



## SULLA RICEZIONE DEL *THEOREMA EGREGIUM*, 1828-1868

ALBERTO COGLIATI

**ABSTRACT:** The article aims to analyze the history of the reception of *Theorema Egregium* in the time span between the publication of Gauss's *Disquisitiones* and about 1870. Some contributions by Liouville, Bertrand, Puiseux, Chelini, Brioschi and Beltrami are carefully analyzed, by showing how the authors proposed to demonstrate this fundamental result of surface theory in a manner that highlighted its geometric content in a more satisfactory way than Gauss's original treatment.

In actual fact, most part of the ideas underlying these reformulations was already contained in the research

(private and published only posthumously) of Gauss. Curiously, the history of the reception of *Theorema Egregium* in the period considered was littered with attempts, certainly unaware, to rediscover demonstrations and procedures that Gauss had deemed inadequate and that he had definitively discarded when drafting the text of the *Disquisitiones*.

As will be shown, the reception of Gauss's ideas produced a fruitful and in-depth debate concerning the methods and techniques that should be considered most suitable to deal with problems in the realm of the theory of surfaces.

### 1. INTRODUZIONE

UNA breve recensione del trattato di Monge *Géométrie descriptive* apparsa nel Luglio del 1813 nelle «Göttingische gelehrte Anzeigen»<sup>1</sup> offriva a Gauss l'occasione per riflettere sulle tecniche abitualmente impiegate in geometria e proporre un proprio punto di vista metodologico sulla disciplina. Gauss riconosceva la necessità di impiegare strumenti di carattere analitico specialmente nello studio delle proprietà dello spazio considerato nelle sue tre dimensioni e tuttavia raccomandava allo stesso tempo di coltivare e di conservare un genuino spirito geometrico (*Geometrisches Geist*).<sup>2</sup> Esso infatti, precisava Gauss, aveva il vantaggio, rispetto all'analisi, di condurre all'obiettivo in maniera più breve e più diretta, in particolare quando l'analisi non era maneggiata con eleganza. Tanto

Alberto Cogliati, Università degli Studi di Milano; mail [alberto.cogliati@unimi.it](mailto:alberto.cogliati@unimi.it)

<sup>1</sup> GAUSS 1863-1933, IV, pp. 359-360; citata anche in STÄCKEL 1917 e DOMBROWSKI 1979.

<sup>2</sup> GAUSS 1863-1933, IV, p. 360.



più lodevoli erano quindi le ricerche di Monge poiché avevano saputo trattare complicate questioni di geometria spaziale con metodi puramente geometrici che nulla avevano concesso alle formule dell'analisi.

Molti anni più tardi, in una lettera all'amico Schumacher del Maggio 1843, Gauss ribadiva la propria predilezione per i metodi geometrici riconoscendo tuttavia all'impiego del calcolo differenziale (un analogo discorso valeva, a suo dire, per il calcolo delle variazioni di Lagrange e il calcolo baricentrico di Möbius) il vantaggio di offrire strumenti maneggevoli che persino i più, non soccorsi 'dall'inconscia ispirazione del genio', potevano applicare proficuamente. In aggiunta, il calcolo offriva spesso un utile principio di organizzazione del sapere che consentiva di ravvicinare problemi distinti in un dominio organico (*organisches Reich*).

Il problema di stabilire sino a che punto fosse lecito o desiderabile impiegare gli strumenti dell'analisi per risolvere questioni di carattere geometrico costituisce un tema chiave della riflessione sui metodi della geometria tra Settecento e Ottocento. Tuttavia in Gauss esso assume una valenza storiografica più specifica in ragione del fatto che tale opposizione dialettica tra gli strumenti della pura geometria e quelli dell'analisi costituisce lo sfondo di buona parte delle sue ricerche in materia di teoria delle superfici e più in particolare del complesso percorso che lo condusse alla dimostrazione del *theorema egregium* (TE) nella formulazione proposta in Gauss 1828, §11-12. È noto infatti che Gauss disponeva già a partire dal 1816 di tale risultato, al quale era pervenuto per via geometrica, e che solo dopo averne ottenuto una dimostrazione analitica aveva deciso di poter attribuire dignità di stampa alle proprie ricerche sull'argomento. Ciò risulta tanto più sorprendente alla luce delle convinzioni metodologiche espresse da Gauss che, come si è visto, lo inducevano invece a privilegiare dimostrazioni di carattere geometrico. Nel caso specifico, è probabile che l'oggettiva complessità della originaria dimostrazione del teorema sull'eccesso (o il difetto) angolare di un triangolo geodetico, sul quale si basava una prima dimostrazione (1825) dell'invarianza della curvatura, fosse all'origine dell'insoddisfazione di Gauss e del conseguente ritardo nella pubblicazione dei risultati delle proprie ricerche.

La questione dell'impiego degli strumenti e delle tecniche dell'analisi in un contesto prettamente geometrico costituisce altresì un elemento importante per ricostruire e comprendere la ricezione delle idee di Gauss in materia di teoria delle superfici. In effetti, la maggior parte delle ricerche apparse nei primi quarant'anni dalla pubblicazione delle *Disquisitiones* nelle quali si riconosce l'enorme rilevanza dei risultati lì contenuti, tematizza la questione al punto da porla al centro delle critiche e dei tentativi di comprensione profusi.

La storia della ricezione del TE, che è parte rilevante della storia della ricezione dell'intera teoria delle superfici di Gauss,<sup>1</sup> fu un susseguirsi di variegati tentativi di pervenire a dimostrazioni alternative dell'invarianza della curvatura che ne mettessero in luce il contenuto geometrico in maniera più soddisfacente di quanto Gauss avesse già fatto nelle *Disquisitiones*. Allo stesso tempo, non mancarono tentativi di riformulare e sistematizzare l'apparato analitico impiegato da Gauss al fine di semplificare il procedimento con il quale si poteva dedurre l'espressione della curvatura in coordinate arbitrarie. Uno stimolo condiviso fu rappresentato dalla volontà di inserire alcuni dei risultati di Gauss entro programmi di insegnamento universitario. A tal fine, gli sforzi di molti furono volti a elaborare dimostrazioni che richiedevano soltanto la conoscenza di pochi requisiti elementari.

Lo scopo del presente articolo è di fornire un'analisi del processo di ricezione del TE verso la metà dell'Ottocento, in particolare in Francia e in Italia. La ricezione delle idee di Gauss in Germania, veicolata dalle ricerche di Jacobi, in parte già analizzate in McCleary 1994a-b, e di Minding, che pure si occupò prevalentemente non tanto del TE quanto più specificamente del problema (inverso) di trovare condizioni sufficienti che garantiscano l'applicabilità tra superfici, rimarrà sullo sfondo.

Dapprima si offrirà un'analisi delle ricerche di Gauss ed un resoconto del complesso processo che portò alla formulazione e alla dimostrazione del teorema quali compaiono in Gauss 1828. Quindi, si procederà alla trattazione della ricezione del teorema in Francia e in Italia. A quest'ultima sono dedicati due paragrafi nei quali si affrontano i contributi di Domenico Chelini e di Eugenio Beltrami.

## 2. DUE DIMOSTRAZIONI A CONFRONTO

La pubblicazione delle *Disquisitiones circa superficies curvas* (1828)<sup>2</sup> segna l'inizio della moderna geometria differenziale. Infatti se è vero che risultati importanti nel campo della geometria delle curve e delle superfici erano stati ottenuti nel corso del Settecento da Eulero e da Meusnier, tuttavia l'apporto di Gauss risulta così innovativo e fondamentale da far ritenere che tale opera segni l'inizio di una nuova fase nello sviluppo della disciplina. In particolare, Gauss ha avuto il merito di aver posto, per primo, l'enfasi su quelle proprietà delle superfici che si dicono *intrinseche* poiché non dipendono dalla particolare rappresentazione scelta.

<sup>1</sup> Certo non la sola: il problema di stabilire condizioni sufficienti per l'applicabilità di due superfici rappresentò un filone di ricerca altrettanto fecondo.

<sup>2</sup> La memoria fu presentata alla Accademia delle Scienze di Gottinga nell'ottobre 1827.

L'elaborazione delle *Disquisitiones* è il frutto di un lungo processo di riflessione e di successive rielaborazioni che impegnarono Gauss, pur a fasi alterne, per ben oltre un decennio. Si tratta di un lavoro che a dispetto della sua brevità si contraddistingue per la ponderazione delle tecniche impiegate e per la cura profusa nell'espone. Molti dei risultati che vi sono presentati risalgono infatti agli anni precedenti la redazione finale del lavoro e solo in seguito ad un'incessante opera di risistemazione dell'apparato analitico ad essi associato Gauss superava la sua proverbiale ritrosia alla pubblicazione dando forma definitiva alle proprie ricerche.

Si deve allo storico Stäckel<sup>1</sup> il merito di aver ricostruito, sulla base di lettere e di materiale inizialmente inedito poi confluito nell'VIII volume delle *Werke*, la cronologia delle successive acquisizioni di Gauss intorno alla teoria delle cosiddette superfici curve. Sulla base di tale indagine, più recentemente ripresa anche da Dombrowski,<sup>2</sup> è possibile avere un'idea precisa della genesi di molti dei risultati delle *Disquisitiones*: 1799-1813 i) introduzione della cosiddetta mappa di Gauss che associa ad ogni punto della superficie quel punto sulla sfera unitaria che corrisponde ai coseni direttori della normale alla superficie nel punto considerato, ii) nozione di curvatura gaussiana e sua espressione come prodotto delle due curvatures principali; 1816 ca. iii) invarianza sotto isometrie della curvatura totale; 1823-1825 iv) espressione della curvatura gaussiana in coordinate conformi e in coordinate geodetiche polari; 1825 v) somma degli angoli interni di un triangolo geodetico infinitesimo; derivazione dell'espressione per la curvatura gaussiana in coordinate arbitrarie.

Interessante ai fini della ricostruzione storica della scoperta del TE è un breve saggio dal titolo *Neue allgemeine Untersuchungen über die krummen Flächen* che Gauss redasse nel 1825 e che tuttavia venne pubblicato solo nel 1900 nell'VIII volume delle «Werke».

Dopo aver introdotto la nozione di curvatura di una superficie sulla scorta di una efficace analogia con la definizione di curvatura di una curva nello spazio, Gauss procedeva in quella occasione alla dimostrazione di un fondamentale risultato sull'eccesso angolare di un triangolo geodetico il quale veniva posto in relazione diretta con l'area dell'immagine sferica dello stesso triangolo per il tramite della mappa di Gauss. Proprio a partire da questa acquisizione Gauss perveniva ad una prima dimostrazione del TE che si caratterizzava rispetto alla successiva versione del 1827 per un'impronta marcatamente geometrica.

Il lemma di cui Gauss si serviva per la dimostrazione di questo fondamentale risultato era il seguente:

<sup>1</sup> STÄCKEL 1917.

<sup>2</sup> DOMBROWSKI 1979.

**Lemma 1 (Gauss 1825)** La somma degli angoli interni di un triangolo geodetico  $\Delta$  (sufficientemente piccolo) è uguale alla somma di  $\pi$  e dell'area orientata dell'immagine sferica  $N(\Delta)$  dello stesso triangolo. L'orientazione dell'area è positiva o negativa a seconda che il bordo di  $N(\Delta)$  rispetti o meno l'orientazione del bordo di  $\Delta$ .

Tale risultato che costituisce una forma embrionale del teorema cosiddetto di Gauss-Bonnet era già noto prima di Gauss nel caso particolare della sfera e delle superfici sviluppabili. Inoltre, come attesta una lettera di Gauss a Gerling, Gauss era convinto del fatto che esso fosse valido nel caso della geometria iperbolica già nel 1794; è dunque assai probabile che egli sia stato condotto ad indagare l'estensione del risultato a qualunque superficie proprio a partire dal caso speciale delle geometrie a curvatura costante (sferica e iperbolica).

Per comprendere l'enunciato del lemma e avere un'idea della strategia dimostrativa seguita, qualche osservazione preliminare si rende necessaria. Consideriamo, seguendo GAUSS 1825, §8, una superficie (regolare)  $S$  in  $\mathbb{E}^3$ . La rappresentazione scelta da Gauss era in tale circostanza quella del luogo degli zeri di una certa funzione  $f: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . In altre parole, localmente  $S$  consiste dei punti  $\mathbb{E}^3$  di tali che  $f(x, y, z) = 0$ . Ad ogni punto  $p$  della superficie  $S$  è associato un punto della sfera unitaria  $\Sigma$  (detta ausiliaria) le cui componenti sono date dai coseni direttori  $(X, Y, Z)$  della normale alla superficie nel punto stesso. Nella particolare rappresentazione adottata, il vettore unitario  $(X, Y, Z)$  è proporzionale al gradiente della funzione  $f$ . Risulta così definita (almeno localmente) una applicazione  $N: S \rightarrow \Sigma$ . Per il tramite di tale mappa ad ogni curva sulla superficie  $S$  è associata una curva sulla sfera e similmente ad ogni «figura finita» una figura finita sulla sfera. In stretta analogia con la definizione di curvatura di una curva nello spazio, Gauss osservava che il confronto tra le aree di regioni sulla superficie e le aree della immagine (sulla sfera) di tali regioni tramite la mappa  $N$  conduce alla idea di curvatura in un punto. Essa è definita nel modo seguente: sia  $d\sigma$  l'area di un elemento di superficie contenente il punto  $p$ , sia inoltre  $d\Sigma$  l'area dell'elemento sferico immagine dell'elemento di superficie; la curvatura  $K(p)$  è allora definita come il limite del rapporto

$$\frac{d\Sigma}{d\sigma}$$

al tendere di  $d\sigma$  a zero.

Sulla base di tale definizione, Gauss procedeva al calcolo della curvatura della superficie  $S$  nella particolare rappresentazione scelta in cui la superficie è il grafico di una funzione  $z = z(x, y)$ , ricavando l'espressione seguente:

$$K(x, y, z(x, y)) = \frac{z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^2} \quad (1)$$

Torniamo adesso al lemma sugli angoli interni di un triangolo geodetico. La sua dimostrazione è piuttosto articolata; per questo è conveniente procedere per passi successivi. Consideriamo, seguendo GAUSS 1825, § 14, una curva (per ora qualunque)  $\gamma: I \rightarrow S$  (che implicitamente Gauss supponeva essere parametrizzata dal suo arco) sulla superficie  $S$ . In ogni suo punto risultano associate due direzioni, la direzione del vettore tangente  $\dot{\gamma}(t)$  e la direzione della normale alla superficie nel punto  $\gamma(t)$ ,  $N(\gamma(t))$ ; indichiamo con  $\lambda(t)$  e  $L(t)$  i punti sulla sfera ausiliaria che corrispondono rispettivamente alla direzione tangente e a quella normale alla superficie. Allora Gauss dimostrava la seguente

**Proposizione (Gauss 1825)** Detto  $\varphi(t)$  l'angolo (sferico) determinato dal cerchio massimo passante per  $\lambda(t)$  e  $L(t)$  e dal cerchio massimo passante per  $L(t)$  e il polo  $W$  di  $\Sigma$ ,  $(0, 0, 1)$ , vale la relazione:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{z}{1-z^2} \left( Y \frac{dX}{dt} - X \frac{dY}{dt} \right) + (\zeta Y - \eta Z) \frac{d\xi}{dt} + (\xi Z - \zeta X) \frac{d\eta}{dt} + (\eta X - \xi Y) \frac{d\zeta}{dt} \quad (2)$$

dove  $(X(t), Y(t), Z(t)) = N(\gamma(t))$  e  $\dot{\gamma}(t) = (\xi, \eta, \zeta)$ .

Infatti, se indichiamo con  $\widehat{LW}$  la misura dell'arco di cerchio massimo individuato<sup>1</sup> dai punti  $W, L$  e con  $\widehat{L\lambda}$  la misura dell'arco di cerchio massimo individuato da  $L$  e  $\lambda$ , e ricordiamo la formula dei coseni per la trigonometria sferica, otteniamo:

$$\sin \varphi(t) = \frac{Y\xi - X\eta}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad \cos \varphi(t) = \frac{\zeta}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

dalla quale, differenziando, si ha:

$$d\varphi = \frac{Z}{1-Z^2} (YdX - XdY) + (\zeta Y - \eta Z) d\xi + (\xi Z - \zeta X) d\eta + (\eta X - \xi Y) d\zeta,$$

che è equivalente alla relazione soprariportata.

La relazione (2) è valida nel caso in cui  $\gamma$  sia una curva qualunque sulla superficie  $S$ ; nel caso particolare di una curva geodetica, spiegava Gauss, essa si semplifica enormemente poiché, in ragione del teorema di

<sup>1</sup> Due punti individuano due archi di cerchio massimo. Si può convenire di scegliere l'arco minore di un semicerchio.

Bernoulli, la normale alla geodetica è proporzionale in ogni punto alla normale alla superficie; il che implica:  $[N(\gamma(t)) \wedge \dot{\gamma}(t)] \cdot \dot{\gamma}(t) = 0$ . Come conseguenza di ciò la (2) si riduce a

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{Z}{1-Z^2} \left( Y \frac{dX}{dt} - X \frac{dY}{dt} \right)$$

Gauss forniva un'interpretazione geometrica del differenziale

$$d\varphi = -\frac{Z}{1-Z^2} (XdY - YdX),$$

osservando che esso coincide con l'area della regione della superficie sferica ausiliaria che è individuata dai punti  $L, L'$  corrispondenti a due punti sulla geodetica a distanza infinitesima l'uno dall'altro, dai cerchi massimi che uniscono tali punti con il polo  $(0, 0, 1)$  e dal cerchio massimo che congiunge  $(1,0,0)$  e  $(0, 1, 0)$ .

Tralasciando la specificazione del segno di tale area, verifichiamo l'asserto di tale interpretazione. In riferimento alla figura 1, (1), (2), (3) indicano rispettivamente i punti  $(1,0,0)$ ,  $(0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$  sulla sfera unitaria;  $P$  e  $P'$  sono i punti di intersezione degli archi (di cerchi massimi)  $\widehat{L(3)}$  e  $\widehat{L'(3)}$  con l'arco  $\widehat{(1)(2)}$ . Occorre dunque dimostrare che l'area della regione  $LL'P'P$  è uguale a  $d\varphi$ . A tal fine, seguendo Morehead e Hiltebeitel 1902, p. 109, introduciamo coordinate polari  $(r, \theta, \psi)$  sulla sfera unitaria ( $r = 1$ ) così definite:

$$X = \sin\theta\sin\psi, \quad Y = \sin\theta\cos\psi, \quad Z = \cos\theta.$$

Così facendo, il  $d\varphi$  diventa  $\cos\theta d\psi$ . Ora, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, l'area in questione può essere approssimata dall'area di quella porzione di segmento sferico di altezza  $Z$  individuata dall'angolo infinitesimo  $d\psi$  che corrisponde all'arco  $\widehat{PP'}$ . Ne deriva la proporzione:

$$\frac{\text{Area}(LL'PP')}{A(Z)} = \frac{d\psi}{2\pi},$$

dove  $A(Z)$  indica l'area della zona sferica di altezza  $Z$ . Ricordando che  $A(Z) = 2\pi Z$ , si ha:

$$\text{Area}(LL'PP') = Zd\psi = \cos\theta d\psi.$$

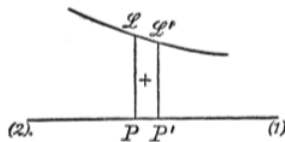


FIG. 1. Figura tratta da GAUSS 1825, §16.

Sulla base di queste premesse, Gauss era in grado di affrontare nel dettaglio la dimostrazione del lemma (1). Siano  $A, B, C$  i vertici di un triangolo geodetico sulla superficie  $S$ ; supponiamo che l'immagine di tale triangolo sulla sfera ausiliaria sia ancora un triangolo i cui vertici indichiamo con  $A', B', C'$ . Sia  $\varphi$  l'angolo sulla sfera  $\sphericalangle (3) A' \lambda$ , dove  $\lambda$  è il punto sulla sfera che corrisponde alla direzione della tangente alla geodetica  $AB$  nel punto  $A$ . Analogamente, sia  $\varphi'$  l'angolo  $\sphericalangle (3) B' \lambda_1$  dove  $\lambda_1$  è la direzione della tangente alla geodetica  $AB$  nel punto  $B$ . Allo stesso modo siano  $\psi = \sphericalangle (3) A' \mu$  e  $\psi' = \sphericalangle (3) C' \mu_1$ , dove  $\mu$  e  $\mu_1$  sono rispettivamente le direzioni delle tangenti alla geodetica  $AC$  nel punto  $A$  e nel punto  $C$ . Infine, siano  $\chi = \sphericalangle (3) B' \nu$ ,  $\chi' = \sphericalangle (3) C' \nu_1$ , dove  $\nu, \nu_1$  sono rispettivamente la direzione tangente alla geodetica  $BC$  nei punti  $B$  e  $C$ . Ora, non è difficile convincersi alla luce delle osservazioni precedenti del fatto che sussiste la seguente relazione fra gli angoli appena introdotti e l'area del triangolo sferico  $A' B' C'$ :

$$(\varphi - \psi) + (\chi - \varphi') + (\psi' - \chi') = \text{Area } A' B' C'.$$

È inoltre facile verificare che  $\sphericalangle BAC = \varphi - \psi$ . Infatti, poiché  $\lambda$  e  $\mu$  rappresentano le direzioni tangenti in  $A$  alle geodetiche  $AB$  e  $AC$  rispettivamente, il valore assoluto dell'angolo in  $A$  del triangolo geodetico è misurato dall'arco  $\widehat{\lambda\mu}$ , o, il che è lo stesso, dall'angolo sferico  $\sphericalangle \mu A' \lambda$ . Dunque  $\varphi - \psi = \sphericalangle (3) A' \lambda - \sphericalangle (3) A' \mu = \sphericalangle \mu A' \lambda$ . Analogamente, Gauss dimostrava che  $\pi - \widehat{B} = \varphi' - \chi$  e  $\widehat{C} = \psi' - \chi'$ . Donde segue l'enunciato del lemma, e cioè che:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi = \text{Area } A' B' C'.$$

Del fatto che, a partire dal lemma sui triangoli geodetici, si potesse dedurre il bel teorema (*schönes Theorem*) sull'invarianza della «misura di curvatura» per isometrie, Gauss era ben consapevole già a partire dal 1816, secondo quanto attesta un appunto pubblicato da Stäckel in Gauss 1863-1933, VIII, p. 372 ove Gauss annotava che il problema di determinare tutte le forme che una superficie curva può assumere nello spazio si riduce al problema di considerare tutte quelle superfici per le quali l'area delle immagini sferiche di figure chiuse corrispondenti (nell'applicazione di una superficie sull'altra) siano eguali. In Gauss 1825 veniva fornita una discussione dettagliata del tema. Gauss osservava preliminarmente come l'atto di applicare una superficie  $S$  su di un'altra  $S'$  (che in termini moderni possiamo riguardare come un'isometria  $\varphi: S \rightarrow S'$  tra superfici) conserva angoli, distanze e aree. Considerava poi un poligono arbitrario  $P$  (contenente un dato punto  $p \in S$ ) costituito da linee geodetiche trac-



ciate sulla superficie  $S$ . Sia  $\tilde{P}$  l'immagine di  $P$  sulla sfera unitaria per il tramite della mappa di Gauss. Indicate con  $P'$  e  $\tilde{P}'$  rispettivamente il poligono (pure costituito da linee geodetiche, per il fatto che un'isometria trasforma linee geodetiche in linee geodetiche) su  $S'$  immagine di  $P$  tramite  $\varphi$  e l'immagine di  $P'$  tramite la mappa normale  $N$ , dal precedente lemma (in realtà da un suo corollario)<sup>1</sup> si ricava immediatamente che  $A(\tilde{P}) = A(\tilde{P}')$ ; poiché d'altro canto, per la definizione di trasformazione isometrica, si ha che  $A(P) = A(P')$ , ne deriva che:

$$\frac{A(\tilde{P})}{A(P)} = \frac{A(\tilde{P}')}{A(P')}.$$

A questo punto, Gauss osservava che benché la precedente relazione valesse *a priori* per i soli poligoni geodetici, essa si manteneva valida per qualunque figura  $P$  tracciata sulla superficie  $S$ , in virtù della possibilità di approssimare qualunque linea curva su una superficie con una poligonale di segmenti geodetici. Considerando figure intorno al punto  $p$  via via più piccole, al limite per  $P \rightarrow p$ , Gauss ricavava la relazione fondamentale

$$K(p) = K'(\varphi(p)),$$

dove  $K$  e  $K'$  indicano rispettivamente la curvatura gaussiana delle superfici  $S$  e  $S'$ , sancendo così per via puramente geometrica il ben noto risultato di invarianza della curvatura rispetto a trasformazioni isometriche.

Nei paragrafi conclusivi Gauss 1825 di veniva altresì offerta una discussione del celebre lemma di Gauss (gli estremi di raggi geodetici di lunghezza assegnata che emanano da un punto della superficie costituiscono una curva ortogonale a tali raggi)<sup>2</sup> che conduceva alla introduzione delle cosiddette coordinate geodetiche polari  $(r, \varphi)$  e all'espressione corrispondente della curvatura  $K$  nella forma  $K = -\frac{1}{m(r, \varphi)} \frac{\partial^2 m}{\partial r^2}$  dove  $m(r, \varphi) = \sqrt{G(r, \varphi)}$  e  $ds^2 = dr^2 + G(r, \varphi) d\varphi^2$ . Lasciata implicita era la possibilità di pervenire a una dimostrazione alternativa del TE attraverso l'impiego di questo speciale sistema di coordinate.

Del resto, secondo quanto già osservato in Stäckel 1917 e in Dombrowski 1979 una dimostrazione analitica dello stesso teorema era già in possesso di Gauss nel Dicembre del 1822 allorquando egli annotava nel-

<sup>1</sup> Il corollario è il seguente: «detto  $P$  un qualunque poligono geodetico di  $n$  lati su di una superficie  $S$ , indicata con  $\tilde{S}$  l'area (con segno) dell'immagine di  $S$  attraverso la mappa di Gauss, si ha che la somma degli angoli interni del poligono  $P$  è  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n-2)\pi + A(\tilde{P})$ ».

<sup>2</sup> Si veda GAUSS 1825, §17.

le sue carte un breve appunto sullo «Stato delle mie ricerche sulla trasformazione delle superfici»,<sup>1</sup> nel quale veniva riportata l'espressione per l'elemento lineare in coordinate isoterme  $ds^2 = \lambda^2(u, v)(du^2 + dv^2)$  e la corrispondente espressione per la curvatura. La scoperta che in tali coordinate la curvatura è espressa in termini del solo coefficiente  $\lambda(u, v)$  e delle sue derivate seconde, insieme all'osservazione che un'isometria trasforma coordinate conformi in coordinate conformi, era sufficiente a garantire la conservazione della curvatura.

È assai probabile che proprio la possibilità offerta da tale osservazione, per quanto rimasta implicita nelle considerazioni di Gauss, sia stata all'origine dei faticosi tentativi intrapresi alla ricerca di una dimostrazione puramente analitica del TE che partisse dalla presa in considerazione dell'elemento lineare scritto in coordinate arbitrarie.

Tale obiettivo fu effettivamente raggiunto solo qualche anno più tardi (stando alla ricostruzione di STÄCKEL 1917, nella primavera del 1826). Il risultato raggiunto era la formula di GAUSS 1828, §11, la quale consentiva di esprimere la curvatura  $K$  mediante i soli coefficienti  $E, F, G$  e le loro derivate sino al secondo ordine:

$$\begin{aligned} 4(EG - F^2)^2 K = & E(E_v G_v - 2F_u G_v + G_u^2) + G(E_u F_u - 2E_u F_v + E_v^2) \\ & + F(E_u G_v - E_v G_u - 2E_v F_v + 4F_u F_v - 2F_u G_u) \\ & - 2(EG - F^2)(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}). \end{aligned} \quad (3)$$

Tale formula bastava a garantire l'invarianza della funzione  $K(u, v)$  rispetto alle isometrie. Infatti, Gauss osservava come due superfici applicabili (e cioè isometriche almeno localmente) potessero essere parametrizzate dalle medesime coordinate  $u, v$  in maniera che i coefficienti dei rispettivi elementi lineare coincidano.<sup>2</sup>

### 3. LE IDEE DI GAUSS IN FRANCIA: NUOVE DIMOSTRAZIONI

La riedizione del trattato di Monge *Application de l'analyse à la géométrie* curata da Liouville nel 1850 offre la possibilità concreta, quasi materiale, di rilevare la ricezione delle idee di Gauss in Francia nei primi decenni che seguirono la pubblicazione delle *Disquisitiones circa superficies curvas*.<sup>3</sup> Il testo che Liouville dava alla stampe, coincidente con il testo della quar-

<sup>1</sup> Il titolo originale dell'appunto è: *Stand meiner Untersuchung über die Umformung der Flächen*, GAUSS 1863-1933, VIII, pp. 374-384.

<sup>2</sup> Per una trattazione moderna di questa semplice quanto importante proprietà, si può consultare MCCLEARY 1994a-b, p. 146.

<sup>3</sup> Sul ruolo di Liouville nella diffusione delle *Disquisitiones* in Francia si veda LÜTZEN 1851, p. 739 e sgg.

ta edizione (1809), veniva seguito dalla ristampa delle stesse *Disquisitiones* e da un nutrito numero di note (7 in totale) nelle quali Liouville attirava l'attenzione del lettore sulla necessità di aggiornare l'originaria trattazione di Monge, in particolare alla luce dei recenti sviluppi in materia di teoria delle superfici.

La nota IV merita un'attenzione speciale; in essa Liouville si proponeva di discutere alcune dimostrazioni alternative del 'bel teorema' di Gauss sull'invarianza della curvatura di una superficie sotto isometrie, o, per riportare le sue parole, sull'invarianza del prodotto dei raggi di curvatura principali quando la superficie supposta flessibile e inestensibile viene deformata in una qualsivoglia maniera.

In effetti, il TE di Gauss aveva di recente attirato l'attenzione di un certo numero di matematici in Francia, oltre allo stesso Liouville: Bertrand, Diguët e Puiseux, a seguito della pubblicazione di Liouville 1847, avevano elaborato dimostrazioni puramente geometriche del fondamentale risultato di Gauss. L'idea che accomunava tali sforzi era duplice: da un lato quella di ottenere una dimostrazione semplificata del teorema che potesse essere inserito entro un programma di insegnamento universitario; dall'altro, porne in evidenza il contenuto geometrico che era sembrato in qualche modo offuscato dalla trattazione delle *Disquisitiones* e dalla più recente dimostrazione di Liouville la quale faceva leva sulla possibilità di esprimere l'elemento lineare di una qualunque superficie in coordinate isoterme, e cioè tramite coordinate (gaussiane) nelle quali l'elemento lineare assume la seguente forma:

$$ds^2 = \mu(\alpha, \beta) [d\alpha^2 + d\beta^2].$$

Sulla base di tale espressione, Liouville era riuscito a dimostrare, in maniera non meno articolata di quanto la trattazione delle *Disquisitiones* aveva richiesto a Gauss, che la curvatura  $k = \frac{1}{R_1 R_2}$  si poteva esprimere come

$$-\frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial^2 \log \mu}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \log \mu}{\partial \beta^2} \right),$$

e cioè mediante una funzione che fa intervenire i soli coefficienti (e le loro derivate) dell'elemento lineare  $ds^2$ , fornendo così una dimostrazione alternativa del TE.

L'idea alla base della dimostrazione proposta in Bertrand 1848 era assai semplice. Si trattava di determinare la circonferenza di un circolo geodetico di raggio infinitesimo, e di osservare che essa (come la lunghezza di qualunque curva) è invariante per isometrie. Poiché la misura di tale circonferenza risulta dipendere (a meno di infinitesimi di ordine 4) oltre

che dal raggio geodetico dalla sola curvatura gaussiana ne deriva che la curvatura gaussiana deve essere essa stessa invariante sotto isometrie.

Al fine di definire il circolo geodetico in questione, Bertrand ricorreva ad un ausilio di carattere meccanico che consisteva nel considerare un filo di lunghezza infinitesima  $s$ , inestensibile e teso lungo la superficie stessa. Pensando di fissare una estremità del filo ad un punto  $O$  della superficie e di lasciare l'altra estremità libera di ruotare, si ottiene il circolo geodetico richiesto. Ciò premesso, Bertrand osservava che il raggio osculatore  $R_\omega$  in  $O$  di una geodetica  $\gamma_\omega$  il cui vettore tangente (in  $O$ ) forma con una sezione principale un angolo  $\omega$  può essere calcolato mediante la formula dovuta a Eulero:

$$\frac{1}{R_\omega} = \frac{1}{R_1} \sin^2 \omega + \frac{1}{R_2} \cos^2 \omega, \quad (4)$$

essendo  $R_1$  e  $R_2$  i raggi osculatori delle due sezioni principali. Al fine di calcolare l'arco infinitesimo del circolo geodetico, Bertrand si proponeva dapprima di ricavare l'elemento di lunghezza della proiezione del circolo stesso sul piano tangente alla superficie nel punto  $O$ . Infatti, la geodetica  $\gamma_\omega$  può essere identificata, almeno localmente, con l'arco del corrispondente cerchio osculatore. Ne segue che la proiezione di  $\gamma_\omega$  sul piano tangente  $T_O S$ , che indicheremo con  $\tilde{\gamma}_\omega$  è una curva il cui raggio vettore  $\rho$ , pari a  $R_\omega \sin \frac{s}{R_\omega}$ , può essere approssimato a meno di infinitesimi di ordine 4 da:

$$\rho = s - \frac{s^3}{6R_\omega^2}.$$

Introducendo coordinate polari  $(\rho, \omega)$  nel piano  $T_O S$ , l'elemento infinitesimo di lunghezza per  $\tilde{\gamma}_\omega$  è  $dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2$ . A questo punto Bertrand osservava come si potesse trascurare il termine  $d\rho^2$  in quanto di ordine sesto nella quantità infinitesima  $s$  (infatti, poiché  $s$  è costante si ha  $d\rho^2 = \frac{s^6}{36} d(1/R_\omega^2)$ ), ottenendo:

$$dl^2 = \rho^2 d\omega^2 = \left(s - \frac{s^3}{6R_\omega^2}\right)^2 d\omega^2 = s^2 d\omega^2 - \frac{s^4 d\omega^2}{3} \left(\frac{1}{R_1} \sin^2 \omega + \frac{1}{R_2} \cos^2 \omega\right)^2,$$

avendo ancora una volta trascurato le potenze di ordine 6 in  $s$ .

Finalmente, introducendo la variabile che esprime la distanza dal punto di  $\gamma_\omega$  (a distanza  $s$  dall'origine lungo la stessa geodetica  $\gamma_\omega$ ) dalla sua proiezione sul piano tangente alla superficie (il che corrisponde ad introdurre nello spazio il sistema di coordinate cilindriche  $(\rho, \omega, z)$ ), Bertrand otteneva l'elemento infinitesimo di lunghezza per il circolo geodetico  $d\sigma^2 = dl^2 + dz^2$ ,

$$d\sigma^2 = s^2 d\omega^2 + s^4 d\omega^2 \left\{ -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{R_\omega} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2 \sin^2 2\omega d\omega^2 \right\},$$

dal quale, calcolando la radice quadrata (e avendo cura di trascurare le potenze di  $s$  superiori alla quarta) ed integrando fra 0 e  $2\pi$ , egli era in grado di ricavare la misura della circonferenza di un circolo geodetico di raggio  $s$ :

$$\sigma = 2\pi s - \frac{\pi s^3}{3R_1 R_2}. \quad (5)$$

La breve memoria di Bertrand era fatta seguire da un'altrettanto breve nota di un giovane studente dell'École Normale, un certo Diguët il quale, informato della dimostrazione del TE elaborata dello stesso Bertrand, ne aveva fornito una variante che si basava non già sul calcolo della misura della circonferenza di un circolo geodetico infinitesimo bensì sul calcolo della sua area. Il procedimento consisteva nel partire dalle equazioni per le curve geodetiche nella forma analitica che esprime la condizione imposta dal teorema di Bernoulli in virtù della quale il raggio osculatore della geodetica è parallelo in ogni punto alla direzione normale della superficie e nel trovare quindi una parametrizzazione opportuna per la porzione di superficie compresa entro un circolo geodetico. Detto  $s$  il suo raggio, Diguët dimostrava che l'area in questione, a meno di infinitesimi di ordine superiore al quarto, era pari a:

$$A(s) = \pi s^2 - \frac{\pi s^4}{12R_1 R_2}.$$

In maniera del tutto analoga alla dimostrazione proposta da Bertrand, il fatto che l'area di un circolo geodetico sia preservata per trasformazioni isometriche implica che il prodotto delle due curvature sia un invariante. Può essere utile osservare come la dimostrazione di Diguët evitasse il ricorso alla formula di Eulero per i raggi di curvatura delle sezioni normali. Il ragionamento esigeva soltanto di considerare le equazioni differenziali per le curve geodetiche e di svolgere opportuni sviluppi in serie di Taylor per le soluzioni così ottenute.

Metodi identici a quelli impiegati da Diguët erano poi fatti propri da Puiseux il quale presentava una breve nota Puiseux 1848 alla medesima rivista (il «Journal des mathématiques pures et appliquées»), sotto forma di una lettera all'editore Liouville, nella quale si ricavava la formula per la misura della circonferenza di un circolo geodetico a partire dagli sviluppi in serie per le soluzioni delle equazioni di curve geodetiche spiccate da un medesimo punto.

Nel medesimo anno (1848), Ossian Bonnet dava alle stampe il lavoro Bonnet 1848, una versione considerevolmente estesa di alcune ricerche già presentate alla Accademia delle Scienze di Parigi nella breve nota

Bonnet 1844 dove, forse per la prima volta in Francia, si riconosceva l'eccezionale rilevanza delle *Disquisitiones* di Gauss. Già l'anno precedente Bertrand aveva menzionato l'opera di Gauss, anche se solo per ammettere che era giunto a conoscenza di quel lavoro solo dopo che la redazione di Bertrand 1843 era stata conclusa. Al contrario, le considerazioni espresse da Bonnet nell'introduzione a Bonnet 1844 rilevano un pieno riconoscimento dei contenuti e dei metodi delle *Disquisitiones*. Allo stesso tempo, esse ci aiutano a rendere conto di alcuni tratti prevalenti che caratterizzarono la ricezione delle idee di Gauss in Francia, in particolare l'enfasi posta sulla necessità di chiarire il significato geometrico dei principali risultati esposti da Gauss nella sua celebre memoria.

Significativamente Bonnet osservava in Bonnet 1844, p. 980:

Molti analisti già si sono occupati delle proprietà delle curve tracciate su una medesima superficie: il sig. Gauss, tra gli altri, ha pubblicato una Memoria dal titolo *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, che contiene quanto di più importante si conosce su questa materia. L'illustre geometra, in questo bel lavoro, fa uso di considerazioni analitiche alquanto ingegnose ed eleganti, ma che lasciano forse qualcosa a desiderare dal punto di vista della semplicità. In questa memoria che ho l'onore di sottoporre al giudizio dell'Accademia, mi sono proposto di riprendere le medesime questioni attraverso i metodi della geometria pura. Mi piace credere che il mio lavoro, nonostante il fatto che riproduca molti risultati già noti, non sia tuttavia senza qualche utilità.

Bonnet menzionava in quella occasione di essersi occupato anche del problema della trasformazione delle superfici, pervenendo ad una dimostrazione semplificata del teorema (falso e mai enunciato da Gauss in questi termini) a suo dire contenuto nelle *Disquisitiones*, secondo il quale l'uguaglianza delle curvatures di due superfici è condizione necessaria e sufficiente a garantire l'applicabilità delle stesse superfici.

L'errore veniva ribadito in Bonnet 1848, p. 81 e solo in seguito corretto, riconoscendo l'esistenza di superfici che hanno medesima curvatura in punti corrispondenti e che tuttavia non sono applicabili l'una sull'altra. Curiosamente, in Bonnet 1848 §6 l'erroneo argomento geometrico con il quale veniva stabilito il 'teorema' sopra menzionato era seguito da una deduzione della espressione della curvatura in termini dei coefficienti  $E, F, G$  dell'elemento lineare (e delle loro derivate) che in gran parte coincideva con quella offerta da Gauss in Gauss 1828, §11. Bonnet ammetteva infatti che il problema di stabilire se due superfici date in forma analitica fossero o meno applicabili esigeva il calcolo esplicito della curvatura gaussiana nella forma data da Gauss in Gauss 1828, §11.

Più significativa era l'introduzione in Bonnet 1848 della nozione di curvatura geodetica e l'estensione del lemma di Gauss sull'eccesso

angolare di un triangolo geodetico a cammini chiusi qualunque su una superficie. Sulla scorta di tali risultati Bonnet era in grado di fornire una dimostrazione alternativa di un «curioso» teorema, così lo definiva, formulato per la prima volta da Jacobi in Jacobi 1842 il quale stabiliva che l'area individuata dall'indicatrice normale di una qualunque curva (regolare) nello spazio euclideo individua sulla sfera unitaria regioni equivalenti (cioè di area, ciascuna, pari a  $2\pi$ ).

I risultati di Jacobi e Bonnet sull'indicatrice normale di una curva spingevano qualche anno più tardi Bertrand ad offrire un'ulteriore (l'ennesima) dimostrazione del TE. Annunciata in Bertrand 1856, una nota presentata all'Accademia delle Scienze di Parigi, tale nuova dimostrazione sarebbe poi confluita con qualche modifica nelle pagine del corposo *Traité*, Bertrand 1864. L'idea di base era quella di giungere ad una dimostrazione geometrica del teorema sull'eccesso angolare e a partire da questo con un argomento simile a quello impiegato da Gauss in Gauss 1825 ricavare l'invarianza della curvatura sotto isometrie.

Punto di partenza del ragionamento di Bertrand era una sorta di versione semplificata del teorema di Jacobi-Bonnet sull'indicatrice normale associata ad una curva qualunque nello spazio, che Bertrand era in grado di dimostrare per via elementare: «Se si traccia su una sfera di raggio  $R$  un cammino chiuso qualunque e in ogni suo punto  $p$  si traccia l'arco massimo (della sfera) tangente alla curva nel punto considerato; se inoltre, su ciascuno di tali archi si individua un punto  $q$  a distanza  $\frac{\pi}{2} R$ , allora il luogo di tali punti  $q$  individua due porzioni di area sulla sfera di area uguale».

#### 4. DOMENICO CHELINI E LA RICEZIONE DI GAUSS IN ITALIA

Nello stesso anno in cui in Francia venivano pubblicate sul giornale di Liouville le brevi memorie di Bertrand, Diguet e Puiseux, il periodico pontificio «Giornale Arcadico di Scienze, Lettere ed Arti» presentava una lunga nota<sup>1</sup> (suddivisa in due parti) del sacerdote scoliope Domenico Chelini<sup>2</sup> nella quale si trovavano esposte le recenti dottrine di Gauss in materia di teoria delle superfici. Accomunava Chelini e i suoi colleghi francesi il desiderio di presentare una trattazione della teoria di Gauss adatta a essere inserita entro un programma di insegnamento (universitario). Chelini concordava con i matematici d'oltralpe anche sull'oppor-

<sup>1</sup> CHELINI 1848a, CHELINI 1848b.

<sup>2</sup> Per una biografia scientifica di Chelini si veda BELTRAMI 1881.

tunità di rimpiazzare le lunghe deduzioni analitiche che avevano condotto Gauss alla formulazione del TE con argomentazioni più marcatamente geometriche, evidentemente ritenute preferibili e meglio intellegibili da un pubblico di studenti.

Chelini esprimeva dei dubbi riguardo all'efficacia delle vie sino ad allora seguite nel tentativo di riformulare il teorema gaussiano e significativamente designava con l'attributo di «analitiche» le dimostrazioni degli stessi Bertrand, Diguët e Puiseux. Quanto al lavoro di Liouville sulle coordinate isoterme, egli riconosceva al matematico francese il merito della brevità del ragionamento e tuttavia allo stesso tempo lamentava la presenza di «un difetto di chiarezza» circa «l'idea direttrice» alla sua base.

Dal canto suo Chelini, forse a conoscenza di Bonnet 1844, si proponeva di dare forma ad un proprio ideale di chiarezza e di brevità annunciando di voler pervenire da un lato ad una dimostrazione del celebre teorema di Gauss che fosse basata sulla «pura geometria» e dall'altro ad una deduzione «brevissima» della formula che dà l'espressione della curvatura di una superficie nei termini dei coefficienti (e delle loro derivate) dell'elemento lineare  $ds^2$ .

Nelle sue parole:

Considerando il teorema di cui si tratta [cioè il TE], io ho trovato che si può dimostrare facilissimamente colla pura geometria, e che inoltre si possono rendere brevissimi i calcoli che producono la formula generale onde il sig. Gauss ha espresso la curvatura di un elemento superficiale in funzione delle sole quantità che entrano nell'espressione di un elemento lineare [...] preso sulla stessa superficie. L'oggetto però, cui miro principalmente in questa memoria, è di far discendere nell'insegnamento tutta la sostanza dell'importante dissertazione del sig. Gauss sulla curvatura delle superficie. CHELINI 1848a, pp. 258-259.

La prima parte della memoria dedicata a una discussione sull'uso degli infinitesimi in geometria era seguita da una dimostrazione del TE che si basava sulle recenti indagini di Jacobi con le quali si era fornita una generalizzazione del teorema di Gauss sul difetto (o l'eccesso) angolare di triangoli geodetici tracciati su una superficie.

Punto di riferimento di Chelini erano le note Jacobi 1837 e Jacobi 1842;<sup>1</sup> in particolare quest'ultima, nella quale Jacobi evitando ogni ricorso alla nozione di reciprocità polare sulla sfera, che aveva caratterizzato

<sup>1</sup> Chelini aveva potuto incontrare Jacobi di persona in occasione del soggiorno romano di quest'ultimo tra l'Ottobre del 1843 e l'Aprile 1844. Non è inverosimile che proprio Jacobi abbia attirato l'attenzione di Chelini sulle *Disquisitiones* di Gauss e sulle note citate. Stando alla ricostruzione che Chelini offre in CHELINI 1848a, p. 259, fu invece merito di Baldassarre Boncompagni se egli poté disporre del testo delle *Disquisitiones*.



invece la trattazione di Jacobi 1837,<sup>1</sup> era riuscito ad ottenere una dimostrazione semplificata del seguente:

**Teorema 4.1 (Jacobi 1837)** Si consideri nello spazio (euclideo) un triangolo qualsivoglia  $\triangle ABC$  costituito da curve  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  caratterizzate dalla proprietà di avere vettori normali che puntano nella stessa direzione in corrispondenza dei tre vertici. Si consideri ora l'immagine di tali curve sulla sfera unitaria  $S^2$  per il tramite della mappa di Gauss. I vertici dell'immagine di  $\triangle ABC$ , indicati con  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$  costituiscono un triangolo  $\triangle \tilde{A} \tilde{B} \tilde{C}$ . Vale allora la seguente relazione:<sup>2</sup>

$$\text{Area } \triangle \tilde{A} \tilde{B} \tilde{C} = \angle A + \angle B + \angle C - \pi. \quad (6)$$

Come lo stesso Jacobi spiegava nell'introduzione a Jacobi 1837 il teorema poteva essere riguardato come un'estensione del teorema di Gauss che si limitava invece a considerare il caso di triangoli geodetici tracciati su una data superficie. Erroneamente Jacobi riteneva che il teorema (4.1) potesse essere ricavato *sine negotio* proprio a partire dal teorema di Gauss in virtù dell'osservazione (fallace) che *curvam autem quamcumque considerare licet ut certae cuiusdam superficies lineam brevissimam*. Cionondimeno, Jacobi spiegava, pareva auspicabile produrre una dimostrazione di (4.1) affatto indipendente dagli argomenti analitici cui Gauss era ricorso nelle *Disquisitiones*, al fine di indagare il *verum fontem theorematis Gaussiani*.

La volontà di rimediare all'errore rispetto al quale una nota di Thomas Clausen apparsa sugli *Astronomische Nachrichten* esibiva un controesempio; unitamente alla necessità di fornire una dimostrazione semplificata rispetto a quella fornita nel 1837, spinsero Jacobi a riconsiderare la questione e a redigere una breve nota che offriva una nuova dimostrazione del teorema, basata sulla sola considerazione di porzioni di superficie sferica.

Cruciale ai fini dell'argomentazione di Jacobi (così come anche per Chelini) era il seguente risultato (si veda la Figura 2):

**Teorema 4.2 (Jacobi 1842)** A partire dal centro di una sfera unitaria si traccino raggi vettori paralleli ai raggi di curvatura di una curva  $\gamma$  (i cui estremi sono indicati da  $\pi$  e  $\zeta$ ) che intersecano la superficie della sfera nel-

<sup>1</sup> Si veda a tal proposito McCLEARY 1994a-b.

<sup>2</sup> Contrariamente a quanto osservato dallo stesso Gauss nel caso dell'area sferica associata alla porzione di una superficie, Jacobi trascura, o almeno non menziona esplicitamente, la necessità di associare all'area  $\triangle \tilde{A} \tilde{B} \tilde{C}$  un'opportuna specificazione del segno. Si veda a questo proposito la discussione proposta da Gauss nel §6 delle sue *Disquisitiones*.

la curva  $PZ$ ; si traccino inoltre piani paralleli (passanti per  $P$  e  $Z$  e per il centro della sfera) ai piani osculatori alla curva nei punti  $\pi$  e  $\zeta$ . Tali piani intersecano la sfera negli archi (porzioni di cerchi massimali)  $PA$  e  $ZA$ . L'area della porzione di sfera compresa fra la curva  $PZ$  e gli archi  $AP$  e  $AZ$  eguaglia l'angolo (sferico)  $\angle PAZ$ .

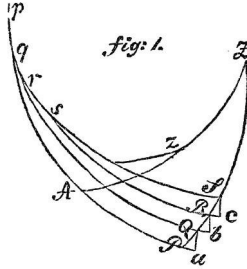


FIG. 2. Tratta da JACOBI 1842, p. 116.

Chelini forniva di questo teorema una formulazione equivalente che sfruttava invece del triangolo  $AZP$  il poligono sferico  $pPQRS \dots Zz \dots srp$  e che coinvolgeva inoltre ciò che Chelini designava con l'espressione «curvatura totale della superficie di un angolo solido». Per impiegare le sue parole, quest'ultima nozione veniva definita come «la somma degli angoli diedri, onde la direzione di ciascuna delle sue facce declina dalla direzione della faccia che precede». Più semplicemente, considerato sulla superficie sferica unitaria un poligono  $P_n$  di  $n$  lati e la superficie  $S_n$  ad esso associata che consiste dei piani passanti per il centro della sfera e che intersecano la superficie sferica ciascuno in un lato del poligono, la curvatura totale della superficie dell'angolo solido altro non è che la somma degli angoli esterni del poligono  $P_n$ . Più in generale la definizione adottata rimane valida per un qualsiasi angolo solido, anche non poligonale, determinato da una qualunque curva sulla sfera, poiché quest'ultima può essere riguardata come costituita da archi di cerchi massimi infinitesimi (proprio come una curva nello spazio è approssimata da una spezzata di segmenti).

L'introduzione della curvatura totale della superficie conica di un angolo solido era motivata dal seguente lemma (peraltro elementare)<sup>1</sup> che Chelini anteponeva alla propria interpretazione del teorema di Jacobi:

<sup>1</sup> È sufficiente ricordare il cosiddetto teorema di Girard che lega l'area di un triangolo sferico all'eccesso angolare dei suoi angoli interni e l'ovvia relazione  $\sum_{i=1}^n \alpha_i + C = n\pi$ , ove  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  indicano gli angoli interni del poligono.

**Lemma 4.3** Consideriamo un poligono sferico  $P_n$ , sia  $A(P_n)$  la sua area e  $C$  la curvatura della superficie conica ad esso associata. Allora vale la relazione

$$A(P_n) = 2\pi - C. \quad (7)$$

La versione proposta da Chelini del teorema (4.2) si caratterizzava per un enunciato che meglio ne metteva in luce il contenuto geometrico.

**Teorema 4.4 (Chelini 1848)** Data nello spazio una curva  $\pi\zeta$  a doppia curvatura ed una sfera di raggio uguale a 1, si traccino raggi paralleli ai raggi osculatori consecutivi di  $\pi\zeta$ . La totalità di tali raggi costituisce una superficie conica  $V$ . In corrispondenza dei raggi iniziali e finali di tale superficie si traccino piani paralleli ai piani osculatori della curva  $\pi\zeta$  nei punti  $\pi$  e  $\zeta$ . Allora la curvatura della superficie conica  $V$ , denotata da  $C$ , eguaglia la differenza degli angoli diedri  $A, A'$  che la superficie conica  $V$  forma con tali piani.

Vediamo ora in qualche dettaglio la dimostrazione proposta da Chelini. Con riferimento alla figura 1, i punti  $p, q, r, s, \dots, z$  rappresentano i punti di intersezione con la superficie della sfera dei raggi  $Op, Oq, Or, Os, O\dots, Oz$  paralleli alle «tangenti consecutive» alla curva  $\pi\zeta$ . Più esplicitamente, se  $\gamma: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma: s \rightarrow \gamma(s)$  è la curva in questione (supposta parametrizzata dal proprio arco), i punti  $p, q, \dots, z$  rappresentano i vettori  $\dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(ds), \dots, \dot{\gamma}(l)$ ; in altre parole, la curva  $\dot{\gamma}(s)$  (o meglio, il sostegno della stessa) sulla sfera unitaria è rimpiazzata dalla poligonale (i cui segmenti sono archi di cerchio massimo) di segmenti  $pq, qr, \dots$ . Seguendo il procedimento dello stesso Jacobi, Chelini prolungava gli archi infinitesimi  $\widehat{pq}, \widehat{qr}, \dots$  fino ad ottenere i quadranti  $\widehat{pP} = \widehat{qQ} = \dots = \widehat{zZ} = \frac{\pi}{2}$ . L'insieme di tali punti sulla sfera costituisce una nuova curva corrispondente al sostegno dell'applicazione  $s \rightarrow \vec{N}(s)$  che associa al valore del parametro corrispondente al punto  $\gamma(s)$  la direzione normale alla curva. La totalità dei raggi  $OP, OQ, OR, OS, \dots, OZ$  costituisce la superficie conica  $V$  la cui curvatura (nel senso anzi detto) Chelini indica con  $C$ . Designata invece con  $c$  la somma degli angoli  $\angle PqQ, \angle QrR$ , a meno di infinitesimi del secondo ordine, si ha  $S = \text{Area}(pPzZp) = c$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Come osservato in JACOBI 1842, p. 116, le aree dei triangoli  $\Delta aPQ, \Delta bQR, \dots$ , ove i punti  $a, b, c, \dots$  sono definiti dalla condizione che  $\widehat{qa} = \widehat{rb} = \dots = \frac{\pi}{2}$  sono infinitesimi del secondo ordine; dal che si ricava l'uguaglianza  $\text{Area}(pPaQbR \dots Zz \dots sPzP) = \text{Area}(pPzZp)$ . Il fatto che l'area del settore sferico  $aqQ$ , eguagli l'angolo corrispondente  $\angle aqQ$ , è un'ovvia conseguenza dell'aver stabilito che  $\widehat{aq} = \widehat{qQ} = \dots = \frac{\pi}{2}$ . Per una discussione dell'approssimazione in questione si veda McCLEARY 1994a-b, p. 383.

Il risultato del teorema veniva ottenuto esprimendo l'area  $S$  in due modi differenti; da un lato come la somma  $c$  degli angoli  $\angle PqQ$ ,  $\angle QrR$ , ... e dall'altro in termini della curvatura della superficie conica del poligono  $pPZzP$ . Sia  $C'$  tale curvatura; non è difficile dimostrare seguendo i lati del poligono  $pPZzP$  che  $C' = 2\pi + A - A' + C - c$ .<sup>1</sup> L'uguaglianza delle due espressioni forniva finalmente la relazione  $C = A' - A$ , equivalente all'asserto del teorema.

Sulla scorta di tale risultato e con una dimostrazione che ricalcava quasi *ad litteram* la dimostrazione di Jacobi 1842, Chelini provava il seguente risultato, specializzazione dell'enunciato di Jacobi al caso in cui le curve  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  sono geodetiche sopra una superficie.

**Teorema 4.5** Sia  $\triangle ABC$  un triangolo geodetico i lati del quale sono il sostegno delle geodetiche  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ . Si consideri ora l'immagine di tali curve sulla sfera unitaria  $S^2$  per il tramite della mappa di Gauss. I vertici dell'immagine di  $\triangle ABC$ , indicati con  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  costituiscono un triangolo  $\triangle \tilde{A} \tilde{B} \tilde{C}$ . Vale allora la seguente relazione:

$$\text{Area}(\triangle \tilde{A} \tilde{B} \tilde{C}) = \angle A + \angle B + \angle C - \pi. \quad (8)$$

Da notare che, come già osservato dallo stesso Jacobi, la condizione circa la direzione delle normali agli estremi delle curve è senz'altro soddisfatta nel caso in cui  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  sono geodetiche, in virtù del teorema cosiddetto di Bernoulli in base al quale una geodetica ha piano osculatore normale alla superficie.

Lasciata implicita da Jacobi, seppur già menzionata da Minding nell'introduzione a Minding 1839, era la possibilità di servirsi di 4.5 per dimostrare il TE su base puramente geometrica. In ottemperanza alla dichiarazioni di intenti sopra richiamati, Chelini si produceva in una dimostrazione del fondamentale risultato di Gauss che ricalcava in maniera quasi sorprendente l'originario argomento di Gauss del 1825.

Del tutto originale invece era l'argomento con il quale Chelini era condotto a dimostrare l'uguaglianza della curvatura gaussiana col reciproco del prodotto dei raggi di curvatura principali. Come è noto, anche in questo caso, Gauss aveva preferito una via analitica che consisteva in una scelta opportuna del sistema di coordinate adottato e nel calcolo esplicito delle sezioni principali associate ad un dato punto. Chelini dal

<sup>1</sup> Ad esempio la declinazione in  $P$ , pari all'angolo esterno in  $P$  del poligono sferico  $pPZzP$ , è  $A$ , l'angolo diedrale che indica di quanto  $\widehat{PQ}$  declina rispetto a  $\widehat{pP}$ . Si noti che il verso orario è qui assunto da Chelini come positivo; per questo motivo, nel percorrere i lati da  $z$  a  $p$  la declinazione deve essere, al contrario, assunta come negativa e pari a  $-c$ .

canto suo si prodigava a fornire una dimostrazione concisa e geometrica la quale si basava su di un risultato (non menzionato esplicitamente da Chelini) oggi noto come formule di Olinde Rodrigues, dal nome del matematico francese che le ottenne per la prima volta nel 1815.

L'intento era il seguente: definita nel modo solito la curvatura gaussiana in un punto di una data superficie, e cioè come  $K(p) = \frac{d\Sigma}{d\sigma}$ , dimostrare che  $K(p) = \frac{1}{R_1 R_2}$ , dove  $R_1, R_2$  indicano i raggi di curvatura massimo e minimo delle sezioni normali alla superficie nel punto  $p$ .

Poiché la misura della curvatura in un punto è indipendente dall'area infinitesima di superficie  $\Delta\sigma$  considerato per calcolare il limite  $\lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta\Sigma}{\Delta\sigma}$ , Chelini spiega, si può attribuire a  $\Delta\sigma$  «la figura che più aggrada». Pertanto è lecito scegliere  $\Delta\sigma$  come quel triangolo rettangolo con vertice in  $P$  generato da archetti infinitesimi  $ds_1, ds_2$  lungo le linee di curvatura della superficie. In ragione delle formule di Rodrigues, l'immagine dei vettori tangenti a tali curve per il tramite della mappa di Gauss sono proporzionali alle direzioni principali (essendo tale costante di proporzionalità data, a meno di un segno, dal raggio di curvatura della sezione principale considerata); ne consegue che l'immagine sulla sfera del triangolo infinitesimo è pure un triangolo rettangolo la cui area  $\Delta\Sigma$  può pertanto essere calcolata agevolmente. Proprio sulla scorta di tale proprietà, Chelini dimostrava la nota formula  $K(p) = \frac{1}{R_1 R_2}$ .

Una versione moderna del ragionamento proposto da Chelini può essere data così. Siano  $\gamma_1, \gamma_2: (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow S$  linee di curvatura del punto  $p$  sulla superficie  $S$  tali che  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$  e  $\dot{\gamma}_1(0) = v_1, \dot{\gamma}_2(0) = v_2$ . Poiché la formula di Rodrigues dà, per una linea di curvatura  $\beta(t)$ :

$$dN_{\beta(t)}(\beta'(t)) = (N \circ \beta)'(t) = -k(t) \beta'(t),$$

dove  $k(t)$  è la curvatura della curva  $\beta$  nel punto  $\beta(t)$ , dette  $k_1 = \frac{1}{R_1}, k_2 = \frac{1}{R_2}$  le curvatures principali in corrispondenza del punto  $p$ , si ha:

$$dN_p(v_1) = -k_1 v_1 \quad dN_p(v_2) = -k_2 v_2.$$

Ne consegue, alla luce della definizione della curvatura gaussiana nel punto  $p$  come il determinante dell'applicazione  $dN_p: T_p S \rightarrow T_p S$ , che:

$$K(p) = \frac{dN_p(v_1) \wedge dN_p(v_2)}{v_1 \wedge v_2} = k_1 k_2 = \frac{1}{R_1 R_2},$$

in accordo con il ben noto risultato.

Ad una trattazione degli aspetti analitici della teoria di Gauss era dedicata invece la seconda parte della memoria Chelini 1848b. Anche in tale circostanza l'analisi di Chelini non spiccava per l'originalità di nuovi risultati e tuttavia aveva, al contempo, il merito di produrre una presentazione delle nuove idee in una forma assai chiara che aveva come scopo precipuo quello di riconnettere l'innovativo approccio di Gauss con i metodi più familiari della scuola francese di geometria infinitesimale. A tal proposito, un esempio era costituito dall'introduzione della cosiddetta indicatrice di Dupin che Chelini impiegava per ottenere una deduzione alternativa dell'espressione per la curvatura in termini dei coefficienti  $E, F, G$  dell'elemento lineare e delle quantità  $D, D', D''$  che in termini moderni altro non sono che i coefficienti della seconda forma fondamentale.

Come sottolineò Beltrami nell'affettuosa presentazione Beltrami 1881 nella quale veniva offerta una breve biografia scientifica di Chelini, notevole era l'espressione che Chelini trovava per la quantità  $\frac{\cos \vartheta}{r}$ , dove  $r$  è il raggio di curvatura di una qualunque curva  $\gamma$  su una superficie mentre  $\theta$  è l'angolo che tale raggio di curvatura forma con la normale alla superficie in un dato punto:

$$\frac{\cos \vartheta}{r} = - \left( \frac{dX}{ds} \frac{dx}{ds} + \frac{dY}{ds} \frac{dy}{ds} + \frac{dZ}{ds} \frac{dz}{ds} \right).$$

Proprio a partire da questa semplice osservazione Chelini era in grado di introdurre notevoli semplificazioni ad esempio nella trattazione delle curvature sezionali di una superficie.

Solo qualche anno più tardi, l'interesse per la teoria delle superfici di Gauss destato da Chelini stimolava le ricerche del giovane Francesco Brioschi che dedicava due articoli sull'argomento, apparsi entrambi nel 1852 sugli *Annali di Tortolini*. Mentre il primo lavoro BRIOSCHI 1852a era volto ad introdurre nella teoria delle superfici concetti e notazioni della teoria dei determinanti, nel tentativo di semplificare alcune argomentazioni, il secondo BRIOSCHI 1852b era espressamente dedicato al teorema sull'invarianza dei prodotti dei raggi di curvatura. Qui Brioschi osservava come sino ad allora fossero stati dati due tipi distinti di dimostrazioni del TE. Da un lato dimostrazioni analitiche, come quella proposta da Gauss nelle *Disquisitiones* o da Liouville in Liouville 1847; dall'altro, dimostrazioni più brevi, come quelle di Bertrand e Puiseux, che tuttavia avevano lo svantaggio, rispetto alle prime, di non offrire un'espressione esplicita per la curvatura gaussiana. Da parte sua, Brioschi aspirava a elaborare una dimostrazione del TE insieme breve e quanto più possibile diretta.

L'idea alla base della sua proposta, che già si può in qualche modo rinvenire in Rodrigues 1815, consisteva nel rilevare un nesso notevole tra l'espressione locale per la mappa di Gauss e la formula di trasformazione per gli integrali doppi. Brioschi considerava dapprima nello spazio una sfera unitaria di coordinate  $x_1, x_2, x_3$  e la semplice identità

$$I = \int_{-1}^{+1} dx_1 \int_{-\varphi(x_1)}^{+\varphi(x_1)} dx_2 \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} = 2\pi, \quad (9)$$

dove  $\varphi(x_1) := +\sqrt{1-x_1^2}$ , che fornisce l'area dell'emisfera. Fissava quindi una superficie  $S$  descritta da un'equazione del tipo  $z = z(x, y)$  e osservava come l'espressione (locale) della mappa di Gauss,  $N$ , nella forma

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \\ x_2 &= -\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \\ x_3 &= -\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \end{aligned} \quad (10)$$

potesse essere interpretata alla stregua di un cambiamento di coordinate per l'integrale doppio  $I$ . Dal che Brioschi ricavava, introducendo il determinante della matrice jacobiana della trasformazione (10), l'identità:

$$I = \iint dx dy \frac{z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \quad (11)$$

ove l'integrale si intende eseguito sulla regione di superficie che «corrisponde» alla semisfera alla quale è supposta estesa l'integrazione in (9). Alla luce della espressione per la curvatura (1), l'integrale  $I$  poteva riscriversi così:

$$I = \iint dx dy \frac{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}{R_1 R_2}. \quad (12)$$

Introdotte infine coordinate gaussiane  $u, v$  che parametrizzano i punti della superficie  $S$ , col che  $x, y, z(x, y)$  diventano funzioni di  $u, v$ , Brioschi otteneva l'identità:

$$I = 2\pi = \iint du dv \frac{\sqrt{EG-F^2}}{R_1 R_2}. \quad (13)$$

Dal fatto che due superfici isometriche possono essere parametrizzate dalle medesime coordinate gaussiane  $u, v$  e dai medesimi coefficienti  $E$ ,

$G$ ,  $F$  funzioni di  $u$ ,  $v$ , ne risultava finalmente l'invarianza del prodotto dei due raggi di curvatura  $R_1 R_2$ .

Al di là dell'originalità dell'approccio di Brioschi, occorre tuttavia rilevare l'inadeguatezza di un passaggio del suo ragionamento. Immotivata è la possibilità di interpretare la trasformazione (10) alla stregua di un cambiamento di coordinate. In effetti, la mappa di Gauss in generale non è un diffeomorfismo, nemmeno localmente; *a fortiori* essa non costituisce un diffeomorfismo tra una porzione di superficie e la semisfera unitaria.

## 5. I CONTRIBUTI DI BELTRAMI

Che Chelini rappresentasse un autorevole punto di riferimento per le ricerche di geometria infinitesimale delle superfici in Italia emerge chiaramente da svariate circostanze ed in particolare dai carteggi che egli intrattenne con matematici del calibro di Luigi Cremona ed Eugenio Beltrami. Il carteggio intrattenuto con quest'ultimo è particolarmente ricco di informazioni circa la ricezione del TE in Italia.

Coll'intento di ricevere incoraggiamento e suggerimenti per i propri lavori, il giovane Beltrami scriveva a Chelini nella primavera del 1865 informandolo dei recenti sviluppi delle sue ricerche in materia di geometria infinitesimale. Con riferimento ai risultati che poi sarebbero confluiti nella raccolta *Ricerche di Analisi Applicata alla Geometria*, Beltrami notava con eccessiva umiltà:

Avendo voi la bontà di seguire con occhio benevolo la pubblicazione di questi miei studi, vedrete forse con qualche piacere come, nella parte che ora vi spedisco, entri a trattare di un argomento assai importante (a voi però familiarissimo), voglio dire la considerazione di quelle proprietà delle superficie che non si alterano con la flessione. [...] Io non vorrei asserire che il metodo da me proposto sia atto dell'investigazione di proprietà affatto nuove, giacché quest'ufficio piuttosto che ai metodi appartiene in proprio al genio inventivo, e non può essere esercitato che dai più provetti e perspicaci geometri. Né io aspiro a tanto ché sarebbe vanità. Ma non sarei alieno dal credere che l'introduzione delle funzioni di cui io faccio uso, potesse semplificare alquanto la teoria delle superficie [...].

(Enea 2009, pp. 67-68)

Con il termine «funzioni» Beltrami si riferiva a quelle particolari combinazioni dei coefficienti dell'elemento lineare  $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$  e delle loro derivate che hanno la proprietà di rimanere invariate al variare del sistema di coordinate. In particolare, Beltrami distingueva tra funzioni assolute e funzioni invariabili designando con la prima espressione funzioni dei soli coefficienti  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e delle loro derivate e con la seconda funzioni che dipendevano da funzioni arbitrarie aggiuntive. La



curvatura di una superficie costituiva l'esempio per antonomasia di funzione assoluta atta a descrivere una proprietà intrinseca affatto indipendente dalla speciale rappresentazione adottata per la superficie, come era sancito dal «celebre teorema di Gauss, relativo alla *conservazione della curvatura*».

Come esempi di funzioni invariabili, richiamandosi in parte alle ricerche di Lamé, Beltrami introduceva il parametro differenziale del primo ordine di una funzione  $\varphi = \varphi(u, v)$ :<sup>1</sup>

$$\Delta_1 \varphi = \frac{E \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - 2F \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + G \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2}{EG - F^2}$$

e il parametro del primo ordine detto misto nelle funzioni  $\varphi = \varphi(u, v)$  e  $\psi = \psi(u, v)$ :

$$\nabla(\varphi, \psi) = \frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial v} - F \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) + G \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u}}{EG - F^2}.$$

L'impiego di tali funzioni si dimostrava particolarmente proficuo per lo studio delle proprietà intrinseche delle superfici: nel riformulare risultati già noti e nel semplificare i metodi e le procedure precedentemente adottate.

Un vantaggio offerto da tali «funzioni» era rappresentato dalla possibilità di impiegarle nella riscrittura dell'elemento lineare mediante nuove coordinate. Così, dato  $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ , scritto nelle coordinate curvilinee  $(u, v)$ , e introdotte nuove variabili  $\varphi = \varphi(u, v)$  e  $\psi = \psi(u, v)$ , Beltrami provava che i coefficienti dell'elemento lineare riscritto nelle variabili  $(\varphi, \psi)$  possono essere espressi nel modo seguente:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\Delta_1 \psi}{\Delta_1 \varphi \Delta_1 \psi - \nabla^2(\varphi, \psi)}, \\ F_1 &= \frac{-\nabla(\varphi, \psi)}{\Delta_1 \varphi \Delta_1 \psi - \nabla^2(\varphi, \psi)}, \\ G_1 &= \frac{\Delta_1 \varphi}{\Delta_1 \varphi \Delta_1 \psi - \nabla^2(\varphi, \psi)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Sulla scorta di tali equazioni, Beltrami era in grado di fornire una dimostrazione alternativa del celebre risultato (già noto a Gauss) di Liouville

<sup>1</sup> Beltrami indicava con  $(\Delta_1 \varphi)^2$  ciò che noi indichiamo per semplicità con  $\Delta_1 \varphi$ . Sull'impiego dei parametri differenziali da parte di Beltrami si veda TAZZIOLE 1997, in particolare la sezione 2.

sull'esistenza di un sistema di coordinate cosiddette isoterme per ogni superficie. D'altro canto, proprio questo risultato insieme all'introduzione in Beltrami 1864-1865, § XV di un nuovo parametro differenziale del secondo ordine

$$\Delta_2 \varphi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{G \frac{\partial \varphi}{\partial u} - F \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} \right] \right\},$$

consentivano di pervenire ad una dimostrazione del carattere intrinseco della cosiddetta curvatura geodetica e di ottenere poi una nuova dimostrazione del TE che egli qualificava come «analitica diretta e semplicissima».

A tal fine Beltrami considerava due sistemi di coordinate isoterme  $(u, v)$  e  $(u', v')$  per la stessa superficie in modo da avere:

$$\frac{du^2 + dv^2}{h^2(u, v)} = \frac{du'^2 + dv'^2}{h'^2(u', v')},$$

sfruttando in maniera essenziale alcune proprietà caratteristiche delle coordinate isoterme, Beltrami giungeva all'uguaglianza  $\Delta_2 \log h' = \Delta_2 \log h$ , la quale gli consentiva di concludere che la funzione  $\Theta = \Delta_2 \log h$  è una funzione assoluta. Inoltre, ripristinando in  $\Theta$  un sistema di coordinate qualunque, Beltrami era in grado di dimostrare sulla scorta della «invariabilità» del parametro differenziale  $\Delta_2$  la relazione:<sup>1</sup>

$$\Theta = -\frac{1}{2T} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{T} \left( \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{F}{E} \frac{\partial E}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{T} \left( \frac{\partial E}{\partial v} - 2 \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{F}{E} \frac{\partial E}{\partial u} \right) \right],$$

la quale coincideva con l'espressione per la curvatura gaussiana già annunciata da Liouville in LIOUVILLE 1851 e dedotta per la prima volta da Chelini in Chelini 1851 sulla scorta di alcuni risultati contenuti in Bonnet 1848.

Veniva in questo modo invertito il corso dell'argomentazione delle *Disquisitiones*. Mentre Gauss aveva fornito preliminarmente una definizione della curvatura per poi stabilirne il carattere intrinseco, Beltrami dapprima costruiva per via puramente analitica una funzione assoluta ed in seguito dimostrava la coincidenza di tale funzione con la curvatura gaussiana.

Qualche anno più tardi, nel 1868, Beltrami ritornava ad occuparsi del fondamentale risultato di Gauss pervenendo ad una dimostrazione del TE elementare ed al contempo diretta. In una lettera del Luglio 1869 Beltrami annunciava all'amico Chelini il proprio lavoro con queste parole:

<sup>1</sup> BELTRAMI 1864-1865, p. 191 è pari a  $\sqrt{EG - F^2}$ .

Avant'ieri vi ho spedito due esemplari di una piccola Nota, redatta già da lungo tempo e comunicata nel Maggio dell'anno scorso all'Ateneo di Venezia, il quale, per l'abituale sua lentezza, non la pubblicò che ora. Benché di poco o di niun interesse per la scienza, la credo di una qualche possibile utilità per l'insegnamento, nel quale si è già usato di ricorrere agli sviluppi in serie per dimostrare i teoremi elementari sulla curvatura delle superficie, il teorema di Dupin, ecc... Mi pare inoltre che l'invariabilità di  $R_1 R_2$  venga in tal modo riconosciuta con un processo che la fa necessariamente incontrare, anziché con un processo più o meno artificiale, quale è quello usato dal medesimo Gauss.

(Enea 2009, p. 157)

La breve nota in questione, Beltrami 1868, si proponeva infatti di ricavare l'invarianza del prodotto dei due raggi di curvatura principale mediante sviluppi in serie tanto della funzioni  $z = z(x, y)$ ,  $Z = Z(X, Y)$  espressioni analitiche di due superfici supposte applicabili, quanto delle corrispondenze  $X = X(x, y)$ ,  $Y = Y(x, y)$  che connettono punti tra loro omologhi, cioè in corrispondenza isometrica.

## 6. CONSIDERAZIONI FINALI

Il numero e la varietà di dimostrazioni del TE passate in rassegna testimoniano insieme della fortuna e delle difficoltà che contraddistinsero la ricezione delle idee di Gauss sulla teoria delle superficie. L'intenso interesse per i nuovi metodi volti ad indagare le proprietà intrinseche delle superficie fu spesso accompagnato da una certa insoddisfazione per le tecniche e gli argomenti dimostrativi impiegati.

Le numerose riformulazioni del TE proposte operarono, come si è visto, su due fronti: da un lato si tentò di investigare il contenuto geometrico del TE, dall'altro si procedette a semplificare le deduzioni analitiche cui Gauss era ricorso nelle *Disquisitiones*. Delle dieci dimostrazioni del TE che qui abbiamo esposto, sei (quelle di Puiseux, Bertrand, Diguet, Jacobi, Chelini, Brioschi) erano animate dal desiderio di porne in luce ciò che Jacobi suggestivamente aveva designato come il *verum fontem theorematum Gaussiani*; le rimanenti (quelle di Liouville, la seconda dimostrazione di Chelini e le due proposte da Beltrami) erano invece contraddistinte da un segno marcatamente analitico che sfruttava per lo più l'impiego di particolari sistemi di coordinate.

Su entrambi i fronti le acquisizioni di Gauss si rilevarono in forte anticipo rispetto ai tempi. Con la sola eccezione dell'introduzione dei parametri differenziali da parte di Beltrami, sembra lecito sostenere che per quasi quarant'anni l'insieme delle tecniche impiegate nello studio del TE non avesse subito modificazioni (e avanzamenti) significative. Se è vero

che estensioni e nuove dimostrazioni furono effettivamente ottenute nel corso dei primi quarant'anni dalla pubblicazione delle *Disquisitiones*, è altresì vero che molte delle idee alla base delle riformulazioni del TE che furono proposte erano di fatto già contenute nelle ricerche (private e pubblicate solo postume) di Gauss. Gauss aveva elaborato dimostrazioni più concrete e più agevoli del TE che tuttavia aveva ritenuto inadeguate alla pubblicazione. Curiosamente, la storia della ricezione del TE nel periodo considerato fu disseminata di tentativi (certo inconsapevoli) di riscoprire dimostrazioni e procedure che Gauss aveva in qualche modo posto in secondo piano e definitivamente scartato al momento di redigere il testo delle *Disquisitiones*.

Il dibattito metodologico che accompagnò per decenni l'attività dei matematici impegnati a recepire il contenuto delle *Disquisitiones* di Gauss, volto perlopiù a stabilire un ideale equilibrio tra tecniche di tipo analitico e procedimenti di più immediata interpretazione geometrica, subì una svolta epocale con la pubblicazione nel 1867 del discorso di abilitazione (*Habilitationsvortrag*, Riemann 1867) di Riemann, il quale, tra gli innumerevoli altri, ebbe il merito di aver dato piena legittimità all'impiego di strumenti analitici in questioni di geometria.

## BIBLIOGRAFIA

- BELTRAMI EUGENIO (1864-1865), *Ricerche di analisi applicata alla geometria*, «Giornale di Matematiche», 2-3, pp. 267-282, 297-306, 337-339, 355-375; 15-22, 33-41, 82-91, 228-240, 311-314.
- BELTRAMI EUGENIO (1868), *Sulla teoria generale delle superficie*, «Atti dell'Ateneo Veneto», 5, pp. 535-542.
- BELTRAMI EUGENIO (1881), *Della Vita e delle Opere di Domenico Chelini*. In *Memoriam Dominici Chelini, collectanea mathematica nunc primum edita cura et studio L. Cremona et E. Beltrami*, Mediolani, Hoepli, Mediolani.
- BERTRAND JOSEPH (1843), *Démonstration de quelques théorèmes sur les surfaces orthogonales*, «Journal de l'École Polytechnique», 17, pp. 157-173.
- BERTRAND JOSEPH (1848), *Démonstration d'un théorème de M. Gauss*, «Journal des mathématiques pures et appliquées», 13, pp. 80-82.
- BERTRAND JOSEPH (1856), *Démonstration géométrique de quelques théorèmes de M. Gauss*, «Comptes Rendus Acad. Sci.», 42, pp. 1088-1092.
- BERTRAND JOSEPH (1864), *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral, Volume I, Calcul différentiel*, Paris, Gauthier-Villars.
- BONNET OSSIAN (1844), *Sur quelques propriétés générales des surfaces et des lignes tracées sur les surfaces*, «Comptes Rendus Acad. Sci.», 19, pp. 980-982.
- BONNET OSSIAN (1848), *Mémoire sur la théorie générale des surfaces*, «Journal de l'École Polytechnique», 19, pp. 1-146.
- BRIOSCHI FRANCESCO (1852a), *Sopra il prodotto dei raggi di curvatura di una superficie*, «Annali di Scienze Matematiche e Fisiche», 3, pp. 273-276.

- BRIOSCHI FRANCESCO (1852b), *Intorno ad alcuni punti della teorica delle superfici*, «Annali di Scienze Matematiche e Fisiche», 3, pp. 293-321.
- CHELINI DOMENICO (1848a), *Di alcuni teoremi del sig. F. Gauss relativi alle superficie curve*, «Giornale Arcadico di Scienze, Lettere ed Arti», 115, pp. 257-284.
- CHELINI DOMENICO (1848b), *Di alcuni teoremi del sig. F. Gauss relativi alle superficie curve (continuazione e fine)*, «Giornale Arcadico di Scienze, Lettere ed Arti», 113, pp. 3-20.
- CHELINI DOMENICO (1851), *Sopra una memoria del sig. Liouville intorno alla teoria generale delle superfici*, «Annali di Scienze Matematiche e Fisiche», 2, pp. 291-301.
- DOMBROWSKI PETER (1979), *Differential Geometry-150 years after Carl Friedrich Gauss' Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas*, «Asterisque», 62, pp. 99-153.
- Enea Maria Rosaria (ed.) (2009), *Il carteggio Beltrami-Chelini*, Milano, Mimesis, 2009.
- GAUSS FRIEDRICH (1825), *Neue allgemeine Untersuchungen über die krummen Flächen*. Pubblicato postumo in *Gauss Werke* (1901), Volume VIII, pp. 408-443. Anche in BELTRAMI (1864-1865).
- GAUSS FRIEDRICH (1828), *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, «Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores», 6, pp. 99-146.
- GAUSS FRIEDRICH (1863-1933), *Carl Friedrich Gauss Werke*, Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, [Göttingen], Teubner, 12 Volumi.
- JACOBI CARL GUSTAV JACOB (1837), *Demonstratio et amplificatio nova theorematum Gaussiani de curvatura integra trianguli in data superficie*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», 16, pp. 334-350.
- JACOBI CARL GUSTAV JACOB (1842), *Über einige merkwürdige Curventheoreme*, «Astronomische Nachrichten», 20, pp. 115-120.
- LIUVILLE JOSEPH (1847), *Sur un théorème de M. Gauss concernant le produit des deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface*, «Journal des mathématiques pures et appliquées», 12, pp. 291-304.
- LIUVILLE JOSEPH (1851), *Sur la théorie générale des surfaces*, «Journal des mathématiques pures et appliquées», 16, pp. 130-132.
- LÜTZEN JASPER (1990), *Joseph Liouville (1809-1882): Master of Pure and Applied Mathematics*, New York, Springer.
- MCCLEARY JOHN (1994a), *On Jacobi's Remarkable Curve Theorem*, «Historia Mathematica», 21, pp. 377-385.
- MCCLEARY JOHN (1994b), *Geometry from a Differential Point of View*, Cambridge et alii, Cambridge University Press.
- MINDING FRIEDRICH (1839), *Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über di Flächen von unveränderlichem Krümmungsmasse*, «Mathematische Annalen», 19, pp. 370-387.
- Morehead James and Hildebeitel Adam (eds) (1902), *Karl Friedrich Gauss, General Investigations of curved surfaces of 1827 and 1825*, Princeton, The Princeton University Library. Traduzione commentata di GAUSS 1825 e GAUSS 1828.

- PUISEUX VICTOR (1848), *Sur le même théorème*, «Journal des mathématiques pures et appliquées», 13, pp. 87-90.
- RIEMANN BERNHARD (1867), *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, «Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen», 13, pp. 133-150. Pubblicato postumo nel 1867. In RIEMANN 1876, pp. 254-269.
- RIEMANN BERNHARD (1876), *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass* (H. Weber, ed.), Leipzig, Teubner; 2nd ed. 1892; repr. New York, Springer, 1991.
- RODRIGUES OLINDES (1815), *Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces, et sur la transformations d'une classe d'intégrales doubles, qui ont un rapport direct avec les formules de cette théorie*, «Correspondance sur l'école royale polytechnique», 3, pp. 162-182.
- STÄCKEL PAUL (1917), *Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Leipzig, Teubner. Ristampato in GAUSS 1863-1933, 10, 2, pp. 1-123.
- TAZZIOLI ROSSANA (1997), *On the Role of Differential Parameters in Beltrami's Work*, «Historia Mathematica», 24, pp. 25-45.

*Pervenuto in redazione il 5 giugno 2017*