *O'*" è falso: fatalismo sul futuro.

Va precisato che qui non si parla di relazioni causali tra eventi – relazioni che potrebbero avere una direzione inalterabile –, ma di relazioni di necessità e sufficienza che non sono unidirezionali.

Per negare il fatalismo, si può negare la bivalenza, ma con la consapevolezza di abolire così il fatalismo anche sul passato: la bivalenza, infatti, è usata nel punto C) di entrambe le dimostrazioni e, perciò, se la si nega, la si deve abolire in entrambe le dimostrazioni, invalidando tutt'e due le conseguenze.

Taylor, quindi, propende per mantenere bivalenza e fatalismo, preoccupandosi di sottolineare che la comune avversione al fatalismo sul futuro ha semplicemente radici epistemologiche (conosciamo più del passato che del futuro) e

psicologiche (la memoria si estende al passato), ma non filosofiche e che, quindi, potremmo benissimo accettarlo.

A questi argomenti, alcuni autori – come Bruce Aune[180] e John Turk Saunders[181] – si contrappongono indicando la causa della conclusione fatalista non nella bivalenza ma:

1) nella confusione fra impossibilità logica e mancanza di abilità[182];

2) nell'abolizione di tutte le distinzioni modali[183];

3) nella discutibilità della sesta assunzione, perché non esiste un "mero" passaggio di tempo in quanto, per definizione, il tempo non passa senza cambiamenti[184];

mentre Sharvy[185] suggerisce che proprio l'abolizione delle distinzioni modali rettifica la lettura fatalista della tesi conclusiva di Taylor, facendo collassare "il comandante non ha il potere di *S* e non ha il potere di non *S*" con "il comandante non ha il potere di *S* e di non *S*", che è una banale affermazione di non-contraddittorietà.

Alle puntualizzazioni di Aune e Saunders si può rispondere che:

1) Taylor non dice che non si può sapere come compiere un atto in assenza delle condizioni necessarie per effettuarlo, ma solo che non si può compierlo;

2) è propria del fatalista l'abolizione delle distinzioni modali;

---

180 Aune (1962).
181 Saunders (1962).
182 Aune (1962, 514).
183 Sharvy (1964, 293).
184 Aune (1962, 517-519).
185 Sharvy (1964, 294-295).

3) sono i cambiamenti a determinare il passaggio del tempo, quindi, non si può utilizzare questo collegamento per sostenere che il tempo comporti dei mutamenti.

A Sharvy Taylor stesso risponde che la sua obiezione non regge perché non ha affermato che "è in mio potere fare *X*" e "io faccio *X*" siano equivalenti nel significato, ma solo che hanno lo stesso valore di verità[186].

Cahn, dal canto suo, appoggia Taylor facendo vedere che, in risposta al suo argomento fatalista, o si nega la bivalenza (pur solo per le proposizioni che riguardano il futuro), o si negano tutti e sei i presupposti di partenza, ma, essendo assurde entrambe le soluzioni, è più opportuno accettare la conclusione fatalista. Infatti, prima dà una versione leggermente modificata dell'argomento di Taylor:

1) A t_1 il comandante ordina O o O' ($\equiv \neg O$);

2) a t_1 O è condizione sufficiente per una battaglia a t_2;

3) a t_1 O' è condizione sufficiente perché non vi sia una battaglia a t_2;

4) quindi, condizione necessaria a t_1 per O è l'occorrenza della battaglia a t_2;

5) quindi, condizione necessaria a t_1 per O' è la non occorrenza della battaglia a t_2;

6) ma a t_2 è vero che c'è una battaglia, o è vero che non c'è;

7) se a t_2 c'è battaglia, manca la condizione necessaria per O' a t_1, e se non c'è, manca quella per O a t_1;

8) in entrambi i casi manca la condizione necessaria per uno dei due ordini;

[186] Taylor (1964).

9) quindi il comandante era sempre forzato a dare l'altro ordine[187].

Non applicando la bivalenza a espressioni che riguardano il futuro (cioè togliendo il punto 6)), non mancano le condizioni necessarie prima di t_2 (cadono cioè anche i punti 7) e 8)) e, quindi, a t_1 l'azione non sarebbe più forzata. Si mostra, però, che questo comporta più problemi di quanti ne risolva:

1) per ordinare O (o O') a t_1, tutte le condizioni necessarie per l'occorrenza di O (o di O') a t_2 devono essere soddisfatte a t_1;

2) se O (o O') è ordinato a t_1, è condizione sufficiente perché (non) vi sia battaglia a t_2;

3) quindi, che (non) ci sia battaglia a t_2, è condizione necessaria per l'ordine O (o O') a t_1;

4) a t_1 è né vero né falso che c'è una battaglia a t_2;

5) visto che il fatto che (non) ci sia battaglia a t_2 è una delle condizioni necessarie a t_1 per l'ordine O (o O') e che questa manca a t_1 (perché non è né vera né falsa), O (o O') non può essere ordinato a t_1;

6) quindi, né O né O' possono essere ordinati a t_1, cioè si arriva a negare che alcuna azione possa venire effettuata[188].

Resta, infine, l'osservazione di Raziel Abelson[189] che vede l'errore di Taylor nella confusione fra senso logico e senso causale dei termini modali "necessario", "sufficiente", ecc., che fa, appunto, passare Taylor da "Se O implica Q e vale non-Q, allora necessariamente non-O", a "Se non-Q occorre, allora O è impossibile".

[187] Cahn (1964, 304).
[188] *Ibid.*, 305.
[189] Abelson (1963).

3. *McCall*

Storrs McCall vede la problematica bivalenza-determinismo da un'angolatura particolare, cioè a partire dalla teoria della verità che è indotta dalla nostra concezione dell'universo come qualcosa che è piuttosto che come qualcosa che accade[190].

Consideriamo innanzitutto come una teoria della verità sia collegata alla concezione dell'universo. Se si intende l'universo come "massiccio", cioè come qualcosa che "è", come un continuo spazio-temporale attraverso il quale noi passiamo, non siamo necessariamente portati al determinismo o all'indeterminismo, ma certamente ne conseguiamo una teoria della "verità senza tempo", poiché un evento non accade ma è.

Questa teoria della verità, però, contrasta con il nostro ordinario pensiero sul futuro perché:

1) la predizione dell'indovino non è mai vera nel momento in cui è espressa, ma lo diventa più tardi;

2) l'espressione "Ora lei starà meglio" detta dal medico al paziente, dopo di avergli dato una pastiglia, non è vera prima di avergliela data;

3) per quanto, apparentemente, "vero" e "falso" possano sembrare due aggettivi come "dolce" e "bianco", in realtà la verità non caratterizza un'espressione come la dolcezza lo zucchero, cioè come qualcosa che l'accompagna dal momento in cui entra nell'esistenza finché ne esce, bensì si comporta come l'aggettivo "deceduto".

Da tale contrasto, qui esemplificato, nasce l'esigenza di formulare una visione alternativa dell'universo, dalla quale derivi una teoria della verità adeguata alle nostre intuizioni in

[190] McCall (1966).

proposito. Si dà, così, una visione dell'universo come qualcosa che "accade", e da questa si articola una teoria della verità nel modo seguente:

1) $p(t_0)$ è vera a $t<t_0$, se esistono in t condizioni sufficienti a rendere vera $p(t_0)$ a t_0;

2) se $p(t_0)$ è vera a t_0, lo è per tutti i t successivi a t_0;

3) $p(t_0)$ non è vera in nessun altro caso, anche se questo non significa che sia falsa, perché le suddette condizioni potrebbero esserci, ma non essere conosciute.

Vediamo ora come le teorie della verità così formulate abbiano influsso sulla bivalenza. Quella dell'universo massiccio non tocca la bivalenza, perché dà una verità senza tempo e, quindi, permette a ogni proposizione di essere da sempre vera o falsa. Quella dell'universo che accade, invece, dà una verità temporalizzata, mettendo in crisi la validità assoluta della bivalenza con un risultato molto importante: la bivalenza vale solo per il passato e non per il futuro, perciò essa diviene un criterio logico per una distinzione (necessaria) fra passato e futuro. Osserviamo come ciò può avvenire, dando un esempio a) per il passato e uno b) per il futuro, a partire dalla distinzione fra TE e bivalenza, e dalla teoria della verità appena delineata:

a) se "Socrate beve la cicuta nel 399 a.C." è vero ora se lo era nel 399 a.C., e falso ora se lo era nel 399 a.C. (per il punto 2) della definizione di verità data sopra), e dato che per il TE "o Socrate beve la cicuta nel 399 a.C. o non la beve", ora "Socrate beve la cicuta nel 399 a.C." è vero o è falso, cioè ad esso si applica la bivalenza;

b) se "il mondo termina nel 2200 d.C." è vera nel 2200 d.C., non c'è niente tra le condizioni di verità suddette che mi dica che è vera ora, quindi non si può applicare il "dilemma costruttivo" col TE, per cui non si può far valere la bivalenza sul futuro.

Questa distinzione vale anche per un mondo deterministico (anche la seconda visione dell'universo permette un'interpretazione sia determinista sia indeterminista), in quanto in esso le proposizioni sul futuro sono bivalenti solo contingentemente, come conseguenza del fatto contingente che l'universo sia deterministico (dedurre dalla bivalenza tale caratteristica o fallisce o porta al fatalismo). Insomma, secondo McCall l'accettazione o no della bivalenza è collegabile sia al determinismo sia all'indeterminismo, perché bivalenza e non-bivalenza dipendono da due visioni dell'universo compatibili sia col determinismo che con l'indeterminismo.

È chiaro che McCall propende per la seconda visione dell'universo, proprio perché gli appare rispondente alle intuizioni comuni sulla verità. A quanti obiettano che, però, la condizione 1) dà un universo relativizzato all'osservatore, egli risponde che comunque tale obiezione varrebbe anche contro l'universo einsteiniano.

McCall prosegue, poi[191], l'analisi dello sviluppo di una logica non-bivalente, prospettando la necessità che essa sia priva del criterio di Tarski e proponendo un sistema non-verofunzionale. Indica come sia possibile, così, risolvere i casi di indecidibilità senza arrivare alla conclusione intuizionista di rifiuto del TE e del principio $\neg\neg p \rightarrow p$ come schemi d'assiomi, rifiuto che gli appare come una visione particolarmente bizzarra della negazione.

Vediamo subito perché McCall ritiene indispensabile l'assenza del criterio di Tarski da una logica non-bivalente: come ho illustrato all'inizio di questa seconda parte, dal criterio di Tarski si può derivare direttamente la bivalenza e, per questo,

[191] McCall (1970).

esso non può essere presente in una logica polivalente, pena la sua contraddittorietà. McCall offre un esempio di questa contraddizione. Ecco il suo ragionamento:

1) $\neg Tp \wedge \neg Fp$, cioè ci sono nel sistema proposizioni né vere né false (sistema non bivalente);
2) $Fp \equiv T\neg p$;
3) $\neg Tp \wedge \neg T\neg p$, da 1) e 2) per sostituzione;
4) $\neg p \wedge \neg\neg p$, da 3) applicando il criterio di verità di Tarski.

La 4) è una contraddizione. È, quindi, necessario rifiutare il criterio di verità di Tarski così com'è, cioè in quanto biimplicazione $Tp \rightarrow p$ e $p \rightarrow Tp$, però è possibile conservare la prima implicazione da sola.

Non è possibile, invece, conservare da sola l'altra, perché McCall vuole mantenere nella logica da lui proposta il TE e questo, se valesse tale implicazione, verrebbe a collassare sulla bivalenza tramite la legge $((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)) \rightarrow (r \vee s)$. Infatti, se vi sostituiamo q con $\neg p$, r con Tp, s con $T\neg p$ abbiamo: $((p \vee \neg p) \wedge (p \rightarrow Tp) \wedge (\neg p \rightarrow T\neg p)) \rightarrow (Tp \vee T\neg p)$, in cui l'antece-dente vale perché il primo congiunto è il TE e il secondo e il terzo sono esemplificazioni di $p \rightarrow Tp$. Da questo si deriva per modus ponens il conseguente, che è proprio la bivalenza.

Si mantiene, comunque, la regola d'inferenza $\vdash p \rightarrow \vdash Tp$, anche si si è detto che si rifiuta la corrispondente tesi implicativa.

Scartando la bivalenza, si mantengono le proprietà formali di iterazione di T: $\vdash TTp \equiv Tp$ e $\vdash TFp \equiv Fp$, mentre ci sono delle modifiche quando si itera F: FFp non significa né Fp né Tp (se p non è né vero né falso, il suo non essere falso non significa l'essere vero), anzi, significa qualcosa di più lieve di p, mentre FTp è implicato sia da Fp che da $\neg p$, lasciando aperta la questione se sia anche implicato da $\neg Tp$ (se sì, il sistema formale corrispondente a questa teoria della verità sarà lo S_5 di Lewis, altrimenti sarà S_4).

Vediamo ora come il fatto di scartare la bivalenza e di accettare la regola di non fare mai nessuna assunzione senza aver chiarito se è presa come vera, falsa o nessuna delle due (regola che si fa indispensabile dal momento che non vige più il criterio di Tarski) permette di ottenere ragionamenti con risultati analoghi a quelli classici, anche in caso di questioni indecidibili, rendendo così non indispensabile la soluzione intuizionista alla loro problematica, in quanto svuota la problematica stessa.

Il ragionamento che classicamente viene svolto come segue:

1) assumiamo p: segue q;
2) assumiamo $\neg p$: segue q;
3) ma $p \vee \neg p$;
4) quindi q;

viene invece svolto qui come segue:

1) assumiamo $\mathrm{T}p$: segue q;
2) assumiamo $\mathrm{F}p$: segue q;
3) assumiamo $\neg \mathrm{T}p \wedge \neg \mathrm{F}p$: segue q;
4) ma o $\mathrm{T}p$ o $\mathrm{F}p$ o $\neg \mathrm{T}p \wedge \neg \mathrm{F}p$;
5) quindi q.

Lo stesso metodo, infine, dà anche una nuova versione di *reductio ad absurdum*, che permette di giungere al medesimo risultato classico e di non lasciare a metà il procedimento, come fanno gli intuizionisti.

La *reductio* classica, infatti, per provare p si articola così:

1) assumiamo $\neg p$;
2) segue che, per qualche q, $q \wedge \neg q$;

3) quindi $\neg\neg p$;
4) quindi p,

mentre gli intuizionisti accettano solo i punti 1)-3), perché non vale il principio $\neg\neg p \rightarrow p$.

Il nuovo procedimento della *reductio* per McCall è, invece:

1) assumiamo $\mathrm{F}p$;
2) segue che, per qualche q, $q \wedge \neg q$;
3) assumiamo $\neg \mathrm{T}p \wedge \neg \mathrm{F}p$;
4) segue che, per qualche q, $q \wedge \neg q$;
5) quindi $\mathrm{T}p$,

perché dal semplice fatto che p non sia falso (in quanto la sua falsità porta a contraddizione) non seguirebbe che p sia vero, dato che p potrebbe essere né vero né falso, mentre, se si debbono scartare sia la falsità che la non falsità e la non verità, allora p deve essere vero.

4. Martin, van Fraassen, Kripke

Ho già accennato, parlando del TE, al fatto che la problematica dei paradossi può venire risolta, tra l'altro, con la rinuncia alla bivalenza: è il cosiddetto "approccio non gerarchico", per distinguerlo da quello di Tarski che, come si sa, ha il difetto di non essere applicabile ai linguaggi naturali, dove non esiste un metalinguaggio di ordine superiore al linguaggio stesso.

Vediamo ora le diverse articolazioni di questa soluzione dei paradossi in R.L. Martin, B. van Fraassen e S. Kripke.

Martin[192] vede i paradossi come né veri né falsi in quanto semanticamente scorretti. Egli, infatti, propone per le

[192] V. Martin 1967 e 1974.

lingue naturali e per quelle formali che intendono rispecchiare le caratteristiche essenziali delle lingue naturali, oltre alle regole di correttezza sintattica sempre richieste, anche una regola di correttezza semantica.

Per definirla, bisogna prima chiarire cosa sono i ranghi di applicabilità, perché essa li riguarda.

Questi ranghi sono l'unione di estensione e coestensione, cioè l'unione dell'insieme delle *n*-uple di elementi del dominio assegnate da un'interpretazione al predicato in questione e dell'insieme delle *n*-uple del dominio assegnate da un'interpretazione alla negazione del predicato in questione. Diciamo, poi, che un enunciato è semanticamente corretto se e solo se i ranghi di applicabilità coprono l'intero dominio. Di conseguenza, un enunciato sarà vero o falso se e solo se è semanticamente corretto, perché solo in questo caso si può dire sempre se la *n*-upla a cui è applicato un predicato appartiene alla sua estensione o, nel caso di un enunciato negativo, alla sua controestensione: altrimenti la *n*-upla non cadrebbe né nell'estensione né nella controestensione. Da qui deriva che un enunciato semantica-mente scorretto è né vero né falso.

I paradossi espressi nelle lingue formali rientrano in questa categoria perché le *n*-uple di oggetti loro associate non possono appartenere né all'estensione né alla controestensione del loro predicato, proprio in quanto i paradossi sarebbero veri se e solo se falsi.

Quindi non sono né veri né falsi. Per i paradossi espressi nelle lingue naturali, il discorso non è così semplice perché non basta la definizione di enunciato semanticamente corretto per stabilire se un enunciato lo è o no, ma occorre un test. In realtà, sia quello proposto da Martin in prima versione per gli enunciati atomici, sia quello in seconda versione, si rivelano inefficaci, in

quanto: 1) il primo, in paradossi quali il mentitore semplice sa solo dire che è corretto se è corretto, mentre per i paradossi a enunciato complesso non può dire nulla, perché vale solo per enunciati atomici; 2) il secondo dà risultati controintuitivi.

Infatti, il primo è così formulato:

a) determinare il rango di applicazione del predicato atomico $P(t)$, con t nome proprio o descrizione;
b) stabilire se l'enunciato è autoreferenziale o no (cosa difficile da effettuare per enunciati in lingua naturale, perché in essa questa natura è molto spesso un fatto empirico);
c) se l'enunciato non è autoreferenziale, determinare se il senso fregeano di t indica il tipo di cose incluse nel rango di applicazione del predicato: se sì, l'enunciato è semanticamente corretto, se no scorretto; se l'enunciato è autoreferenziale, determinare se l'oggetto cui si riferisce t è incluso nel rango di applicazione del predicato: se sì, l'enunciato è semanticamente corretto, se no scorretto. Perciò, nel caso di "Questo enunciato è falso", che è autoreferenziale, notando che l'oggetto cui si riferisce "questo enunciato" è l'enunciato stesso, possiamo solo concludere che l'enunciato è corretto se è corretto.

L'aggiunta che Martin ha proposto, cioè le due condizioni:

1. $RA(\neg p)=RA(p)$;
2. $RA(p \wedge q)=RA(p \vee q)=RA(p \rightarrow q)=RA(p \equiv q)=RA(p) \cap RA(q)$ - dove RA sta per "rango di applicazione -, non è nella sua completezza sostenuta da argomenti che non siano *ad hoc*, ossia per ottenere la non verità e la non falsità dei paradossi (solo la prima condizione è motivata dalla definizione stessa di rango di applicabilità).

Il secondo test proposto da Martin per risolvere le ambiguità nel discernere l'autoreferenzialità nelle lingue naturali, formulato in modo che si applichi a repliche di enunciati anziché a tipi, ha come risultato che le repliche, ad esempio, di "Tutto quello che *X* dice è vero" e di "Tutto quello che *Y* dice è vero", nella loro emissione da parte di *Y* e di *X* rispettivamente, non sono né vere né false, controintuitivamente. Martin, infatti, vede tali enunciati come autoreferenziali e, quindi, pensa che non possano essere riconosciuti come semanticamente corretti, risultando né veri né falsi.

Bisogna, perciò, ammettere la mancanza di un test per le lingue naturali. Questo non pregiudica il fatto che Martin abbia fornito un approccio efficiente nel caso delle lingue formali e che suggerisce, per esse, l'adozione delle tavole di Kleene deboli (se si vuole avere una logica adeguata a quella classica). Effettivamente, in queste, data un'interpretazione M in cui sia rappresentabile la verità tramite la costante predicativa T, il fatto che $M(\neg T(c))=1$ se e solo se $M(\neg T(c))=0$ ha come conseguenza $M(\neg T(c))=i$, ovvero l'enunciato del mentitore rafforzato risulta né vero né falso, come ci si aspettava. Ciò, ovviamente, se si vuole adottare una semantica verofunzionale, che, secondo Usberti[193], è naturale se si è convinti che la condizione 1) sia motivata dalle nostre intuizioni sul concetto di RA.

Van Fraassen risponde al problema dei paradossi[194] mostrando come essi non sono né veri né falsi, dal momento che presuppongono un falso, cioè una contraddizione. La sua risposta si basa, quindi, sul concetto di presupposizione, che, intuitivamente, è caratterizzato come "A presuppone B se e solo se A è né vero né falso, se B non è vero", e che van Fraassen concepisce semanticamente, per non banalizzarlo. Per questo gli

[193] Usberti (1980, 136-151).
[194] V. van Fraassen 1969, 1970a-b, 1971.

occorre una nozione ristretta di supermodello. Cerchiamo di darla in termini intuitivi, per non complicare il discorso e cercare, però, nel contempo, di fornire un'idea generale chiara del discorso.

Un supermodello è un modello in cui una formula può anche assumere valore indeterminato, cioè è un modello cui è associata una (super)valutazione[195] come funzione parzialmente definita che può assegnare a enunciati non solo i valori 1 e 0 (cioè vero e falso), ma anche lasciare indefinito il risultato.

Un supermodello così generico ha il difetto di non essere caratterizzabile linguisticamente dalle teorie che soddisfa (una supervalutazione non è determinata dall'insieme delle valutazioni classiche cui è associata). Perciò si restringe tale nozione a quella di E-supermodello, cioè a un particolare supermodello in cui le supervalutazioni sono associate non a insiemi qualunque di valutazioni classiche ma a insiemi che godono della proprietà di essere caratterizzabili linguisticamente mediante insiemi di enunciati[196]. In questi *E*-supermodelli, tuttavia, resta il problema

[195] Questa teoria della verità che fa uso di supervalutazioni è stata utilizzata da Marian Przel,/ecki (1982) per mostrare, in risposta a Kasimierz Ajdukiewicz, come si possa respingere la bivalenza ma conservare il TE senza accettare una teoria della verità idealista. L'idea di usare la semantica delle supervalutazioni venne ispirata a Przel,/ecki dal fatto che Ajdukiewicz adduceva come motivo per scartare la bivalenza il fatto che il linguaggio scientifico è incompleto perché include quello dell'aritmetica e le espressioni empiriche *vaghe*.

Per quanto riguarda la possibilità di un linguaggio non-bivalente in cui valga, però, il TE, va ricordata la disputa fra Charles Sayward che sosteneva (1989) che il TE vale solo in linguaggi bivalenti e Timothy Day che gli replicò (1992) additandogli, appunto, i linguaggi corrispondenti a semantiche con supervalutazioni come linguaggi non-bivalenti in cui vale il TE.

[196] Usberti (1980, 128).

che la nozione di presupposizione, anche se caratterizzata semanticamente come: "*A* presuppone *B* se e solo se *A*||–'*B* e ¬*A*||–'*B*" (dove ||–' indica la relazione di conseguenza semantica in un *E*-supermodello), resta comunque banale. Infatti, in questa semantica qualunque enunciato presuppone tutte e sole le tautologie, perché le relazioni semantiche tra enunciati sono tutte rispecchiabili a livello sintattico.

Per evitare, dunque, la banalizzazione, occorre restringere ulteriormente la nozione di supermodello a quella di (*E*, N)-supermodello, E-supermodello in cui esistono relazioni semantiche di conseguenza valida che non risultano rispecchiabili a livello sintattico: così ci sono presupposizioni che non sono tautologie e, quindi, possono essere non vere. Perciò ci sono enunciati che possono risultare né veri né falsi in certi modelli. Inoltre, "la relazione di presupposizione non può più essere concepibile come relazione di implicazione (tautologica): può accadere che *A* presupponga *B* senza che né |–*A*→*B* né |–¬*A*→*B*". Se si dice che "*A* necessita non classicamente *B* (*A* N *B*) quando accade che, se *A* è vero allora *B* è vero, ma *A* non implica materialmente *B*", si dirà che *A* presuppone *B* quando *A* N *B* e ¬*A* N *B* .

Questo supermodello è ancora troppo ampio per riuscire a caratterizzare semanticamente certi enunciati come paradossi. Van Fraassen propone la seguente soluzione che, quindi, come fa notare Usberti[197], è fortemente *ad hoc*, nel senso che è motivata solo da questo scopo.

Il supermodello in questione è detto (*E*, N*)-supermodello, ed è caratterizzato dal fatto che N* sia la più piccola relazione tale che:

[197] *Ibid.*, 162.

i) *A* N* *T*("*A*") e *T*("*A*") N* *A*, per ogni *A*
ii) *J* N* *T*("¬*J*") e *T*("¬*J*") N* *J*
iii) *J* N* ¬*T*("*J*") e ¬*T*("*J*") N* *J*.

In questo supermodello la verità è rappresentabile, quindi, nel caso dell'enunciato J del mentitore, si ha:

a) *A*||–''' *T*("*A*") e *T*("*A*")||–'''*A*;
b) *J*||–'''*T*("¬*J*") e *T*("¬*J*")||–'''*J*;
c) *J*||–'''¬*T*("*J*") e ¬*T*("*J*")||–'''*J*,

dove ||–''' indica la relazione di conseguenza semantica nel super- modello.

A partire da questo, si può far vedere che *J* presuppone una contraddizione e, quindi, è né vero né falso. Eccone la dimostrazione[198]:

1) *J*||–'''*J* da a) e con *J* al posto di *A*: *J*||–'''*T*("*J*") e *T*("*J*")||–'''*J*, poi per transitività di ||–''';
2) *T*("¬*J*")||–'''¬*J* dalla seconda parte di a) per sostituzione di *A* con ¬*J*;
3) *J*||–'''¬*J* dalla prima parte di b) e da 2) per transitività;
4) *J*||–'''*J*∧¬*J* da 1) e 3);
5) ¬*J*||–'''*T*("¬*J*") dalla prima parte di a) e con ¬*J* al posto di *A*;
6) ¬*J*||–'''¬*J* da a) e con ¬*J* al posto di *A*: ¬*J*||–'''*T*("¬*J*");
7) ¬*J*||–'''*J* da 5) e dalla seconda parte di b): ¬*J*||–'''*T*("¬*J*") e *T*("¬*J*")||–'''*J*, poi per transitività di ||–''';
8) ¬*J*||–'''*J*∧¬*J* da 6) e 7);
9) *J* presuppone *J*∧¬*J* da 4) e 8), per definizione di presupposizione.

Perciò *J* è né vero né falso.

[198] *Ibid.*, 163.

Per quanto riguarda il mentitore rafforzato, espresso con $\mathcal{J}$, e tenendo validi sempre i punti a)-c) proposti per il mentitore semplice, si ragiona così[199]:

1) $\mathcal{J} \Vdash''' T(``\mathcal{J}") \wedge \neg T(``\mathcal{J}")$ dalla prima parte di a) per sostituzione di A con $\mathcal{J}$: $\mathcal{J} \Vdash''' T(``\mathcal{J}")$ e dalla seconda parte di c);

2) $\neg\mathcal{J} \Vdash''' T(``\neg\mathcal{J}")$ dalla prima parte di a) per sostituzione di A con $\neg\mathcal{J}$;

3) $\Vdash''' T(``\neg\mathcal{J}") \rightarrow \neg T(``\mathcal{J}")$ altrimenti ci sarebbe un supermodello in cui risulterebbero veri sia $T(``\mathcal{J}")$ sia $T(``\neg\mathcal{J}")$ e, quindi, sia J' sia $\neg\mathcal{J}$, cioè risulterebbe vera una contraddizione;

4) $T(``\neg\mathcal{J}") \Vdash''' \neg T(``\mathcal{J}")$ da 3);

5) $\neg\mathcal{J} \Vdash''' \neg T(``\mathcal{J}")$ da 2) e 4) per transitività di $\Vdash'''$;

6) $\neg\mathcal{J} \Vdash''' \mathcal{J}$ da 5) e dalla seconda parte di c) per transitività di $\Vdash'''$;

7) $\neg\mathcal{J} \Vdash''' T(``\mathcal{J}")$ da 6) e dalla prima parte di a) con $\mathcal{J}$ al posto di A: per transitività di $\Vdash'''$;

8) $\neg\mathcal{J} \Vdash''' T(``\mathcal{J}") \wedge \neg T(``\mathcal{J}")$ da 5) e 7);

9) $\mathcal{J}$ presuppone $T(``\mathcal{J}") \wedge \neg T(``\mathcal{J}")$ da 1) e 8) per definizione di presupposizione.

Perciò $\mathcal{J}$ è né vero né falso.

Kripke risolve il problema dei paradossi tramite la nozione di punto fisso[200]: il loro valore di verità non è definito in nessun punto fisso e, quindi, essi non sono né veri né falsi. Cerco di spiegare intuitivamente quello che ho appena enunciato: il punto fisso è costituito dall'estensione e dalla controestensione del predicato di verità in un linguaggio, cioè dice quali sono gli enunciati veri (estensione) e quali sono gli

[199] *Ibid.*, 164.
[200] V. Kripke (1975).

enunciati falsi o non presenti nel linguaggio (controestensione), rispetto a un'interpretazione data. Per ogni interpretazione ci sarà un punto fisso. Se un enunciato non ha valore di verità in nessun punto fisso, vuol dire che non appartiene né agli enunciati veri né agli enunciati falsi (o non appartenenti al linguaggio) secondo alcuna interpretazione: è chiaro, dunque, che tale enunciato è né vero né falso. Esprimiamo quanto detto ora, invece, formalmente. Data l'interpretazione $N(S_1,S_2)$, del linguaggio L' ottenuta interpretando il predicato di verità $T(x)$ tramite la coppia (S_1,S_2), quest'ultima è detta punto fisso se $S_1=S'_{,1}$ e $S_2=S'_{,2}$, dove S_1 rappresenta l'estensione di $T(x)$, S_2 la controestensione di $T(x)$, $S'_{,1}$ è l'insieme dei goedeliani degli enunciati di L' veri in $N(S_1,S_2)$ e $S'_{,2}$ l'insieme dei goedeliani degli enunciati di L' falsi in $N(S_1,S_2)$ o degli enunciati non presenti in L'. Infatti, chiamando f la funzione definita sull'insieme delle coppie (S_1,S_2) e tale che $f(S_1,S_2)=(S'_{,1},S'_{,2})$, se $S_1=S'_{,1}$ e $S_2=S'_{,2}$, allora $f(S_1,S_2)=(S_1,S_2)$, cioè (S_1,S_2) è proprio un punto fisso della funzione.

Per mostrare che *esiste* almeno un punto fisso, cioè una interpretazione che dia tutti gli enunciati veri e tutti i falsi o non presenti nel linguaggio, definiamo a grandi linee la seguente gerarchia di interpretazioni (parziali) N_γ, con γ ordinale:

1) N_0, cioè la base gerarchica, è costituita dall'interpretazione di L' in cui $T(x)$ è completamente non definito, ovvero in cui la sua estensione e la sua controestensione sono l'insieme vuoto;

2) N_α, con $\alpha=\beta+1$, ovvero con α ordinale successore, è l'interpretazione di L' in cui $T(x)$ ha come estensione l'insieme degli enunciati falsi in N_β più i "non-enunciati" di L';

3) N_α, con α ordinale limite, è l'interpretazione di L' in cui $T(x)$ ha come estensione tutti gli enunciati dichiarati veri in almeno

un'interpretazione precedente e come controestensione la classe degli enunciati dichiarati falsi in precedenza, più i "non-enunciati" di *L'*.

Per come è definita questa gerarchia, si può dire che esiste un punto fisso, facendo vedere che esiste un ordinale σ tale che $N_\sigma=N_{\sigma+1}$, cioè un livello gerarchico tale che a quello successivo nessun nuovo enunciato viene dichiarato vero o falso. Per questo basta riflettere che, se anche il numero degli enunciati dichiarati veri o falsi aumentasse indefinitamente, ad un certo punto si esaurirebbe la cardinalità di *L'* e oltre questo punto il numero dei suddetti enunciati non potrebbe più aumentare.

È interessante notare due cose:

1) la gerarchia qui proposta è diversa da quella di Tarski, perché non si articola su livelli di linguaggio, ma su livelli di interpretazione;

2) questo approccio è articolato in modo da rendere conto di fatti relativi all'uso del predicato di verità nelle lingue naturali al di là della sola prospettiva di soluzione dei paradossi. Infatti, permette di assimilare e nello stesso tempo distinguere gli enunciati semplicemente infondati da quelli paradossali, ovvero gli enunciati per i quali non è assolutamente possibile "fondare" la scelta di un valore di verità dagli enunciati per i quali è contraddittoria la scelta di un valore di verità. La sottigliezza consiste nel dire che gli enunciati solo infondati non hanno valore *nel minimo* punto fisso, mentre i paradossi non l'hanno *in nessun* punto fisso. Questo corrisponde al fatto che è semplicemente arbitrario assegnare un valore di verità agli enunciati infondati e che, quindi, tale assegnazione non intacca la divisione fra enunciati veri e falsi compiuta da una interpretazione. D'altra parte, questo è anche in perfetta linea col fatto che è contraddittorio assegnare un valore di verità ai

paradossi e che, quindi, tale assegnazione metterebbe in crisi la divisione fra enunciati veri e falsi compiuta da un'interpretazione. Così, chiarito che nel minimo punto fisso gli enunciati infondati non hanno valore (e la certezza dell'esistenza di tale punto ci viene sempre dal fatto che i livelli sono di ordinali), si può pensare che ogni variante dell'interpre-tazione associata a quel punto possa prevedere senza problemi anche un valore per tali enunciati, mentre questo mai può avvenire per i paradossi. Rimane, comunque, il limite per tale approccio di non riuscire ad esprimere mediante enunciati veri la non-verità e non-falsità degli enunciati né veri né falsi del linguaggio: è il medesimo limite dell'approccio di Martin[201].

5. Gli autori dei sistemi di logiche polivalenti

Fino a questo punto si sono presentate alcune possibilità di critica alla bivalenza, analizzate in dettaglio. Ora si dovrebbero considerare, sempre sul medesimo argomento, altri motivi che hanno spinto gli autori di quest'ultimo secolo a contestare la bivalenza al punto di proporre sistemi di logiche non-bivalenti. Tali motivi, però, sono già stati indicati ampiamente nel capitolo II della prima parte di questo lavoro, perciò ne rammento qui solo l'elenco: un'incompatibilità fra logica modale e bivalenza, unita ad un'esigenza di liberazione dell'uomo da ogni tipo di schiavitù (L,/ukasiewicz); il problema delle funzioni proposizionali definite solo parzialmente (Kleene); l'esistenza del calcolo proposizionale intuizionista (Gödel); interessi di carattere formale (Post); la questione delle anomalie causali nella meccanica quantistica (Reichenbach); la problematica probabilistica (Reichenbach e Zawirski).

---

[201] Usberti (1980, 165-179).

Preferisco adesso soffermarmi in breve su alcuni aspetti importanti di tutti questi sistemi di logica, fin qui non abbastanza sottolineati.

In primo luogo va notato che la formulazione di una logica non bivalente permette due tipi di interpretazione dell'espressione "enunciati né veri né falsi": può significare che gli enunciati non hanno valore di verità o che ne hanno altri, a seconda che si ponga il valore I (o i valori $I_1, I_2, ..., I_n$) su un piano diverso dai valori "vero" e "falso" (ad esempio, considerandolo come un segnaposto per un valore di verità che non si conosce, come dispositivo per salvare la verofunzionalità) o sul medesimo piano[202].

Inoltre, va rimarcato che i valori di verità possono ricevere diverse interpretazioni semantiche, anche in relazione ai motivi di partenza della formulazione di quella certa logica polivalente. Ecco le linee di ricerca che si sono sviluppate in proposito, per lo più nell'ambito della logica trivalente, che è stata la maggiormente studiata[203]:

1) si assegnano i valori di verità non alle singole proposizioni ma ad insiemi ordinati di proposizioni e poi si reinterpretano tali assegnazioni in termini di ripartizione dei valori classici "vero" e "falso" alle proposizioni comprese in questi insiemi (Post);
2) si considerano le proposizioni in questione come esempi di funzioni matematiche non definite per alcuni valori della variabile: I significa che la proposizione manca di definizione o di determinazione (sistema forte di Kleene);
3) si pongono i valori di verità come riflettenti lo stato modale o ontologico delle proposizioni entro il seguente schema: "necessariamente falso", "attualmente falso", "indeterminato",

[202] *Ibid.*, 122-124.
[203] Rescher (1969, 107-111).

"attualmente vero", "necessariamente vero" (L,/ukasiewicz con sintesi in tre soli casi);
4) si pongono i valori modali come rappresentanti lo stato probabilistico delle proposizioni, ottenendo la seguente categorizzazione: "certamente vero", "probabilmente vero", "equiprobabilmente vero ed equiprobabilmente falso", "probabilmente falso", "certamente falso" (Zawirski e Reichenbach);
5) a partire dalla soluzione dei paradossi che li vede come enunciati né veri né falsi, si interpretano i tre valori di verità come "vero", "falso", "indeterminabile" (sistema debole di Kleene e Bochvar);
6) si pongono i valori di verità riflettenti lo stato epistemico delle proposizioni entro lo schema: "conosciuto essere dimostrabilmente falso", "né conosciuto come dimostrabilmente vero, né conosciuto come dimostrabilmente falso", "conosciuto essere dimostrabilmente vero" (Rosser, nel tentativo di un trattamento della logica intuizionista come polivalente);
7) si considerano i valori di verità relativi alle assunzioni, cioè agli assiomi di un sistema, e li si legge: T come "p è derivabile dagli assiomi", F come "non p è derivabile dagli assiomi" e I come "né p né non p sono derivabili dagli assiomi".

Da ultimo va sottolineato che la formulazione di una semantica non bivalente richiede una revisione dei rapporti tra i concetti di verità, falsità e negazione: non si può più pensare che ciascuno dei tre sia definibile nei termini degli altri due, ma bisogna prendere sia la verità che la falsità come primitivi. Infatti, dalla biimplicazione che costituisce la bivalenza $(\neg T(p)\rightarrow F(p)\wedge \wedge F(p)\rightarrow\neg T(p))$, la seconda implicazione continua a valere perché rispecchia l'intuizione fondamentale che abbiamo sul concetto di falsità, e cioè che nessun enunciato può essere contemporaneamente vero e falso, mentre la prima non vale più. Mediante il concetto primitivo di falsità, è comunque interamente caratterizzato il significato del connettivo "$\neg$", anche in una semantica non-bivalente, ponendo che vero ("$\neg p$")$=_{def}$ falso ("p"). Così, nel formulare le condizioni di verità e falsità degli enunciati negati, si può utilizzare la suddetta definizione, ottenendo:

1) $/\neg p/=1$ se $/p/=0$ (condizione di verità);

2) $/\neg p/=0$ se $/p/=1$ (condizione di falsità).

Queste condizioni sulla negazione "di scelta" sono le stesse di quella "esclusiva" (bivalente), ma si differenziano perché nella semantica bivalente esse equivalgono a:

3) $/\neg p/=1(0)$ se $/p/\neq 1(0)$,

mentre in una semantica non bivalente no. Per gli altri connettivi, invece, la semplice distinzione tra falsità e non verità non fornisce chiare intuizioni sulle loro condizioni di verità e falsità in una semantica non-bivalente[204].

[204] Usberti (1980, 120-121).

III. IL PRINCIPIO DEL TERZO ESCLUSO NEL METAMETALINGUAGGIO

Il principio del terzo escluso a livello metametalinguistico si presenta come l'affermazione che ogni proposizione ha un certo valore di verità *u*, oppure non l'ha, ovvero che $/p/=u$ è inevitabilmente o vero o falso. È chiaro che la non accettazione di questo enunciato significa il rifiuto di una stretta verofunzionalità, perché consiste nel sostenere che non è sempre detto che è vero o falso che un asserto abbia un determinato valore di verità, e ciò può accadere solo in sistemi quasi-verofunzionali, che non sempre assegnano valori di verità in uscita nelle matrici.

L'enunciato che si è dato può anche venire espresso mediante l'introduzione di un operatore parametrico proposizionale ad un posto Vv tale che Vvp significa che il valore di verità di p è v: esso suonerebbe come "$/Vvp/= T$ o F", cioè come "il valore di verità dell'affermazione che un asserto p ha un valore v può solo essere 'vero' o 'falso'". L'importanza dell'uso di tale operatore consiste nel fatto che per mezzo suo è possibile esprimere in un modo alternativo le tavole di verità dei sistemi polivalenti.

Ecco un esempio relativo a una tavola di verità trivalente per la negazione e per la disgiunzione:

1) per la negazione: $V3\neg p$ se e solo se $V1p$, $V2\neg p$ se e solo se $V2p$; $V1\neg p$ se e solo se $V3p$;

2) per la disgiunzione: $V1(p\vee q)$ se e solo se $V1p \vee V1q$; $V2(p\vee q)$ se e solo se $(V2p \,\&\, \neg V1q) \vee (V2q \,\&\, \neg V1p)$; $V3(p\vee q)$ se e solo se $V3p \,\&\, V3q$.

Ammettere il principio del terzo escluso nel metametalinguaggio significa, quindi, dire che tale operatore è bivalente;

rifutarlo, significa dire che è polivalente[205]. Questo rifiuto può sostenersi solo se è effettivamente possibile descri-vere le logiche polivalenti con un operatore pure polivalente, ma la ricerca in tale campo deve essere ancora sviluppata. Infatti, finora ci si è scontrati contro il dato che, perché una logica polivalente possa essere descritta sempre all'interno della polivalenza, il sistema polivalente deve sottostare a certe condizioni e contemporaneamente l'operatore Vv connesso al sistema deve essere a più valori. Il problema è che, per essere adatto al sistema, l'operatore Vv deve avere certe caratteristiche, che non sempre sono compatibili col fatto che esso sia polivalente.

Vediamo più precisamente i termini della questione.

Affinché un sistema sia autodescrittivo, deve:

1) permettere la traduzione delle tavole in enunciati
2) valutare questi enunciati come tautologie.

Questo è possibile solo se valgono le seguenti condizioni:

1) il sistema deve avere:
   a) un connettivo "implicazione" che rispetti lo schema del modus ponens (nel senso che se p e $p \rightarrow q$ assumono valori designati, così anche q);
   b) un connettivo "congiunzione" tale che, se entrambi p e q hanno valori designati, anche $p \wedge q$ l'ha;
   c) un operatore parametrico Vvp che prende un valore designato se e solo se v è il valore di verità di p;
2) enunciati del tipo "$(Vip \wedge Vjq) \rightarrow V{<}i\phi j{>}(p\phi q)$", ovvero, per un connettivo a due posti ϕ, "se p ha il valore i e q ha il valore j, allora il valore di $p\phi q$ è $i\phi j$", devono essere tautologie del sistema.

Le suddette condizioni comportano che:

a) $Vip \wedge Vjq \wedge Vk(p\phi q)$ non possa mai assumere un valore di verità designato, quando $k \neq {<}v\phi j{>}$;
b) $Vip \wedge VjVip$ non può mai assumere un valore designato, quando j non è designato;
c) se 1 è il solo valore designato, allora sia $p \rightarrow V1p$ sia $V1p \rightarrow p$ sono tautologie, così anche $p \leftrightarrow Vip$ lo è.

L'operatore Vv rispetto al quale è dato il sistema autodescrittivo deve essere definito in modo da rispettare le condizioni a)-b)-c), ovvero le sue tavole di verità devono avere caratteristiche tali da permettere al sistema le condizioni 1) e 2), se si vuole che il sistema sia autodescrittivo.

Questa possibilità fallisce per il sistema di Bochvar rispetto all'operatore trivalente Vv con la seguente matrice:

		Vvp	
p/v	T	I	F
$+T$	T	I	F
I	I	T	I
F	F	I	T

perché si ha un enunciato della forma $(Vvp \wedge Vjq) = V{<}v\phi j{>}(p\phi q)$ non tautologico. Infatti: $[(VIT \wedge VIF) \rightarrow V(I \wedge I)(T \wedge F)] = I \rightarrow VIF =$ $= I \rightarrow I = I$.

Invece, per tale sistema è adatto l'operatore Vvp che ha la seguente matrice:

Vvp

[205] Rescher (1969, 76-90).

p/v	T	I	F
$+T$	T	F	F
I	F	T	T
F	F	F	T

cioè l'operatore *Vv* classico.

È chiaro, quindi, che la ricerca deve essere ulteriormente sviluppata. Va sottolineato, però, che anche qualora ottenesse risultati positivi, non si avrebbe automaticamente la certezza che il principio del terzo escluso a livello metametalinguistico non vale. La ricerca è finalizzata a rendere possibile *anche* il rifiuto di tale principio, ma la scelta in proposito rimane aperta.

CONCLUSIONI

La questione dell'accettazione del principio del terzo escluso come legge logica, considerato ad ognuno dei livelli linguistici nei quali è espresso, coinvolge problematiche filosofiche fondamentali.

Ai livelli di linguaggio oggetto e di metalinguaggio si va da teorie alternative della verità al determinismo, alla compatibilità fra logica ed onniscienza/onnipotenza divina, alla libertà dell'uomo rispetto ad ogni forma di costrizione, alla visione dell'universo come qualcosa che accade oppure che è: lo si è sottolineato lungo tutto il corso del volume.

Anche al livello metametalinguistico la problematica connessa col principio del terzo escluso tocca questioni filosofiche di fondo. Esso, infatti, dice che $/Vvp/=T$ o F e, dal momento che *Vv* è un descrittore di sistemi logici ed il principio consiste nel dire che tale descrittore è bivalente, allora l'accettazione del terzo escluso comporta l'affermazione di una priorità metateorica della logica bivalente, perché significa che la descrizione di un sistema polivalente, comunque, rientra in quello bivalente. Viceversa, il rifiuto del terzo escluso a questo livello comporta l'affermazione dell'equiplausibilità teoretica di tutte le logiche, dal momento che nessuna ingloberebbe le altre nella metateoria. Insomma, l'accettazione del terzo escluso nel metametalinguaggio si inserisce nel dibattito storico fra i sostenitori dell'assolutismo e quelli del pluralismo logico[206], dibattito che ha visto schierati tra i primi i platonici e gli psicologisti, che intendono la logica come una descrizione di enti reali o dei nostri meccanismi mentali, e tra i secondi i convenzionalisti che pensano la logica come libero esercizio

[206] Su questo argomento si veda Galvan (1994, 77-110).

creativo, ed i pragmatisti, che la ritengono uno strumento finalizzato praticamente. A favore dell'una o dell'altra posizione non esistono, a mio avviso, giustificazioni conclusive perché esse sono scelte di visione del mondo, e come tali non possono avere sostegni determinanti. Contro l'ipotesi pluralista potrebbe affacciarsi, però, il dubbio che essa comporti l'irrazionalismo[207]. In realtà, la possibilità non sussiste, perché, se anche non si accettano come limiti di controllo alla creazione logica le finalità pratiche, rimangono sempre le esigenze di coerenza e precisione come concezione presistematica di ciò che costituisce una logica.

L'accettazione o il rifiuto come legge logica del terzo escluso a tutti e tre i livelli linguistici in cui è espresso, cioè sia come schema d'assiomi, sia come determinazione del numero dei valori di verità, sia come dichiarazione di verofunzionalità o di quasi-verofunzionalità, si pone come questione inevitabile per ogni costruzione formale.

Perciò, il fatto che l'accettazione del terzo escluso ad ogni livello linguistico comporti scelte filosofiche di fondo mette in rilievo come dietro ogni costruzione logica ci sia un ventaglio di scelte sulla visione del mondo e, quindi, evidenzia l'interesse che ogni logica per questo comunque desta.

[207] In proposito, Largeault (1994, 303) sostiene che "la relatività della logica ha perso il suo significato da quando si è rinunciato a vedere nella logica un fondamento".

BIBLIOGRAFIA

Abbagnano N. (1971) *Dizionario di filosofia.* 2a ed. Torino: UTET.

Abaelardus P. (1956) *Dialectica.* (L.M. de Rijk ed.). Assen: van Gorcum.

Abelson R. (1963) "Taylor's Fatal Fallacy", *Philosophical Review* 72, 93-96.

Ackermann R. (1967) *Introduction to Many-Valued Logic.* London: Routledge.

Ammonius (1897) *Commentarius in Aristotelis De Interpretatione.* Berlin: Akademie Verlag.

Anscombe G.E.M. (1956) "Aristotle and the Sea-Battle", *Mind* 65, 1-15.

Antonopoulos, C. (1993) "'Neither-Nor' Statements and 'Neither-Nor' States", *History and Philosophy of Logic* 12(2), 183-199.

Aristoteles (1831a) Περι,` ε,'ρμενει,΄ας, in *Aristoteles graece ex recensione Immanuelis Bekkeri edidit Academia Regia Borussica* vol. I, Berlin, 16-24.

___ (1831b) Μετα,` τα,` φυσικα,΄, in *Aristoteles graece ex recensione Immanuelis Bekkeri edidit Academia Regia Borussica* vol. II, Berlin, 980-1093.

___ (1982a) *Opere vol. I: Organon*, Roma-Bari: Laterza.
___ (1982b) *Opere vol. VI: Metafisica*, Roma-Bari: Laterza.

Aune B. (1962) "Fatalism and Professor Taylor", *The Philosophical Review* 66, 514-519.

Averroè (1962) *Commentarium Medium in Aristotelis 'De interpretatione'*. (riproduzione anastatica) Frankfurt am Main.

Barnes J. (1969) "The Law of Contradiction", *Philosophical Quarterly* 19, 302-309.

Barzin M. and Errera A. (1927) "Sur la logique de M. Brouwer", Académie Royale de Belgique. Bulletin de la Classe des Sciences (5) 13, 56-71
___ (1931) "Sur la logique de M. Heyting", L'enseignement mathématique (1) 30, 248-250
___ (1932a) "Note sur la logique de M. Heyting", Ibid. 31, 122-124
___ (1932b) "Réponse à M. A. Heyting", Ibid. 31, 273-274
___ (1933) "La logique de M. Brouwer. État de la question", Bulletin mathématique de la Societé Roumaine des Sciences 35, 51-52

Baumgarten A.G. (1982) Metaphysica. 7a ed.; Hildesheim: Olms.

Baylis C.A. (1936) "Are some Propositions Neither True nor False?", *Philosophy of Science* 3, 156-166.

Becker O. (1927) 'Mathematische Existenz', Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung 8, 441-809, anche Tübingen: Max Niemeyer 1927, rist. 1973.

Benacerraf P. and Putnam H. (1964) (eds.) *Philosophy of Mathematics*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Bencivenga E. (1976) (c/di) Le logiche libere, Torino: Boringhieri.

Bergson H. (1914) L'évolution créatrice. Paris: Alcan.

Bernays P. (1935) "Sur le platonisme dans les mathématiques", L'Enseignement Mathématique 34, 52-69; traduzione tedesca. "Über den Platonismus in der Mathematik" in P. Bernays Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft (1976), 62-78.

Bieltz P. (1976) "Excluded Middle and Many-Valued Logics", Journal of Philosophical Logic 20, 181-189.

Black M. (1937) "Vagueness: an Exercise in Logical Analysis", Philosophy of Science 4, 427-455.

Bochenski J.M. (1956) Formale Logik, Freiburg: Alber; traduzione italiana: La logica formale, Torino: Einaudi 1972.

Bochvar D.A. (1939) "Ob odnom trëhzacnom iscislénii i égo priménénii k analizu paradoksov klassiceskogo rassirénnogo funcionalhogo iscislénia", Matématiceskij sbornik 4, 287-308; traduzione inglese: "On a Three-valued Logical Calculus and its

Applications to the Analysis of the Paradoxes of the Classical Extended Functional Calculus" in History and Philosophy of Logic 2 (1981), 89-112.

Boethius (1891) Minora Commentaria in Librum Aristotelis de Interpretatione (Patrologiae Cursus Completus vol. 64). Paris.

Bouligand G. (1947) "Une épistémologie conforme à l'esprit de l'Analyse classique", Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris 224, 1747-1749.

Brouwer L.E.J. (1905) Leven, kunst en mystiek. Delft: Waltman; traduzione italiana di passi scelti in Brouwer 1975, 1-9.

___ (1907) Over de grondslagen der wiskunde. Akademisch proefschrift. Amsterdam: Maas & van Suchtelen; traduzione inglese On the Foundation of Mathematics in Brouwer 1975, 11-101.

___ (1908) "De onbetrouwbaarheid der logische principes", Tijdschrift voor Wijsbegeerte 2, 152-158; traduzione inglese: "The Unreliability of the Logical Principles", in Brouwer 1975, 107-111.

___ (1909) Het wezen der meetkunde. Openbare Les. Amsterdam: Clausen; traduzione inglese: "The Nature of Geometry", in Brouwer 1975, 112-120.

___ (1912) "Intuitionism and Formalism", Bulletin of the American Mathematical Society 20, 81-96; Brouwer 1975, 123-138.

___ (1917) Addenda en corrigenda over de grondslagen der wiskunde. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Verslagen 25, 1418-1423; Nieuw Archief voor Wiskunde (II) 12, 439-445; traduzione inglese: "Addenda and Corrigenda to On the Foundation of Mathematics", in Brouwer 1975, 145-149.

___ (1918) "Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Erster Teil. Allgemeine Mengenlehre", Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Verhandelingen 1e sectie, deel XII, no 5, pp. 1-43; Brouwer 1975, 151-190.

___ (1919) "Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Zweiter Teil. Theorie der Punktmengen", Ibidem 1e sectie, deel XII, no 7, pp. 1-33; Brouwer 1975, 191-221.

___ (1923a) "Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie", Journal von reinen und angewandten Mathematik 154, 1-8; Brouwer 1975, 268-274; traduzione inglese: "On the Significance of the Principle of Excluded Middle, especially in Function Theory" in J. van Heijenoort (ed.) From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, Cambridge Mass.: Harvard U.P. 1967, 334-341.

___ (1923b) "Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe", Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 33, 251-256; Brouwer 1975, 275-280.

___ (1924) "Zur intuitionistischen Zerlegung mathematischer Grundbegriffe", Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 36, 127-129; Brouwer 1975, 295-297.

___ (1925) "Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik I.", Mathematische Annalen 93, 244-257; Brouwer 1975, 301-314.

___ (1928) "Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus", Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings 31, 374-379; Sitzungsberichte der

Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1928, 48-52; Brouwer 1975, 409-414; traduzione inglese del § 1 in J. van Heijenoort (ed.) From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, Cambridge Mass.: Harvard U.P. 1967, 490-492.

___(1929) "Mathematik, Wissenschaft und Sprache", Monatshefte für Mathematik und Physik 36, 154-164; Brouwer 1975, 417-428.

___(1933) "Willen, Weten, Spreken", Euclides 9, 177-193; anche in De uitdrukkingswijze der wetenschap, kennistheoretische voordrachten gehouden aan de Universiteit van Amsterdam, Amsterdam, 43-63; traduzione inglese "Will, Knowledge and Speech" in van Stigt 1990, 418-431 e di passi scelti in Brouwer 1975, 443-446.

___(1948a) "Essentieel negatieve eigenschappen", Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings 51, 963-964; Indagationes Mathematicae 10, 322-323; traduzione inglese "Essentially Negative Properties" in Brouwer 1975, 478-479.

___(1948b) "Consciousness, Philosophy and Mathematics", Proceedings of the 10th International Congress of Philosophy, Amsterdam 1948 III, 1235-1249; Brouwer 1975, 480-494.

— (1949), "De non-aequivalentie van de constructieve en de negatieve orderelatie in het continuum", Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings 52 122-124; Indagationes Mathematicae 11, 37-39; traduzione inglese: "The non-Equivalence of the Constructive and the Negative Order Relation on the Continuum" in (Brouwer 1975: 495-496).

___(1952) "Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism", South African Journal of Science 49, 139-146; Brouwer 1975, 508-515.

___(1954a) "Points and Spaces", Canadian Journal for Mathematics 6, 1-17; Brouwer 1975, 522-540.

___(1954b) "Addenda en corrigenda over de rol van het principium tertii exclusi in de wiskunde", Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Serie A 57, 104-105; Indagationes Mathematicae 16, 104-105; traduzione inglese "Addenda and Corrigenda on the Role of the Principle of Excluded Middle in Mathematics" in J. van Heijenoort (ed.) From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, Cambridge Mass.: Harvard U.P. 1967, 341-342 e in Brouwer 1975, 539-540.

___(1954c) "Nadere addenda en corrigenda over de rol van het principium tertii exclusi in de wiskunde", Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Serie A 57, 109-111; Indagationes Mathematicae 16, 109-111; traduzione inglese: "Further Addenda and Corrigenda on the Role of the Principle of Excluded Middle in Mathematics", in J. van Heijenoort (ed.) From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, Cambridge Mass.: Harvard U.P. 1967, 342-345 e in Brouwer 1975, 541-543.

___(1955) "The Effect of Intuitionism on Classical Algebra of Logic", Proceedings of the Royal Irish Academy, Section A 57, 113-116; Brouwer 1975, 551-554.

___(1975) Collected works vol. 1 "Philosophy and the Foundations of Mathematics", (A. Heyting ed.), Amsterdam: North-Holland. (Nel testo viene indicato come CW I.)

___(1979) Ongepubliceerde fragmenten: originale in van Dalen 1981, 25-35; traduzione inglese: "The Rejected Parts of

Brouwer's Dissertation", in van Stigt 1979, 385-404 e van Stigt 1990, 405-415.
___(1981) Brouwer's Cambridge Lectures in Intuitionism (D. van Dalen ed.), Cambridge: Cambridge U.P.; traduzione italiana L.E.J. Brouwer. *Lezioni sull'intuizionismo*. Torino: Boringhieri 1983.
___(1990) "Changes in the Relation Between Classical Logic and Mathematics", in van Stigt 1990, 453-458.

Butler R.J. (1955) "Aristotle's See Fight and the Three-Valued Logic", *Philosophical Review* 64, 264-274.

Cahn S. (1964) "Fatalistic Arguments", *The Journal of Philosophy* 41, 295-305.

Casari E. (1964) *Questioni di filosofia della matematica*. Milano: Feltrinelli.

Chandler H.S. (1967) "Excluded Middle", *The Journal of Philosophy* 64, 807-814.

Cicero (1828) *Academica priora*, in *M.T. Ciceroni Pars Tertia sive opera philosophica* vol. I, Paris: Didot, 227-449.
___(1839) *De fato*, in *M.T. Ciceroni Pars Tertia sive opera philosophica* vol. IV, Paris: Didot, 677-724.

Cooper N. (1978) "The Law of Excluded Middle", *Mind* 87, 161-180.

van Dalen D. (1981) (ed.) *L.E.J. Brouwer. Over de grondslagen der wiskunde*. Amsterdam: Mathematisch Centrum.

___(1986) "Intuitionistic Logic", in D. Gabbay, F. Guenthner eds. *Handbook of Philosophical Logic* vol. III. Dordrecht: Reidel, 225-339.
___ (1990) "The War of the Frog and the Mice", The Mathematical Intelligencer 12, 17-31.
___ (1991) "Brouwer's Dogma of Languageless Mathematics and its Role in his Writings", in A. F. Heijerman e H. W. Schmitz (eds). Significs, mathematics, semiotics. The Signific Movement in the Netherlands Proceedings of the international conference held at Bonn, Nov. 19-21, 1986, Münster: Nodus, 33-43.

van Dantzig D. (1947) "On the Principles of Intuitionistic and Affirmative Mathematics", *Indagationes Mathematicae* 9, 429-440, 506-517.
___(1956) "Is $10^{10^{10}}$ a Finite Number?", *Dialectica* 10, 273-277.

Day, T. J. (1992) "Excluded Middle and Bivalence", *Erkenntnis* 37(1), 93-97.

Detlefsen M. (1990) "Brouwerian Intuitionism", Mind 99, 501-533.

Ducasse C.J. (1941) "Truth, Verifiability and Propositions About the Future", *Philosophy of Science* 8, 329-337.

Dumitriu A. (1943) *Logica Polivalenta*. Bucarest: Viata Literara.

Dummett M. (1959) "Truth", in C. Pitcher (ed.) *Truth*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall 1964, 93-111.

___ (1959) "A Propositional Caculus with Denumerable Matrix", The Journal of Symbolic Logic 24, 97-106.
___ (1977) *Elements of Intuitionism*. Oxford, Clarendon Press.

Duns Scotus J. (1891) *Opera omnia*. Paris: Vivès.

Essenin-Volpin A.S. (1961) "Le programme ultra-intuitionniste des fondements des mathématiques", in *Infinitistic Methods*. Oxford: pergamon, 201-223.
___ (1970) "The Ultra-intuitionistic Criticism and the Anti-Traditional Programme for Foundations of Mathematics", in A. Kino, J. Myhill, R.E. Vesley (eds.) Intuitionism and Proof Theory. Amsterdam: North-Holland, 3-45.

al-Farabi (1960) *Alfarabi's Commentary on Aristotle's De Interpretatione*. Beyruth.

Farber M. (1942) "Logical Systems and the Principles of Logic", *Philosophy of Science* 9, 40-54.

Fine K. (1975) "Vagueness, Truth and Logic", *Synthese* 30, 265-300.

Fitch F.B. (1952) *Symbolic Logic: an Introduction*. New York: Ronald Press.

van Fraassen B.C. (1969) "Presuppositions, Supervaluations, and Free Logics", in K. Lambert (ed.) *The Logical Way of Doing Things*, New Haven: Yale UP, 69-91.
— (1970a) "Truth and Paradoxical Consequences", in Martin 1970, 13-23.

— (1970b) "Rejoinder: on a Kantian Conception of Language", in Martin 1970, 59-66.
— (1971) *Formal Semantics and Logic*, New York: Macmillan.

Franchella M. (1994a) "Brouwer and Griss on Intuitionistic Negation", *Modern Logic* 4 (3), 256-265.
— (1994b) *L.E.J. Brouwer pensatore eterodosso*. Milano: Guerini.
— (1994c) "Heyting's Contribution to the Change in Research into the Foundations of Mathematics", *History and Philosophy of Logic* 15, 149-172.

Frede D. (1970) *Aristoteles und die Seeschlacht*. Göttingen: Vandenhoek und Ruprecht.

Galeazzi A. (1975) *Il principio di (non) contraddizione*. Messina: D'Anna.

Galvan S. (1994) *Le regole della negazione nella logica classica, intuizionistica e minimale*, Milano: ISU Cattolica.

Gilmore P. (1953) "The Effect of Griss' Criticism of the Intuitionistic Logic on Deductive Theories Formalized within the Intuitionistic Logic", *Indagationes Mathematicae* 15, 162-187.

Glivenko V. (1928) "Sur la logique de M. Brouwer", Académie Royale de Belgique. Bulletin de la Classe des Sciences (5) 14, 225-228.
— (1929) "Sur quelques points de la logique de M. Brouwer", Ibid. 15, 183-188.

Goddard L. (1976) "True and Provable", *Mind* 67, 13-31.

Gödel K. (1933) "Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* 4, 33-40.

Goodman N. and Myhill J. (1978) "Choice Implies Excluded Middle", *Zeitschrift für mathematische Logik* 24, 461.

Griss G.F.C. (1944) "Negatieloze intuitionistische wiskunde", Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Verslagen 53, pp 261-268.

— (1946a) "Negationless Intuitionistic Mathematics", Indagationes Mathematicae 8, pp. 674-681.

— (1946b) Idealistische Filosofie. Een humanistische levens- en wereld-beschouwing, Van Loghum Slaterus, Arnhem; traduzione italiana di passi scelti in M. Franchella, C. Mangione (c/di) Letture di logica. Milano: LED 1993, 127-136.

— (1948) "Sur la négation (dans les mathématiques et la logique", Synthese 7, 71-74.

— (1950) "Negationless Intuitionistic Mathematics II", Indagationes Mathematicae 12, pp 108-115.

— (1951a) "Logic of Negationless Intuitionistic Mathematics, Indagationes Mathematicae 13, 41-49.

— (1951b) "Negationless Intuitionistic Mathematics III - IV", Indagationes Mathematicae 13, 193-199, 452-471.

— (1955) "La mathématique intuitionniste sans negation", Nieuw Archief voor Wiskunde (3), 3, 134-142.

Günther G. (1953) "Die philosophische Idee einer nicht-aristotelischen Logik", *Actes du XIème Congrès International de Philosophie* 5, Amsterdam: North-Holland, 44-50.

— (1958) "Die Aristotelische Logik des Seins und die nicht-Aristotelische Logik der Reflexion", *Zeitschrift für philosophische Forschung* 12, 360-407.

Haack S. (1974) *Deviant Logic: some Philosophical Issues*. Cambridge: Cambridge U.P.

Hegel G.F.W. (1989) *Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften im Grundrisse*, in *Gesammelte Werke* (1830) vol. 20. Hamburg: Meiner.

Heijerman A.F. (1990) "Relativism and Significs: Gerrit Mannoury on the Foundations of Mathematics", in H.W. Schmitz (ed.) Essays on signific, Amsterdam: Benjamins, 247-272.

Heyting A. (1930a) "Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik", Sitzungsbericht der preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse, 42-56

___ (1930b) "Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik II", Ibid., 57-71.

___ (1930c) "Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik III", Ibid., 158-169.

___ (1930d) "Sur la logique intuitionniste", Académie Royale de Belgique. Bulletin de la Classe des Sciences (5) 16, 957-963.

___ (1932a) "A propos d'un article de MM. Barzin et Errera", L'enseignement mathématique 31, 121-122.

___ (1932b) "Réponse à MM. Barzin et Errera", Ibid. 31, 271-272.

___ (1932c) "Réponse à MM. Barzin et Errera", Ibid. 31, 274-275.

___ (1934) Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie, Berlin: Springer; 2. ed. in francese e riveduta Les fondements des mathématiques. Intuitionnisme. Théorie de la démonstration, 1955, Paris: Gauthier-Villars e Louvain: Nauwelaerts. (I riferimenti nel testo sono a quest'ultima edizione.)

___ (1935) "Intuitionistische Wiskunde", Mathematica B 4, 123-128.

___ (1949) "Spanningen in de wiskunde", Euclides 25, 233-236, 301-312.

___ (1954) "G.F.C. Griss and his Negationless Intuitionistic Mathematics", Synthese 9, 91-96.

___ (1956a) Intuitionism: an Introduction. Amsterdam: North-Holland; 2a ed. riveduta 1966; 3a ed. riveduta 1971.

___ (1956b) "La conception intuitionniste de la logique", Les études philosophiques 11, 226-233.

___ (1958a) "Blick von der intuitionistischen Warte", Dialectica 12, 332-345; traduzione italiana di passi scelti in M. Franchella, C. Mangione (c/di) Letture di logica. Milano: LED 1993, 137-146.

___ (1958b) "On truth in mathematics", in Verlag van de plechtige viering van het honderdvijftigjarig bestaan der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen met de teksten der bij die gelegenheid gehouden redevoeringen en voorgedrachte Amsterdam: North-Holland, 277-279.

___ (1959) "Some Remarks on Intuitionism", in A. Heyting (ed.) Constructivity in Mathematics, Amsterdam: North-Holland, 69-71.

___ (1962) "After thirty years", in E. Nagel, P. Suppes, A. Tarski (eds.) Logic, Methodology and Philosophy of science, Stanford: Stanford University Press, 194-197.

___ (1968) "L.E.J. Brouwer", in R. Klibanski (ed.) Contemporary Philosophy. A Survey. I. Firenze: La Nuova Italia, 308-315.

Hintikka J. (1959) "Necessity, Universality, and Time in Aristotle", *Ajatus* 20, 65-90.

Horn L. (1990) A Natural History of Negation. Chicago: Chicago U.P.

Jack H.H. (1959) "Logical Truth and the Law of Excluded Middle", Mind 68, 93-97.

Jaś,'kowski, S. (1936) "Recherches sur le système de la logique intuitioniste", Actes du Congres International de Philosophie Scientifique vol VI, Paris.

Johansson I. (1937) "Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistische Formalismus", Compositio Mathematica 4, 119-136.

Jordan Z. (1963) "Logical Determinism", Notre Dame Journal of Formal Logic 4, 1-38.

Kleene S.C. (1938) "On a Notation for Ordinal Numbers", The Journal of Symbolic Logic 3, 150-155.
___ (1952) Introduction to Metamathematics. Amsterdam: North-Holland.

Kneale M. e W. (1962) The Development of Logic. Oxford: Clarendon Press; traduzione italiana: Storia della logica (1972) Torino: Einaudi.

Kohl H.R. e Parsons C. (1960) "Self-reference, Truth and Provability", Mind 59, 69-73.

Kolmogorov A.N. (1925) 'O principe tertium non datur', Matematiceskij sbornik 32, 646-667; traduzione inglese: "On the principle of excluded middle" in J. van Heijenoort (ed.) From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, Cambridge Mass.: Harvard U.P. 1967, 416-437.

Kosko B. e Isaka S. (1993) "Logica sfumata", Le Scienze, settembre 1993, 52-60.

Kosko B. (1994) Fuzzy Thinking: the New Science of Fuzzy Logic. London: Flamingo; traduzione italiana Il pensiero fuzzy, Milano: Baldini e Castoldi, 1995.

Kripke S. (1975) "Outline of a Theory of Truth", The Journal of Philosophy 72, 690-716.

von Kutschera, F. (1985) Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Berlin: de Gruyter.

Largeault J. (1994) "Sur l'universalité de la logique", Archives de philosophie 57, 295-306.

Lear J. (1980) Aristotle and Logical Theory. Cambridge: Cambridge U.P.

Leibniz G.W. (1954) Monadologie. Paris: PUF.
___ (1962) Nouveaux Essais, in Sämtliche Schriften und Briefe Sechste Reihe. Vol. 6. Berlin: Akademie Verlag, 39-528.

Lévy P. (1926) "Sur le principe du tiers exclu et sur les théorèmes non susceptibles de démonstration", *Revue de métaphysique et de morale*, 253-258.
___ (1927) 'Logique classique, logique brouwerienne et logique mixte', Académie Royale de Belgique. Classe des Sciences (5) 13, 256-266.

Linke P. (1948) "Die mehrwertigen Logiken und das Wahrheitsproblem", *Zeitschrift für philosophische Forschung* 3, 378-398.

Linsky, L. (1954) "Professor Donald Williams on Aristotle", *The Philosophical Review* 63, 250-252.

Lopez-Escobar E.G.K. (1972) "Constructions and Negationless logic", *Studia logica* 30, 7-19.

Lowe M. F. (1980) "Aristotle on the Sea-Battle: a Clarification", *Analysis* 40, 55-59.

L/ukasiewicz J. (1910) "Über den Satz des Widerspruchs bei Aristoteles", *Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe de Philosophie*, 15-38.
___ (1918) "Farewell Lecture by Professor Jan L/ukasiewicz, Delivered in the Warsaw University Lecture Hall on March 7, 1918; L/ukasiewicz 1970, 84-86.
___ (1920) "O logice trojwartosciowej", Ruch Filozoficzny 5, 169-171; traduzione inglese: "On Three-valued Logic" in S. McCall (ed.) Polish Logic: 1920-1939, Oxford: Clarendon Press 1967, 16-18 e in L/ukasiewicz 1970, 87-88.
___ (1921) "Logika dwuwartosciowa", Przeglad Filosoficzny 23, 189-205.
___ (1923) "O determinizmie", in J. Sl/upeki (ed.), Jan *L/ukasiewicz*. Z Zagadnien Logiki i Filozofii, Warsaw 1961; traduzione inglese: "On Determinism", in S. McCall (ed.) Polish Logic: 1920-1939, Oxford: Clarendon Press 1967, 19-39.
___ (1930) "Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls", Comptes Rendus es Séances de la Societé des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III 23, 51-77; traduzione inglese "Philosophical Remarks on Many-valued Systems on Propositional Logic" in L/ukasiewicz 1970, 153-178.
___ (1934) "Z historji logiki zdan", Przeglad Filozoficzny 37, 417-437; traduzione inglese: "From the History of the Logic of Propositions" in S. McCall (ed.) Polish Logic: 1920-1939, Oxford: Clarendon Press 1967, 66-87.
___ (1935) "Zur vollen dreiwertigen Aussagenlogik", Erkenntnis 5, 176.
___ (1952) "On the Intuitionistic Theory of Deduction", Indagationes mathematicae 14, 202-212.

___ (1970) *Selected Works* (L. Borkowski ed.). Amsterdam: North-Holland. (Nel testo viene indicato come SW.)
___ (1989) "On the Principle of Excluded Middle", History and Philosophy of Logic 8, 69.

Makinde M A. (1977) "Formal Logic and the Paradox of Excluded Middle", International Logic Review 8, 40-52.

Mangione C. e Bozzi S. (1993) Storia della logica. Milano: Garzanti.

Maritain J. (1937) *Introduction to Logic*. New York.

Martin R.L. (1967) "Toward a Solution to the Liar Paradox", *The Philosophical Review* 76, 279-311.
___ (1970) (ed.) The Paradox of the Liar, New Haven: Yale U.P.
___ (1974) "Sortas Ranges for Complex Predicates", Journal of Philosophical Logic 3, 159-167.

McCall S. (1966) "Temporal Flux", *Americal Philosophical Quarterly* 3, 270-281.
___ (1970) "A Non-classical Theory of Truth, with an Application to Intuitionism", *Ibid.* 7, 83-88.

Meltzer B. (1964) "The Third Possibility", Mind 73, 430-433.

Michalski K. (1937) "Le problème de la volonté à Oxford et à Paris au XIVe siècle", Studia Philosophica 2, 233-365.

Mittelstädt P. and Stachow E.W. (1978) "The Principle of Excluded Middle in Quantum Logic", Journal of Philosophical Logic 7, 181-208.

Moisil G. (1940) "Recherches sur les logiques non-chrysippiennes", Annales scientifiques de l'Université de Jassy 26, 431-466.

Morot-Sir E. (1947) La pensée négative. Paris: Aubier.

Nelson D. (1959) "Negation and Separation of Concepts in Constructive Systems", in A. Heyting (ed.) Constructivity in Mathematics. Amsterdam: North-Holland, 208-225.

Normore C.G. (1993) "Petrus Aureoli and His Contemporaries on Future Contingents and Excluded Middle", Synthese 96 (1), 83-92.

Parikh R. (1971) "Existence and Feasibility in Arithmetic", Journal of Symbolic Logic 36 (3), 494-508.

Pena L. (1984) "Identity, Fuzziness and Noncontradiction", Nous 18, 227-260.

Post E. (1921) "Introduction to a General Theory of Elementary Propositions", American Journal of Mathematics 43, 163-185; J. van Heijenoort (ed.) From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, Cambridge Mass.: Harvard U.P. 1967, 265-283.

Prior A. (1953a) "On Propositions Neither Necessary Nor Impossible", *The Journal of Symbolic Logic* 18, 105-108.
___ (1953b) "Three-valued Logic and Future Contingents", *Philosophical Quarterly* 3, 317-326.
___ (1957) *Time and Modality*. London: Oxford U.P.

Pryor D.V. e Tieszen R.L: (1977) "A Note on The Principle of Excluded Middle and Many-Valued Logics", *Dialogue* 19, 63-66.

Przel/ecki, M. (1982) "The Law of Excluded middle and the Problem of Idealism", *Grazer philosophische Studien* 18, 1-16.

Putnam H. (1957) "Three-valued Logic", *Philosophical Studies* 8, 73-80.

Quine A. (1953) "On a So-called Paradox", *Mind* 62, 65-67.
___ (1992) *Pursuit of Truth*. Cambridge Mass.: Harvard U.P. (ed. riv.).

Read S. (1994) *Thinking about Logic*. Oxford: Oxford U.P.

Rekha Verma R. (1970) "Vagueness and the Principle of Excluded Middle", Mind 79, 67-77.

Reichenbach H. (1935a) "Wahrscheinlichkeitslogik", Erkenntnis 5, 37-43.
__ (1935b) "Wahrscheinlichkeitslogik und Alternativlogik", Ibid., 177-178.

__ (1949) Philosophische Grundlagen der Quanten-mechaniks. Basel: Birkhäuser; traduzione italiana: I fondamenti filosofici della meccanica quantistica. Torino: Boringhieri 1970.
__ (1951) "Über die erkenntnistheoretische Problemlage und den Gebrauch einer dreiwertigen Logik in der Quantenmechanik", Zeitschrift für Naturforschung 6a, 569-575.
__ (1952) "Les fondements logiques de la théorie des quanta: Utilisation d'une logique à trois valeurs", Applications scientifiques de la logique mathématique, Paris, 103-114.

Rescher N. (1955) "Some Comments on Two-valued Logic", Philosophical Studies 6, 54-58.
__ (1962) "Quasi-truth-functional Systems of Propositional Logic", The Journal of Symbolic Logic 27, 1-10.
__ (1963) Studies in the History of Arabic Logic. Pittsburgh: University of Pittsburgh Press.
__ (1965) "An Intuitive Interpretation of Systems of Four-valued Logic", Notre Dame Journal of Formal Logic 6, 154-156.
__ (1969) Many-valued Logic, New York: McGraw-Hill.

Rose G.F. (1953) "Propositional Calculus and Realizability", Transactions of the American mathematical Society 75, 1-19.

Rosser J.B. and Turquette A.R. (1952) Many-valued Logics. Amsterdam: North-Holland.

Russell B. (1923) "Vagueness", Australasian Journal of Philosophy and Psychology 1, 84-92.

Russell B. and Whitehead A.N. (1910) Principia Mathematica. Cambridge: Cambridge U.P.

Saunders, J.T. (1962) "Professor Taylor on Fatalism", Analysis 23, 1-2.

Sayward C. (1989) "Does the Law of Excluded Middle Require Bivalence?", Erkenntnis 31, 129-137.

Schock R. (1964) "On Finitely Many-valued Logics", Logique et Analyse 7, 43-58.

Schofield P. (1964) "On a Correspondence between Many-valued and Two-valued Logics", Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 10, 265-274.

Sharvy R. (1964) "Tautology and Fatalism", The Journal of Philosophy 41, 293-295.

Sierpinski W. (1960) "Sur un problème de la logique à n valeurs", Fundamenta Mathematicae 49, 167-170.

Simplicius (1990) Commentaire sur les Catégories. Leiden: Brill.

Slater B.H. (1988) "Excluding the Middle", Critica 20, 55-71.

Sl/upeki J. (1936) "Der volle dreiwertige Aussagenkalkül", Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie Classe III 29, 9-11.

van Stigt W. P. (1971) *Brouwer's Intuitionism: a Reappreisal of Brouwer's Contribution to the Study of the Foundation of Mathematics*, Ph. D. Thesis, London.
___ (1979) "The Rejected Parts of Brouwer's Dissertation on the Foundation of Mathematics", Historia Mathematica 6, 385-404.
___ (1990) Brouwer's Intuitionism, Amsterdam, North-Holland.

Strang C. (1960) "Aristotle and the Sea Battle", *Mind* 69, 447-465.

Sugihara T. (1952) "Negation in Many-valued Logik", *Memoirs of Liberal Arts College, Fukui University* 1, 1-5.

Taylor R. (1957) "The Problem of Future Contingencies", *The Philosophical Review* 66, 1-28.
___ (1962) "Fatalism", *The Philosophical Review* 71, 56-66.
___ (1964) "Comment", *The Journal of Philosophy* 41, 305-307.

Tomberlin J.E. (1971) "The Sea Battle Tomorrow and Fatalism", *Philosophy and Phenomenological Research* 31, 352-357.

Tommaso d'Aquino (1872) *In Perihermeneiam.* Paris: Vivès.

Toms E. (1941) "The Law of Excluded Middle", *Philosophy of Science* 8, 33-38.

Troelstra A.S. (1983) 'Logic in the writings of Brouwer and Heyting', in Atti del convegno internazionale di Storia della Logica. San Gimignano, 4-8 dicembre 1982, Bologna: CLUEB, 193-210

Tye, M. (1989) "Supervaluationism and the Law of Excluded Middle", *Analysis* 49, 141-143.

Tymoczko T. (1986) (ed.) *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Boston: Birkhäuser.

Upton T.V. (1987) "The Principle of Excluded Middle and Causality: Aristotle's More Complete Reply to the Determinist", *History of Philosophy Quarterly* 4, 359-367.

Usberti G. (1980) *Logica, verità e paradosso.* Milano: Feltrinelli.

Valpola V. (1955) "Ein System der negationslosen Logik mit ausschliesslich realisierbaren Prädikaten", *Acta Philosophica Fennica* 9, 1-247.

Viano C.A. (1955) *La logica di Aristotele*. Torino: Taylor.

Vredenduin P.G.J. (1953) "The Logic of Negationless Mathematics", *Compositio Mathematica* 11, 204-277.

Wavre R. (1924) "Y a-t-il une crise des mathématiques?", *Revue de métaphysique et de morale* 31, 435-467.
___ (1926) Logique formelle et logique empiriste, *Ibid.* 33, 65-75.

Weismann F. (1946) "Are There Alternative Logics?", *Proceedings of the Aristotelian Society* 46, 77-104.

Weiss P. (1931) "Two-valued Logic: Another Approach", *Erkenntnis* 2, 242-261.

Welding S.O. (1984) "Das Prinzip von Nicht-Widerspruch und das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten", *Zeitschrift für philosophische Forschung* 38, 413-435.

William of Ockham (1958) Tractatus de Praedestinatione et de Praescientia Dei et de Futuris Contingentibus in Collected Articles on Ockham. New York, 420-441.

Williams D. (1951) "The Sea Fight Tomorrow", in P. Henle, H.M. Kallen, S.K. Langer (eds.) *Structure, Method and Meaning*, New York, 280-306.
___ (1954) "Professor Linsky on Aristotle", *The Philosophical Review* 63, 253-255.

Wiredu J.E. (1975) "Truth as a Logical Constant, with an Application to the Principle of Excluded Middle", *The Philosophical Quarterly* 25, 305-317.

Woolhouse R. (1967) "Third Possibility and the Law of Excluded Middle", *Mind* 76, 283-285.

Wright C. (1982) "Strict Finitism", *Synthese* 51, 203-282.

von Wright G.H. (1986) "Truth, Negation and Contradiction", *Synthese* 66, 3-14.

Zadeh L. (1965) "Fuzzy Sets", *Information and Control* 8, 338-353.

___ (1975) "Fuzzy Logic and Approximate Reasoning", *Synthese*, 407-428.

Zawirski Z. (1935) "Über das Verhältnis mehrwertigen Logik zur Wahrscheinlichkeitsrechnung", *Studia Philosophica* 1, 407-442.
___ (1936) "Les rapports de la logique polyvalente avec le calcul des probabilités", in *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique* vol. IV, 40-45.

Zinov'ev A.A. (1963) *Philosophical Problems of Many-Valued Logic*. Dordrecht: Reidel.

INDICE

INDICE DEI NOMI

INDICE