ACCADEMIA NAZIONALE DELLE SCIENZE DETTA DEI XL
HRVATSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI
INAF - OSSERVATORIO ASTRONOMICO DI BRERA
PONTIFICIA UNIVERSITÀ GREGORIANA

EDIZIONE NAZIONALE
DELLE OPERE E DELLA CORRISPONDENZA
DI RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH

Volume VI
Opere scientifiche
Opere di Fisica
Filosofia naturale

OPERE PRECEDENTI LA *THEORIA*

a cura di
Luca Guzzardi e Fabio Bevilacqua

Traduzioni di Angelo Chierico

Commissione Scientifica Nazionale
Istituita con D.M. 27 Aprile 2006 e successive integrazioni

2016

EDIZIONE NAZIONALE
DELLE OPERE E DELLA CORRISPONDENZA
DI RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH

Commissione scientifica

EDIZIONE NAZIONALE
DELLE OPERE E DELLA CORRISPONDENZA
DI RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH

Volume VI
Opere scientifiche
Opere di Fisica
Filosofia naturale

Opere precedenti la *Theoria*

a cura di
Luca Guzzardi e Fabio Bevilacqua

Traduzioni di Angelo Chierico

Enti patrocinatori dell'Edizione Nazionale delle Opere e della Corrispondenza di Ruggiero Giuseppe Boscovich:

- Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
- Accademia Croata di Scienze e Arti
- INAF – Osservatorio Astronomico di Brera
- Pontificia Università Gregoriana
- S.I.A. – Società Italiana di Archeoastronomia

Pubblicato nel 2016

Realizzazione: ALEXMA – Cinisello Balsamo (MI)
per conto della Commissione Scientifica per l'Edizione Nazionale delle Opere e della Corrispondenza di Ruggiero Giuseppe Boscovich

Sede Legale e Operativa: INAF - Osservatorio Astronomico di Brera
via Brera 28, 20121 Milano

ISBN 978-88-96700-19-8

Indice generale

PREMESSA

Nel 2008 Edoardo Proverbio, promotore e coordinatore dell'*Edizione Nazionale delle Opere e della Corrispondenza di Ruggiero Boscovich*, mi suggerì di organizzare a Pavia un Convegno internazionale per celebrare il 300° anniversario della nascita del grande scienziato. Boscovich infatti era stato professore di matematica a Pavia tra il 1764 e il 1768. Proverbio suggerì inoltre di collaborare all'*Edizione Nazionale* con un volume dedicato ad alcuni scritti di Boscovich relativamente poco noti ma rilevanti per lo sviluppo di quella che sarà l'opera più famosa, la *Theoria* (1758, 1763). Si tratta del *De Viribus Vivis* (1745), del *De Continuitatis Lege* (1754), del *De Lege Virium* (1755), e del *De Materiae Divisibilitate* (1757). Il gruppo di Storia della Fisica del Dipartimento di Fisica A.Volta, che ben conosceva l'influenza di Boscovich sullo stesso Volta[1], ha accettato con entusiasmo l'idea. Con la supervisione di Patrizia Contardini, instancabile project manager, è stata presentata al MIUR una proposta di accordo di programma, poi approvata[2], che prevedeva oltre al volume per l'*EN* ed al Convegno (Settembre 2011)[3] anche la prima traduzione delle quattro opere (con l'eccezione del *De Continuitatis* non esistono traduzioni in altre lingue) e una traduzione in italiano della *Theoria* (1763)[4], e

[1] Volta, Alessandro. *De vi attractiva ignis electrici, ac phaenomenis inde pendentibus*. Novo-Comi: typis O. Staurenghi, 1769; Fregonese, Lucio "Gli influssi di Boscovich e della chimica delle affinità nelle prime fasi dell'elettrologia di Alessandro Volta." *Atti del XII Congresso nazionale di storia della fisica*, 1993, 91–106.

[2] MIUR Accordo di Programma "3° Centenario della nascita di Ruggero Boscovich, Ragusa 1711, Milano 1787. Attività divulgative" approvato con D.M n.835/Ric del 27.11.2009 ai sensi della L. 6/2000 per la Diffusione della cultura scientifica.

[3] F. Bevilacqua, P. Contardini, L. Guzzardi (eds.) *Boscovich and His Times. Contributions of the Pavia 2011 International Conference*, University of Pavia Press, 2014.

[4] R. Boscovich *Sulle forze vive* (1745); *Sulla divisibilità della materia e sui principi dei corpi* (1748, 1757); *Sulla legge di continuità e le sue conseguenze riguardanti i primi elementi della materia e le loro forze* (1754) ; *Sulla legge delle forze esistenti in natura* (1755); *Teoria di filosofia della natura ricondotta ad una unica legge delle forze esistenti in natura* (1763). Traduzioni di Angelo Chierico; Copyright Gruppo di Storia della Fisica, Dipartimento di Fisica, Università di Pavia.

una mostra sulla vita di Boscovich con documenti degli Archivi di Stato di Pavia e di Milano, libri della Biblioteca Universitaria di Pavia (MIBAC) e strumenti del Museo per la Storia dell'Università di Pavia[5]. Inoltre sono state realizzate e pubblicate in rete alcune video-interviste a partecipanti al Convegno[6].

A questo Sesto volume dell'*EN* hanno collaborato con grande dedizione Angelo Chierico e Luca Guzzardi. Angelo Chierico ha tradotto dal latino le quattro opere di Boscovich già menzionate che, pur mantenendo il copyright "pavese", entrano a far parte di questo volume arricchendolo enormemente. A Luca Guzzardi si deve una rilettura critica delle traduzioni ed il saggio introduttivo. A Edoardo Proverbio un affettuoso ringraziamento per "l'energia" dedicata all'*EN* ed in particolare a noi; energia che si è espressa in varie forme: suggerimenti, documenti inediti, esortazioni e anche con i necessari rimproveri per i nostri ritardi.

Fabio Bevilacqua
Dipartimento di Fisica
Università di Pavia

[5] L. Cardinali, P. Contardini, F. Bevilacqua *Ruggiero Boscovich e il suo tempo. Una ricerca tra la sua corrispondenza e le tracce pavesi*. 2014

[6] https://www.youtube.com/channel/UC3l826UoTUhJETIx8e-S0eA/videos

INTRODUZIONE*

1. *La formazione di Boscovich fra* pura mathesis *e* mathesis mixta

Il «Système figuré des Mathematiques et de leurs divisions» che apre il primo volume della *Histoire des mathématiques* (1758) del matematico francese Jean-Étienne Montucla fornisce un quadro di riferimento essenziale per orientarsi nella tradizionale divisione della matematica – dominante fra Seicento e Settecento – in «matematiche pure» e «miste». Le prime comprendevano l'aritmetica, la geometria «ordinaria» e «trascendente» (quest'ultima a sua volta sottostante a un'articolata suddivisione interna) e l'algebra, ripartita in «calcolo differenziale o delle flussioni», «calcolo integrale o delle fluenti» e «calcolo esponenziale». Matematiche miste sono invece la meccanica (suddivisa in statica e dinamica, ciascuna ripartita in dei riferimento a solidi e fluidi), l'astronomia, l'ottica, l'acustica e la pneumatica (ovvero la fisica dei «fluidi elastici, pesanti, ecc.»). Anche astronomia e ottica sono articolate in maniera assai dettagliata: la prima comprende l'astronomia sferica (a sua volta suddivisa in «geografia», «navigazione, ovvero l'arte di condurre le navi mediante l'osservazione del cielo», «cronologia, cioè la disposizione dei tempi in base ai periodi celesti», «gnomonica, o divisione del tempo che passa attraverso il moto degli astri») e l'astronomia teorica; quanto all'ottica, «scienza della visione e delle proprietà della luce», essa include l'«ottica propriamente detta, o scienza della visione diretta», la «catottrica», la «diottrica» e la «prospettiva, o arte di rappresentare gli oggetti in modo conforme a come appaiono»[1].

---

* **Per ragioni di brevità, nelle note a pié di pagina i volumi dell'Edizione Nazionale sono indicati con *ENc* (per la sezione Corrispondenza) e *ENo* (per la sezione Opere a stampa) seguiti dal numero del volume e da quello dell'eventuale tomo.**

[1] Vedi J.-É. Montucla, *Histoire des Mathematiques*, tome premier, Paris, Jombert, 1758, pp. xxvi-xxviii. Una peculiare articolazione interna interessa anche l'acustica, suddivisa in acustica e musica (con quest'ultima comprendente a sua volta melodia e armonia). Si noti che il «sistema figurato» di Montucla è una rielaborazione, con alcune notevoli variazioni e delucidazioni, di quello che compare nel *Système figuré des connoissances humaine* nel vol. I dell'*Encyclopédie* (1751) di d'Alembert e Diderot. Vedi, in proposito, M. Epple, «Mathematische Wissenschaften», in *Enzyklopädie der Neuzeit*, herausgegeben von F. Jaeger, vol. 8, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Stuttgart 2008,

Soprattutto alle matematiche miste erano indirizzati gli interessi e l'insegnamento matematico entro i collegi della Compagnia di Gesù. Da una parte, nel quadro dell'epistemologia dei Gesuiti – e di una *Ratio studiorum* elaborata sulla base della «interpretazione tardoscolastica della nozione aristotelica di scienza» – la «*pura mathesis*», analisi di enti intelligibili ma non sensibili, funzionava come una sorta di vocabolario che consentiva di tradurre gli enunciati fisici in un peculiare linguaggio (quello geometrico-matematico), senza che tuttavia le fosse accessibile un livello più profondo di spiegazione, dominio invece della filosofia naturale che si sviluppava in una fisica *non* matematica, il cui oggetto era «la base materiale, l'origine e il mutamento delle relazioni metriche». Ciò che consentiva descrizioni quantitative nel senso di misurazione degli enti fisici era invece la «*mathesis mixta*», caratterizzata da premesse in parte fisiche e in parte matematiche[2]. D'altra parte, fra il 1680 e il 1740, in particolare per l'impulso di Giovanni Battista Tolomei (rettore del Collegio Romano dal 1698 al 1701), la filosofia e l'insegnamento entro la Compagnia vennero sottoposti a un notevole aggiornamento, con il tentativo di riformulare la filosofia scolastica della natura in termini compatibili con le dottrine scientifiche e filosofiche moderne, in primo luogo di derivazione cartesiana e in seguito newtoniana[3].

Formatosi entro il Collegio Romano sia nelle discipline scientifiche sia in quelle filosofiche e teologiche, successore di Orazio Borgondio sulla cattedra di matematica dal 1741-42, Ruggiero Boscovich non sfugge a tale schema, come rivela un esame delle sue prime opere scientifiche, dagli esordi agli anni Quaranta. Eccettuata una significativa produzione poetico-didascalica (che pure s'inquadra nella sua for-

---

pp. 154-159; sulla portata del progetto 'enciclopedico' di Montucla nel XVIII secolo vedi J. Peiffer, *France*, in *Writing the History of Mathematics: Its Historical Development*, a cura di J.W. Dauben, C.J. Scriba, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin 2002, pp. 9-11.

[2] Vedi U. Baldini, *Boscovich e la tradizione gesuitica in filosofia naturale: continuità e cambiamento*, in «Nuncius», VII/2, 1992, pp. 3-67, in particolare pp. 8-10; Baldini fornisce questo esempio di 'enunciato misto'. Vedi anche L. Pepe, Introduzione a *ENo*, I, pp. 12-14. In realtà, Boscovich considerava matematiche miste e applicate sinonimi: così in un inedito (forse una premessa a un programma didattico) risalente agli anni dell'insegnamento presso le Scuole Palatine a Milano (1769-1772): «Cattedra /triennale/ di Matematiche Applicate per le Scuole Palatine. Quando la Geometria, e l'Algebra sortono dal mondo intellettuale e s'immergon più addentro nella materia considerando i rapporti particolari delle grandezze sensibili, i moti per esempio degli astri, l'aumento delle forze moventi, le vie della luce ne varj mezzi, gli effetti del suono per le vibrazioni delle corde, allora acquistano il nome di Matematiche Miste o Applicate». (Boscovich Papers, Bancroft Library di Berkeley, BANC MSS 72/238 cz, Carton 5, Folder 36, Item 8.)

[3] Sul processo di aggiornamento dell'insegnamento scientifico nel Collegio Romano e l'attività di Tolomei si veda ancora U. Baldini, *Boscovich e la tradizione gesuitica in filosofia naturale: continuità e cambiamento*, cit., pp. 13-27; P. Casini, *Newton e la coscienza europea*, il Mulino, Bologna 1983, pp. 143-155.

mazione nell'ambito della Compagnia)[4], i primi lavori di Boscovich rientrano nell'ambito delle matematiche miste, in particolare dell'astronomia, che per lo più orienta i suoi interessi anche nel campo della matematica pura. Fino agli anni Quaranta, sono solo quattro le opere riconducibili a Boscovich (in realtà, dissertazioni in cui fece cimentare alcuni suoi allievi)[5] che possono essere considerate pertinenti la fisica, per altro – benché percorse, talvolta, da una venatura quantitativa – nello spirito della *physica particularis* gesuitica[6]: una dissertazione sull'aurora boreale, una dissertazione sugli argomenti degli antichi per la sfericità della Terra e una sulla sua forma, nonché una dissertazione sul diverso valore dell'attrazione gravitazionale in punti differenti della superficie terrestre. In particolare, le ultime due (sulla forma della Terra e sul diverso valore della gravità) rinviano al problema geometrico del cerchio osculatore di una conica, trattato da Boscovich in un'opera di *pura mathesis*[7].

2. De viribus vivis *(1745)*

2.1. *La questione delle forze vive e la sua ricezione da parte di Boscovich*

Stando al «Catalogus operum» stilato dallo stesso Boscovich per la *Editio veneta* (1763) della *Theoria philosophiae naturalis*, solo nel 1745 egli si sarebbe cimen-

---

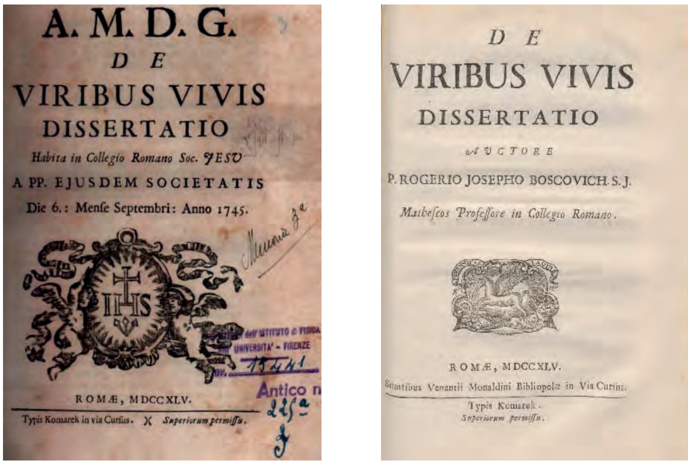
[4] Vedi L. Guzzardi, Introduzione a *ENo*, XIII/2. Vedi pure *ENo*, XIV, che raccoglie le composizioni poetiche più brevi.

[5] Questi gli allievi di Boscovich che si cimentarono nelle dissertazioni fisiche: Agostino Fanucci, Giovanni Battista Amalfitano, Roberto Calvi (*De Aurora Boreali*, Roma 1738); Vincenzo de Gambara, Alfonso Casati (*De veterum argumentis pro telluris sphaericitate*); Giuseppe Passi, Ludovico Malfatti, Domenico de Angelis (*De Telluris figura*); Carlo Molinari, Giuseppe Candiani, Corradino Cavriani (*De inaequalitate gravitatis in diversis terrae locis*). Si noti che Boscovich ascriveva interamente a se stesso le dissertazioni, che vengono citate nel *Catalogus operum* riportato alla fine della *Theoria philosophiae naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium*, Editio veneta prima, Venetiis, Ex Typographia Remondiniana, 1763, s.n., *sub vocem* «Dissertationes impressae pro exercitationibus annuis, & publice propugnatae».

[6] Sulla distinzione tra *physica particularis* e *physica generalis* vedi *Storia della scienza*, vol. VI, *L'Età dei Lumi*, sotto la direzione di J. Heilbron, Istituto della Enciclopedia Italiana, Roma 2002, pp. 5-8. Per alcuni importanti esempi di *physica particularis* gesuitica (centrati in particolare sull'elettricità) in confronto con la *physica generalis* vedi J. Heilbron, *Electricity in the 17th and 18th Centuries. A Study of Early Modern Physics*, University of California Press, Berkeley-Los Angeles-London 1979, pp. 109-112 e 180-192.

[7] Per una valutazione analitica delle prime opere matematiche di Boscovich e del rapporto con le dissertazioni di fisica e di meccanica vedi L. Pepe, Introduzione a *ENo*, I, in particolare pp. 16-18.

tato per la prima volta con temi attinenti la 'filosofia naturale' discutendo il 6 settembre, nelle aule del Collegio Romano, il problema della determinazione delle forze vive. La dissertazione sarebbe stata pubblicata quello stesso anno per i tipi Komarek come *De viribus vivis dissertatio*, in due edizioni che si distinguevano per il frontespizio: l'una, secondo l'uso gesuitico, attribuiva l'opera «ai padri di codesta Compagnia»; l'altra, a spese del libraio Venanzio Monaldini, dichiarava quale autore «P[adre] Ruggiero Giuseppe Boscovich, professore di Matematica nel Collegio Romano» (lo stesso accadrà con le dissertazioni *De continuitatis lege*, 1754, e *De lege virium in natura existentium*, 1755: i dettagli dei frontespizi sono riportati nelle traduzioni pubblicate in questo volume).


A. M. D. G.
DE
VIRIBUS VIVIS
DISSERTATIO
Habita in Collegio Romano Soc. JESU
A PP. EJUSDEM SOCIETATIS
Die 6.: Mense Septembri: Anno 1745.
ROMÆ, MDCCXLV.
Typis Komarek in via Cursus. Superiorum permissu.

DE
VIRIBUS VIVIS
DISSERTATIO
AUCTORE
P. ROGERIO JOSEPHO BOSCOVICH S.J.
Matheseos Professore in Collegio Romano.
ROMÆ, MDCCXLV.
Sumptibus Venantii Monaldini Bibliopolæ in Via Cursus.
Typis Komarek.
Superiorum permissu.

Figura 1. I due frontespizi del *De viribus vivis*.

Se da una parte l'opera si apre secondo le forme proprie della tradizione della Compagnia in filosofia naturale, con la distinzione, ripresa dagli «antichi», fra due «generi di forze» (le forze statiche e quelle che, impresse a un corpo, ne generano il moto), l'attenzione di Boscovich si concentra però quasi subito sull'argomento di Leibniz circa la forza viva (n. 3)[8]. Nel 1686 il filosofo tedesco aveva pubblicato sugli *Acta eruditorum* una *Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum circa legem naturalem*, ove l'«errore memorabile di Descartes» veniva ravvisato nell'identificazione di 'forza motrice' (*vis motrix*) e *quantitas moti*. Nella nota, di sole tre pagine, Leibniz si limitava a fornire una dimostrazione geometrico-matematica per assurdo della fallacia cartesiana, concludendo in maniera piuttosto

[8] Nel testo i riferimenti ai paragrafi delle opere di Boscovich sono dati (per lo più fra parentesi) come «n. 1», «n. 2», «n. 3», «n. 4», ecc. Ove non strettamente necessari, i numeri di pagina non vengono indicati.

vaga che «appare chiaro che la forza [*vis*] debba essere misurata in base alla quantità dell'effetto che può produrre – per esempio, in base all'altezza alla quale è in grado di far salire un grave di data grandezza [*magnitudinis*] e specie [*speciei*] –, anziché in base alla velocità che può imprimere a un corpo»[9]. In realtà, implicita in questo atteggiamento è la distinzione – su cui si tornerà più avanti – fra gli effetti nello spazio (l'altezza cui la forza è in grado di far salire un grave) e gli effetti nel tempo (l'accelerazione che la forza può imprimere a un corpo). Si noti che, mentre Leibniz mostra una chiara preferenza per gli effetti nello spazio, la nozione *cartesiana* che privilegia gli effetti della forza nel tempo è ben presente nella formulazione data da Newton al secondo principio della dinamica[10], compendiabile nell'espressione $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, ove a corrisponde appunto alla variazione della velocità di un corpo nel tempo, cioè $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

Nello *Specimen dynamicum* (1695) Leibniz avrebbe poi introdotto la nozione di *vis viva*, che di fatto era stata anticipata da espressioni come «*Force vive absoluê*» (contro «*Force morte*») nel manoscritto *Essay de dynamique* (1691), e «*potentia viva*» (in opposizione a «*potentia mortua*») nel manoscritto *Ostendendum est, ejusdem esse potentiae elevare unam libram ad duos pedes, et elevare duas libras ad unum pedem*, pubblicato da C.I. Gerhardt come «Beilage» alla *Brevis demonstratio* nelle *Leibnizens Gesammelte Werke*[11]. In particolare, qui Leibniz precisava che la «*potentia viva* sta a quella *mortua* – ovvero l'impulso [*impetus*] sta allo sforzo [*conatus*] – come la linea al punto, o il piano alla linea. E in un certo senso, così come [le aree dei] cerchi non vanno con i diametri, bensì con i quadrati dei diametri, le *potentiae vivae* dei corpi non vanno con le velocità, bensì con i quadrati delle velocità»[12]. La concezione di Leibniz veniva dunque a trovarsi in netta antitesi con quella cartesiana: non la quantità di moto mv, bensì la forza viva, la cui misura è data da mv^2, è la grandezza «che si conserva ed è determinata dall'effetto violento che può produr-

---

[9] *Acta*, 1686, p. 162.

[10] Sul complesso rapporto fra la formulazione utilizzata da Newton nei *Principia* e la familiare equazione $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ vedi N. Guicciardini, *Newton*, Carocci, Milano 2011, pp. 145-147; B. Pourciau, *Is Newton's second law really Newton's?*, in «American Journal of Physics», 79/10, 2011, pp. 1015-1022.

[11] Si veda G.W. Leibniz, *Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum circa legem naturalem* (1686), in *Leibnizens mathematische Schriften*, herausgegeben von C.I. Gerhardt, zweite Abtheilung, *Die mathematischen Abhandlungen Leibnizens enthaltend*, Band II, Schmidt, Halle 1860, pp. 117-119; Id., [Beilage] *Ostendendum est, ejusdem esse potentiae elevare unam libram ad duos pedes, et elevare duas libras ad unum pedem*, Ivi, pp. 119-123; Id., *Essay de dynamique sur le loix du mouvement* (1691), Ivi, pp. 215-231; Id. *Specimen dynamicum pro admirandis Naturae Legibus* (1695), Ivi, pp. 234-254.

[12] G.W. Leibniz, *Ostendendum est…*, cit., p. 121.

re»[13].

La dissertazione di Boscovich sulle forze vive si inserisce in una fase piuttosto tarda della controversia, che viene sintetizzata nei primi paragrafi del *De viribus vivis*. Si noti che al n. 2 Boscovich si serve di un argomento leibniziano contenuto *in nuce* nella *Brevis demonstratio*. Leibniz, nel manoscritto *Essay de dynamique*, attribuiva la confusione tra 'forza' e quantità di moto a un «abuso della dottrina statica. Infatti, nella statica troviamo l'idea che due corpi sono in equilibrio quando, in virtù della loro situazione le loro velocità sono proporzionali alle loro masse o pesi, ovvero quando hanno la stessa quantità di moto»[14]. Nel *De viribus vivis* Boscovich doveva osservare che «per quanto attiene alle forze del primo genere», determinate da una «tendenza» al moto (si ricordi che Leibniz parlava di *conatus*, mentre Boscovich utilizza *nisu*),

> la loro misura veniva facilmente confermata dagli esperimenti, in quanto l'uguaglianza delle forze – qualora fossero state effettivamente uguali – verrebbe conosciuta dall'equilibrio, e attraverso tale uguaglianza si dedurrebbe pure il loro rapporto nel caso le forze fossero differenti […]. Alla sommità B di un piano inclinato AB, molto accuratamente levigato, ci sia una carrucola con avvolto un filo DBC, a un estremo del quale penda liberamente una sfera C, mentre all'altro estremo due sfere uguali E e D, dello stesso materiale, vengano sostenute in parte dal filo e in parte dal piano inclinato. Poiché constatiamo una tendenza [*nisum*] alla discesa lungo il piano inclinato minore che per la discesa libera, è facile trovare l'inclinazione che trattenga la sfera C in equilibrio con le sfere E e D. In questo caso, la tendenza alla discesa della sfera D, uguale a quella della sfera E, equivarrà a metà della tendenza della sfera C, in quanto, per equilibrio, le prime due [E, D] prese insieme uguagliano la terza [C] presa da sola. Se poi, troncato il filo, si annotassero con precisione le velocità acquisite nello stesso intervallo temporale [*eodem tempore*] dalle sfere C e D durante la discesa, si troverà che la velocità della prima è doppia rispetto alla velocità della seconda, cioè nel medesimo rapporto delle tendenze. Più in generale, lo stesso vale se in D si appende un numero qualunque di sfere uguali oppure una sfera di massa qualsiasi: infatti le velocità delle singole particelle [*particularum*], acquisite simultaneamente nella discesa, staranno come le tendenze dedotte dall'equilibrio. (n. 2.)

Ma, prosegue Boscovich al paragrafo successivo, fino al 1686 – l'anno di pub-

---

[13] G.W. Leibniz, *Essay de Dynamique*, cit., p. 215. Per una ricostruzione del ruolo di Leibniz nella controversia sulla *vis viva* vedi C. Iltis, *Leibniz and the* Vis Viva *Controversy*, in «Isis», 62/1, pp. 21-35.

[14] G.W. Leibniz, *Essay de Dynamique*, cit., p. 218.

blicazione della leibniziana *Brevis demonstratio* – questo metodo proveniente dalla statica è stato applicato alla misurazione delle forze «del secondo genere», quel tipo di forze, cioè, che è «sempre connesso al moto stesso e al quale i peripatetici hanno dato il nome di *impetus*» (n. 3): un termine che, come si è visto, era stato utilizzato dallo stesso Leibniz[15]. Il filosofo tedesco, ricorda poi Boscovich, aveva chiamato «forze morte» le tendenze e «forze vive» gli *impetus*, proponendo «di misurare le prime in base alle masse moltiplicate per le velocità, mentre le seconde in base alle masse moltiplicate per i quadrati delle velocità […], avendo visto i gravi lanciati verso l'alto ascendere ad altezze non proporzionali alle velocità stesse, bensì ai quadrati delle velocità» (n. 3).

Mostrando una conoscenza puntuale e ampia del dibattito dell'epoca[16], Boscovich riassume (nn. 3-8) la controversia che dal piccolo scritto di Leibniz scaturì, muovendo da Denis Papin a Johann (Jean) Bernoulli a Émilie du Châtelet, sino alle critiche alla concezione leibniziana da parte di James Stirling, Colin MacLaurin e Jean-Jacques Dortous de Mairan. Solo alla posizione espressa da quest'ultimo, presentata in una *Dissertation sur l'estimation et la mesure des forces motrices des corps* (1728), Boscovich dedica particolare attenzione (n. 6). Mairan – sostiene Boscovich – prende le mosse da una concessione al punto di vista di Leibniz: supponiamo di far cadere una sfera da varie quote su un ammasso di materiale molle (deformabile), per esempio argilla. La sfera scaverà delle fossette proporzionali alle altezze da cui viene fatta cadere. Come Galileo aveva intuito nella Giornata terza dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, «i quadrati delle velocità che i gravi acquistano cadendo» sono direttamente proporzionali «alle altezze da cui cadono», sicché «è evidente che quelle cunette sono proporzionali non alle velocità, bensì ai quadrati delle velocità. Da ciò i leibniziani deducono che le forze vive dei corpi, il cui effetto è appunto lo scavo di tali cunette, non corrispondono alle velocità, bensì ai quadrati delle velocità»[17].

---

[15] Le definizioni del primo genere di forze come *conatus* e del secondo genere di forze come *impetus* sono date entrambe in *De viribus vivis*, n.1.

[16] Vedi in proposito P. Costabel, *Le* De Viribus Vivis *de R. Boscovich ou de la Vertu des Querelles de Mot*, «Archives Internationales d'Histoire des Sciences», 14, 1961, in particolare pp. 3-4. Vedi anche L. Indorato e P. Nastasi, *Boscovich and the* Vis Viva *Controversy*, in *R.J. Boscovich. Vita e attività scientifica – His Life and Scientific Work*, a cura di P. Bursill-Hall, Istituto della Enciclopedia Italiana, Roma 1993, p. 174, dove sono richiamati i principali contributi sulle forze vive in Italia.

[17] Boscovich, *De viribus vivis*, n. 6; la figura di riferimento è la Fig. 1, nella Tavola che chiude la dissertazione. La fonte dell'esperimento è J.J. Dortous de Mairan, *Dissertation sur l'estimation et la mesure des forces motrices des corps*, «Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Memoirs de mathematique et de physique», 1728, pp. 11-13. In realtà l'argomento è di origine galileiana: «Posate un grave sopra una materia cedente, lasciandovelo sin che prema quanto egli può con la sua semplice gravità: è manifesto che, alzandolo un braccio o due, lasciandolo poi cadere sopra la medesima mate-

Stando a Mairan, invece, non c'è bisogno d'introdurre le forze vive che, dipendendo dal quadrato delle velocità, costituiscono veri e propri nuovi enti. È sufficiente misurare le velocità in funzione del tempo di caduta anziché dello spazio percorso dal grave: «La forza doppia in conseguenza di una velocità doppia dovrà essere due volte il tempo a morire di quella semplice [...], i tempi sono proporzionali alle velocità acquisite o perdute». Vi saranno così, «qualora la velocità sia doppia, effetti doppi in tempi uguali, ed effetti quadrupli in tempi doppi: in poche parole, effetti proporzionali alle velocità e non ai quadrati delle velocità»[18]. L'esperimento inizialmente richiamato in concessione al punto di vista leibniziano diviene ora una conferma per la tesi 'antica' e opposta. Ecco quanto ne ricava Boscovich:

> *Non ci sono forze vive nei corpi*. Sosteniamo infatti che tutti i fenomeni dipendono dalla forza d'inerzia e da azioni istantanee e via via decrescenti all'infinito che si originano da potenze, ovvero da forze morte, in modo che le forze vive siano del tutto superflue e da rigettare completamente dalla fisica, in base al principio dovuto a Newton, comunemente accettato, che non si devono ammettere più cause di quante siano quelle vere e bastanti a spiegare gli effetti. (n. 9; corsivo nel testo.)

L'applicazione di una forza, spiega Boscovich (n. 22), produce una variazione di velocità, il che segnala la sua predilezione per gli effetti nel tempo rispetto al privilegio concesso da Leibniz agli effetti nello spazio. Nel caso della caduta libera, la velocità acquisita da un grave è pensabile come effetto di una pressione (a sua volta prodotta 'a distanza' dalla gravità) per un tempo dato. In linea con la tradizione ge-

---

ria, farà con la percossa nuova pressione, e maggiore che la fatta prima co 'l solo peso; e l'effetto sarà cagionato dal mobile cadente congiunto con la velocità guadagnata nella caduta, il quale effetto sarà più e più grande, secondo che da maggior altezza verrà la percossa, cioè secondo che la velocità del percuziente sarà maggiore. Quanta dunque sia la velocità d'un grave cadente, lo potremo noi senza errore conietturare dalla qualità e quantità della percossa». G. Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* [1638], in *Le opere di Galileo Galilei. Edizione Nazionale*, vol. VIII, Firenze, Barbèra 1898, p. 199.

[18] J.J. Dortous de Mairan, *Dissertation sur l'estimation et la mesure des forces motrices des corps*, cit., p. 13. L'espressione di Boscovich nel *De viribus vivis* (n. 6) è assai più criptica: Mairan, «accettato dunque l'esperimento, Mairan aveva dimostrato che dalla stessa concezione antica sulle forze vive dovrebbe conseguire esattamente il medesimo fenomeno, posto che si abbia il rapporto fra i tempi in cui le singole velocità vanno perdute: egli infatti aveva mostrato che, considerando il rapporto tra le forze che vanno perdute nello scavare la buca, non può andar perduta una forza doppia se non dopo che sia stata spostata e compressa una quantità quadrupla di materia molle». Ovviamente, ciò che qui Boscovich ambiguamente chiama «la concezione antica circa le forze vive» è quella che si oppone all'impiego di un'espressione come mv^2.

suitica, ma anche con l'eredità galileiana, Boscovich si serve della rappresentazione geometrica riportata di seguito[19].

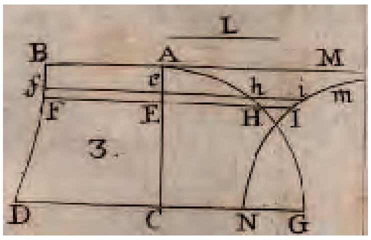


Figura 2. Dal *De viribus vivis* (Fig. 3). Diagramma per il chiarimento del concetto di forza viva.

Il diagramma rappresenta il variare della «pressione»[20] EF nel tempo AC. L'area $BAEF$ rappresenterà allora una velocità (n. 16). Boscovich immagina di scomporre il variare continuo della pressione in una sequenza di pressioni istantanee (o impulsi), ricavandone poi l'integrale. Poiché l'accelerazione è proporzionale alla

---

[19] P. Costabel (*La signification d'un débat sur trente ans (1728-1758). La question des forces vives*, «Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences», 8, 1983, p. 51) ha suggerito che il diagramma di Boscovich sia fortemente debitore nei confronti di Oresme, benché Boscovich possa sfruttare «i benefici delle nuove matematiche, che inquadrano il fenomeno della velocità in un'integrazione». Tuttavia appare più plausibile che la somiglianza riscontrata da Costabel sia effetto, più che di un'influenza diretta e pregnante di Oresme, di una sostanziale unità e continuità entro una tradizione di ricerca, in entrambi i casi basata su metodi geometrici (su Oresme in particolare vedi A. Dahan Dalmedico, J. Peiffer, *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales*, Éditions du Seuil, Paris 1986, pp. 210-211).

[20] Il significato di *pressione* in questo contesto è tutt'altro che immediato. Spiega Costabel: «Boscovich dichiara recisamente che a suo parere l'unica forza – quella che chiama '*vis activa*' contro Leibniz che la considera 'morta' – è l'azione 'istantanea' per cui la potenza passa all'atto e genera una nuova velocità […]. Egli annette estrema importanza a ciò che *condiziona* la variazione di velocità, vale a dire la presenza di una potenza. Tale potenza sollecita, produce una pressione istantanea che si trasforma in velocità non per una sorta di moltiplicazione degli effetti in un istante, ma semplicemente a causa di un'*applicazione continua* […]. La pressione è dunque un elemento di ragione, analogo alla retta priva di spessore, e unicamente suscettibile di essere conosciuta dallo spirito nella frattura temporale che costituisce l''istante'» (P. Costabel, *Le* De Viribus Vivis *de R. Boscovich ou de la Vertu des Querelles de Mot*, cit., pp. 6-7; vedi per raffronto *De viribus vivis*, nn. 13 e 15). In questo senso, una pressione è per così dire l'elemento infinitesimo della forza in quanto funzione del tempo. Come si vedrà, al n. 23 verrà introdotta una nozione di forza considerata in funzione dello spazio.

pressione[21] e in ogni tempuscolo Ee vale $v = a \cdot t$ (mentre ogni Ff corrisponde a un incremento infinitesimale della pressione), si avrà $v = EF \cdot Ee$, sicché per il tempo AE varrà $\mathrm{d}v = ABFE$. Prendendo in considerazione le masse, come ha notato Carolyn Iltis[22], in notazione odierna il momento *mv* corrisponderà all'integrale delle pressioni istantanee nel tempo, cioè $\int m\mathrm{d}v = \int p\mathrm{d}t$.

Quanto allo spazio percorso in funzione del tempo, poiché $s = \frac{1}{2}at^2$, avremo $s = \frac{1}{2}EF \cdot AE^2$. Ma se un corpo subisce una pressione EF per un tempo $2AE$, la velocità finale sarà $2BAEF$; mentre, indicando lo spazio percorso con s_1, si avrà $s_1 = \frac{1}{2}EF \cdot (2AE)^2 = 4s$. Sicché, «è evidente perché, in questa ipotesi della gravità, un corpo che discenda da un'altezza quadrupla acquista velocità doppia e impiega tempo doppio. Per l'identica ragione, qualora venga spinto verso l'alto con velocità doppia, salirà ad altezza quadrupla senza alcuna necessità di una forza viva quadrupla che sospinga tale corpo» (n. 22). La misura dell'«azione della potenza», cioè della forza che agisce su una massa, si ricava, perciò, «componendo le velocità generate nelle singole particelle, cioè moltiplicando la massa per la velocità semplice. Ciò trova d'accordo anche Leibniz, il quale misura così le forze morte» (n. 20).

Si immagini ora che nel diagramma non siano rappresentati tempi e pressioni, bensì spazi e forze, in modo che le ordinate esprimano uno spazio lungo il quale agisce una forza EF. Allora l'area $BAEF$ non rappresenterà più una velocità, bensì sarà proporzionale al quadrato della velocità. Infatti, la velocità prodotta da EF è proporzionale alla forza stessa per il tempo in cui ha agito, cioè $\mathrm{d}v = EF \cdot \mathrm{d}t$. Sia Ee un segmento infinitesimale (si assuma cioè che un corpo si muova sul segmento Ee di moto rettilineo uniforme dopo l'azione di una forza nell'istante E): il tempo sarà direttamente proporzionale allo spazio percorso e inversamente proporzionale alla velocità, cioè $\mathrm{d}t = \frac{Ee}{v}$. Ma allora, sostituendo opportunamente si otterrà: $\mathrm{d}v = EF \cdot \frac{Ee}{v}$, cioè $v \cdot \mathrm{d}v = EFEe = f \cdot \mathrm{d}s$. Conclude Boscovich: «Da qui inoltre, per la legge degli infinitesimi, si deduce che il quadrato della velocità del corpo in discesa da A, partendo dalla quiete, sta come l'areola $BAEF$» (n. 23). Introducendo le masse su cui vengono esercitate le forze e integrando opportunamente otteniamo la forza viva di Leibniz: $\int f\mathrm{d}s = \int mv\mathrm{d}v$.

Partendo dalla nozione di forza, che viene enunciata al paragrafo 13 («L'azione istantanea dalla quale si pensa generata questa velocità si chiama forza attiva: essa è per noi l'unica forza; da Leibniz, invece, è detta forza morta»), Boscovich ricava co-

---

[21] Così Boscovich definisce la pressione al n. 22: «le forze di gravità», ovvero la 'potenza' della gravità, «in singoli istanti E (vedi la Figura 3) producono pressioni EF proporzionali alle forze stesse». Sicché anche pressione e accelerazione avranno un rapporto di proporzionalità.

[22] C. Iltis, *D'Alembert and the* Vis Viva *Controversy*, «Studies in History and Philosophy of Science. Part A», 1/2, 1970, p. 139.

sì un significato fisico sia per mv sia per mv^2: esso dipende dal considerare la grandezza in questione funzione del tempo (mv) oppure dello spazio (mv). È il chiarimento di tale distinzione fra quelli che abbiamo chiamato effetti nel tempo ed effetti nello spazio, con un anticipo di alcuni anni su d'Alembert[23], a costituire il più significativo contributo del *De viribus vivis*. Dopo aver discusso l'urto fra corpi elastici e anelastici (nn. 24-34) ed essere tornato brevemente sull'esperimento di Mairan (n. 35), le due prospettive vengono messe a confronto:

> Se qualcuno, nonostante l'inutilità della forza viva, la voglia ancora ammettere, lo potrà, a suo piacere, fatti salvi i fenomeni. Se infatti stabilisse che quelle potenze, quante siano, producono su ciascuna particella, per ciascun intervallo di tempo, gradi di velocità proporzionali a se stesse, esse produrranno anche forze proporzionali: quelle forze staranno come le masse moltiplicate per velocità semplici. Se invece volesse, confezionati singoli spazi uguali, che si producessero singoli gradi di forza viva proporzionali alle forze che li producono, allora di fatto gli aggregati di forze staranno come le masse moltiplicate per i quadrati delle velocità […]. Per l'una e per l'altra concezione i fenomeni – che, come abbiamo visto, dipendono dalla sola produzione di velocità – avvengono allo stesso modo. (n. 36.)

In questo senso, le due concezioni sono equivalenti e la questione è meramente linguistica, «*de nomine*». A rigore, infatti, la forza 'viva' è un costrutto fisico che può essere misurato da mv o da mv^2 a seconda della definizione impiegata: se ci si riferisce a una funzione del tempo si utilizzerà mv; se a una funzione dello spazio, la scelta cadrà su mv^2 (n. 39). Com'è anticipato al n. 9, fra le due concezioni non vi è differenza di *status* ontologico, bensì di *grado*, per una sorta di adeguatezza concettuale. La preferenza di Boscovich cade su mv, più adatta «alla semplicità e analogia della natura»: la prima definizione è preferibile alla seconda in particolare perché il quadrato di una velocità è sempre positivo, distruggendo con ciò il verso del moto, mentre mv ne mantiene entrambi i caratteri distintivi, cioè il quanto e il segno[24]. Ma le forze vive, comunque intese, sono sempre «superflue e inutili»; si possono assumere solo messo da parte il newtoniano 'rasoio di Occam' che impone di non moltiplicare le cause, «più […] di quante siano quelle vere e bastanti a spiegare gli effet-

---

[23] Vedi P. Costabel, *La signification d'un débat sur trente ans (1728-1758). La question des forces vives*, cit., pp. 1-4; Id., *Le* De Viribus Vivis *de R. Boscovich ou de la Vertu des Querelles de Mot*, cit., pp. 3-4; C. Iltis, *D'Alembert and the* Vis Viva *Controversy*, cit., p. 138.

[24] Al contrario di quanto argomentano L. Indorato e P. Nastasi (*Boscovich and the* Vis Viva *Controversy*, cit., pp. 169-182, in particolare pp. 178, 181), il punto non pare dunque essere il *significato fisico* delle due nozioni, bensì il grado di adeguatezza ai fenomeni.

ti». Ciò che conta è unicamente l'azione di *potenze* che vengono all'*atto* agendo in maniera continua nel tempo sui corpi, cioè producendo in essi un cambiamento di velocità. La 'generazione della velocità' diviene così l'elemento essenziale della dinamica boscovichiana[25].

È forse questo uno dei più pregnanti tentativi boscovichiani di far convergere e aggiornare la tradizione gesuitica della *physica generalis* con i problemi via via emergenti nella 'nuova' filosofia matematica della natura[26]. Così, Boscovich si preoccupa di distinguere – utilizzando «anche in questo caso i termini degli scolastici, qui sommamente appropriati» (n. 11) – fra una velocità *in actu primo* e una velocità *in actu secundo*. Nella velocità in atto secondo si trovano compendiate la concezione galileiana della velocità e la cartesiana quantità di moto: da una parte, infatti, la velocità è «una certa relazione tra lo spazio che viene percorso e il tempo in cui esso viene percorso: e il suo concetto non comporta nient'altro che tempo, spazio e una qualche relazione fra loro», inoltre «si definisce tanto più grande quanto più spazio viene percorso in un medesimo tempo con moto uniforme, e quanto meno tempo si spende nel percorrere un medesimo spazio, e di conseguenza è come uno spazio diviso per un tempo»; d'altra parte, «a questa velocità, nelle particelle singole di materia corrisponde una quantità del moto eseguito in un dato tempo da una medesima particella […]. Dunque, nell'intero corpo la quantità di moto è come la somma delle velocità di tutte le particelle, cioè equivale alla velocità moltiplicata per la massa» (n. 11).

La velocità in atto primo, invece, è la «disposizione» (*determinatio*) di un corpo ad assumere una velocità in atto secondo, ovvero «a percorrere un determinato spazio in un tempo dato». Essa coincide con l'inerzia di un corpo «determinata da disposizioni precedenti, cioè o da un primo stato in cui il Creatore ha posto quella materia mentre la stava creando, o dall'azione di potenze che vi hanno agito in passato» (n. 12). Si confronti questa definizione con la caratterizzazione della *vis inertiae* nell'*Optice* di Newton (Quaestio 23):

> La *Forza d'inerzia* [Vis inertiae] è un principio passivo per il quale i corpi persistono nel loro moto o nella loro quiete, e ricevono il moto in proporzione alla forza che lo imprime, e oppongono resistenza nella misura in cui è opposta loro resistenza. Da questo principio soltanto non vi sarebbe mai stato alcun moto nel mondo. È stato necessario qualche altro principio per mettere i corpi in moto; e ora che sono in moto, qualche altro principio è necessario per conservare il moto […].

---

[25] Si veda su ciò I. Martinović, *Boscovich on the Problem of* Generatio Velocitatis*: Genesis and Methodological Implications*, in *R.J. Boscovich. Vita e attività scientifica – His Life and Scientific Work*, cit., pp. 59-79.

[26] Per una più ampia prospettiva sull'opera di Boscovich in questo senso vedi U. Baldini, *Boscovich e la tradizione gesuitica in filosofia naturale: continuità e cambiamento*, cit.

> Vedendo perciò che i vari tipi di moto che troviamo nel mondo è in continua diminuzione, è necessario che qualcosa lo possa conservare e incrementare [*conservari & recrescere*], sicché ricorriamo a principi attivi [*ad actuosa aliqua principia*], quali del resto sono la *causa della gravità* […] e la causa della *fermentazione* […]. Infatti, troviamo pochissimo altro moto nel mondo oltre a quello che manifestamente sorge per effetto di questi principi attivi o per un comando della *volontà* [*imperio* voluntatis]. Ben vedute e considerate tutte queste cose, mi pare assai verosimile [*simillimum veri*] che in principio Dio abbia creato la materia affinché le sue particelle primigenie, dalle quali di lì in poi sarebbe sorta l'intera natura corporea, solide, resistenti, dure, impenetrabili, inerti e mobili […]. Mi pare inoltre che quelle particelle primigenie non solo abbiano in sé una forza d'inerzia e quelle *leggi passive* del moto che da tale forza necessariamente sorgono; ma anche che siano poste continuamente in *moto* da certi *principi attivi*, e cioè dalla gravità, dalla causa della fermentazione e da quella della coesione dei corpi.[27]

2.2. *Il* De viribus vivis *come 'Abbozzo di sistema' e la curva boscovichiana*

Vi è, agli occhi di Boscovich, un importante punto di convergenza fra la tradizione scolastica di cui la *physica generalis* gesuitica era impregnata e la dottrina newtoniana. Come per la scolastica, lo stato di moto delle particelle che formano l'universo viene legato a una forza o potenza attiva e interveniente nel mondo.

---

[27] Citiamo dalla prima edizione latina: I. Newton, *Optice: Sive De Reflexionibus, Refractionibus, Inflexionibus & Coloribus Lucis. Libri Tres*, Londinii: Impensis Sam. Smith & Benj. Walford, Regiae Societatis Typograph. ad Insignia Principis in Coemeterio D. Pauli, 1706, Quaestio 23, pp. 341-344 *passim*; corsivo nel testo. Si veda per raffronto anche l'originale inglese, *Opticks: Or, A treatise of the Reflections, Refractions, Inflexions and Colours of Light. Also Two treatises of the Species and Magnitude of Curvilinear Figures*, London: Printed for William Innys at the West-End of St. Paul's, 1730, Query 31, pp. 372-376 *passim*. Forse a partire dalla sua prima pubblicazione (1749), Boscovich cominciò a utilizzare l'edizione patavina contenente anche le *Lectiones opticae*: *Isaaci Newtoni Optices libri tres; accedunt ejusdem Lectiones opticae, et opuscula omnia ad lucem & colores pertinentia: sumpta ex transactionibus philosopicis*, Patavii, Typis Seminarii. MDCCXLIX. Apud Joannem Manfré. Egli dichiarava di possedere tale edizione nell'elenco dei libri raccomandati per l'acquisto all'Università di Pavia («Opticam cum additamentis Patavinam habeo». L'elenco, risalente al 1763-64, è conservato presso l'Archivio di Stato di Milano, Autografi, 115; per la trascrizione e un commento vedi M.G. Lugaresi, *Boscovich in Pavia and his relationship with Giovanni Antonio Lecchi*, in *Boscovich and His Times. Contributions of the Pavia 2011 International Conference*, a cura di F. Bevilacqua, P. Contardini, L. Guzzardi, University of Pavia Press, 2014).

D'altra parte, per Newton esso è legato a un atto di volizione dell'unico vero Dio, Signore della natura («*Pantokrator*», come lo chiama nello Scolio generale ai *Principia*). Solo dal punto di vista cinematico quiete e moto uniforme si equivalgono. La creazione, per altro, consiste nell'atto deliberato con cui Dio pone in movimento la materia, ovvero nella «produzione immediata della velocità» da parte del creatore[28]. La dissertazione sulle forze vive, dunque, non poteva terminare con la raggiunta consapevolezza tra la misura degli effetti nel tempo (mv) e la misura degli effetti nello spazio (mv^2) . Doveva invece proseguire (dal n. 40) con un'indagine sulla natura della forza che induce il cambiamento di velocità nei corpi.

Boscovich poteva valersi di due concezioni concorrenti, l'azione per contatto cartesiana e la newtoniana *actio in distans*, la cui disamina doveva farlo giungere alla prima esposizione di quella 'legge unica delle forze esistenti in natura', che avrebbe ripreso e affinato più volte nell'arco del decennio successivo, sino a darne trattazione sistematica nella *Theoria philosophiae naturalis* (1758 e 1763). Nel *De viribus vivis* Boscovich non tarda a chiarire (n. 41) che la sua congettura circa la generazione del moto concorda nell'essenziale con la concezione newtoniana ed è anzi ancor più radicale:

> Se si prende in considerazione l'analogia e la semplicità della natura, nessuna variazione di moto accade per urto, ma sempre attraverso forze agenti a una qualche distanza – si tratti di forze insite nella natura stessa dei corpi o dipendenti da una qualche libera legge dell'artefice supremo, il quale a proprio arbitrio abbia potuto non solo creare o meno questa materia, ma anche crearla con queste o quelle caratteristiche e leggi, non essendovi alcuna forza infusa che richieda alla natura dei corpi altro se non la più elevata sottomissione ai divini comandi del loro Creatore. A nostro giudizio, perciò, da quei principi deriva che non capita mai che i corpi e le loro particelle si tocchino in modo che non rimangano spazi intermedi a separarli; invece, ci sono singole particelle di materia dotate di certe forze, che ad alcune distanze sono attrattive e ad altre repulsive, in modo tale che, infine, diminuite le distanze all'infinito, la forza repulsiva si accresca all'infinito, non superabile se non

[28] Boscovich, *De viribus vivis*, n. 40. Tale accenno indica che la teologia naturale boscovichiana è tutt'altro che da sottovalutare nel contesto della sua articolata filosofia della natura; d'altra parte, la giustificazione dell'intervento volontario di Dio nel mondo offrirà uno dei principali banchi di prova della teoria delle forze di Boscovich. Si veda l'Appendice «*Ad Metaphysicam pertinens. De Anima, & de Deo*», in R.G. Boscovich, *Philosophiae naturalis theoria redacta ad unicam legem virium in natura existentium*, prostat Viennae Austriae, in officina libraria Kaliwodiana, 1758, nn. dxx-dlix, pp. 280-295 (per i passi corrispondenti nella seconda edizione vedi *Theoria philosophiae naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium*, cit., nn. 525-558, pp. 248-263).

da una forza infinita che solo Dio stesso, Ottimo Massimo, può esercitare; dunque, egli solo può compenetrare i corpi e privarli dell'estensione.

L'idea di Boscovich è fare della cartesiana azione per contatto nient'altro che un'illusione dei sensi (n. 42): il contatto rappresenta, in realtà, un'azione a distanza infinitesima e non coglibile coll'esperienza. Non si tratta di una concezione che poggia su un fondamento empirico; sulla scorta di alcuni esempi e analogie, Boscovich sostiene anzi nello stesso paragrafo che «né la verità, né la falsità» di tale congettura «si ricavano da esperimenti siffatti o dalle testimonianze dei sensi, e che nei sensi stessi non può esservi alcun fondamento per l'una o per l'altra». La ragione – come spiegano i paragrafi successivi – è invece metafisica: «In natura nulla avviene per salto […]. Non v'è esperimento che provi la falsità di questo principio: moltissimi, per quanto è dato apprendere attraverso i sensi, ci conducono manifestamente a esso»; e l'urto della concezione cartesiana – il contatto fra corpi – è per Boscovich il paradigma di un'azione che avviene *per salto*, violando il principio che «nessuna velocità va perduta o sorge in un istante, né da un grado di velocità si passa a un altro se non attraversando tutti i gradi intermedi» (n. 45). Il punto è ancora la generazione e il mutamento della velocità, che avvengono in maniera continua: «se questo principio è vero, sarà anche vero che la variazione dei moti non avviene mai per urto» (n. 46).

Come evitare che vi sia generazione istantanea di velocità – ovvero che nella natura si presenti un salto? La risposta di Boscovich è: ammettendo una forza repulsiva che agisce a distanze infinitesime. Per introdurre tale idea, egli torna a utilizzare uno schema geometrico, come nella figura qui di seguito.

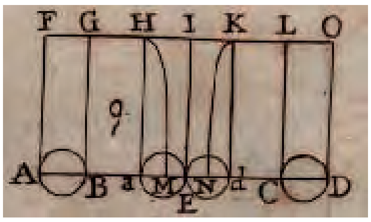


Figura 3. Dal *De viribus vivis* (Fig. 9): la spiegazione dell'urto.

I cerchi con diametro AB e CD rappresentano sfere che si muovono lungo l'asse AD. Le perpendicolari AF e DO rappresentano le velocità (uguali per ipotesi) con cui le sfere rispettivamente si muovono. Ipotizziamo che le sfere si urtino in E: per la fisica leibniziana, argomenta Boscovich, è sufficiente eliminare dalla natura i corpi assolutamente rigidi per impedire che vi siano mutamenti istantanei di velocità. Infatti, una volta entrate in contatto le sfere, le loro parti interne e le estremità che non si toccano (A e D) «continuano a muoversi con moto sempre ritardato, finché tutta la loro velocità si estingue in M e N, con la forma ora cambiata e i diametri accorciati. Se le sfere saranno molli, rimarranno in tale stato; se elastiche, le singole particelle rimbalzeranno all'indietro col medesimo grado di velocità». Sicché le velocità delle parti interne e di A e D saranno espresse «dalle ordinate fino alla retta FO sempre uguali in H e K [ovvero aH e dK], oppure dalle ordinate continuamente decrescenti di certe linee HM, KN».

In realtà, questo argomento non è in generale sufficiente a impedire 'salti' in natura. Esso, infatti, non vale per i punti B e C delle due sfere che entrano in contatto in E: a prescindere che si tratti di sfere elastiche o deformabili, essi, in quanto rappresentano particelle materiali, sono impenetrabili; dunque, «le velocità delle particelle B e C […] si estinguerebbero del tutto istantaneamente, e tali punti o superfici rimarranno in quiete per tutto il tempo continuo che a e d impiegano per raggiungere M e N». Sicché «le velocità dei punti B e C verranno espresse dapprima dalle ordinate alla retta FO fino a I; poi in I si interrompe ogni espressione per mezzo delle ordinate, e all'ordinata EI succederà un punto». In altre parole, la velocità si annullerebbe istantaneamente dando così luogo a un salto. A parere di Boscovich, non rimane che ammettere che la velocità decresca in maniera continua via via che le sfere si avvicinano per azione di «una qualche forza repulsiva» (*vis aliqua repulsiva*) che agisce solo a brevissima distanza e che continua a crescere «*in minimis distantiis* […] oltre ogni limite» (47), ove il superlativo *minimis* è da prendere alla lettera: si tratta delle distanze "più piccole di tutte", cioè di distanze infinitesime. Analogamente, la legge di continuità impone che la *stessa* forza repulsiva, che agisce a distanze piccolissime e la cui intensità cresce illimitatamente a distanze infinitesime, vada scemando al crescere della distanza «tanto da sfuggire a ogni senso» per poi cambiare segno e mutarsi in attrattiva. Forza attrattiva e forza repulsiva non sono dunque che facce di una stessa medaglia.

Boscovich giungeva così alla prima espressione della sua curva, accontentandosi nel *De viribus vivis* d'illustrarne pochi aspetti, ma intuendone già le molteplici potenzialità (n. 49). Ed è ancora Newton il punto di riferimento per la sua analisi.

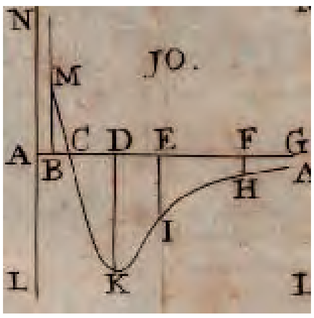


Figura 4. Dal *De viribus vivis* (fig. 10). L'inversione delle forze rispetto alla distanza.

> In tutti i corpi Newton scoprì una gravità reciproca, che in ogni particella riconobbe essere decrescente secondo l'inverso del quadrato delle distanze; quanto a noi, riconosciamo le repulsioni alle distanze minime di cui abbiamo parlato sopra, le quali crescono all'infinito al ridursi delle distanze. Se ci si dovesse occupare solo delle forze agenti sulle particelle dei corpi, le si potrebbe presentare come segue. Segmenti della retta AG (Figura 10) rappresentino le distanze reciproche di due particelle, e si abbia una certa curva $MCKIH$ di natura tale da avere per asintoto la retta NL perpendicolare all'asse AG, dal quale si allontani incessantemente; tale curva intersechi l'asse in un qualche punto C, dal quale si allontani fino a K, inverta quindi la direzione e, a partire da un qualche punto I, abbia per asintoto un'iperbole del secondo ordine [più precisamente una curva iperbolica], il cui andamento sia costante rispetto alle ascisse e al quadrato delle ordinate; cioè, in I l'arco si avvicini a tale iperbole oltre il limite sensibile, continuando poi ad avvicinarglisi sempre di più; analogamente la distanza del punto I dalla retta NL sia piccolissima [qui c'è forse un errore di Boscovich: la retta dovrebbe essere l'asse AG]. Le ordinate BM della curva rivolte all'altro settore esprimano la forza repulsiva; quelle rivolte al settore opposto – per esempio DK, EI, FH –, che si sono trasformate in negative, esprimeranno le forze attrattive. Inoltre, facciamo uso del nome di forze attrattive e repulsive non perché supponiamo una qualche azione fisica di una particella su un'altra, poste queste a distanza, ma per esprimere con tali vocaboli quella disposizione la quale o è insita nella libera legge di Dio, o nella natura ed essenza delle particelle dei corpi, o in una qualche qualità per la quale le particelle tendono vicendevolmente ad avvicinarsi o ad allontanarsi fra loro – qualunque sia fra queste la causa fisica di tale tendenza. Non v'è dubbio che questa curva soddisferà sia alla gravità newtoniana sia alla nostra forza repulsiva. (n. 50)

Se a grandi distanze l'andamento della curva approssima la gravità newtoniana (vale cioè la legge dell'inverso del quadrato della distanza), il suo comportamento alle piccole e piccolissime distanze, dove la forza di repulsione cresce asintoticamente, spiega pure quelle che, nella prospettiva "leibniziana" esaminata nel paragrafo 46, apparivano invece come qualità primarie della materia, ovvero l'impenetrabilità e l'estensione dei corpi (n. 52).

Tuttavia, quello dedotto «*recta ratiocinatione*» (n. 47) muovendo dal principio di continuità, e «*per analogiam naturae*» (n. 49) con l'attrazione newtoniana (n. 50), è solo uno schema generale. A distanze intermedie, infatti, subentrano «altri effetti chimici fra altri corpuscoli» (n. 54) e a «altri e più complicati fenomeni» (n. 56) che danno luogo a un alternarsi di attrazioni e repulsioni, raffigurate in un grafico assai simile a quello che sarebbe stato impiegato nella *Theoria* e che nel *De viribus vivis* trova una prima applicazione in riferimento ai processi nei fluidi (in primo luogo nell'acqua, n. 54), alla coesione dei corpi solidi (n. 57), alla costituzione particellare della materia (nn. 59-61), ai fenomeni magnetici (nn. 62-66).

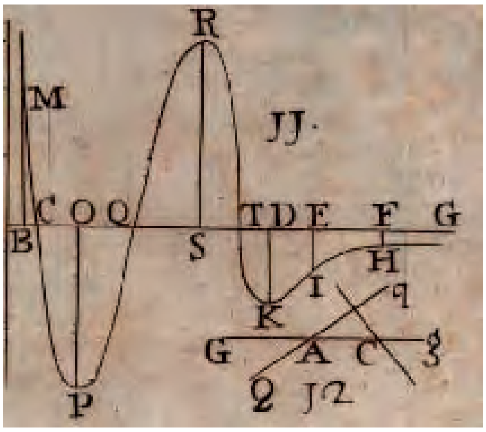


Figura 5. Dalla figura 11 del *De viribus vivis*. La prima versione della curva delle forze.

Significativamente, veniva pure anticipato il problema di trovare l'espressione analitica della curva (nn. 56-57), che Boscovich avrebbe affrontato nel *De lege virium in natura existentium*, e quello dell'estensione discreta dello spazio fisico (n. 61), trattato in un supplemento al poema 'newtoniano' di Benedetto Stay, poi inserito nella *Theoria* [29]. Ma è forse l'ultimo paragrafo il luogo in cui più emerge il senso di unità del programma di ricerca boscovichiano. «Attraverso queste curve tutti i generi di forze vengono riportati [*reducuntur*] a un modo d'agire unico e sempre in accordo con se stesso [*sibi semper constantem*]» (n. 67); poco più di dieci anni dopo, l'unicità della curva sarebbe divenuta il nucleo concettuale di una *Teoria di filosofia naturale* che veniva «*redacta ad unicam legem virium in natura existentium*».

---

[29] Per il tentativo di soluzione analitica vedi oltre, § 5.2 di questa Introduzione. La teoria dello spazio di Boscovich è presentata nei Supplementi VI e VII al primo volume del poema "newtoniano" di Benedetto Stay, *Philosophiae recentioris […] Versibus traditae Libri X*, cum adnotationibus, et Supplementis P. Rogerii Josephi Boscovich, Tomus I, Romae, Palearini, 1755. Essi corrispondono con poche variazioni ai supplementi III e IV della prima edizione (1758) della *Theoria* (pp. 306-319), ripresi nella *Editio veneta* (1763) come supplementi I e II (pp. 264-276); il titolo dei supplementi è, rispettivamente, rispettivamente «De Spatio, ac Tempore» e «De Spatio, & Tempore, ut a nobis cognoscuntur».

3. De materiae divisibilitate *(1748/1757)*

3.1. *La genesi dell'opera*

Chiusa la dissertazione sulle forze vive, Boscovich avrebbe affrontato anzitutto il problema della divisibilità della materia, accennato nel paragrafo 61 del *De viribus vivis*. L'opera a ciò dedicata, *De materiae divisibilitate et principiis corporum*, avrebbe visto la luce solo nel 1757 sulle lucchesi «Memorie sopra la Fisica e Istoria Naturale» (tomo IV); la sua stesura, però, risaliva a quasi dieci anni prima. La circostanza si trova accennata nel sottotitolo del contributo («*conscripta iam ab anno 1748. et nunc primo edita*») e viene spiegata nella Premessa, ove Boscovich offre pure un quadro d'insieme del suo percorso:

> La composizione di questa dissertazione risale all'anno 1748, quando mi venne chiesto quale fosse la mia opinione circa la divisibilità all'infinito; proprio essa mi ha fornito l'occasione per illustrare ed estendere la mia teoria di fisica generale, che avevo presentato nel 1745 nella dissertazione *De viribus vivis*. Realizzai ciò in quello stesso anno nella dissertazione *De lumine* che poi pubblicai [presso Antonio de Rossi, Roma 1748]. Della medesima teoria trattai in seguito nella dissertazione *De lege continuitatis*, pubblicata nel 1754, ove illustrai il principale fondamento della teoria stessa, cioè l'esclusione del salto, nonché nella dissertazione *De lege virium in natura existentium* (1755), in cui esibii la natura e dimostrai le proprietà di una curva esprimente quelle forze che ritengo esistano in natura […]. Essendomi stato chiesto, acconsento che questa dissertazione venga qui stampata così com'è stata redatta, senza che sia stata mai nemmeno copiata da quello stesso scritto autografo. (*De materiae divisibilitate*, pp. 131-132.)

Avendo già anticipato non pochi contenuti nel corso della presentazione del *De viribus vivis*, non daremo qui un'illustrazione altrettanto dettagliata di questo e degli altri trattati brevi pubblicati nel presente volume. Ci limiteremo, invece, a un succinto esame dei temi principali e al loro inquadramento storico-scientifico.

Nel triennio successivo alla pubblicazione del *De viribus vivis* Boscovich aveva dovuto far fronte alle precoci critiche (dirette o indirette) mosse al suo 'sistema' entro la stessa Compagnia di Gesù[30]. Stando alla Premessa del *De materiae divisibilitate*, furono queste a fornire l'occasione dell'opera. In particolare, in una lettera al fratello Natale datata 14 settembre 1748, Ruggiero precisava che, tornato da un soggiorno a Camaldoli (presumibilmente svoltosi tra la fine del dicembre 1747 e l'inizio

---

[30] Vedi U. Baldini, *The reception of a theory: a provisional syllabus of Boscovich Literature, 1746-1800*, in *The Jesuits II. Cultures, Sciences, and the Arts, 1540-1773*, a cura di J.W. O'Malley *et a.*, University of Toronto Press, Toronto, 2006, in particolare pp. 407-409, 432-433.

del gennaio 1748), aveva dovuto rispondere ad alcuni quesiti postigli forse da un confratello circa la natura della materia:

> Appena tornato fui tanto pressato a rispondere ad una lettera di uno, che stava qui [a Roma], e voleva in una sua raccolta alcune cose di mio, che non potei esentarmene. *L'interrogazione era su alcune proposizioni della divisibilità della materia all'infinito*. Nel rispondere, entrai ne' miei punti indivisibili: non fui più padrone di me, e andai di botto in tu[tta] la teoria, su cui avevo pensato per più anni […]. La lettera passò 6. fogli, ma come molte cose erano strozzate, e non vi erano che pochissime applicazioni a cose fisiche, la interpollai per aggiungere, indi mi feci da capo, e ristesala, la ripigliai un'altra volta, e messa in pulito passava i 9. fogli. Non vi era una figura, e volli far delle note per ispiegarmi meglio. In queste viddi l'incredibile fecondità di questo campo. Mi sbrigai dalla risposta con poche pagine, e ideai tutta l'opera. Viddi, che conveniva premettere molto su i principj necessari a ben discorrere in Fisica, e che vi era frequente bisogno di varie proposizioni di Meccanica. Mi misi a digerirle a modo mio, e presa la materia dalle più semplici definizioni tirai inanzi formandone gli elementi, che ho finito di mettere in pulito, dove ho varie e belle importanti scoperte. Tirai avanti per un pezzo il rimanente faticando fino a Pasqua veramente come una bestia.[31]

Il riferimento al *De materiae divisibilitate* sembra confermato, oltre che dal tema (appunto la «divisibilità della materia all'infinito» e i punti indivisibili), da alcune caratteristiche dell'opera, che presenta un numero non elevatissimo di «applicazioni a cose fisiche» ed è pressoché priva di figure. Se esse costituivano l'ossatura del *De viribus vivis*, fornendo non solo un ausilio bensì un vero e proprio strumento d'indagine, nel *De materiae divisibilitate* Boscovich dichiara che se ne servirà solo «ove sarà necessario» e senza discuterle analiticamente; dopo averle formate «con la sola immaginazione», l'argomentazione dovrà proseguire «a parole, a beneficio di coloro che sono indispettiti dall'incessante consultazione di figure geometriche» (n. 1). Ma c'è di più. Nel corso di due precedenti lettere a Natale (23 aprile e 21 agosto 1748), Ruggiero aveva già fatto riferimento al soggiorno camaldolese, dove stava stendendo un'opera «più voluminosa»[32], che risultava così articolata:

---

[31] Ruggiero a Natale Boscovich, 14 settembre 1748, ora in *ENc*, III, pp. 167-168. Corsivo nostro.

[32] «Il mio nuovo sistema in grandissima parte sta in questa dissetaz:[ione], che si stampa ora [ovvero il *De lumine*]. L'o:[pe]ra più voluminosa sarà il lavoro di Camaldoli». Ruggiero a Natale Boscovich, 21 agosto 1748, in *ENc*, III/1, p. 163.

> La cosa va più in lungo di quello pensavo. Oramai temo non sia per essere troppo grosso il tomo, e non convenga farne due. La Mechanica colle note di essa, che deve essere la seconda parte, già terminata, e ripulita a Camaldoli, credo che passerà ducento pagine in quarto di carattere andante. Questa la mandai al P. Jacquier, il quale mi dice, che mi farà un gran credito, e credo non mi aduli. Conterrà tutta l'opera 4. parti cariche di geometria profonda, e una prefazione, in cui vi sarà un'idea del tutto per que', che non sono geometri. La prima parte sarà sulle regole di filosofare, o principj parte metafisici, parte geometrici dove vi saranno molte cose sublimi sull'infinito, e sui metodi degli infinitamente piccoli, la seconda conterrà una mecanica ricavata tutta fino dalle più semplici definizioni con un metodo tutto mio, con cui sono anche andato più in là, di quello abbia fatto niun'altro col metodo geometrico. La terza la costituzione delle minime parti della materia, che io pretendo provare positivamente, non abbia estensione continua, ma essere formata di punti indivisibili sparsi per uno spazio divisibile all'infinito. Determino le forze, di cui sono proveduti questi punti, e benche sieno tutti simili, dimostro con rigore geometrico l'immensa varietà che si trova fra i diversi aggregati di essi, nata dalla sola diversa disposizione de' medesimi. Qui si contiene tutto il fondamento della quarta parte, in cui dimostro come di particelle così composte debbano formarsi masse, che abbiano le stesse proprietà generali de' nostri corpi, e applico anche la teoria a mille cose particolari, che discendono da se medesime. La prefazione poi contien l'istoria delle diverse ipotesi, e sette de' filosofi, l'origine delle migliori scoperte, come dove si è battuta la strada, che io batto da pertutto, ivi solo si sia fatto del progresso, e abbandonata quella non si sia scoperto altro, e da un dettaglio delle 4 parti seguenti. Voi vedete che l'opera è di machina. Sul principio pensai di fare una semplice risposta ad una lettera, indi feci una dissertazione di 8 fogli, poi impinguai questa, e poi mi ingolfai in tutta quest'opera […]. Sono stato a Camaldoli di Carnevale, e per queste feste, da che ho presa quest'opera, e la sù ho applicato più che qui.[33]

Se il 1745 è l'anno della prima formulazione del 'sistema', il 1748 appare non meno importante per Boscovich. In quello stesso anno era stata pubblicata, in due parti distinte (e discusse pubblicamente presso il Collegio Romano, secondo l'uso gesuitico), una dissertazione sulla luce. Nel *De lumine dissertationis pars prima* Boscovich esponeva «le principali proprietà della luce, e abbiamo pure indagato un poco più precisamente quelle attinenti la propagazione diretta, elencando le restanti, che riguardavano la rifrazione, la riflessione e la diffrazione, sì da occuparci di quella straordinaria rifrazione esibita dal cristallo d'Islanda». La *Pars secunda*, invece, doveva essere dedicata alle «cause meccaniche di tutte queste proprietà» sulla scorta

---

[33] Ruggiero a Natale Boscovich, 23 aprile 1748, in *ENc*, III/1, pp. 155-156.

della «nostra stessa teoria delle forze esistenti in natura, dalle quali appunto deriviamo l'intera meccanica e da cui, a nostro parere, dipendono tutte le proprietà meccaniche dei corpi, sia generali sia particolari»[34]. L'ineliminabilità della componente matematico-geometrica dalla teoria, che andava strutturandosi proprio in quei mesi, veniva chiarita nella già citata lettera del 14 settembre 1748 al fratello Natale: «Nella seconda [parte della dissertazione *De lumine*] vi è abbozzata tutta la mia teoria da principio. Vi sarà nell'opera grande poco più di sostanza in materia puramente fisica, benché vi sarà assai più, di Metafisica, di Geometria, e di Calcolo»[35].

Tuttavia, sulla scorta dei documenti sopra riportati, sembra sensato attribuire al *De materiae divisibilitate* il ruolo più importante. Quella che avrebbe dovuto essere semplicemente una risposta in forma epistolare a un problema specifico aveva finito per costituire il primo nucleo in senso proprio di un'opera amplissima e ambiziosa, su cui Boscovich nutriva alte aspettative («L'opera che ho per le mani», ribadiva nella lettera a Natale, «credo, che raddoppierò a cento doppi quel poco di credito, che ho per il mondo letterario»). Ciò è confermato da un'ulteriore lettera al fratello Bartolomeo, datata 16 marzo 1748:

> Io son fatto così, lavoro per impeto, e poi rileggendo non so far nulla di meglio. Sono come gli Improvvisatori. Finito quel bollore e messisi a tavolino, molte volte non sono buono a nulla […]. Il mio mondo nuovo va avanti a passi più lenti si perche è mancato quel bollore, si perche sono trovato in alcuni spinai, ne' quali non avevo intenzione di entrare cioe in una Metafisica di Geometria per dare un metodo sicuro e accurato dell'uso dell'infinito e infinitamente piccoli e esporre nel più vivo suo lume i misteri, e gli assurdi almeno apparenti, che si incontrano nell'infinito assoluto se pure non è possibile. Questa, che cominciai con uno scolio delle leggi della continuità, diviene una parte intera, e già ne ho 6 fogli scritti, ed altri 6 disposti, ideati, e digeriti pienamente.[36]

Anche qui, nel riferimento a quello «scolio delle leggi della continuità» di pochi fogli (che avrebbe presumibilmente finito per costituire l'ossatura del *De materiae divisibilitate*), emerge l'idea di un progetto coerente e unitario che si va concretizzando come vero e proprio «mondo nuovo», un inedito *sistema mundi*. Per questo motivo il *De materiae divisibilitate* doveva vedere la luce solo nel 1757 e «su richiesta». Non era un'opera a sé stante, bensì il germe di un lavoro assai più esteso in cui geometria, meccanica e applicazioni fisiche di vario genere sarebbero risultate essenziali; in cui, inoltre, le tesi accennate nella lettera del 23 aprile 1748 a Natale Bo-

---

[34] R.G. Boscovich, *Dissertatio de Lumine*, de Rossi, Roma 1749, Pars secunda, n. 1 (l'edizione del 1749 contiene entrambe le dissertazioni).

[35] Ruggiero a Natale Boscovich, 14 settembre 1748, in *ENc*, III/1, p. 167.

[36] Ruggiero a Bartolomeo Boscovich, 16 Marzo 1748, in *ENc*, II, a cura di E. Proverbio, pp. 30-31. L'espressione chiave qui è ovviamente «mondo nuovo».

scovich (per esempio, quella sull'infinita divisibilità dello spazio) sarebbero state riprese, precisate e parzialmente riviste, come ancora la Premessa al *De materiae divisibilitate* (p. 132) lascia intuire: «ci sono certe cose che rispecchiano quanto allora pensavo, da cui però in seguito mi discostai, cambiando idea».

3.2. *La «metafisica di geometria» e il problema dell'infinito e degli infinitesimi*

La «metafisica di geometria», d'altra parte, guida i due temi principali dell'opera, strettamente intrecciati l'un l'altro: la natura dei «punti indivisibili» (n. 12) e il problema dell'infinita divisibilità della materia (n. 77). I punti indivisibili materiali sono qualificati come «singoli punti matematici di spazio, privi di ogni estensione e dimensione» (n. 12). Essi sono simili ai punti matematici propriamente detti «per quanto attiene all'estensione, e se ne differenziano in quanto sono reali, possono essere dotati di moto reale e hanno proprietà reali» (n. 13). Un'importante analogia è poi la seguente: sia i punti matematici sia i punti materiali «muovendosi di moto continuo, generano una linea che non è composta [*componitur*] da punti […], bensì delimitata [*terminatur*]» da essi. Per altro, nota Boscovich, sta qui la chiave per risolvere il paradosso zenoniano dell'Achille, poiché «per un qualunque moto comunque piccolo ce n'è un altro ancora più piccolo, che avverrebbe in minor tempo» (ma si noti che l'argomento risale a Aristotele, *Phys* VI, 232 a 23-b 20)[37]. Tra i due tipi di punti vi è però anche una significativa differenza, enunciata nel cruciale paragrafo 18: solo i punti materiali sono dotati di inerzia (che, come per Newton, è una proprietà passiva della materia: è *determinatio* a mantenere il proprio stato) e di una forza alternativamente attrattiva e repulsiva, che si esplica secondo la curva delineata nella dissertazione del 1745.

Quanto alla divisibilità della materia, il nucleo dell'argomentazione è ridotto a due soli paragrafi (nn. 77-78), che fanno seguito a un'articolata presentazione dei singolari caratteri della curva. In conformità con l'orientamento generale della Compagnia in matematica[38], Boscovich era un convinto fautore dell'infinita divisibilità dello spazio e guardava con sospetto ad applicazioni sbrigative dei metodi infinitesimali, proponendone un impiego alquanto cauto nella dissertazione *De Natura, et usu Infinitorum, et Infinite parvorum* (1741). Dichiarando inaccettabile il «metodo degli indivisibili» di Cavalieri, qui Boscovich asseriva anche che l'ipotesi dell'infinita divisibilità dello spazio «è stata provata [*evincitur*] da così tante e così convincenti dimostrazioni che nessun geometra può aver ragioni per dubitarne» (*De*

[37] Il paradosso dell'Achille verrà poi ripreso nel *De continuitatis lege*, nn. 43-52.

[38] Vedi in proposito G. Cosentino, *Le matematiche nella Ratio Studiorum della Compagnia di Gesù*, in «Miscellanea Storica Ligure», 2, 1970, pp. 171-213; L. Pepe, *Matematica e fisica nei collegi del Settecento*, in «Studi Settecenteschi», 18, 1998, pp. 407-420; Idem, *Rinascita di una scienza: matematica e matematici in Italia (1715-1814)*, Clueb, Bologna, 2007.

Natura, et usu Infinitorum, n. 2). All'opposto – avrebbe sottolineato nel *De materiae divisibilitate* (n. 77) – «se dalla divisibilità di una quantità continua passiamo alla divisibilità reale della materia, emergerà [*supererunt*] un numero notevolissimo di assurdità o di cose completamente inaccessibili a mente umana». In particolare, ciò avrebbe portato ad ammettere l'infinito attuale, la cui impossibilità logica, in conformità con l'insegnamento aristotelico contenuto nel III libro della *Fisica*, veniva argomentata appunto nel *De Natura, et usu Infinitorum* (nn. 10-11)[39]. La congettura dei punti materiali consentiva, stando a Boscovich, di eliminare queste difficoltà sostituendo all'immagine di un numero di parti estese comprese nel finito l'immagine di un'infinita *possibilità* di inserzione di punti materiali (ma inestesi). In altri termini, 'infinita divisibilità' di un intervallo fra due punti significa che «fra di essi si potranno inserire quanti altri punti si vogliano, i quali, tuttavia, se presi insieme con i loro intervalli saranno sempre in numero finito e lasceranno il posto per inserirne altri illimitatamente» (n. 78).

Le premesse di questa congettura si trovano ancora nel *De Natura, et usu Infinitorum* (n. 12), dove Boscovich mostrava come l'infinitamente grande e gli infinitamente piccoli – infinito e infinitesimi – implicassero unicamente l'infinito potenziale: non esistono quantità infinitesime «fisse» [*constantes*], bensì quantità che si immaginano diminuire oltre qualsiasi limite; analogamente, è infinita una quantità che si immagina aumentare illimitatamente, ma l'infinito stesso non è una quantità. Così, suggerisce Boscovich nel *De materiae divisibilitate* (n. 78), «avremo sempre un numero finito di intervalli e di punti, che si potrà ovviamente accrescere a piacere, in modo tale, però, da non superare mai il limite di un finito attuale, e non vi sarà alcun infinito in sé – sia esso in estensione o in numero –, ma solo per la nostra mente, la quale, astraendo dal limite delle grandezze plasmerà l'idea di infinito o piuttosto di indefinito»[40].

Argomentazioni analoghe saranno variamente riprese nella *Theoria* e in comunicazioni private. Così, per esempio, nella lunga lettera indirizzata nel 1762 al patrizio lucchese Giovan Stefano Conti:

> Dovunque l'infinito, o come io in somiglianti occasioni lo chiamo, serie di termini finiti continuata in infinito, entra per qualunque verso si

[39] Circa il peso relativo della fisica aristotelica nella *Ratio Studiorum* della Compagnia, soprattutto in riferimento al problema dell'infinito e degli infinitesimi, vedi F.A. Homann, *On Boscovich's* De Natura et usu infinitorum *and Other Mathematical Works*, in *R.J. Boscovich. Vita e attività scientifica – His Life and Scientific Work*, cit., pp. 409-410. La dissertazione *De Natura, et usu Infinitorum, et Infinite parvorum* (Komarek, Roma 1741) è compresa in *ENo*, I.

[40] Così si apre il n. 12 del *De Natura, et usu Infinitorum, et Infinite parvorum*: «Ammettiamo dunque gli infinitamente piccoli e gli infinitamente grandi purché siano indefiniti, cioè in quanto sono da noi concepiti come diminuiti o aumentati oltre qualunque limite».

> sia, la nostra mente troppo limitata, e finita si perde, e le idee nostre son troppo deboli per concepirlo con chiarezza. Perciò questi io li chiamo *misterj dell'infinito*, e li distinguo dagli assurdi, quali ritrovo in una estensione attuale come di linea assolutamente infinita. Gli assurdi mi fanno credere la cosa impossibile; i misteri, le difficoltà di concepire, le nuvole, che offuscano la nostra immaginazione, mi fanno solamente pensare alla debolezza della nostra mente[41].

Si noti, infine, che il concetto di intervallo fra punti è centrale nella concezione boscovichiana. Una delle argomentazioni chiave di Aristotele (*Phys* VI, 231 a 21-b 6) per negare che una linea – ovvero un ente continuo – possa essere composta da punti indivisibili è che gli indivisibili non possono essere in contatto fra loro. Infatti, poiché essi non hanno parti (si ricordi la definizione di punto data da Euclide), dovrebbero essere in contatto ciascuno «come un intero con un intero»; ma per oggetti senza parti – di cui non si può dire, per esempio, che si toccano in questo o in quel punto – ciò significa coincidere[42]. Come si vedrà al paragrafo 6, nel *De materiae divisibilitate* (n. 12) questo argomento di origine aristotelica è utilizzato contro le monadi della tradizione leibniziana, che appunto dovrebbero costituire un continuo. Trasposti sul piano del reale, i punti indivisibili di Boscovich confermano, da una parte, che un continuo non può essere formato da punti; dall'altra parte, essi non sono a contatto gli uni con gli altri, bensì sono mantenuti separati da una forza repulsiva che cresce asintoticamente alle minime distanze, producendo intervalli vuoti fra i punti. La materia è formata da punti, dunque la materia non è continua; la materia non è continua, dunque è formata da indivisibili, che non sono particelle estese bensì punti inestesi. Per Boscovich, concezione discreta della materia e punti indivisibili con assenza di contatto sono due facce di una stessa medaglia.

---

[41] R.G. Boscovich a G.S. Conti, 26 febbraio 1762, in *ENc*, V/1, p. 64

[42] L'argomento aristotelico, senza essere citato esplicitamente, è riconoscibile nel seguente passo del *De materiae divisibilitate* (n. 12): «Che [i punti] siano del tutto incapaci di comporre una quantità continua lo riconosco dalla stessa nozione [di quantità continua] nonché dalla nozione di estensione continua, cosicché non possano assolutamente essere contigui gli uni agli altri, ma fra ogni coppia o vi sia sempre un certo intervallo o – se tale intervallo è nullo – coincidano completamente e si compenetrino». Circa l'argomento di Aristotele vedi D. Bostock, *Space, Time, Matter, and Form. Essays on Aristotle's* Physics, Clarendon Press, Oxford 2006, pp. 160-161. Su un possible uso di Aristotele in funzione anti-leibniziana vedi W. Charlton, «Aristotle's Potential Infinites», in *Aristotle's Physics. A collection of Essays*, ed. by L. Judson, Clarendon Press, Oxford 1991, pp. 131-135.

3.3. *La composizione dei corpi: il confronto con Newton*

Con ciò Boscovich ritiene di aver esaurito «i principali fra gli argomenti […] da cui discende che bisogna preferire questa composizione della materia per punti indivisibili all'estensione continua» (n. 79) e di poter passare a illustrare la costituzione della materia legandovi la curva delle forze. Significativamente, il punto di partenza è offerto da quella concezione corpuscolare *sui generis*, ove i corpi sono sede di principi attivi o forze, che Newton aveva esposto nelle "questioni" che chiudevano l'*Opticks*. Boscovich utilizza ampi stralci tratti dall'edizione latina (*Optice*, 1706), in particolare dalla Quaestio 23 (che corrisponde *grosso modo* alla Query 31 della seconda edizione inglese, 1717-1718)[43].

Nel n. 19 del *De materiae divisibilitate* Boscovich ricorda che, per Newton, «come nell'algebra le quantità negative cominciano laddove le quantità positive svaniscono e si annullano, così in meccanica dove cessa l'attrazione deve subentrare la forza di repulsione [*vis repellens*]»[44]. Tale congettura aveva avuto non poco successo nei circoli newtoniani settecenteschi, profondamente influenzati dalla lettura delle Queries[45]: esempi di attrazione che si muta in repulsione ricorrono negli influentissimi *Mathematical Elements of Natural Philosophy* di Willem Jacob 's Gravesande (1720) e nel *Course of Experimental Philosophy* di John Theophilus Desaguliers (1763), mentre nel 1754 Gowin Knight – un newtoniano formatosi particolarmente sullo studio del magnetismo –, aveva esposto una teoria secondo cui «le proprietà essenziali della materia unitamente ai due principi attivi di attrazione e repulsione basteranno a spiegare tutti i *fenomeni* della natura; nessun'altra causa immediata deve essere ammessa»[46]. Sebbene il titolo dell'opera – *An Attempt to de-*

---

[43] È utile tenere presente che la prima edizione inglese dell'*Opticks* (1704) comprendeva soltanto sedici Queries; l'edizione latina (1706) ne presentava altre sette, che nelle edizioni inglesi successive sarebbero divenute – in forma riveduta – le Queries 25-31 (Newton, infatti, aveva aggiunto le Queries 17-24 nella seconda edizione inglese). La Quaestio 23, pubblicata dapprima in latino, corrisponde dunque alla Query 31 delle ultime edizioni, che contiene ulteriori aggiunte.

[44] I. Newton, *Optice*, cit., Quaestio 23, p. 338. Così il testo inglese (*Opticks*, cit., p. 395): «As in algebra, where affirmative Quantities vanish and ceases, there a repulsive Virtue ought to succeed».

[45] Sulla capacità dell'*Opticks* di Newton di «orientare» la ricerca fisica settecentesca vedi J. Heilbron, *Electricity in the 17th and 18th Centuries. A Study of Early Modern Physics*, cit., pp. 51-71. Sull'estensione della forza repulsiva a scala cosmica da parte di alcuni newtoniani, vedi N. Guicciardini, «Stars and Gravitation in Eighteenth Century Newtonian Astronomy», in *Copernico e la questione copernicana in Italia*, a cura di L. Pepe, Olschki, Firenze 1996, pp. 263-280.

[46] G. Knight, *An attempt to demonstrate that all the phenomena in nature may be explained by two simple active principles, attraction and repulsion*, Printed for John Nourse, London 1754, Proposition XXI, p. 21, corsivo nel testo. Su 's Gravesande e De-

monstrate, That all the Phœnomena in Nature May be explained by Two simple active principles, Attraction and Repulsion – sia alquanto evocativo, come è stato notato più volte, rispetto alla concezione di Boscovich, è tuttavia improbabile che questi la conoscesse in dettaglio. A ogni modo, l'opera è posteriore alle prime elaborazioni della boscovichiana curva delle forze, e in quelle più tarde mancano riferimenti testuali diretti o indiretti.

Un «M[onsieur]. Knigt», senza ulteriori specificazioni (perciò solo congetturalmente identificabile con Gowin Knight), compare fra la «Gente conosciuta in Londra», un lungo e meticoloso elenco, compilato da Boscovich durante il soggiorno in Inghilterra nel maggio-giugno 1760, cui vanno aggiunti pure un diario essenziale ma assai preciso e l'elenco delle conoscenze fatte a Oxford, Cambridge e Tumbridge Wells[47]. Il diario si interrompe il 4 luglio; stando a una lettera inviata da Londra al fratello Bartolomeo il 21 luglio 1760, però, Ruggiero avrebbe conosciuto Knight il giorno precedente. L'espressione assai vaga utilizzata a tale proposito sembra comunque escludere che Boscovich fosse a conoscenza della teoria di Knight: «Vi era dal Sig: DelaVal [Edward Delaval] dell'altra gente, che mi fecero ottime accoglienze, e tra questi il Capo del Museo Britannico, si chiama M. Mait [cioè Monsieur Gowin Knight], ma non so come si scriva; lo saprò dimani: è per altro celebre, essendo quello, che ha inventata, o assai perfezionata l'arte di far la calamita artificiale»[48]. Nessun cenno, invece, all'*Attempt*. Il 24 luglio, inoltre, Boscovich aveva assi-

---

saguliers circa l'inversione fra attrazione e repulsione vedi J. Heilbron, *Electricity in the 17th and 18th Centuries. A Study of Early Modern Physics*, cit., pp. 64-66.

47 Boscovich giunge a Dover la sera del 23 maggio 1760, a Londra la sera del 27, dopo essere stato in visita a Greenwich. Partito per Oxford il 30 giugno, vi rimane sino a dicembre inoltrato (stando a un appunto, la sua nave sbarcava a Flessinga, nei Paesi Bassi, il 21 dicembre 1760). Il breve diario di viaggio e gli elenchi delle persone conosciute sono conservati nei Boscovich Archives (Bancroft Library, Berkeley), MS 848/2. Per un' approfondita analisi dei rapporti scientifici intrattenuti da Boscovich a Londra vedi E. Proverbio, *Gli interessi scientifici di Ruggiero G. Boscovich per i fenomeni elettrici e i suoi incontri con Benjamin Franklin ed altri elettricisti inglesi e francesi*, in «Quaderni di Storia della Fisica», 11, 2003, pp. 3-48.

48 Ruggiero a Bartolomeo Boscovich, 21 luglio 1760, in *ENc*, II, p. 336. Nella Londra del 1760 Gowin Knight era effettivamente una personalità di alto profilo: nato a Corringham (Lincolnshire) nel 1713, formatosi a Oxford ed eletto membro della Royal Society nel 1745, fu insignito della Copley Medal nel 1747 per le sue ricerche sul magnetismo. Noto anche come costruttore di bussole per la navigazione (quelle da lui certificate, fabbricate sotto la sua direzione da George Adams *the elder*, divennero in breve lo standard dell'ammiragliato britannico), nel 1756 Knight venne nominato Principal Librarian del British Museum, carica che fu il primo a ricoprire e che mantenne fino alla morte (1772). Per i dettagli biografici vedi R.B. Prosser, «Knight, Gowin», in *Oxford Dictionary of National Biography*, Oxford University Press, Oxford, vol. XI, 1921-1922 (originally published 1892-1893), pp. 250-252; vedi anche la più aggiornata voce P. Fara, «Knight,

stito a esperimenti sui magneti eseguiti da Knight, presumibilmente nel suo laboratorio[49]; le esperienze sono riportate minuziosamente in una lettera al fratello Bartolomeo datata 4 agosto; ma anche qui non si fa alcun cenno all'*Attempt* o a una qualche teoria sottostante i fenomeni[50].

Sotto il profilo più propriamente scientifico-concettuale, le somiglianze fra la teoria di Kinght e quella di Boscovich sono poco più che superficiali. Knight, a differenza di Boscovich, prendeva le mosse dal postulato newtoniano di una forza di attrazione massima al contatto fra corpi, e il suo «tentativo» derivava essenzialmente da una concezione elettrico-magnetica dell'Universo[51], anch'essa ampiamente estranea all'orizzonte boscovichiano. Per altro, Knight non sembra pensare ad alcuna inversione di segno di un'unica forza, che da attrattiva diverrebbe repulsiva; piuttosto, vi sarebbero due diverse «cause» o «principi attivi» (espressione, quest'ultima, di chiara impronta newtoniana), che presiedono a due «tipi di materia» con caratteristiche opposte: l'una attrattiva, l'altra repulsiva (una concezione mutuata dalla teoria dei fluidi di Hales, cui egli fa allusione nella Proposition XX).

Gowin», in *Oxford Dictionary of National Biography*, 2004, DOI: http://dx.doi.org/10.1093/ref:odnb/15719.

[49] «Il Gioveddi fummo […] a vedere gli esperim:[ent]i magnetici di M. Knight, credo, si scriva, e si dice Nait: che belle cose! Vi scriverò su questo un'altra volta». Ruggiero a Bartolomeo Boscovich, [lunedì] 28 luglio 1760, in *ENc*, II, p. 343. Il giovedì precedente era il 24 luglio.

[50] «Vi accennai in una delle passate gli esperimenti magnetici di M. Knight, che cosi si scrive, e si pronuncia Nait, che vidi colla mia comitiva, vi sono cose ben meravigliose, come tra le altre, l'indebolire affatto colle sue righe di ferro ridotte a forte calamita, e quasi dstruggere la forza della calamita naturale, indi renderla, anzi mutare i suoi poli, e metterli dove un vuole: a un medesimo pezzo di ferro dà la virtù magnetica in presenza nostra, mettendo i poli, dove un vuole prima in un sito, e poi in un altro, e mettendo il boreale dove prima era l'australe, e viceversa, e ciò col semplice contatto, e tenue strofinamento: dar 4 poli allo stesso pezzo di ferro, facendo che sulla stessa faccia vi sia il polo boreale in un canto, l'australe in un altro, e nella faccia opposta al contrario: fare, che un cilindretto di ferro abbia nel centro di una delle due basi il polo boreale, e in tutti i punti della circonferenza l'australe, e nella base opposta il contrario. Queste e altre molte meraviglie fanno le sue due sbarre di ferro, le quali ne formano altre, quante uno ne vuole, senza perdere per se queste virtù, e queste formate costano, se sono quasi d:a stessa lunghezza 10 ghinee, della metà 5, di un quarto 2 ½. Queste ultime danno pure la virtù di fare tutti questi effetti ben forte, ma assai più debole delle lunghe». Ruggiero a Bartolomeo Boscovich, 4 agosto 1760, in *ENc*, II, p. 346.

[51] Si veda G. Knight, *An attempt to demonstrate…*, cit., Proposition XI, p. 6 e Proposition XIV, pp. 7-8. Per un'esposizione della teoria di Knight si veda P.M. Heimann, J.E. Mc Guire, *Newtonian Forces and Lockean Powers: Concepts of Matter in Eighteenth-Century Thought*, in «Historical Studies in the Physical Sciences», 3, 1971, pp. 296-299.

Quanto a 's Gravesande e Desaguliers, i loro contributi non dovevano essere del tutto ignoti a Boscovich. Assai probabilmente egli conosceva almeno i *Mathematical Elements* di 's Gravesande, che, pubblicati in latino nel 1721 e più volte riediti, costituivano una delle più diffuse presentazioni della filosofia naturale newtoniana. Tuttavia, l'interpretazione boscovichiana del passo dell'*Optice* sembra aver seguito un percorso indipendente e originale. Per esempio, anche 's Gravesande riprendeva l'idea newtoniana che l'attrazione che deriva dalla forza di coesione fosse «molto grande al contatto delle parti per poi decrescere subito, sino a non agire più alla minima distanza percepibile; poi, a distanze più grandi, si [muterebbe] in una forza repulsiva, per la quale le particelle si allontanano le une dalle altre»[52]. Al contrario, nel *De materiae divisibilitate* Boscovich insiste più volte che il contatto fra i corpi è impedito da una forza che alle minime distanze è repulsiva. Con ciò Boscovich ritiene da una parte di aver fatto salvo il principio di continuità, in virtù di cui il 'salto' viene escluso dalla natura (posizione già argomentata nel *De viribus vivis* e ripresa nel *De materiae divisibilitate*, n. 90), dall'altra di poter ridurre a un'unica forza le interazioni newtoniane. Agli occhi di Boscovich, è questo uno dei meriti più grandi della sua concezione, come puntualizzerà infine nella *Theoria*: «Il mio sistema differisce il più possibile da quello newtoniano poiché ciò che Newton, nell'ultima delle sue Questiones Opticae, ha cercato di spiegare attraverso tre principi – gravità, coesione, fermentazione – […], in esso viene spiegato per mezzo di un'unica legge delle forze, espressa da un'unica formula algebrica (non da una composta da più formule messe insieme), ovvero da un'unica curva geometrica continua»[53].

Il meccanismo alla base di coesione e fermentazione, già accennato nei passaggi conclusivi del *De viribus vivis*, trova appunto nel *De materiae divisibilitate* una formulazione compiuta, prendendo la concezione newtoniana della materia come punto di riferimento essenziale. Nell'*Optice* Newton aveva definito le «particelle primigenie» create da Dio, «da cui poi ha tratto origine ogni natura corporea», come «solide, compatte, dure, impenetrabili, inerti e mobili». Esse costituiscono la garanzia della stabilità della materia e bilanciano gli effetti potenzialmente distruttivi della gravità: poiché sono «di gran lunga più dure di qualsiasi corpo poroso sia composto da loro; [e] sono anzi così perfettamente dure da non potersi mai consumare o infrangere»[54],

---

[52] W.J. 's Gravesande, *Physices elementa mathematica, experimentis confirmata sive introductio ad philosophiam Newtonianam*, apud Petrum Vander Aa, Lugduni Batavorum [Leiden] 1721, I, p. 44 (si noti che l'intero paragrafo è in corsivo nell'originale). Vedi anche l'edizione inglese: *Mathematical Elements of Natural Philosophy, Confirm'd by Experiments*, Printed for W. Innys, T. Longman and T. Shewell, C. Hitch, London, 1747, I, p. 16.

[53] R.G. Boscovich, *Theoria philosophiae naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium*, ed. veneta, cit., n. 4, p. 2. Vedi anche *De materiae divisibilitate*, n. 91, pp. 251-252.

[54] I. Newton, *Optice*, pp. 343-344. Il passo è citato in *De materiae divisibilitate*, n. 87.

non possono essere frantumate nemmeno là dove la gravità è massima, cioè al contatto dei corpi, ove subentra, come ulteriore principio attivo irriducibile, la coesione, che spinge le particelle ad aggregarsi fra loro (mentre la fermentazione dovrebbe essere il principio alla base delle trasformazioni chimiche).

In questo modo, però, stando a Boscovich, «la solidità, l'impenetrabilità, l'estensione, l'inerzia, la mobilità delle particelle prime» vengono interpretate come «proprietà elementari delle quali non si possa rendere ulteriormente ragione, e che è impossibile ricondurre a un principio più semplice» (n. 91). Al contrario, sostituendo il postulato newtoniano della massima attrazione alle minime distanze con quello della massima repulsione, l'impenetrabilità poteva essere facilmente risolta come effetto della curva boscovichiana alle minime distanze; da ciò Boscovich ricava (con un metodo che, seguendo la tradizione aristotelica e scolastica, viene definito come analogico) la sostituzione delle particelle primigenie di Newton con «punti completamente indivisibili» (n. 90); infine, introducendo l'idea che attrazione e repulsione continuino ad avvicendarsi (anch'essa, come si è visto, una modificazione di un'ipotesi newtoniana), la coesione e la fermentazione potevano essere interpretate come effetto dell'equilibrio («limite», n. 90) fra attrazione e repulsione, e potevano venire rappresentate graficamente come punti d'intersezione fra la curva e le ascisse.

3.4. *Fra Newton e Leibniz?*

La presenza pressoché schiacciante di Newton rispetto ad altre fonti nel *De materiae divisibilitate* porta a mettere in discussione l'immagine di Boscovich come fautore di una "concezione dinamica" della natura, favorita dall'influente studio di Max Jammer, *Concepts of Force*, ma avvalorata anche dallo stesso Boscovich, che nella *Theoria* (n. 1) definiva il suo sistema «a metà strada fra quello di Leibniz e quello di Newton».

Stando a Jammer, in particolare, «la fisica newtoniana, insieme con la monadologia leibniziana, formò la base di una […] scuola di pensiero il cui miglior rappresentante è forse Ruggiero Giuseppe Boscovich, per il quale la forza era l'elemento ultimo della realtà»[55]. Per altro, la nozione di forza impiegata da Boscovich sarebbe assai diversa da quella di Newton, giacché «i punti materiali di Boscovich, sebbene dotati di inerzia, tuttavia non hanno massa nel senso newtoniano del termine»; forza per Boscovich sarebbe piuttosto una «determinazione o propensione ad avvicinarsi o

---

[55] M. Jammer, *Concepts of Force. A Study in the Foundation of Dynamics*, Harvard University Press, Cambridge 1957, p. 148. Qualche anno dopo, Mary B. Hesse doveva notare che «Boscovich deriva i suoi principi metafisici da Leibniz, integrandoli però con la fisica newtoniana»; si noti che anche in questo libro ritorna lo schema, avanzato da Jammer, Newton-Leibniz-Boscovich-Kant (M.B. Hesse, *Forces and Fields. The Concept of Action at a Distance in the History of Physics*, Thomas Nelson and Sons, Edinburgh 1961, pp. 164-166, 201).

ad allontanarsi, ed è misurata dall'accelerazione prodotta»[56]. Tuttavia, come si è visto, le nozioni di inerzia e di forza come *determinationes* (per quanto assai differenti) della materia era stata elaborata sulla base dell'*Optice*, e – come si è ricordato – lo stesso Newton faceva riferimento, nell'ultima Quaestio, a gravità, fermentazione e coesione in quanto «principi attivi». Ciò dovrebbe avvicinarlo a quel dinamismo che Jammer ascriveva a Leibniz – oppure spingere noi ad abbandonare categorie di questo tipo.

Ovviamente, il fatto che «nella concezione di Boscovich impenetrabilità ed estensione siano meramente espressioni spaziali delle forze»[57] avvicina la sua idea dei punti materiali a quella delle monadi leibniziane, in quanto atomi spirituali inestesi e contemporaneamente centri di forza. Quest'analogia trova un'evidente giustificazione nella *Theoria* (n. 2), che dichiara che il sistema boscovichiano «ha *ex Leibnitii theoria* gli elementi semplici e assolutamente inestesi» (mentre «ha *ex Newtoniano systemate* le forze reciproche che variano vicendevolmente a seconda delle distanze a cui i punti si trovano gli uni rispetto agli altri»). Tuttavia, il *De materiae divisibilitate* induce a una più precisa contestualizzazione di questo passaggio. È lì, infatti, che per la prima volta Boscovich chiama in causa le monadi – ma non per evidenziare tratti potenzialmente comuni, bensì per sottolinearne le differenze. E in modo tutt'altro che lusinghiero per i seguaci di Leibniz:

> Secondo la mia concezione, gli elementi primi della materia, da cui essa è composta da principio e in cui da ultimo si può risolvere, sono punti indivisibili tali che non hanno parti né occupano uno spazio esteso; ma a ciascuno corrisponde un punto matematico di spazio, privo di qualsiasi estensione e dimensione. Che questi siano del tutto incapaci di comporre una quantità continua lo riconosco dalla sua stessa nozione nonché dalla nozione di estensione continua, cosicché non possano assolutamente essere contigui gli uni agli altri, ma fra ogni coppia o vi sia sempre un certo intervallo o – se tale intervallo è nullo – coincidano completamente e si compenetrino. Da ciò si vede quanto tali punti si differenzino da quelli di Zenone, i quali vengono considerati sia inestesi sia contigui fra loro, sì da comporre l'estensione […]. Ma si differenziano anche dalle monadi di Leibniz, che i Leibniziani stessi ritengono inestese, e tuttavia tali che – così affermano – compongono una quantità continua estesa; come ciò sia possibile in modo da non cadere nell'assurdità in cui cadono i punti di Zenone, l'avranno capito costoro; io certo non lo capisco. (n. 12)

L'attacco contro i leibniziani viene ribadito in nota (in corrispondenza delle parole «l'avranno capito costoro»); e si ricordi che, stando alla Premessa, mentre il te-

---

[56] Ivi, p. 177.
[57] Ivi, p. 178.

sto del *De materiae divisibilitate* risale al 1748, le note sono state aggiunte a ridosso della pubblicazione dello scritto (1757), cioè a poca distanza dalla pubblicazione della *Theoria*; in questa, per altro, la nota viene riproposta pressoché immutata (n. 139), dopo aver ripreso le critiche a Leibniz e a Zenone (n. 138). Così, la posizione di Boscovich sulla questione – inquadrata in un atteggiamento di generale ostilità nei confronti della filosofia leibniziana – appare già definita sul finire degli anni Quaranta (se non già all'epoca del *De viribus vivis*), e Boscovich vi si sarebbe mantenuto fedele nel corso degli anni.

Di conseguenza, quando Boscovich esordisce dicendo che la *Theoria* è «un sistema intermedio fra quello di Leibniz e quello di Newton» (n. 1) non intende con ciò indicare le proprie fonti, bensì segnalare un dato di fatto: la sua concezione presenta alcuni punti di convergenza con quella di Leibniz (gli elementi primi sono inestesi) e altri con quella di Newton (il meccanismo che regola le forze). Così, le espressioni utilizzate nel n. 2 – «*ex Leibnitii theoria […] ex Newtoniano systemate*» – devono essere intese nel senso di «in conformità con…», come del resto chiarisce il titoletto del paragrafo, aggiunto nella seconda edizione (*editio veneta*, 1763): «*In quo conveniat cum systemate Newtoniano, & Leibnitiano*», ovvero «in che cosa [questa teoria] sia in accordo con in sistema newtoniano e con quello leibniziano».

La fonte principale di Boscovich, tuttavia, non è Leibniz, da cui lo separano fin troppe differenze, a cominciare dalla concezione continuista della materia, la cui insostenibilità è enfatizzata nel *De materiae divisibilitate*; è invece una coraggiosa miscela di elementi tratti dalla tradizione gesuitica e dalla dottrina newtoniana. Quanto al primo aspetto, gli elementi tradizionali sono stati chiariti dalla recente letteratura boscovichiana[58]; quanto al secondo, l'idea dei punti materiali non può essere consi-

[58] Sulla base di non poche convergenze fra Boscovich e Giovanni Battista Tolomei, Ugo Baldini (*Boscovich e la tradizione gesuitica in filosofia naturale*, cit., pp. 43-45) ha mostrato che le analogie spesso evidenziate tra Leibniz e Boscovich potrebbero assai meglio spiegarsi con un'influenza indiretta di Leibniz, mentre dalla tradizione gesuitica Boscovich mutuerebbe la propria concezione dell'impenetrabilità e da Tolomei in particolare quella del *punctum materiale*. Non concordiamo, però, con Baldini nel considerare il punto materiale un «infinitesimo in atto». Come Boscovich spiega nel *De Natura, et usu Infinitorum, et Infinite parvorum* (n. 12: vedi in proposito la precedente nota 36 di questa Introduzione), i punti non sono in nessun senso infinitesimi (e in particolare non esistono quantità infinitamente piccole in atto). Inoltre, vi è una significativa differenza anche fra indivisibile e infinitesimo. Ciò crea un'insormontabile difficoltà allorché si cerchi di interpretare i *punti materiali* come *infinitesimi materiali*. Per una succinta ma efficace presentazione delle problematiche che emergono in tale contesto vedi E. Giusti, *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*, Bollati Boringhieri, Torino 1999, pp. 51-60. Vedi inoltre J. Peiffer, A. Dahan-Dalmedico, *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales*, cit., pp. 178-201. Per alcuni aspetti tecnici riformulati nel quadro della teoria degli insiemi vedi A.A. Fraenkel, *Abstract Set Theory*, 4th revised edition, North-Holland, Amsterdam-Oxford 1976, pp. 121-125.

derata troppo distante dal corpuscolarismo dell'*Optice*: «Per [Newton] le particelle prime sono solide, piene, dure, e dotate di una loro forma. Io, invece, concepisco le particelle prime come formate da punti completamente indivisibili, i quali per me possono essere presi per quelle stesse particelle primigenie» (*De materiae divisibilitate*, n. 90). E tale concezione non ha le sue radici in Leibniz ma, come si è visto, nella matematica degli infinitesimi interpretata alla luce del comportamento della curva boscovichiana alle minime distanze: aspetto che verrà ulteriormente chiarito nei primi paragrafi del *De continuitatis lege*.

4. De continuitatis lege *(1754)*

4.1. *Il ruolo di Leibniz e della legge di continuità nella concezione di Boscovich*

Un terreno d'incontro effettivo con Leibniz, per altro compatibile con l'aristotelismo che permea la tradizione gesuitica, è quello definito dalla legge di continuità. A questa in particolare è dedicata la dissertazione del 1754, *De continuitatis lege et ejus consectariis pertinentibus ad prima materiae elementa eorumque vires* (Salomoni, Roma). I passaggi chiave dell'opera, più facilmente individuabili che nelle altre dissertazioni di filosofia naturale, possono essere sintetizzati come segue[59]:

nn. 1-5	Premessa metodologica.
nn. 6-52	Indagine sulla natura della continuità (e soluzione del paradosso dell'Achille, nn. 43-52).
nn. 53-123	La continuità matematica.
nn. 124-130	Critica del leibniziano «principio di ragion sufficiente».
nn. 131-133	Prova *a priori* (metafisica) della legge di continuità.
nn. 134-138	Prova empirica (per induzione) della legge di continuità.
nn. 139-157	Obiezioni alla legge di continuità e loro confutazione.
nn. 158-170	Esposizione della teoria della forza e della concezione della materia (e trattazione dello spazio e del tempo, nn. 171-174).

Come si vede, la teoria delle forze occupa solo l'ultima parte del *De continuitatis lege*[60]. Tuttavia, essa viene introdotta, come in una sorta di preludio, già nel primo paragrafo, ove si ricorda che era stata esposta già nel 1745 e poi «presentata as-

[59] Una più precisa e articolata scansione del testo è fornita da J. Talanga, *Einleitung*, in R.J. Boscovich, *De continuitatis lege. Über das Gesetz der Kontinuität*, übersetzt und herausgegeben von J. Talanga, Universitätsverlag C. Winter, Heidelberg 2002, p. 21.

[60] Si noti che in questo contesto Boscovich compendia pure (ed è la prima volta che ne fa cenno) la trattazione del tempo e dello spazio in quanto enti reali (vedi, in proposito, la precedente nota 26).

sai più analiticamente nel 1748, nella seconda parte della dissertazione *De lumine*» (n. 1). Così, è la stessa struttura del testo a porre in evidenza lo scopo dichiarato del *De continuitatis lege*: porre la teoria delle forze sul «più importante fondamento di tutta la nostra analisi», ovvero

> quel principio celeberrimo che ormai generalmente i filosofi chiamano *principio di continuità*. Esso venne avanzato già nel 1687 da Leibniz, il quale tuttavia non si servì di questo nome; egli lo applicò contro le leggi cartesiane del moto in quelle che Bayle battezzò *Nouvelles de la République des Lettres*. In seguito fu esposto da molti altri leibniziani, e le loro argomentazioni vennero raccolte dalla dottissima Madame *De Chatellet* [Émilie du Châtelet] nelle Istituzioni di fisica [*Institutions de Physique*, Prault, Paris 1740]. (n. 3; corsivo nel testo).

Boscovich si riferisce alla leibniziana *Lettre […] sur un principe general utile à l'explication des loix de la nature par la consideration de la sagesse divine* (pubblicata sulle *Nouvelles de la République de Lettres* di Pierre Bayle, luglio 1687, art. VIII, pp. 744-753). Qui il filosofo tedesco proponeva un «principio dell'ordine generale» la cui origine sarebbe «nell'infinito, [che] è assolutamente necessario in geometria, ma vale anche in fisica», e ne dava la seguente caratterizzazione (ripresa da Boscovich in *De continuitatis lege*, n. 100):

> *Quando la differenza di due casi può essere diminuita al di sotto di qualsiasi grandezza data* in datis*, ovvero in ciò che è stato posto, bisogna poterla trovare altrettanto diminuita al di sotto di qualsiasi grandezza data* in quaesitis*, ovvero in ciò che risulta*; o, per usare un linguaggio più comune, *quando i casi (ovvero ciò che è dato) si avvicinano continuamente e si perdono infine l'uno nell'altro, lo fanno anche le conseguenze [suites] o accadimenti (ovvero ciò che si domanda).* Ciò dipende poi da un principio più generale, cioè: *Datis ordinatis etiam quaesita sunt ordinata* [Se i dati sono ordinati, sono ordinati anche i risultati].[61]

Per illustrare il principio, Leibniz utilizzava sia un esempio geometrico – l'approssimarsi di un'ellisse a una parabola per deformazione continua[62] – sia argomentazioni fisico-matematiche. Per esempio, la quiete può essere considerata «alla stessa

[61] G.W. Leibniz, *Lettre de M.L. sur un principe general utile à l'explication des loix de la nature par la consideration de la sagesse divine, pour servir de replique à la reponse du R.P. Malebranche* (1687), in Id., *Die philosophischen Schriften*, herausgegeben von C.I. Gerhardt, vol. III, Weidmann, Berlin 1887, p. 52; il corsivo sta per lo spaziato nel testo originale; il latino è nel testo francese di Leibniz.

[62] G.W. Leibniz, *Lettre de M.L. sur un principe general*, cit., p. 52.

stregua di una velocità infinitamente piccola, ovvero come una lentezza infinita», sicché «la regola della quiete dev'essere vista come un caso particolare della regola del moto»[63]. In virtù di tale caratterizzazione, alcuni anni dopo, in una lettera a Pierre Varignon, Leibniz avrebbe definito tale principio «legge di continuità»[64].

D'altra parte, si ricordi che nel *De viribus vivis* Boscovich aveva argomentato contro la generazione/distruzione istantanea di velocità per urto: cioè contro Descartes, obiettivo polemico dello stesso Leibniz. Ora, al n. 101 del *De continuitatis lege*, Boscovich fornisce una spiegazione della confutazione leibniziana delle regole del moto date da Descartes. Per far meglio risaltare le convergenze e le peculiarità dell'interpretazione di Boscovich, riportiamo i due testi nei rispettivi originali (rimandando al paragrafo relativo del *De continuitatis lege* per la traduzione italiana del n. 101):

G.W. Leibniz, *Lettre […] sur un principe general…*, 1687.	R.G. Boscovich, *De continuitatis lege…*, 1754.
C'est entre autres fautes de cette consideration, que M. des Cartes, tout habile homme qu'il etoit, a manqué plus d'une façon dans ses prètenduës loix de la nature; Car (pour ne pas répéter ici ce que j'ai déjaa dit ci devant de l'autre source de ses érreurs, quand il a pris la quantité de mouvement pour la force) Sa premiére & sa seconde régle (par exemple,) ne s'accordent point; la seconde veut que deux corps B & C se rencontrant directement d'une vitesse	Statuit Cartesius in prima lege, si bina corpora aequalia sibi invicem occurrant, debere retro regredi utrumque cum velocitate opposita, & aequali illi, quam prius habuerat, in secunda vero lege, si inaequalia sint, debere majus quidem progredi cum sua velocitate priore, minus vero regredi cum velocitate contraria, & aequali illi, quam prius habuerat. Binorum corporum magnitudines sunt id, quod Leibnitius appellat, *data* vel *posita*, velocitates post conflictum, *quaesita*,

[63] Ivi, pp. 52-53.

[64] Vedi G.W. Leibniz a P. Varignon, 2 febbraio 1702, in *Leibnizens mathematische Schriften*, herausgegeben von C.I. Gerhardt, vol. IV, Schmidt, Halle 1859, Erste Abtheilung. Band IV, *Briefwechsel zwischen Leibniz, Wallis, Varignon, Guido Grandi, Zendrini, Hermann und Freiherrn von Tschirnhaus*, in particolare p. 93: «Si può dire che gli infiniti e gli infinitamente piccoli sono tanto ben fondati che in geometria, e nella natura stessa si fa tutto come se si trattasse di realtà perfette, come testimoniano non solo la nostra analisi geometrica dei trascendenti, ma anche la mia legge di continuità, in virtù della quale è lecito considerare la quiete come un moto infinitamente piccolo […], e la coincidenza come una distanza infinitamente piccola, e l'uguaglianza come l'ultima delle disuguaglianze, ecc.; legge che ho spiegato e applicato altre volte nelle *Nouvelles de la Republique des Lettres* di M. Bayle, in occasione delle regole del moto di Descartes e Malebranche».

égale, & B étant tant soit peu plus grand, C sera réflechi avec la vitesse premiére, mais B continuera son mouvement; au lieu que selon la premiére régle B & C, étant égaux tous deux réflechiront & s'en retourneront d'une vitesse égale à celle qui les avoit amenez. Maïs cette différence des évenemens de ces deux cas, n'est pas raisonnable; car l'inéga-lité des deux corps peut être aussi petite que l'on voudra, et la différence qui est dans les suppositions de ces deux cas, sçavoir entre une telle inégalité, & une égalité parfaite pourra être moindre qu'aucu-ne donnée, donc en vertu de nôtre principe, la différence entre les résultats ou évenemens devroit être aussi moindre qu'aucune donnée; cependent si la seconde régle étoit aussi véritable que la premiére, le contraire arriveroit: car selon cette seconde régle une augmentation aussi petite qu'ond voudra du corps B auparavant égal à C fait une grandissime différence dans l'effet, ensorte qu'elle change la réflexion absoluë, en continuation absoluë, ce qui est un grand saut d'une extremité à l'autre, au lieu qu'en ce cas le corps B devroit réflechir tant soit peu moins, et le corps C tant soit peu plus qu'au cas de l'egalité dont à peine ce cas peut être distingué[65].

resultantia, *consectaria*, *eventa*, *postulata*. Bini datorum casu sunt aequalitas corporum, & inequalitas. Eorum differentia imminui potest in infinitum ita, ut ab inequalitate ad aequalitatem demum deveniatur. Consideretur velocitas imminuta utcumque inaequalitate, manebit semper illesa per secundam Cartesii legem. Ea sublata, & mutata in aequalitatem, velocitas ipsa statim saltu quodam extinguatur tota per primam legem ipsius Cartesii, & ipsi substituitur opposita. Id legi Leibnitianae repugnat, vi cuius si ordinatim mutentur, quae dantur, ordinatim mutari debent ea etiam, quae quaeruntur, postulantur, resultant.

È vero che qui Boscovich chiama *leges* ciò che per Descartes sono *regulae* (e che Leibniz rende con *régles*), sicché Josip Talanga ha dubitato che Boscovich aves-

---

[65] La versione di questo passo leibniziano è quella, nota a Boscovich, nelle *Nouvelles de la République de Lettres*, cit., pp. 747-749, che differisce leggermente dalla versione nelle *Philosophische Schriften*.

se sotto gli occhi i testi di Descartes e dello stesso Leibniz, suggerendo che la sua fonte principale fosse invece Émilie du Châtelet[66]; tuttavia, l'argomentazione leibniziana "*contra cartesianos*" è rispettata. Invece, un riferimento pur indiretto al testo di Madame du Châtelet in questo passaggio sembra improbabile: le *Institutions de Physique* (§ 588) si riferivano in maniera assai più generica agli errori cartesiani nella meccanica, spiegando «perché Descartes ci ha dato delle leggi del moto [*Loix du mouvement*] false»: egli avrebbe sì intuito il principio di «conservazione di una uguale quantità di forza nell'Universo» come base delle leggi della meccanica, ma avrebbe poi avuto il torto di considerare la quantità di moto come la grandezza che si conserva. Per converso – ciò che dal punto di vista di Boscovich sarebbe stato assai più importante – non compaiono critiche a Descartes ove Madame du Châtelet tratta sommariamente della legge di continuità in rapporto al cambiamento di stato di moto di un corpo (*Institutions de Physique*, § 557) e dell'urto fra corpi (*Institutions de Physique*, §§ 589-590). Forse, più semplicemente, per Boscovich la distinzione fra legge e regola non è qui rilevante[67].

D'altra parte, ciò che a Boscovich preme sottolineare è – come nel *De viribus vivis* – l'insostenibilità della fisica cartesiana rispetto alla legge di continuità, che viene assunta *a priori*. Sicché Boscovich può persino prescindere dal linguaggio leibniziano, formulando la legge senza alcun riferimento a *data* e *quaesita*: si immaginino due quantità variabili, legate in modo tale che a una variazione del quanto[68] della prima corrisponda una variazione del quanto dell'altra. Allora, se la variazione dell'una passa dal quanto iniziale a quello finale attraversando «tutte le grandezze intermedie», la variazione dell'altra si comporterà analogamente. Di fatto, nota Boscovich, la *lex continui* è sufficientemente caratterizzata postulando il collegamento tra il dominio dei fenomeni naturali e tale passaggio per tutti i gradi intermedi (n.

[66] Vedi R. Descartes, *Principia philosophiae*, Pars II, §§ XLV-LII, in *Œuvres de Descartes*, publiées par C. Adam & P. Tannery, vol. VIII/1, Vrin, Paris 1982, pp. 67-70. Per un commento sulla questione vedi J. Talanga, «Anmerkungen. Num. 101», in R.J. Boscovich, *De continuitatis lege. Über das Gesetz der Kontinuität*, cit., pp. 290-292.

[67] A questo proposito, si noti che la nozione di *règle du mouvement* era correttamente utilizzata anche Johann Bernoulli nel testo (ben noto a Boscovich sin dal *De viribus vivis*) del *Discours sur les loix de la communication du mouvement* (1727), in *Opera Omnia, tam antea sparsim edita, quam hactenus inedita*, Lousannae & Genevae, Sumptibus M.-M. Bousquet & Sociorum, 1742, vol. III,, p.es. § 10, p. 27.

[68] *Magnitudo* nel testo di Boscovich (e *quantitas*/*magnitudo* al n. 101); *grandeur*/*quantitas* per Leibniz. L'aspetto quantitativo è qui essenziale: Boscovich prende le mosse, nel trattare il concetto di continuità, da «*Categorie*, capitolo 6 *de quanto*» (n. 6): vi sono quantità discrete, il cui modello è il numero (oggi diremmo: il dominio dei numeri naturali), e quantità continue, il cui modello sono le linee, le superfici, i corpi, lo spazio e il tempo (oggi diremmo: il dominio dei numeri reali). Si noti che, al contrario di Aristotele, Boscovich riduce le grandezze continue alla sola geometria (esclude cioè i corpi materiali).

102). L'ordine in cui gli eventi accadono – l'ordine dei fenomeni – è ordine matematico, o per meglio dire *geometrico*.

4.2. *Una metodologia per l'avvenire*

Se lo sfondo della nozione di continuità è fornito dalla definizione aristotelica di continuo (*Cat.*, 4b20-5a14, citata al n. 6 secondo l'edizione parigina dell'*Opera omnia* del 1619)[69], l'esplorazione della *lex continui* come base della teoria delle forze porta Boscovich a formulare una metodologia matura, fondata sulla distinzione fra due livelli epistemologici: quello della prova *a priori*, che riguarda l'ammissibilità logica di un principio, e quello della prova empirica, che concerne la sua occorrenza in natura. Se al primo livello compete la "metafisica di geometria" già vista all'opera nel *De materiae divisibilitate*, il secondo è il luogo in cui vengono trattati i fenomeni naturali. Altrove (al n. 131), dopo aver contestato ai leibniziani la validità del principio di ragion sufficiente in questo campo (nn. 125-130), Boscovich chiama questi due modi di procedere rispettivamente argomentazione (*ratio*) metafisica e argomentazione per induzione[70].

Di fatto questo schema generale, esposto in maniera sistematica al n. 5 del *De continuitatis lege*, era già operante nel *De viribus vivis*. Si ricordi che qui l'introduzione *a priori* della continuità impediva che le interazioni fisiche avvenissero per collisione: «È ormai opinione comune quanto molti sostengono, che in natura nulla avviene per salto, ma, come accade anche per i luoghi geometrici e le formule algebriche, qualunque cosa aumenti o diminuisca, aumenta o diminuisce in modo continuo, sicché si passa sempre da una quantità all'altra con moto continuo attraverso tutte le quantità intermedie. Non v'è esperimento che provi la falsità di questo principio» (n. 46). Una fonte più tarda – la già citata lettera a Conti del 1762 – rivela l'ispirazione newtoniana di tale approccio. Boscovich vi sostiene di non aver dimostrato «a priori alcuna parte della mia teoria, ma solo il suo fondamento, consistente nella legge di continuità. Tutta la natura delle forze, e però tutto l'andamento della curva io lo deduco solamente da' fenomeni». E questa tensione virtuosa fra argomentazione metafisica e 'deduzione' empirica rimanderebbe alle *regulae philoso-*

---

[69] *Aristotelis opera omnia quae extant, Graece et Latine. Veterum ac recentiorum interpretum, ut Adriani Turnebi, Isaaci Casauboni, Iulii Pacii studio emendatissima […]*, 2 voll., Typis Regiis, Lutetiae Parisiorum 1619.

[70] Per una discussione approfondita della posizione di Boscovich circa il principio di ragion sufficiente e il concetto di induzione vedi ancora J. Talanga, «Anmerkungen», in R.J. Boscovich, *Über das Gesetz der Kontinuität*, cit., pp. 297-320. In particolare, come ricorda Talanga (pp. 297-298), Leibniz non tratta il principio di ragion sufficiente come fondamento del principio di continuità, mentre in maniera esplicita vi rimanda É. du Châtelet, *Institutions de Physique*, cit., cap. 1, § 13.

phandi di Newton: «Questo è il vero metodo di investigar la Natura, e questo è l'adempire quello, che per bocca del Newton richiede la buona Filosofia»[71].

A questo proposito, si rivela essenziale la trattazione dell'induzione in un Supplemento al poema 'newtoniano' di Stay: «*§ XI. Ad notam in vers. 1140. De principio inductionis*»,[72] che si riferisce ad alcuni paragrafi di una nota dello stesso Boscovich:

> Qui [Benedetto Stay] presenta anzitutto la terza regola di Newton, cioè: «Le qualità dei corpi che non possono essere aumentate né diminuite, e quelle che appartengono a tutti i corpi sui quali è possibile eseguire esperimenti, devono essere ritenute qualità di tutti i corpi». Questa regola contiene il principio d'induzione: non però induzione completa [*perfectae*], come quando, dimostrando una proprietà in tutti i casi singoli, questa viene attribuita in generale a tutti i membri della collezione, bensì induzione incompleta [*imperfectam*], vale a dire quando estendiamo ciò che cogliamo in più casi simili fra loro – ove non si trovi alcun caso contrario fra tali casi simili – ai rimanenti dello stesso genere, nei quali non è stato ancora possibile osservare questo stesso stato. Un principio di tal fatta, cautamente applicato (e ho ricordato e indicato ciò cui bisogna fare attenzione nella mia recentissima dissertazione *De continuitatis lege*), non è certo infallibile; tuttavia è un principio assai adatto all'indagine.[73]

Nel *De continuitatis lege* (n. 134), invece, Boscovich sembra mettere l'induzione sul conto della tradizione leibniziana. Tuttavia, l'espressione è così evasiva («abbiamo spianato la strada all'induzione, sulla quale hanno spinto tanto Leibniz in persona quanto i leibniziani») che è difficile cogliere riferimenti precisi. Talanga ipotizza che Boscovich abbia qui in mente l'induzione matematica; tuttavia, all'epoca il termine *induzione* in riferimento alla matematica non veniva utilizzato in ambienti leibniziani (lo stesso Jakob Bernoulli, cui si devono forse i maggiori contributi in tal senso, non utilizza mai l'espressione *induzione matematica*), e la trattazione del «principio d'induzione» nei supplementi al poema newtoniano di Stay non ha a che fare nemmeno indirettamente con l'omonima inferenza matematica da n a

---

[71] R.G. Boscovich a G.S. Conti, 26 aprile 1762, in *ENc*, V/1, p. 83. Si noti, per altro, che la «semplicità e analogia della natura» avanzate da Boscovich al n. 39 del *De viribus vivis* contro l'introduzione delle forze vive rimandano rispettivamente alla prima e alla seconda *regula*.

[72] Vedi B. Stay, *Philosophiae recentioris […] Versibus traditae Libri X*, cit., pp. 357-358. Si noti che il successivo Supplemento XII è dedicato a «De divisibilitate in infinitum».

[73] Ivi, Liber I, pp. 55-56.

$n + 1$[74]. Un migliore candidato per il riferimento di Boscovich potrebbe forse essere Christian Wolff, che al paragrafo 478 della *Philosophia rationalis sive logica* (1728) fornisce una definizione di induzione (completa e incompleta) seguita da un significativo esempio tratto dalla geometria:

> Si chiama *induzione* il modo dell'argomentazione in cui si inferisce universalmente circa il caso superiore, che viene affermato o negato a partire dai singoli casi inferiori. Se poi vengono enumerati tutti i casi inferiori, l'*induzione* si dice *completa* [completa]; se ne mancano alcuni *incompleta* [incompleta]. Per esempio, in geometria elementare […] si dimostra che l'angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro che insiste sullo stesso arco. Se dunque argomentiamo: *L'angolo alla circonferenza, sul cui lato è posto il vertice dell'angolo al centro che insiste sullo stesso arco, è la metà di questo; l'angolo alla periferia, fra i cui lati è compreso l'angolo al centro che insiste sullo stesso arco, è la metà di questo; l'angolo alla circonferenza al di fuori del quale è posto il vertice dell'angolo al centro che insiste sullo stesso arco, è la metà di questo, e non si dà alcun altro angolo alla circonferenza che insista sullo stesso arco sul quale è costruito l'angolo al centro*; dunque, *ogni angolo alla circonferenza è la metà di un angolo al centro che insiste sullo stesso arco*: l'argomentazione è un'induzione, ed è completa. Se argomentiamo: *Questo cane abbaia, quest'altro cane abbaia, quel cane abbaia, e non si è trovato alcun cane che non abbaia*; dunque, *tutti i cani abbaiano*: questa è un'induzione incompleta.[75]

Si noti, del resto, che l'esempio geometrico presentato da Boscovich al n. 133 del *De continuitatis lege* è anch'esso un'induzione completa, e appunto come illustrazioni di un modo dell'argomentazione esempi di questo tipo 'spianano la strada all'induzione', che evidentemente trova il suo campo di applicazione anche al di là della geometria. Se la forza probatoria dell'induzione completa è stabilita in base alle regole della logica ipotetico-deduttiva (come Wolff mostrava nei paragrafi 479-481 della *Philosophia rationalis sive logica*), l'induzione incompleta, continua Boscovich al n. 134, non può essere applicata alla determinazione delle leggi di natura. C'è tuttavia – continua Boscovich – una versione meno rigida dell'induzione, che ri-

[74] J. Talanga, «Anmerkungen», in R.J. Boscovich, *Über das Gesetz der Kontinuität*, cit., p. 322. Sulla storia dell'induzione matematica in questo contesto vedi in particolare F. Cajori, «Origin of the Name 'Mathematical Induction'», *The American Mathematical Monthly*, 25/5, 1918, pp. 197-201; H. Freudenthal, «Zur Geschichte der vollständigen Induction», *Archives Internationales d'Histiore des Sciences*, 6, 1953, pp. 17-37.

[75] C. Wolff, *Philosophia rationalis sive logica, methodo scientifica pertractata et ad usum scientiarum atque vitae aptata*, Officina libraria Rengeriana, Francufurti & Lipsiae 1728, § 478, p. 369, corsivo nel testo.

chiede di controllare l'occorrenza di una legge in tutti i singoli casi entro un certo intervallo di variazioni. Preso un numero significativo di tali casi, nei rimanenti, «qualora qualcosa appaia a prima vista contraddittorio, tutto potrà essere conciliato con quella legge dopo un più preciso esame, anche se non si potrà mai riconoscere subito se le cose stiano principalmente così. Se queste condizioni sono soddisfatte, l'induzione dev'essere considerata adatta alla determinazione di leggi».

Così, il *De continuitatis lege* segna un vero e proprio punto di non ritorno sotto il profilo metodologico nel costituirsi della filosofia naturale di Boscovich. Questo tipo di induzione, non completa ma completabile attraverso un continuo gioco di congetture e controlli sperimentali, verrà ripreso quasi alla lettera qualche anno più tardi, nella *Theoria philosophiae naturalis*[76].

5. De lege virium in natura existentium *(1755)*

5.1. *La versione definitiva della curva delle forze. Aspetti qualitativi*

Il progetto boscovichiano di filosofia naturale che si era venuto delineando fra il 1745 (*De viribus vivis*) e il 1754 (*De continuitatis lege*) consentiva di unificare tre differenti aspetti della natura sulla base della curva delle forze: la costituzione discreta della materia, le interazioni fra le sue parti (microscopiche e macroscopiche), le sue proprietà fondamentali (solidità, impenetrabilità, estensione, inerzia, mobilità: si ricordi *De materiae divisibilitate*, nn. 90-91). La legge di continuità chiariva poi che le forze e i loro effetti variano passando attraverso tutti i gradi intermedi, cioè in modo continuo; ma, stando a Boscovich, essa conteneva pure il fondamento metafisico della legge delle forze.

Per altro, la modificazione della congettura newtoniana dell'inversione di segno tra attrazione e repulsione ("minime distanze, massima repulsione", in luogo della newtoniana "massima coesione"), mentre faceva salvo appunto il principio di continuità, introduceva una notevole tensione verso una formulazione matematica che è per lo più estranea alla tendenza generale del newtonianesimo. Di fatto, mentre 'sGravesande, Desaguliers o Knight si limitavano a descrizioni qualitative dei fenomeni, Boscovich proponeva un'immagine geometrica che preludeva alla ricerca di un'espressione analitica della curva. Tale traduzione in forma analitica costituisce una parte assai notevole della dissertazione *De lege virium in natura existentium*

---

[76] Vedi R.G. Boscovich, *Theoria philosophiae naturalis*, ed. veneta, cit., n. 40, che ripropone pressoché per intero i nn. 134-135 del *De continuitatis lege*. I successivi nn. 41-43 della *Theoria* riprendono nella sostanza le argomentazioni del *De continuitatis lege* circa l'applicazione dell'induzione all'impenetrabilità e alla continuità.

(1755); Boscovich ritenne i risultati lì raggiunti tanto importanti da inserire un lungo passo tratto da quest'opera in entrambe le edizioni della *Theoria*[77].

Nei primi paragrafi del *De lege virium* (nn. 1-20) Boscovich essenzialmente riprende e sviluppa i temi già toccati nel *De continuitatis lege*. I nn. 21-23 chiudono con la legge di continuità argomentando circa l'accordo fra *lex continui* e libertà del creatore / libero arbitrio umano (problema già toccato, ma solo di sfuggita e nel contesto delle critiche al principio di ragion sufficiente, nel *De continuitatis lege*, n. 126). Ai nn. 25-29 si torna sulla «deduzione» della curva dalla «esclusione del salto», cioè da una particolare applicazione del principio di continuità all'urto fra corpi, da cui si ricava l'inversione della forza da attrattiva a repulsiva alle minime distanze e l'esistenza di «limiti» (*limites*), ovvero di punti, posti lungo la direttrice fra i centri di massa dei corpi, in cui tale inversione ha luogo. Fra il n. 30 e il n. 36 Boscovich riassume la sua teoria della materia, che lo porta ad affrontare in dettaglio il problema della coesione e a precisare – ancora sulla base della legge di continuità – che attrazione e repulsione non sono due forze differenti, bensì espressioni di un'unica forza, «appartenenti a una stessa, unica serie» (n. 40) e conseguenza della medesima causa (n. 42).

Il vero e proprio tema del *De lege virium in natura existentium* viene introdotto ai nn. 43-46 con una riflessione sul concetto di legge, che sfocia nella distinzione fra via sintetica e via analitica:

> Come le persone comuni esprimono coi numeri certe relazioni fra quantità e le confrontano fra loro, oppure le mettono dinanzi agli occhi per mezzo di determinate misure – appunto le linee – come quando si osservano le immagini dipinte di edifici o di campi, così anche i filosofi e i matematici esprimono i nessi generali fra quantità attraverso certi valori generali e indeterminati che vengono indicati con le lettere dell'alfabeto; tali espressioni, poiché l'algebra suole riferirvisi col nome di analisi, sono dette formule analitiche. Ma matematici e filosofi esprimono le stesse cose e le pongono davanti agli occhi attraverso linee geometriche, la cui natura colgono però con formule analitiche. (n. 47)

Nei paragrafi successivi Boscovich fornisce alcune esemplificazioni, chiarendo in particolare (n. 54) che il numero delle intersezioni di una curva con l'asse delle ascisse dipende dal grado dell'equazione – il che equivale al teorema fondamentale

---

[77] Diamo di seguito le corrispondenze precise: *De lege virium in natura existentium*, nn. 77-103 = *Philosophiae naturalis theoria* (1758), Suppl. I, nn. 1-35 = *Theoria philosophiae naturalis* (1763), Suppl. III, nn. 25-59; i paragrafi 60-76 sono un'aggiunta di quest'ultima edizione (una loro discussione va oltre i limiti di questa Introduzione).

dell'algebra, risultato ormai acquisito da tempo, sebbene non ancora provato[78]. Così, nel caso della curva delle forze, è il grado dell'equazione a determinare il numero delle inversioni di segno della forza, da attrattiva a repulsiva e viceversa, poiché queste sono collocate nei «limiti», cioè nei punti in cui la curva interseca l'asse delle ascisse. Sotto questo profilo, ricorda Boscovich al n. 43, forze attrattive e repulsive sono «nomi arbitrari» che denotano la disposizione o determinazione (*determinatio*) dei corpi ad avvicinarsi e ad allontanarsi fra loro. Il significato della curva sta dunque nell'«assumere, per la condizione di avvicinamento e allontanamento, l'intera sequenza delle distanze», in modo che le determinazioni all'avvicinamento e all'allontanamento reciproco risultino assegnate «alle distanze stesse […], in base a una certa legge che possiamo esprimere attraverso una formula analitica oppure porre dinanzi agli occhi attraverso una figura geometrica».

Dopo alcune osservazioni generali sulle curve (nn. 56-67), che dovrebbero far propendere per una maggiore plausibilità di una curva che descriva forze alternativamente attrattive e repulsive rispetto a una che descriva forze di tipo unicamente attrattivo, la curva delle forze viene presentata a partire dal n. 68.

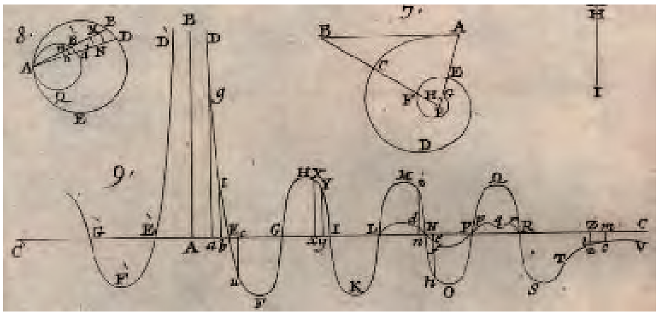


Fig. 6: dalla Fig. 9 del *De lege virium in natura existentium*. La curva delle forze.

[78] Una prima traccia della conoscenza del teorema fondamentale dell'algebra è presente nell'*Arithmetica Philosophica* (Nürnberg 1608) del maestro calcolatore Peter Roth, il quale formula – senza avvertire il bisogno di provarlo – l'asserto che un'equazione di grado *n* può avere al più *n* soluzioni. A formulazioni via via più precise giungeranno già Descartes, Harriot, Girard, mentre i tentativi di D'Alembert e Euler di dimostrare il teorema risalgono a poco prima del *De lege virium* (rispettivamente al 1746 e al 1747). Sulla storia dell'asserto vedi J. Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik*, Bd. 1. *Arithmetik und Algebra*, 4. Auflage, Walter de Gruyter, Berlin-New York 1980, pp. 489-496; J. Struik, *A Source Book in Mathematics*, Harvard University Press, Cambridge 1969, pp. 81-102; J. Gray, *Algebra in der Geometrie von Newton bis Plücker*, in *Geschichte der Algebra*, hgg. von E. Scholz, Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich 1990, pp. 276-279; I. Schneider, *Johannes Faulhaber 1580-1635. Rechenmeister in einer Welt des Umbruchs*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin 1993, pp. 59-60.

Boscovich espone qui, per la prima volta in maniera sistematica, alcune notevoli considerazioni che riprenderà più estesamente nella *Theoria*. Si tenga presente il celebre grafico (riprodotto qui di seguito come Fig. 6), che, nella sua forma più completa, viene presentato appunto nel *De lege virium in natura existentium* e riportato senza variazioni nella *Theoria*. Come più volte ricordato, le ascisse rappresentano le distanze, le ordinate l'intensità della forza esercitata su un punto a una distanza data. Si immagini che un punto α sia posto, rispetto a β, alla distanza *a* (indicata dal grafico): l'intensità della forza fra i due punti, "misurata" dalla curva, sarà *g*; alla distanza *b* sarà *t*; alla distanza *c* sarà *u*, ma con segno invertito rispetto a *a* e *b* (in particolare, sotto l'asse delle ascisse la forza espressa è attrattiva; sopra l'asse, repulsiva, con crescita asintotica alla minima distanza). Nel punto E – e poi ancora in G, I, L, N, P, R – la forza è nulla: sicché, riprendendo la terminologia del n. 29, punti del genere rappresentano «limiti tra forze attrattive e repulsive». Nel complesso, la curva descrive il variare dell'intensità della forza *che si esercita fra due punti* al variare della loro distanza, ovvero essa associa una forza d'intensità definita a ogni punto dello spazio, preso un secondo punto come parametro per misurare le distanze.

Quanto al ramo simmetrico a DEFGHIKLMNOPQRSTV rispetto all'asse delle ordinate (cioè il ramo D´E´F´G´), esso era stato omesso nella prima presentazione grafica della curva, nel *De viribus vivis* (1745), e compariva soltanto nella seconda parte della dissertazione *De lumine* (1748). In quella sede (Pars secunda, n. 6), tuttavia, Boscovich si asteneva dall'assegnargli un significato fisico preciso, limitandosi a osservare che i due rami devono essere «sia assolutamente della stessa forma sia uguali» (*& prorsus similes & aequales*). Tuttavia, le tracce di una riflessione più profonda possono essere rinvenute in un altro scritto, che risale a quello stesso giro d'anni. Nella dissertazione *De maris aestu* (1747) veniva annunciato un volume degli *Elementa universae matheseos* dedicato alle coniche, che doveva essere completato da un'ampia discussione del «carattere meraviglioso [*miram…indolem*] dei luoghi geometrici, la loro meravigliosa trasformazione e il loro congiungersi, e gli arcani assolutamente necessari dell'infinito, qualora lo si ammetta»[79].

Boscovich si spingeva fino ad anticipare un risultato sorprendente:

> La retta è una fra infinite linee, che […] sono tutte ugualmente semplici […], sebbene a noi la retta stessa appaia come la più semplice. Inoltre, la retta coinvolge una certa nozione d'infinito che oltrepassa del tutto la capacità della mente umana […]. La retta infinita è, in un certo senso, come una circonferenza di un cerchio infinito, che in qualche modo torna su se stessa a distanza infinita e come se si congiungesse; ciò vale anche per le gambe di una parabola e per i rami opposti di un'iperbole, e in realtà anche per le gambe infinite di tutti i luoghi geometrici. Essi

[79] R.G. Boscovich, *Dissertatio de maris aestu*, Komarek, Roma 1747, n. 90, p. XLV.

non s'interrompono mai e, se si può ammettere l'infinito, si congiungono reciprocamente e si uniscono a distanza infinita dalle due parti contrapposte. In tal modo la parabola, così come entrambi i rami dell'iperbole, non differiscono dalla sola ellisse continua, se i misteri dell'infinito vengono compresi e affrontati opportunamente.[80]

Queste speculazioni matematiche avrebbero preso forma compiuta solo sette anni più tardi (1754: lo stesso anno della dissertazione sulla legge di continuità), nel lungo trattato *De transformatione locorum geometricorum*, posto in appendice allo *Elementorum universae matheseos tomus* III. *Continens sectionum conicarum elementa*. Boscovich chiariva fra l'altro che il transito dalle quantità positive a quelle negative può avvenire in due modi, cioè «passando per il nulla [cioè lo zero] oppure per l'infinito»[81]. Eccone la dimostrazione geometrica:

Figura 7. Diagramma semplificato dalla figura 264 del *De transformatione locorum geometricorum*: la costruzione del "ritorno dall'infinito".

[716]. Nella figura 264 [riprodotta qui in forma semplificata come Figura 7] sia una retta indefinita AB e, preso il centro C fuori da essa, si immagini il cerchio NKOQ di raggio qualsiasi, per il cui centro passi la retta DE parallela a AB, la quale incontra il cerchio in N dalla parte di A e D, in O dalla parte di B e E. Sia poi CH perpendicolare a AB, che incontra in H, intersecando il cerchio in K (di fronte a H) e in Q (dalla parte opposta). Passi quindi per il centro C la retta indefinita FG, che

[80] *Ibidem*.

[81] R.G. Boscovich, *De transformatione locorum geometricorum, ubi de continuitatis lege, ac de quibusdam Infiniti mysteriis*, in *Elementorum universae matheseos tomus* III. *Continens sectionum conicarum elementa*, Salomoni, Roma 1754, n. 715, p. 327 (lo scritto è compreso in *ENo*, III, pp. 709-1203). Si noti che nel *De lege virium* (n. 49) Boscovich riprende l'argomentazione algebrica per il passaggio per l'infinito, assumendo $\frac{1}{0} = \infty$ (assunzione, del resto, assai comune per tutto il XVIII secolo e anche oltre).

> incontra il cerchio in L dalla parte di F e in M dalla parte di G, mentre incontra la retta AB in P; si immagini di trascinare tale retta in modo continuo facendola ruotare attorno al centro C, immobile, seguendo l'ordine NKOQ. Dapprima HP risulterà diminuito, avvicinandosi L a K, sino a svanire; poi, allontanandosi L secondo l'arco KO in L´, HP´ muterà direzione, sicché dopo il passaggio per il nulla [*nihilum*] in H, la retta HP´ si muterà da positiva in negativa (o viceversa). Si continui a far ruotare FG: il punto P´ si allontanerà incessantemente da H, e HP´ aumenterà incessantemente passando per tutti i gradi delle grandezze finite all'infinito, finché L´ giunga in O, nel qual caso l'intersezione P´ non verrà in qualche modo inghiottita da nessuna parte nell'infinito, come se fosse un immenso mare. Infatti la retta G´F´ si troverà a essere congruente a DE, che è parallela a AB, sicché non s'incontrerà mai con AB, pure prolungandola all'infinito. Ma si allontani P´ anche solo di poco, in modo che L´ giunga in M, e M´ in L; P´ che, dopo essersi allontanato per l'infinito, si era nascosto [*delituerat*] nell'unico istante in cui L´ era in O, si ritroverà immediatamente dalla parte opposta in P e, se guardiamo attentamente le sole quantità finite, la retta HP´ si è mutata in HP, avente direzione contraria. E certamente anche nel passaggio del punto P per l'infinito, HP´ è andata da negativa a positiva (o viceversa). [717] Tale passaggio del punto P per l'infinito da una regione [*plaga*] a quella opposta pare compiersi con moto affatto continuo, come se a quell'infinita distanza la [semi]retta infinita HB fosse in qualche modo connessa con la [semi]retta infinita HA.[82]

Nei paragrafi successivi Boscovich estende tali considerazioni a curve qualsiasi, in particolare a curve i cui rami hanno un asintoto, sino a concludere (n. 743) che in generale «se la gamba [*crus*] va all'infinito, si avrà sempre un secondo arco tendente all'asintoto che torna dall'infinito, o dalla stessa parte o dalla parte opposta, in qualche modo congiunto con esso, poiché *in geometria è necessario osservare assolutamente e ovunque, nella maniera più scrupolosa, la legge di continuità*» (corsivo nostro). In altre parole, spiega Boscovich nel *De continuitatis lege* (n. 67) sulla base di una «elegantissima analogia dell'iperbole con la parabola e l'ellisse», si può pensare un'ellisse come formata da due archi che si congiungono ai vertici dell'asse maggiore, oppure come due archi che si congiungono ai vertici dell'asse minore; «anche le gambe dell'iperbole si congiungono in due punti V, V´ [i vertici] e in due punti per così dire all'infinito ∞, ∞´», situati sugli asintoti. D'altra parte, così suona il Canone 10 del *De transformatione locorum geometricorum* (n. 858), portando a compimento le riflessioni del *De maris aestu*: «Se il raggio di un cerchio va all'infinito, in modo che, rimanendo fisso uno dei due estremi, il centro non sia più da nessuna parte, la circonferenza diverrà una linea retta; viceversa, la retta sarà da considerare la circon-

[82] Ivi, nn. 716-717, pp. 328-329. Vedi anche il precedente n. 714, pp. 326-327.

ferenza di un cerchio infinito». Allora, stando al n. 60 del *De continuitatis lege*, una costruzione come quella vista sopra, cioè la traslazione del punto P´ lungo AB e il suo 'ritorno attraverso l'infinito' in P (vedi ancora la Figura 7), può essere pensata come se «la retta stessa [AB], prolungata da entrambe le parti all'infinito, si riduce[sse] in qualche modo a un cerchio per così dire infinito», cioè a una circonferenza di raggio infinito, che compie una rotazione completa (ove poi si immagini che la secante G´F´ prosegua indefinitamente il moto rotatorio, si penserà a una circonferenza di raggio infinito «che torna su se stessa compiendo ininterrotti e infiniti giri»)[83].

Se l'idea dell'equivalenza fra retta e circonferenza di raggio infinito deve la sua fortuna a Cusano, il metodo proiettivo impiegato da Boscovich rimanda almeno in parte ai kepleriani *Paralipomeni a Witelo* – su cui per altro la concezione di Cusano ha influito notevolmente[84]. Alle coniche, considerate non come sezioni di un solido, bensì come curve piane, è dedicato il paragrafo 4 del Capitolo IV («De Refractionum Mensura»). Keplero vi dichiara, «parlando più per analogia che dal punto di vista geometrico», che si può passare per trasformazione continua «dalla linea retta attraverso infinite iperboli alla parabola, poi attraverso infinite ellissi al cerchio»; ciò consente di dare una trattazione unitaria delle coniche[85]. A tale scopo introduce la nozione di fuoco e quella – che ricompare in Boscovich – di punto all'infinito. In particolare, nella parabola, mentre uno dei due fuochi è «all'interno della sezione, l'altro dev'essere immaginato dentro o fuori di essa, sul suo asse, a distanza infinita dal precedente»[86]. Poiché Keplero assume che rette parallele s'incontrano all'infinito, una retta che intercetti il fuoco all'infinito e la parabola (in qualsiasi suo punto) sarà parallela all'asse.

---

[83] Idee analoghe sono accennate anche in *De lege virium*, n. 17 (dove Boscovich immagina di far ruotare la tangente a una curva con una cuspide) e n. 105 (dove gli asintoti vengono di fatto trattati come archi di una circonferenza di raggio infinito).

[84] Vedi N. Cusano, *De Docta Ignorantia*, I,13; sull'equivalenza fra circonferenza infinita e retta prima di Cusano vedi M. Böhlandt, *Verborgene Zahl – Verborgener Gott. Mathematik und Naturwissen im Denken des Nicolaus Cusanus*, Franz Steiner Verlag, Stuttgart 2009, pp. 93-96. Per l'influenza di Cusano sulla matematica di Keplero vedi E.J. Aiton, *Infinitesimals and the Area Law*, in *Internationales Kepler-Symposium Weil der Stadt 1971*, Gerstenberg, Hildesheim 1973, pp. 285-305.

[85] Vedi J. Kepler, *Ad Vitellionem paralipomena, quibus astronomiae pars optica traditur*, Francofurti, Apud Claudium Marnium & Haeredes Ioannis Aubrii, Anno MDCIV, pp. 92-96, in particolare p. 92. Per il metodo di Keplero vedi J.V. Field, *Two mathematical inventions in Kepler's* 'Ad vitellionem paralipomena', «Studies in History and Philosophy of Science» 17/4, 1986, pp. 449-468. Vedi anche A.E.L. Davis, *Systems of Conics in Kepler's Work*, in «Vistas in Astronomy», 18, 1975, pp. 673-685.

[86] J. Kepler, *Ad Vitellionem paralipomena*, cit., p. 93.

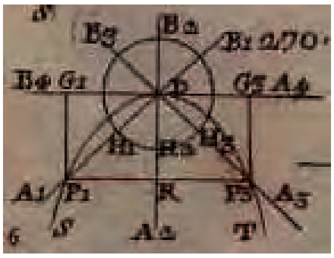


Figura 8. Diagramma semplificato dalla figura 270 del *De transformatione locorum geometricorum*: la continuità della parabola.

L'argomentazione di Boscovich nel *De transformatione locorum geometricorum* circa la continuità della parabola segue questo modello, sebbene con una sfumatura assai diversa. Si faccia ruotare la secante di una parabola attorno al vertice D e si consideri l'intersezione P_1 più lontana dall'asse (Figura 8); se P_1 si allontana all'infinito lungo una 'gamba' della parabola, esso «esisterà sempre da qualche parte, finché A_2B_2 sarà parallela all'asse, nel qual caso […] P non sarà in nessun luogo: ma, avanzando la stessa retta in A_3B_3, si avrà subito P_3 nella gamba TD, poiché il punto percorrerà per intero questa gamba». Sicché per Boscovich la continuità non è solo una proprietà del sistema delle coniche, bensì una caratteristica intrinseca di ciascuna: «Anche la parabola sarà una curva continua che in qualche modo ritorna su se stessa nell'ordine DP_1S (*infinito*) TP_3D»[87]. Sulla scorta di questa concezione della continuità delle coniche ottenuta per mezzo del passaggio per l'infinito, Boscovich poteva allora interpretare i numeri negativi sul piano cartesiano come simboli di quantità «più che infinite», utilizzando una locuzione che era stata introdotta

[87] R.G. Boscovich, *De transformatione locorum geometricorum*, cit., n. 740, p. 347. La dimostrazione geometrica segue nel successivo n. 741 (pp. 347-348): tracciata una sequenza di circonferenze con centro in D di raggio via via maggiore, per ogni circonferenza l'arco intercettato dalla parabola corrisponderà a una frazione minore rispetto alla circonferenza precedente. Ma stando a Boscovich, nel caso di una circonferenza di raggio infinito la frazione deve ridursi a un *punto* (non a una quantità infinitesimale, come avrebbe chiarito in *De continuitatis lege*, nn. 79-88), sicché «ciò va a ulteriore sostegno dell'idea della continuità delle gambe ST e sembra escludere un salto infinito dalla gamba S a T in tale moto continuo del punto P che percorre l'intero ramo della parabola, il quale ramo in qualche modo torna su se stesso» (p. 348). Sulla concezione boscovichiana della relazione fra legge di continuità e infinito vedi anche C.F. Manara, M. Spoglianti, *R.G. Boscovich e i precursori di V. Poncelet*, in «Rendiconti del seminario matematico di Brescia», III, 1979, pp. 142-180; I. Martinović, *Theories and inter-theory relations in Bošković*, in «International Studies in the philosophy of science», 4, 1990, in particolare pp. 251-258; E. Stipanić, *Sur le continu linéaire de Boscovich*, in *R.J. Boscovich. Vita e attività scientifica – His Life and Scientific Work*, cit., pp. 477-489.

da John Wallis nella *Arithmetica infinitorum* (1656) ed era stata al centro di una polemica cui avevano preso parte Johann Bernoulli, Pierre Varignon e infine Guido Grandi con il suo *De infinitis infinitorum, et infinite parvorum* (1710)[88].

Wallis aveva enunciato tale concezione in due brevi passaggi dell'*Arithmetica Infinitorum* (Proposizioni CI e CIV) ove trattava la quadratura di curve le cui equazioni contengono indici negativi. Il problema era trovare il rapporto fra l'area sottesa a una curva e il parallelogramma inscritto in essa. Occupandosi di determinare aree definite da curve di equazione $y = \frac{1}{x^n}$, in cui una coordinata è proporzionale alla reciproca dell'altra o a una sua potenza, aveva dimostrato che il rapporto fra l'area sottesa alla curva e quella del rettangolo inscritto dev'essere dato da $\frac{1}{n+1}$. Nella curva iperbolica di equazione $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, dove $n = -\frac{1}{2}$, il rapporto fra l'area sottesa e il rettangolo inscritto è dunque $1{:}-\frac{1}{2}+1$, cioè $1{:}\frac{1}{2}$. Per l'iperbole, di equazione $y = \frac{1}{x}$, dove $n = -1$, il rapporto vale $\frac{1}{0}$, che Wallis assume come uguale a infinito (vedi per esempio Prop. XCI). Infine, in curve in cui $n < -1$, si avranno rapporti del tipo $\frac{1}{-1}$, $\frac{1}{-2}$, $\frac{1}{-3}$, ecc. D'altra parte, poiché il rapporto tende a infinito quanto più il denominatore si approssima a zero e $\frac{1}{0} = \infty$, Wallis concludeva che in curve caratterizzate da $n < -1$ (tali cioè da dare luogo a rapporti con denominatore negativo), il rapporto *fra l'area* sottesa alla curva e *l'area* del rettangolo inscritto «*major erit quam infinita, sive 1 ad 0*» (Prop. CIV)[89].

---

[88] Si veda J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, in *Johannis Wallis S.T.D. Opera mathematica*, vol. I, Oxoniae, e Theatro Sheldoniano, 1695, Scolio alla Prop. CI, pp. 407-408 e Prop. CIV, p. 409. Non è possibile, in questa sede, presentare anche solo sommariamente la polemica, per la quale si rimanda alla documentazione raccolta in G. Grandi, J. Hermann, *Carteggio (1708-1714)*, a cura di S. Mazzone e C.S. Roero, Olschki, Firenze 1992. Di Grandi si veda, in particolare, *De infinitis infinitorum, et infinite parvorum*, Pisis, Ex Typographia Francisci Bindi, 1710. La corrispondenza fra Johann (I) Bernoulli e Varignon è raccolta in *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, bearbeitet und kommentiert von P. Costabel und J. Peiffer, Bd. 2-3, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin 1988 u. 1992.

[89] Sull'intera questione vedi J.F. Scott, *The Mathematical Work of John Wallis*, Chelsea Publishing Company, New York 1981 (edizione originale Londra 1938), pp. 43-46. Per una presentazione tecnicamente efficace, sebbene storicamente disinvolta, vedi anche R. Reiff, *Geschichte der unendlichen Reihen*, Laupp, Tübingen 1889, pp. 6-8. Come sottolineato da Jacqueline A. Stedall, il riferimento al contesto geometrico della quadratura di curve è essenziale, mentre il fatto che altrove Wallis adotti le usuali regole di divisione con i numeri negativi rende indebita ogni generalizzazione algebrica. Vedi J.A. Stedall, *Introduction:* The Arithmetic of Infinitesimals, in J. Wallis, *The Arithmetic of Infinitesimals*, Springer, New York, 2004, p. XXIV. Sull'interpretazione della nozione

A questa idea aveva obiettato Pierre Varignon in una lettera indirizzata a Johann Bernoulli datata 26 agosto 1697 e poi, in maniera assai più articolata, in un saggio inviato allo stesso Bernoulli il 20 agosto 1703 e pubblicato in maniera pressoché identica sulle *Mémoires de l'Histoire de l'Academie Royale des Sciences* il 3 febbraio 1706. In breve, stando a Varignon, «tutti questi più che infiniti non sono altro che finiti negativi e rovesciati»[90]. D'altra parte, doveva sottolineare poi,

> i segni + e – sono semplicemente simboli di operazione, cioè di addizione e di sottrazione, che si compiono sulle grandezze a cui sono applicati; essi non modificano di per sé il valore e sono ben lungi da poterlo rendere meno di nulla, come invece bisognerebbe secondo Wallis. Mille scudi che devo valgono altrettanto di mille scudi che avessi; 6 ad aggiungere vale lo stesso di 6 a togliere e così via […]. Tutta la differenza sta nel fatto che gli spazi espressi da queste formule [ove cioè compaiono denominatori negativi] sono invertiti l'uno rispetto all'altro, come le espressioni negative stanno ovunque a indicare in geometria.[91]

Quanto a Boscovich, considerando la retta infinita come la circonferenza di cerchio di raggio infinito, egli poteva leggere l'idea di Wallis (pur non citandolo mai direttamente) come il segno del passaggio dalle quantità positive a quelle negative attraverso l'infinito, «perché nelle quantità negative bisogna sostituire la sottrazione all'addizione anche quando queste hanno luogo mediante passaggio di un punto per l'infinito, benché l'analoga della quantità che si ha prima dell'allontanamento all'infinito sia assolutamente e direttamente non tale quantità negativa, bensì quella quantità positiva fatta passare per l'infinito, che – in base all'idea espressa sopra – è detta più che infinita»[92].

---

delle grandezze più che infinite vedi anche G. Peacock, *Report on the recent Progress and present State of certain Branches of Analysis*, in *Report on the Third Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, John Murray, London 1834, pp. 232-239; F. Waismann, *Einführung in das mathematische Denken*, DTV, München 1970, pp. 47-51.

[90] Varignon à Jean Bernoulli, Paris, le 26 août 1697, in *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, cit., Bd. 2, pp. 126-127.

[91] P. Varignon, «Reflexions sur les Espaces plus qu'infinis de M. Wallis», in *Histoire de l'Academie Royale des Sciences. Mémoires*, 1706 (Paris 1707), p. 17; vedi per raffronto Varignon à Jean Bernoulli, Paris, le 20 août 1703, in *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, cit., Bd. 3, pp. 101-106. Si noti che il titolo ha una lieve ma significativa modificazione: nell'allegato alla lettera per Bernoulli esso suonava: «Reflexions sur les plus qu'infinis de M.r Wallis».

[92] R.G. Boscovich, *De transformatione locorum geometricorum*, cit., n. 754, pp. 361-362. Boscovich aveva introdotto l'espressione al n. 753, precisando che una quantità espressa come COPB∞AP′ (che, riferito alla figura pertinente, corrispondeva a un seg-

Tutto ciò investiva immediatamente il significato fisico da attribuire al ramo D´E´F´G´ (Figura 6), posto per così dire al di qua dell'asintoto AB. Quelle distanze non possono essere interpretate come negative per due motivi, entrambe legati alla matematica della curva. Anzitutto, un punto non può venire attratto al di là di un altro, perché la forza repulsiva cresce all'infinito alle minime distanze (nel grafico riportato nella Figura 6, un punto in A non può attrarre un qualsiasi punto fino a spingerlo, per esempio, in E′, perché la forza repulsiva cresce asintoticamente avvicinandosi a A); ciò equivale a dire che non si può passare alle grandezze negative transitando per lo zero (una delle due possibilità indicate da Boscovich nel *De transformatione locorum geometricorum*). Ma anche la seconda possibilità – il passaggio alle quantità negativa attraverso l'infinito – è esclusa: di fatto, per le proprietà matematiche della curva (racchiuse da Boscovich nell'espressione *legge di continuità*), il ramo 'negativo' rappresenta piuttosto la parte di curva che 'ritorna' dopo avere toccato l'asintoto in un punto posto all'infinito, e solo per convenzione le quantità negative vengono considerate minori di zero[93]; tuttavia, poiché il dominio della natura è quello del finito, come Boscovich aveva ricordato nel *De continuitatis lege* (n. 116), ciò che accade a distanza infinita riguarda la speculazione geometrica.

Perciò, scrive Boscovich nel *De lege virium* (n. 74), «dell'arco D´E´F´G´ […] non abbiamo molto da preoccuparci». Non è dotato di significato fisico *in sé*, perché non può essere considerato in sé: in quanto continuazione della curva ininterrotta a distanze oltre ogni limite assegnabile, esso partecipa del significato fisico della curva, e non può esserne separato (benché se ne possa o se ne debba astrarre). È solo la

---

mento generato da un punto che è stato "fatto passare per" l'infinito) «dev'essere detta in qualche modo sia positiva sia *plusquam infinita*». Un analogo modo di esprimersi non era estraneo neppure a Euler: «Sembra in accordo con la verità se diciamo che le stesse quantità che sono minori di zero possono essere considerate maggiori dell'infinito. Infatti, non solo dall'algebra, ma anche dalla geometria apprendiamo che si dà un duplice salto dalle quantità positive a quelle negative: l'uno attraverso lo zero, cioè il nulla, l'altro attraverso l'infinito; e impariamo pure che le quantità, sia crescendo da zero sia diminuendo, tornano su se stesse e ritornano allo stesso termine 0, cosicché quantità maggiori dell'infinito sono come minori di zero e quantità minori dell'infinito coincidono con quantità maggiori di zero» (L. Euler, «De seriebus divergentibus», in *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 5, 1760, § 8, p. 210; poi in: *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, a cura di F. Rudio, A. Krazer, P. Stäckel, Ser. I, *Opera Mathematica*, vol. XIV, Teubner, Lipsiae et Berolini 1925, pp. 585-617, in particolare p. 592).

[93] Così Boscovich al matematico Giuseppe Calandrelli: «Trovo che la moltiplicazione de' due negativi, che dà il positivo, non vale, che quando si considerino le quantità negative come minori dello zero; ma che allora un negativo a un positivo non sta come questo a un negativo: il quarto proporzionale non è negativo, ma più che infinito, secondo l'idea, che io ho data dal passaggio per l'infinito nel terzo tomo de' miei elementi». (Boscovich a Calandrelli, 11 febbraio 1782; ora in *ENc*, IV, p. 24).

dedizione alla matematica, la dedizione alla legge di continuità, ciò che impedisce a Boscovich di non considerarlo in generale, ciò che lo spinge a disegnarlo.

Un problema peculiare, infine, presenta l'arco finale della curva delle forze, che esprime gli effetti gravitazionali, con la forza approssimativamente proporzionale all'inverso del quadrato delle distanze (in altre parole, osservando la Figura 6, TV descrive approssimativamente un arco di curva iperbolica di forma $\frac{k}{x^2}$, dove x indica la distanza). Se esso tendesse effettivamente all'asintoto, la forza di attrazione, per quanto sempre più piccola, non si estinguerebbe mai, producendo un problema di stabilità generale del sistema già noto a Newton. Se la gravità non è limitata unicamente al sistema Sole-pianeti, ma agisce anche fra le stelle fisse, ciò a lungo andare dovrebbe portare al collasso dell'Universo (si tratta di quello che, in una successiva e più precisa versione matematica, sarebbe divenuto noto col nome di *paradosso cosmologico* o *gravitazionale*). Stimolato dal teologo Richard Bentley sul problema, nella Quaestio 20 all'*Optice* (1706) Newton si chiedeva: «Che cosa impedisce al Sole e alle stelle fisse di cadere una contro l'altra?»[94]. La sua risposta doveva consistere in un atteggiamento pragmatico coniugato con un argomento teologico: da una parte le stelle, distribuite in maniera pressoché uniforme nell'Universo, sono così distanti da non avere l'una sull'altra effetti gravitazionali degni di nota: sono perciò in uno stato di quasi-equilibrio; d'altra parte l'equilibrio completo del sistema richiede un continuo intervento di Dio.

Ma l'intrinseca instabilità dell'Universo, che per Newton costituiva la miglior prova della provvidenza divina, agli occhi di Boscovich doveva trasformarsi in una enigmatica macchia sul *curriculum* di perfezione del creatore, che crea soltanto cose perfette. Così Boscovich riassumeva il paradosso, a un tempo cosmologico e teologico, nel *De lege virium in natura existentium*:

> Se la gamba [TV] è davvero asintotica e procede all'infinito nella parte attrattiva, tutta la materia tenderebbe a unirsi, giungendovi completamente in lungo tempo; a meno che vengano violate le leggi dapprima stabilite, al punto che la natura stessa sia stata formata in modo tale che le leggi, che riteniamo stabilite dall'Artefice Divino per la perenne conservazione della natura (sicché mentre le parti nascono e muoiono, essa possa perdurare con le proprie leggi), precipitino sino a distruggersi da sole. (n.73)

La questione si trovava già accennata nel *De viribus vivis* (n. 59). Qui Boscovich, pur non nominandolo esplicitamente, aveva evidentemente presente la domanda posta da

---

[94] «*Quidnam est quod impedit, quominus Sol & Stellae fixae in se mutuo irruant?*» I. Newton, *Optice*, cit., p. 314; vedi anche per raffronto la corrispondente Query 28 della quarta edizione inglese (1730): I. Newton, *Opticks*, cit., p. 369: «*What hinders the fix'd stars from falling upon one another?*».

Newton nell'*Optice*. La sua risposta – benché espressa in forma dubitativa – era che appunto la sua legge rappresentava ciò che *impedisce al Sole e alle stelle fisse di cadere una contro l'altra*:

> Ma che accadrebbe se, allo stesso modo, anche le stelle fisse fossero collocate su certi limiti di tutte le attrazioni e repulsioni; cioè se la curva […] discordasse anche alle massime distanze (oltre i pianeti), così come a quelle minime, dall'iperbole che esprime la gravità decrescente secondo la legge dell'inverso del quadrato delle distanze, e intersecasse più volte l'asse magari in moltissimi altri punti? Esse non avrebbero forse conservato la stessa distanza l'una dall'altra immediatamente, senza precipitare l'una sull'altra, e il mondo intero non sarebbe forse costituito come una di quelle particelle più grandi? Perché non dovrebbe esser stata questa la causa che le ha collocate a distanza tanto immensa da noi e fra loro? (*De viribus vivis* n. 59.)

Tre anni dopo, il *De lumine* (n. 6) avrebbe avanzato una proposta più secca e meno elusiva, senza alcun riferimento (ancorché indiretto) all'*Optice*: «[…] Alle distanze maggiori – alle quali si trovano i pianeti e che sono descritte dall'arco [STV] – la curva deve assumere una forma prossima all'iperbole che ha per asintoti [il prolungamento di BA e la retta AC], ove le ordinate [*op*, *vs*] sono inversamente proporzionali al quadrato delle distanze [A*o*, A*v*: sicché STV approssima piuttosto una curva iperbolica di forma $\frac{k}{x^2}$]. Alle distanze massime – alle quali si trovano le stelle fisse da noi e fra loro – la curva può tornare a intersecare l'asse in punti qualunque». Ma solo sulla base delle speculazioni matematiche del *De viribus vivis*, che nella *Theoria* (nn. 170 e 405) vengono applicate al paradosso cosmologico, ciò assume un significato generale, che lega insieme piano teologico, fisico e matematico. Nella *Theoria*, Boscovich precisava che non si può escludere che una curva delle forze termini con un arco unicamente attrattivo, tale da portare, in un tempo sufficientemente lungo, «non solo questo nostro Sistema solare, ma l'intera natura fisica» alla distruzione completa per agglomerazione «in un'unica massa informe». Ma faceva pure notare che la sua teoria apriva «una possibile via per evitare la catastrofe universale», e ciò sembrerebbe «meglio accordarsi con l'idea di Provvidenza divina». Tale strada risulta aperta non appena si ammetta la seguente congettura fisica: «A distanze maggiori delle distanze massime dal Sole, raggiunte da qualsiasi cometa appartenente al nostro Sistema solare», l'ultimo arco «torna a intersecare l'asse delle ascisse e a oscillarvi [*contorqueatur*]», in modo che a distanze maggiori di quelle delle stelle fisse agisca una forza repulsiva che – per dirla con Newton – riesca a impedire al Sole e alle stelle fisse di cadere una contro l'altra. Mentre tale congettura non è ammessa dalla teoria di Newton, se non introducendo qualche stratagemma *ad hoc*, essa concorda con la matematica della curva esplorata nel *De lege virium* (nn. 85 ss.), che non prescrive la forma degli archi, il numero delle intersezioni e le distanze cui hanno luogo (vedi, in particolare, il n. 101 e il successivo Corollario 6).

5.2. *Aspetti quantitativi della curva delle forze*

La «Soluzione analitica di un problema determinante la natura della legge delle forze», che – come accennato sopra – verrà ripresa nella *Theoria*, assomiglia più a un programma di ricerca che a una vera e propria soluzione (d'altra parte, un'embrionale, alquanto vaga formulazione si trovava già in *De viribus vivis*, n. 56). Tale programma viene enunciato compiutamente e in termini assai generali al n. 75 del *De lege virium in natura existentium*: «Problema: Trovare la natura di una curva in cui, esprimendo le ascisse le distanze, le ordinate esprimano forze che variano in un qualsiasi modo al variare delle distanze, che passino da repulsive ad attrattive e da attrattive a repulsive in limiti dati (quale che sia il loro numero), le quali, però, siano repulsive alle distanze minime, divenendo via via più intense in modo che velocità qualunque, grandi a piacere, si estinguano a due a due». Per soddisfare a tale problema, dato un sistema di coordinate cartesiane x, y, Boscovich costruisce la seguente equazione (nn. 77-79):

$$y = \frac{z^m + az^{m-1} + bz^{m-2} + cz^{m-3} + \cdots + f}{z(z^r + gz^{r-1} + hz^{r-2} + \cdots + l)}$$

ove z è uguale a x^2; a è la somma dei quadrati di tutti i valori AE, AG, AI, AL, AN, AP, AR, ecc. (cioè le distanze dall'origine degli assi per ogni limite), presi con segno negativo; b è la somma dei prodotti di tutti quei quadrati presi a due a due; c è la somma dei prodotti a terne, e così via; infine, f è il prodotto di tutti i quadrati. La quantità m che compare a esponente di ogni z al numeratore è il numero dei valori AE, AG, AI, ecc. La curva è perciò espressa nei termini di una serie convergente di potenze dell'inverso del quadrato della distanza. A questo proposito, è bene ricordare che nella *Introductio in analysin infinitorum* (1748) Leonhard Euler aveva dichiarato che ogni funzione può venire sviluppata come una serie di potenze[95].

L'espressione analitica viene costruita come un rapporto fra da due polinomi espressi nella forma più generale. Denotati con P e con Q rispettivamente il numeratore e il denominatore e scegliendo l'esponente r e le costanti g, h, l al denominatore in modo tale che il rapporto $\frac{P}{Q}$ sia ridotto ai minimi termini, è lecito aspettarsi di poter trovare le intersezioni fra la curva e l'asse delle ascisse (cioè quelli che Bosco-

[95] L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Tomus I, Bousquet, Lausannae 1748, in *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, cit., Ser. I, vol. VIII, § 59, p. 74. Boscovich conosceva indubbiamente la *Introductio*, citata fra i libri necessari all'insegnamento delle matematiche a Pavia (vedi M.G. Lugaresi, *Boscovich in Pavia and his relationship with Giovanni Antonio Lecchi*, cit.). Sul concetto di funzione nel XVIII secolo e il suo rapporto con quello di espressione analitica vedi G. Ferraro, *The Rise and Development of the Theory of Series up to the Early 1820s*, Springer, New York 2008, pp. 205-211.

vich chiama «limiti») quando P = 0, mentre gli asintoti quando Q = 0 o è infinitamente piccolo (si vedano i nn. 81 e 84).

Nei numeri 80-91 del *De lege virium* si dimostra che la curva soddisfa alle seguenti condizioni, date al n. 76:

1. Dev'essere «regolare e semplice», cioè non è composta da più archi di curve differenti.
2. Deve intersecare l'asse delle ascisse in alcuni punti e solo in quei punti (detti limiti) e, considerati entrambi i rami, lo interseca «a coppie di distanze AE´, AE; AG´, AG, ecc., uguali da una parte e dall'altra e quale che sia il loro numero».
3. «A ogni ascissa corrisponda una e una sola ordinata».
4. Ad ascisse uguali ma di segno contrario, prese di qua e di là dell'asse y, corrisponda la stessa ordinata.
5. Le ordinate abbiano l'asse y per asintoto e l'area BAED risulti infinita (Boscovich ricorda al n. 69 che si dimostra facilmente che per soddisfare a tale condizione il rapporto fra le ordinate e le ascisse della prima «gamba» [*crus*] della curva, cioè l'arco ED che tende asintoticamente all'asse delle ordinate, dev'essere della forma $\frac{1}{x^n}$, con $n \geq 1$)[96].
6. «Archi delimitati da intersezioni qualsiasi possano essere variati a piacere, e allontanarsi a distanze qualunque dall'asse C´AC, avvicinandosi a piacere a qualunque arco di qualsiasi curva, intersecandolo, toccandolo in un punto o osculandolo con qualsiasi tipo di osculazione, quali e quanti siano i punti dati di tali curve». In altre parole, l'espressione analitica della curva non deve determinare la 'forma' dei singoli archi compresi fra limiti qualunque.

Rimandando la discussione dettagliata di ciascuna condizione e delle dimostrazioni che Boscovich fornisce a una sede più opportuna, ci limitiamo qui a sottolineare gli aspetti più generali e notevoli di questa Soluzione.

Come già ricordato, il grado della curva determina il numero delle intersezioni della stessa sull'asse delle ascisse; viceversa, noto il numero delle intersezioni della curva sull'asse x, è possibile risalire al grado della stessa. Dal punto di vista empirico è quest'ultima la via da seguire: stando al *De lege virium* (n. 68), i limiti sono di

[96] Per convincersene è sufficiente calcolare l'area sottesa a una curva definita dalla funzione $f(x) = \frac{1}{x^n}$ nell'intervallo da 0 a 1 in tre casi, per esempio con $n = 1, n = 2$, $n = \frac{1}{2}$; si avranno così rispettivamente $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Il valore dell'integrale improprio $\int_0^1 \frac{1}{x^n}$ tenderà a infinito per $f(x) = \frac{1}{x}$ e $f(x) = \frac{1}{x^2}$, mentre sarà 2 per $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Vedi anche R.G. Boscovich, *Theoria philosophiae naturalis*, ed. veneta, cit., nota *l* al n. 175.

numero imprecisato (Boscovich si limita a dire che sono «*quamplurimi*», alla lettera «quanto più numerosi»; allo stesso modo li definirà nella *Theoria*, n. 115); occorrerà trovarli sperimentalmente, come del resto veniva anticipato nel *De viribus vivis* (i punti ove il verso della forza s'inverte «*ex phenomenis investiganda sunt*», n. 56). Il grado della curva, dunque, rimane ignoto, in attesa di venire determinato, per così dire, per via empirica.

Ne viene che il grafico generale della curva presentato nella Figura 9 del *De lege virium* e divenuto l'emblema, con la *Theoria*, della concezione di Boscovich, è solo una di infinite forme possibili, con la restrizione prevista dal Corollario 2 (dopo il n. 93): la curva può intersecare l'asse delle ascisse «secondo un angolo qualsiasi, ma in modo tale che l'angolo che l'arco di curva forma dalla parte di A mentre si avvicina all'asse C´AC, non sia maggiore di un angolo retto». Sicché la curva può essere alquanto esotica, tanto che (Corollario 5, dopo il n. 100) archi di attrazione o repulsione fra due limiti qualunque «possono allontanarsi quanto si vuole dall'asse» delle ascisse, a prescindere dalla distanza dall'origine degli assi. Ciò significa che solo gli estremi della curva risultano fissati, in modo che la forza sia repulsiva massima alle minime distanze (tendente a infinito se la distanza tende a zero) e attrattiva minima a distanze interplanetarie (approssimando la legge dell'inverso del quadrato della distanza), per poi – *molto probabilmente* – tornare repulsiva su scale ancora maggiori. Ma a distanze intermedie non è definito *a priori* alcun comportamento regolare (il che non significa che esso non sia determinabile *a posteriori*, sulla base di eventuali evidenze empiriche): «Può accadere che [gli archi] più vicini all'asintoto si allontanino meno di quelli più lontani; oppure che, secondo un certo ordine, si allontanino dall'asse tanto meno quanto più sono lontani dall'asintoto; o ancora che, dopo un certo numero di archi che si allontanano di meno dall'asse, vi sia un qualche arco che se ne allontana moltissimo».

Si tratta di un passaggio fondamentale, che introduce un aspetto della legge delle forze e della relativa curva cui Boscovich accennerà pure nella *Theoria* (166-168): «*Corollario 6* [dopo il n. 101 del *De lege virium*]. La curva può avere come asintoto l'asse C´AC dalla parte di C´ e C, in modo tale che l'arco asintotico possa essere tanto repulsivo quanto attrattivo; e qualsiasi arco intercettato fra due limiti qualunque può allontanarsi all'infinito e avere per asintoto una retta perpendicolare all'asse, vicina a piacere all'uno o all'altro limite, o distante a piacere dall'uno o dall'altro». In tal caso si avranno asintoti intermedi, e la curva assume una forma simile a quella esibita nella Figura 14 della *Theoria* (qui riportata come Figura 9).

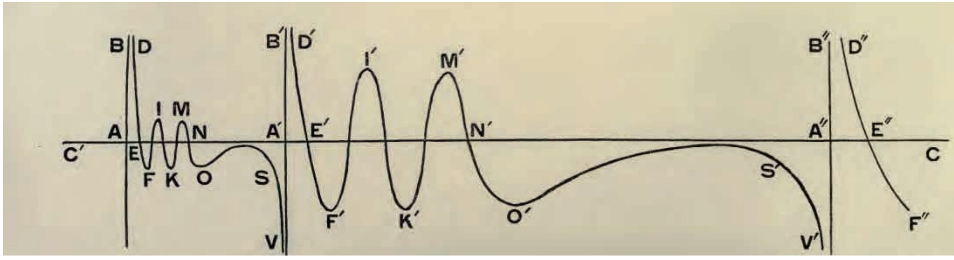


Figura 9. Dalla Figura 14 della *Theoria philosophiae naturalis* (ed. veneta, 1763, Tab. I). Qui ripresa dall'edizione Open Court, Chicago-London 1922, p. 138.

Si noti che in questo caso la curva simmetrica nella porzione di piano BAC′ viene omessa: ciò che è in gioco qui, infatti, è unicamente l'applicazione fisica della teoria, mentre la forma matematica, trattata sopra, è data per scontata. Si noti, inoltre, la peculiare forma degli archi vicino agli asintoti B′, B′′, ecc. Essa è spiegata nello Scolio 3 del *De lege virium* (dopo il n. 103), anche qui sulla base di un risultato esposto nel *De transformatione locorum geometricorum*[97].

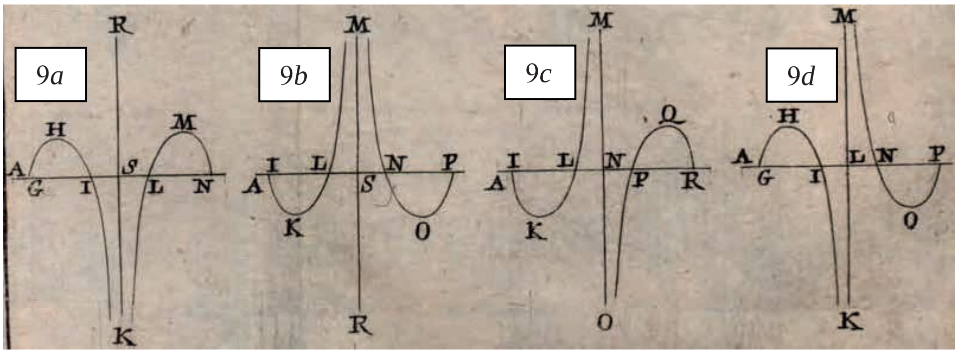


Figura 10*a-d*. Dalle Figure 10-13 del *De lege virium in natura existentium*: le quattro possibili coppie di archi asintotici di una curva.

[97] In particolare n. 743: «In generale in tutte le figure geometriche […], se una gamba [*crus*] va all'infinito, ci sarà sempre una seconda gamba che torna dall'infinito, o da una parte o da quella contraria, e che a quell'infinita distanza è in qualche modo connessa con l'altra, poiché certo in geometria è necessario osservare ovunque e nella maniera più scrupolosa la legge di continuità […]. Per tale ragione gambe [asintotiche] del genere saranno sempre in numero pari». Ma vedi anche *Theoria philosophiae naturalis*, ed. veneta, cit., nota *(i)* al n. 168.

Sono quattro i modi in cui «può accadere che l'arco della curva trovata vada all'infinito da qualche parte e abbia un asintoto parallelo all'asintoto precedente»; ma di essi, data la legge delle forze, l'unico valido è l'ultimo. Nei primi tre casi (n. 107), dato un punto materiale in A, l'asintoto (RK, MR, MO rispettivamente) verrà di volta in volta raggiunto – implicando, per Boscovich, una forza attualmente infinita e perciò stesso impossibile – da un qualsiasi punto Ω che sia compreso in LS (Figura 10*a*), LS (Figura 10*b*), LN o NP (Figura 10*c*). Infatti nella Figura 10*a* il punto Ω (che si trova dalla parte opposta dell'asintoto rispetto a A) subisce la forza attrattiva di A che lo porta all'asintoto; nella Figura 10*b* il punto Ω (che si trova ora dalla stessa parte di A rispetto all'asintoto) subisce la forza repulsiva di A che lo porta nuovamente all'asintoto; nella Figura 10*c* un punto $\Omega \in LN$ viene respinto sull'asintoto, un punto $\Omega_1 \in NP$ viene attratto anch'esso sull'asintoto. Nell'ultimo caso (Figura 10*d*) «un punto che giace fra I e L subisce attrazione, fra N e L repulsione: perciò, si allontana da L in entrambe le eventualità» (n. 108).

Il significato più ampio di quest'ultimo caso è illustrato in un'osservazione assai suggestiva della *Theoria*. Al n. 171 Boscovich riprende l'idea che gli asintoti 'intermedi' dividono la retta delle ascisse in intervalli nettamente separati, tali che «nessun punto [che giace in ciascuno di tali intervalli] può assolutamente uscire dallo spazio»[98] delimitato dall'arco asintotico repulsivo e dall'arco asintotico attrattivo. È come se («*ut it dicam*») ciascun intervallo compreso fra due asintoti intermedi definisse un mondo («*mundus*») ove la forza agisce su una scala tanto diversa da non interferire con quella agente in mondi di scala superiore o inferiore:

> Tutti i mondi di taglia inferiore presi assieme agirebbero semplicemente come un singolo punto rispetto al mondo successivo, di taglia maggiore […]. Da ciò potrebbe pure seguire che uno qualsiasi di questi mondi non verrebbe per nulla influenzato in maniera sensibile dai moti e dalle forze del mondo più grande. Invece, dato un tempo grande a piacere, l'intero mondo più piccolo subirebbe forze esercitate da qualunque punto materiale al di fuori di esso che approssimano il più possibile forze parallele e uguali. Pertanto, esse non avrebbero alcuna influenza il relativo stato interno di quel mondo. (n. 171)

Tale passo ha finito per generare una certa confusione nei lettori odierni, in particolare per il termine assai equivoco *mundus*, reso come *universe* nella traduzione inglese della *Theoria*, che ha rappresentato il principale canale di diffusione della concezione boscovichiana nel Novecento. A peggiorare l'equivoco, il traduttore e

---

[98] Vedi anche *De lege virium in natura existentium*, n. 113: «In verità, supposto che limiti del genere esistano, i punti che giacciono entro i limiti AL [si veda ancora la Figura 9*d*] non potranno mai uscirne, e i punti che giacciono fuori da tali limiti non potranno mai entrarvi».

curatore dell'edizione inglese, J.M. Child, ha introdotto poco sopra, al n. 170, un segno di nota che non ha riscontro nell'originale e che si riferisce alla continuazione di una nota precedente[99].

Per un migliore inquadramento, va ricordato che Boscovich aveva già avanzato nel *De viribus vivis* (n. 59) l'ipotesi che l'Universo sino alle stelle fisse fosse costituito secondo una sorta di legge di coesione che, reiterata su scale via via maggiori, regola qualsiasi aggregato di particelle: lì si chiedeva se, date alcune condizioni, le stelle fisse «non avrebbero forse conservato la stessa distanza l'una dall'altra immediatamente, senza precipitare l'una sull'altra, e il mondo intero non sarebbe forse costituito come una di quelle particelle più grandi». Dunque, al n. 171 della *Theoria* Boscovich non sta parlando di "universi", ma sta parlando *anche* dell'Universo (per lui certamente unico), visto come un aggregato di aggregati di punti che, su scale via via crescenti e rispetto a ordini di grandezza incomparabili gli uni con gli altri, si comportano tutti in maniera uniforme rispetto a un'unica legge. Quanto alla legge della sua composizione, l'Universo non è differente da uno qualsiasi degli aggregati che lo compongono.

Si ricordi poi che il n. 171 della *Theoria* è collocato all'inizio della Parte II, che concerne le applicazioni alla meccanica; ma Boscovich precisa subito che esso coinvolge piuttosto «l'applicazione della teoria alla fisica» (trattata nella Parte III), cioè avrebbe a che fare con le proprietà della materia e i fenomeni esplorati nella Parte III, intitolata appunto «Applicazione della teoria alla fisica», ove vengono trattati, tra gli altri, impenetrabilità, estensione, forma, volume, massa, densità, inerzia, elasticità, proprietà chimiche di vario tipo, fenomeni elettrici e magnetici e così via. E se si confronta il contenuto del n. 171 con considerazioni analoghe, svolte nel *De lege virium*, si comprende come non siano in gioco qui scale interplanetarie o maggiori, bensì interazioni fra masse ordinarie:

> Se ci fossero due masse di punti [*massae punctorum*], fatte in modo che i singoli punti dell'una fossero compresi in tali limiti delle distanze rispetto ai punti dell'altra, i punti di ciascuna massa potranno certamente avere moti diversi qualunque gli uni rispetto agli altri; ma i punti di ciascuna massa non potranno uscire da quei limiti, né una massa avvicinarsi all'altra o allontanarsene più di quanto quei limiti gli impongano. In questo modo qualche piccola massa potrebbe mantenersi unita grazie a un unico punto collocato alla massima distanza, cosicché nessuna forza grande a piacere possa scioglierla. (*De lege virium*, n. 114.)

---

[99] R.G. Boscovich, *Theoria philosophiae naturalis – A Theory of Natural Philosophy*, Open Court, Chicago-London 1922, pp. 132 e 135, nota *(k)*. Vedi per raffronto *Theoria philosophiae naturalis*, ed. veneta, cit., nota *(i)* al n. 168 (nella prima edizione del 1758, la nota corrispondente è la *(i)* al n. CLXVII).

Ciò sembra confermato da un ulteriore passaggio della *Theoria* (n. 405), in cui Boscovich torna sulla questione:

> Può darsi che – come è stato notato al n. 170 – l'ultimo arco della mia curva, che esprime la gravità, dopo aver raggiunto distanze maggiori delle distanze massime dal Sole di tutte le comete appartenenti al nostro Sistema Solare […] tornerà a intersecare l'asse e a piegarsi attorno a esso. In tal modo potrebbe darsi che l'intero aggregato delle stelle fisse insieme con il Sole sia una singola particella di ordine superiore rispetto a quelle che compongono il sistema, e che esso appartenga a un sistema immensamente più grande. Potrebbe pure darsi che vi siano moltissimi ordini di particelle, tali che particelle di una stessa classe siano totalmente separate da particelle di un'altra […] mediante molteplici archi asintotici alla mia curva, come ho spiegato al n. 171.

Per altro, è significativo che nello sviluppo della Parte II della *Theoria* Boscovich segua in maniera sostanzialmente fedele il testo del *De lege virium*, a cominciare appunto dalla discussione degli asintoti 'intermedi' sino al n. 201 della *Theoria* («Il caso in cui due punti debbano descrivere spirali attorno a un punto medio in quiete», parzialmente corrispondente al n. 123 del *De lege virium*; i nn. 198-199 della *Theoria* sviluppano invece il n. 124 del *De lege virium*). Ciò spiega anche perché, come si è accennato, nel riprendere la «soluzione analitica» dal *De lege virium*, Boscovich abbia eliminato non pochi paragrafi, che in realtà erano già stati ampiamente utilizzati come ingredienti fondamentali della *Theoria*.

Non entreremo qui in ulteriori dettagli, rimandando il lettore ai nn. 111-124 del *De lege virium* per la presentazione dei singoli problemi e delle soluzioni relative e invitandolo a un utile confronto con i nn. 166-201 della *Theoria*, vera e propria sintesi di un cammino iniziato quasi vent'anni prima a partire dal problema delle forze vive.

NOTA EDITORIALE

La presente edizione, con le relative traduzioni, è stata condotta sui seguenti esemplari:

1. *De viribus vivis*, Roma 1745.
Biblioteca del Museo Galileo – Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze:
MED 1790/ 03 (Collocazione storica: Antico 0225 A/03).

2. *De materiae divisibilitate et principiis corporum* [1748], in «Memorie sopra la fisica», IV, 1757, pp. 131-258.
Biblioteca Nazionale Braidense, Milano:
IT-MI0185 QQ. 01. 0089

3. *De continuitatis lege et ejus consectariis pertinentibus ad prima materiae elementa eorumque vires*, Roma 1754.
Biblioteca del Museo Galileo – Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze:
MED 1790/ 04 (Collocazione storica: Antico 0225 A/04).

4. *De lege virium in natura existentium*, Roma 1755.
Biblioteca del Museo Galileo – Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze:
MED 1790/ 05 (Collocazione storica: Antico 0225 A/05).

Le dissertazioni vengono qui pubblicate in ordine cronologico. Poiché il *De materiae divisibilitate* è stato originariamente redatto nel 1748 e – stando alla prefazione di Boscovich – solo leggermente modificato con alcune aggiunte in nota all'atto della sua pubblicazione, nel 1757, appare giustificato inserirlo dopo il *De viribus vivis*.

Alcune note sono state aggiunte alle traduzioni: poche fra esse contengono chiarificazioni al testo; altre riportano correzioni di evidenti errori materiali del testo latino di Boscovich (nel caso del *De continuitatis lege* integrano l'«Errata Corrige» inserita alla fine del volume nell'edizione sovvenzionata dal libraio Venanzio Monaldini); la maggior parte rinvia alle fonti citate da Boscovich, dando – ove possibile – riferimenti a passi precisi. Le sigle *ENo* e *ENc* utilizzate nelle note (sia dei testi sia dell'Introduzione) rinviano ai volumi dell'Edizione Nazionale Boscovich, rispettivamente della sezione Opere e della sezione Corrispondenza. I rimandi bibliografici alle fonti di Boscovich sono dati nell'Indice delle Opere citate che chiude ogni traduzione. In particolare, la traduzione di *De continuitatis lege* è stata confrontata con l'edizione tedesca R.J. Boscovich, *De continuitatis lege. Über das Gesetz der Kontinuität*, übersetzt und herausgegeben von J. Talanga, Universitätsverlag C. Winter, Heidelberg 2002.

A. M. D. G.

D E

VIRIBUS VIVIS

DISSERTATIO

Habita in Collegio Romano Soc. JESU

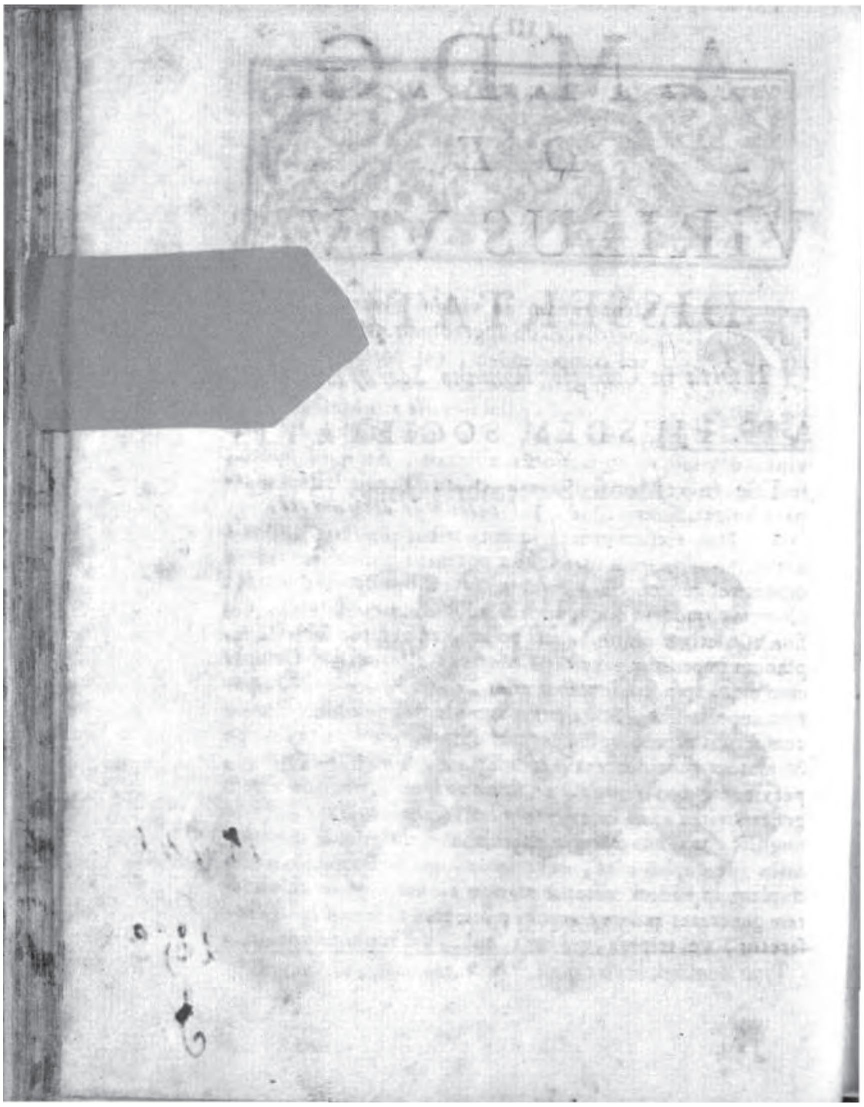
A PP. EJUSDEM SOCIETATIS

Die 6.: Menſe Septembri: Anno 1745.

Memoria 3a

ROMÆ, MDCCXLV.

Typis Komarek in via Curſus.)(*Superiorum permiſſu.*



Celeberrimam de virium vivarum mensura controversiam aggredimur vel dirimendam, vel componendam, vel potius summovendam: opus sanè arduum, & audax consilium: nulla enim fortasse alia Mathematicos primæ notæ, nulla certè Mechanicos gravius, diutiusque in factiones distraxit. At quid nocebit tentasse. Si res minus prospere cesserit; licebit saltem usurpare vulgatissimum illud: *Vel contendisse decorum est*.

1. Duo virium genera in corporibus universa distinxit antiquitas, quorum utrunque a potentiis quibusdam motus omnes vel generantibus, vel immutantibus ortum duceret: alterum, quod in nisu quodam ad motum consisteret, qui sinè ullo etiam motu haberi posset, ut ubi per subjectum planum impeditur gravitatis effectus: alterum quod semper cum motu ipso conjunctum esset, quod Peripatetici Impetum appellarunt, & ita per nisum illum summoto obstaculo censuerunt gigni, ac corporibus communicari; ut ejus ope & motum continuarent, & obstacula, si quæ se offerrent, pervincere conarentur, ac summovere. Utriusque autem generis vires a sola celeritate æstimari consueverant, ubi de singulis æqualibus materiæ particulis ageretur; ut nimirum nisus ille duplus esset, vel triplus, qui summoto obstaculo duplam in eadem materiæ particula, vel triplam velocitatem generaret eodem tempore; impetus autem duplus censeretur, vel triplus, qui cum dupla, vel tripla celeritate

 ejus-

ejuſdem particulæ conjunctus eſſet: ac proindè, ubi de inæqualibus materiæ quantitatibus, ſivè, quod idem ſonat, de inæqualibus maſſis ſermo eſſet; eſtimabantur vires utriuſque generis a ſummis celeritarum particularum omnium æqualium, nimirum à maſſis ipſis in ſimplicem celeritatem ductis.

2. Et quidem, quod ad primi generis vires pertinet, earum menſura facilè experimentis confirmabatur, cum & virium æqualitas, ſi æquales forent, ex æquilibrio innoteſceret, ac per æqualitatem ratio quoque, ſi forent inæquales, deduceretur, & celeritates dato tempore genitæ facilè obſervando
F. 1. detegerentur. In vertice *B* plani inclinati *AB* accuratiſſimè levigati ſit trochlea, filo *DBC* advoluto, e cujus altero extremo globus *C* liberè pendeat, ex altero bini æquales ex eadem materia globi *E*, & *D* partim ab ipſo filo, partim ab eodem plano inclinato ſuſtineantur. Quoniam niſum ad deſcenſum per planum inclinatum minorem experimur, quam ad deſcenſum liberum; invenietur facilè inclinatio illa, quæ globum *C* cum globis *E*, & *D* in æquilibrio ſiſtat. Eo caſu niſus ad deſcenſum globi *D*, æqualis niſui globi *E* æquabitur dimidio niſui globi *C*, cum ob æquilibrium primi illi duo ſimul hunc tertium ſolum adæquent. Jam verò ſi filo diſrupto diligenter notentur celeritates, quas in deſcenſu acquirunt eodem tempore globi *C*, & *D*; invenietur prioris celeritas poſterioris celeritatis dupla; in eadem nimirum ratione niſuum; quod idem generalius deprehenditur ſi in *D* quicunque æqualium globorum numerus appendatur, vel globus cujuſcunque maſſæ; celeritates enim ſingularum particularum in deſcenſu acquiſitæ eodem tempore erunt, ut niſus ex æquilibrio deducti, quod idem aliis quoque methodis, & in aliis virium generibus experiri liceret.

3. Quod verò ad ſecundi generis vires pertinet, tentatum quidem a Galileo, Merſenno, Ricciolio, aliiſque, ſed experimentis plures non ita notas circumſtantias involventibus, ut nihil inde erui poterit, quod controverſiæ occaſionem præriperet. Adhuc tamen uſque ad annum 1686.

ſecun-

ſecundi quoque generis virium menſura eadem ſatis communiter eſt adhibita. Eo autem anno in Actis Lipſienſibus Leibnitius ſchediaſma edidit, cui titulus: *Brevis demonſtratio erroris memorabilis Carteſii, & aliorum circa legem naturæ &c.*, in quo primi generis vires *Mortuas* appellavit, ſecundi generis *Vivas*, & illas quidem a maſſis in velocitates ductis, has vero a maſſis ductis in quadrata velocitatum æſtimandas cenſuit; ut nimirum idem corpus cum dupla velocitate delatum non duplam ſed quadruplam habere debeat vim vivam, cum tripla, vel decupla non triplam, vel decuplam, ſed nonculpam, vel centuplam: cujus novæ ſententiæ illud in primis protulit fundamentum vir celeberrimus, quod videret gravia ſurſum projecta aſcendere ad altitudines proportionales non celeritatibus ipſis, ſed celeritatum quadratis.

4. Et initio quidem non ita multos nova opinio ſectatores habuit, pleriſque adhuc veteri ſententiæ addictis, Papino inprimis recentem illam impugnante, cum quo aliquandiù certavit Leibnitius. Verum Joanne Bernoullio redintegrante bellum, qui novis elaſtrorum experimentis Leibnitianam ſententiam reſtituit, plurimi ſtatim per Germaniam potiſſimum, atque Italiam ſummi viri eaſdem partes amplexi ſunt, quas Hermannus elaſticorum globorum occurſibus, Polenus fovearum in molli corpore excavationibus factis impreſſione diverſorum globorum decidentium ex diverſis altitudinibus, alii aliis confirmare conati ſunt, ac ſtabilire; maximo auctoritatis pondere Leibnitianæ ſententiæ accedente a reliquorum Bernoulliorum, & Volfii ſuffragiis in Germania, Graveſandii, & Muſchembroekii in Hollandia, Comitis Jacobi Riccati jam olim, & nuper Patris Vincentii Riccati ejus filii ſummi e noſtra Societate Mathematici in Italia, ac demùm in Gallia ipſa veteri potius ſententiæ addicta Matronæ lectiſſimæ du Chatellet, quæ in ſuis phyſicis inſtitutionibus Leibnitianas partes acerrimè propugnavit.

5. Nec tamen vetus ſententia tanto auctoritatis pondere

obruta corruit, aut de suo dignitatis gradu devoluta est, plurimis per Galliam potissimum, & Angliam contra obnitentibus, & in hac quidem Stirlingio, ac Mac-laurino, in ea Mairanio summis viris, pro eadem tanquam pro aris, & focis acerrimè pugnantibus, quorum postremus ita nostro quidem judicio veterem explicavit sententiam, & ab omnibus adversariorum telis protexit; ut nihil jam ab experimentis afferri possit, quod Mairanii methodo cum ea optimè conciliari nequeat, analogia præterea, & simplicitate naturæ ipsi abunde faventibus: quem tantum virum & injuria carpit, & quidem acrius, quam par esset, Petrus Martinus in opusculo de viribus vivis edito quatuor ab hinc annis, licet eandem ibidem, quam Mairanius sententiam propugnet. Ubi illud sanè Martino contigit, quod sæpe quosdam primæ notæ Auctores carpentibus usuvenire solet, ut in eo maximè, in quo eos corrigendos putant, labantur ipsi. Rem totam aperiemus quam brevissimè, non quod hac nostra defensione indigere arbitremur celeberrimum virum in re satis patente per se ipsam; sed ut erga doctissimum hominem, nobisque amicissimum, qualecunque hoc obsequii nostri argumentum exhibeamus.

6. Inter cætera experimenta, quæ pro Leibnitiana sen-
F. 2. tentia afferri solent, illud est non vulgare, quo globus *A*, si demittatur successivè ex diversis altitudinibus *AB* in massam *MN* argillæ mollis, vel sebi, vel alterius ejusmodi materiæ cujuscunque, deprehenditur excavare foveas *DCE* proportionales ipsis altitudinibus, ex quibus globus demittitur: cumque ex legibus Galilei quadrata celeritatum, quas gravia cadendo acquirunt, sint ut altitudines, ex quibus cadunt; patet foveas ipsas esse proportionales non velocitatibus, sed velocitatum quadratis, ex quo Leibnitiani deducunt vires quoque vivas corporum, quarum nimirum effectus sit ejusmodi fovearum excavatio, non ipsis celeritatibus respondere, sed celeritatum quadratis. Id ipsum experimentum passim a Leibnitianis adductum recensuerat una cum aliis nonnullis in sua dissertatione Mairanius, quam

anno

anno 1728. Commentariis Academiæ Parisiensis inseruit, illud adjungens, ea in dubium revocari non posse, cum tradantur a viris æque doctis, ac in experimentorum diligentissima institutione exercitatis. Admisso autem experimento demonstraverat ex veteri ipsa de viribus vivis sententia, idem prorsus phænomenum consequi debere, si ratio temporis, quo velocitates singulæ amittuntur, habeatur: illud enim ostenderat, si earum virium, quæ in fovea excavanda amittuntur, ineatur ratio, duplam vim amitti non posse, nisi post quadruplum mollis illius materiæ loco motum, atque compressum.

7. Mairanii locum in notis in suam illam dissertationem Martinus producit, ubi etiam idem experimentum addit & a Fontenello traditum, ut exactè institutum, ac sæpius repetitum, & a Cribellio fuisse propositum, & a Poleno admissum, quod idem demum in fine ipsius dissertationis apud Muschembroekium quoque se legisse affirmat. Nihilo tamen minus *ego*, inquit, *si opus esset jurarem a nemine hoc experimentum fuisse institutum. Sed ignoscamus Mairano experimenti ignorationem, se enim in eo libenter credulum præbuisse apparet. Quis ei ignoscet id, quod fidenter tradit, experimentum ipsum cum vulgari virium æstimatione mire consentire?* Sub finem autem de Muschembroekio agens, *Opponit*, inquit, *varia experimenta, inter quæ non reticet illud globi cadentis ab inæqualibus altitudinibus, imprimentisque foveas proportionales altitudinibus ipsis; qui quidem error est ei communis cum Cartesianis, Leibnitianisque omnibus sic experimentum se habere tradentibus*. Mirum sanè videbitur contra tantam tantorum hominum, immò omnium Cartesianorum, ac Leibnitianorum licet contrarias inter se partes defendentium auctoritatem in quæstione de facto, hac nostra ætate, qua ubique diligentissimis, & crebro repetitis experimentis in naturam inquiritur, affirmasse, paratum se jurare a nemine hoc experimentum institutum, & Mairanii credulitatem incusasse. Nec minus admiratione dignus tantæ fiduciæ fons. Instituerat nimirum idem

experimentum Martinus, cujus ſucceſſum cum Mairanii, cæterorumque omnium teſtimoniis apprime conſentientem, ut ex ipſa ejus narratione conſtat, ipſe maximè iiſdem contrarium cenſuerat. Dimenſus enim fovearum profunditates *BC*, ſive arcuum *DCE* ſinus verſos, invenerat profunditatem foveæ impreſſæ a globo ex quadrupla altitudine decidente eſſe proximè duplam non quadruplam. At ii cum foveam nominant, non ejus profunditatem intelligunt, ſed ſpatium omne *DCE* longum, latum, & profundum, quod indicat quantitatem materiæ mollis loco motæ, atque compreſſæ, nimirum ſegmentum ſolidum ſphæræ, cujus ſegmenti axis eſt ipſa illa profunditas *CB*. Conſtat autem, ſi axes *CB* plurium ſegmentorum ad diametrum ſphæræ rationem exiguam habeant, fore ſegmenta ipſa proximè ut profunditatum quadrata; poſita enim ratione diametri ad circumferentiam ut 1. ad c, diametro ſphæræ $= a$, axe $CB = x$, eſt ſegmentum ſpæricum $\frac{1}{2} acxx - \frac{1}{3} cx^3$, in qua formula ſi x reſpectu a ſit ſatis exigua, ſecundum membrum contemni poterit ſine notabili mutatione primi; ac proinde ſegmenta ipſa erunt proximè ut $\frac{1}{2} acxx$, ſive ob $\frac{1}{2} ac$ conſtantem, ut xx, in duplicata ratione profunditatum. Quamobrem ex eo ipſo, quod Martino obvenerit fovearum profunditas proximè dupla in caſu altitudinis quadruplæ, colligitur foveam ipſam proximè quadruplam extitiſſe; quod Mairanius, quod Fontenellus, quod Muſchembroekius, quod Carteſiani, & Leibnitiani omnes, ipſo Martino teſte, haud illi quidem plus æquo creduli, ita ſe habere affirmaverant.

8. Nec primum hoc eo in genere Martini infortunium. Accuſaverat gravius ipſe in epiſtola illa de luminis refractione (de qua epiſtola & nos mentionem fecimus in diſſertatione De natura & uſu infinitorum, & infinitè parvorum edita anno 1741., & meminit Martinus in hoc opuſculo eodem anno edito) PP. Clavium, & Tacquetum, quod affirmarent è falſo directè ratiocinando verum demonſtrari poſſe, & integram diſſertationem de eodem argumento promiſerat. Nos ibidem, & quæ Martinus inter ſe confunderet,

& in

& in quo maximè falleretur, paucis expoſuimus, illud polliciti, ſi ejuſmodi diſſertationem edidiſſet, defenſionem ſuſcepturos, & quæ nobis tam in ea epiſtola, quam in edenda diſſertatione diſplicerent, evulgaturos. Edebat autem ipſe eodem ferme tempore opuſculum ſuum de virium vivarum menſura, cujus notis immiſcuit nonnulla, quæ ad ejuſmodi quæſtionem pertinerent. Cum vero ibidem nihil prorſus invenerimus, quod ad ea ſpectet, quæ nos obiecimus; cenſemus opuſculi impreſſionem abſolutam eſſe, ante quam noſtræ diſſertationis exemplum ad ipſum perveniret. Nec verò inter ea, quæ adjecta ſunt ibi, quidquam adeſt, quod nos magnopere moveat, ſivè rationem illam ſpectemus, qua Martinus utitur ad probandum, non poſſe e falſo deduci verum, ſive reſponſionem, qua Tacquetianam demonſtrationem conatur eludere. In ipſa enim ratione æquivocationem quandam latere, haud difficulter oſtendi poteſt, quod tamen manifeſtius patet ex ipſa Tacquetiana demonſtratione, in qua illud ſanè omninò inficiari Martinus non poteſt; ex falſa hypotheſi, quod recta linea, quam ibi Tacquetus nominat, perpendicularis ſit dato plano, deveniri ad veram propoſitionem, quod perpendicularis non ſit, abſque eo, quod ullum in toto illo diſcurſu ratiocinationis vitium deprehendi poſſit. Deducit quidem Tacquetus demonſtrationem eo, ut evincat, falſa illa hypotheſi admiſſa, angulum quendam, qui verè rectus eſſe debet, obliquum eſſe; ſed malè iccircò Martinus infert, a Tacqueto nihil niſi falſum ex falſo erui; nam in ea Tacquetus propoſitione non ſiſtit, ſed recta utique ratiocinatione ex illa anguli obliquitate jam deducta ad veram tandem propoſitionem progreditur, quod nimirum Recta illa ipſa dato plano perpendicularis non ſit, quæ propoſitio & deducitur ex falſo, & cum ex ipſa ſua contradictoria deducatur, evidenter vera deprehenditur. Verùm hic in eo fuſius immorari nec licet, nec libet: immorabimur fortaſſe alibi potiſſimum, ſiquid ad ea, quæ in noſtra illa diſſertatione propoſuimus, reponat uſpiam. Interea verò propoſita de viribus vivis controverſia ad ſe nos vocat.

9. Nos

9. Nos quidem posteaquam & phænomena omnia, & phænomenorum explicationes ab utriusque partis propugnatoribus propositas diù diligentissimè consideravimus, in eam tandem sententiam devenimus, quam hic proponimus propugnandam, *Vires vivas in corporibus nullas esse*: illud enim contendimus, phænomena omnia ita pendere a vi inertiæ, & momentaneis; ac perpetuo pereuntibus potentiarum actionibus, sivè viribus mortuis, ut vires vivæ sint prorsus superfluæ, ac ex illo Newtoni principio satis communiter admisso, causas non plures admittendas esse, quam quæ veræ sint, & effectibus explicandis sufficiant, omnino è physica reiiciendæ. Si eam sententiam satis comprobaverimos summovebitur ipsa de virium vivarum æstimatione controversia. Si autem adhuc virium vivarum nomine uti libuerit, & id nomen adnectere ideæ alicui objecta aliunde nota complectenti; tùm vero poterit ita adhiberi, ut vires vivæ vel massis respondeant in simplices celeritates ductis, vel massis ductis in quadrata celeritatum, quo quidem pacto controversia ipsa componeretur redacta ad litem de nomine. Si demum secluso principio illo, vires vivas licet superfluas illas quidem, & inutiles, quispiam omninò velit admittere; affirmamus, salvis phænomenis, admitti posse vel ita, ut respondeant massis in celeritates simplices ductis, vel massis ductis in celeritatum quadrata, ita tamen, ut simplicitati & analogiæ naturæ melius consulatur in priore, quam in posteriore sententia, quo demum pacto controversia dirimeretur. Hæc autem omnia cum exposuerimus; addemus ex ea occasione nonnulla, quæ ad corporum compositionem, & partium, ex quibus coalescunt, naturam, viresque pertinent, nobis saltem nova, & ut speramus nec injucunda, geometris potissimum, nec infæcunda, & quæ nostram hanc ipsam de viribus vivis sententiam simpliciorem reddant, atque elegantiorem.

10. Agnoscunt omnes utriusque sententiæ Mechanici vim eam in corporibus, quam Keplerus omnium primus vim *Inertiæ* appellavit, Newtonius vim insitam, & passivam.

Ea

Ea est determinatio quædam materiæ ad perseverandum in eo statu quietis, vel motus uniformis in directum, in quo semel est posita, nisi aliqua potentia cogat statum mutare. Ea vel est quædam naturæ lex Conditori libera, vel est quædam, ut scholasticorum voce utamur, exigentia conditionata ipsius essentiæ corporis, quam & Peripatetici possunt admittere, & si velint in qualitate etiam aliqua collocare, quæ habeat ejusmodi conditionatam exigentiam. In quo ea sita sit physice, hic nimirum non quærimus. Satis est nobis, quod eam in corporibus admittant Mechanici, tam ii, qui vires vivas admittunt solis velocitatibus proportionales, quam ii, qui velocitatum quadratis, cum quibus agimus. Ea vi inertiæ corpora si nullam habent velocitatem, quiescunt; si habent aliquam, eandem retinent, donec nova ab aliqua potentia generetur.

11. Porrò Velocitas, vel Celeritas, potest considerari (ut hic etiam scholasticorum utamur vocibus, hic maximè idoneis) in actu primo, & in actu secundo. Velocitas in actu secundo est relatio quædam spatii, quod percurritur, & temporis, quo percurritur: nec ejus idea quidquam aliud involvit præter tempus, spatium, & eorum relationem quandam, qua hæc celeritas eo major dicitur, quo plus spatiis eodem tempore percurritur motu uniformi, & quo minus tempus in eodem spatio percurrendo impenditur; ac proinde est ut spatium divisum per tempus. Huic celeritati in singulis particulis materiæ respondet quantitas motus dato tempore perfecti ab eadem particula, qui motus, cum sit translatio de loco in locum, est ut spatium percursum. Ac proinde in toto corpore est quantitas motus, ut summa celeritatum particularum omnium, sive ut celeritas in massam ducta. Hæc ipsis Mechanicæ tyronibus notissima sunt.

12. Velocitas in actu primo est ipsa determinatio, quam habet corpus ad hanc celeritatem in actu secundo; sive est determinatio percurrendi dato tempore determinatum spatium. Hanc velocitatem retinet corpus in motu uniformi

vi

(XII)

vi inertiæ; immò ea nihil est aliud, nisi ipsa vis inertiæ determinata a precedentibus dispositionibus, nimirum vel a primo statu, in quo eam materiam Conditor posuit, dum conderet, vel ab actionibus potentiarum, quæ in illam egerunt prius.

13. Potentiarum nomine intelligimus eas causas, quæ per actiones suas statum corporis mutant, quæ cum illud determinant ad habendam aliam celeritatem in actu secundo, dicuntur producere in ipso novam celeritatem in actu primo. Actio momentanea, qua hæc velocitas generari concipitur, dicitur vis activa, quæ nobis quidem est unica vis, a Leibnitio autem vis mortua dicta est. Ejusmodi potentiæ sunt impenetrabilitas in collisione corporum, si per contactum fiat: gravitas in accessu ad centrum, vel ad aliud corpus: ea causa, quæ, si partes quorundam corporum ad se plus æquo accedant, eas repellit, si recedant plus æquo, ad se invicem adducit, & dicitur vis elastica; causa pariter adhæsionis particularum corporum, qua unius motum altera sequitur; causa obsistens compressioni quorundam aliorum corporum, quæ figuram amissam non recuperant, & mollia dicuntur; & aliæ ejusmodi, si quæ sunt.

14. Eæ pariter potentiæ possunt reponi vel in libera Dei lege, vel in alia conditionata exigentia quadam essentiæ ipsius corporis, vel etiam a Peripateticis, si velint, in qualitate quadam, salvis prorsus phænomenis. In quocunque enim physicè sitæ sint ejusmodi potentiæ, modo eandem velocitatem in actu primo generent in corpore, sive ipsum ad eandem celeritatem in actu secundo determinent, eadem semper motuum phænomena habebuntur. Quanquam autem hic & actionis, & generationis nomine utimur; tamen nulla vera, & physica actione, aut productione est opus, in ea generatione velocitatis in actu primo; ut ipsa celeritas juxta ideam, quam de ea tradidimus, non est aliquid, quod physice producatur, & de novo adveniat. Habetur abunde per præsentem combinationem illius vel legis, vel exigentiæ conditionatæ, in qua vis inertiæ sita est, & illius alterius,

rius, in qua sita est potentia ipsa, ac per circumstantiam loci, vel aliam ejusmodi, quæ conditionem in potentia ipsa imbibitam determinet. Sic Gravitas per Newtonianos est quædam vel determinatio ipsorum corporum naturæ, vel potius libera Dei lex, qua si bina corpora posita sint in quacunque distantia etiam in vacuo, statim acquirant determinationem accedendi ad se invicem, & acquirendi novam celeritatem in actu secundo eo majorem, quo minus est quadratum distantiæ. Intelligantur ea corpora existere: intelligatur vis inertiæ, qua priorem celeritatem retineant si nulla potentia agat: intelligatur tanta determinata distantia; intelligitur genita nova celeritas in actu primo, determinatis conditionibus omnibus: & intelligetur nova celeritas perpetuo advenire, si intelligantur perpetuo determinari conditiones eædem. Nulla in hac idea involvitur vera productio cujusdam, quod sit velocitas in actu primo, nulla actio physica; quod quidem hic semel ita præmittimus, ut intelligatur semper, quo sensu actionem velocitatis generativam accipiamus, eamque usurpare nobis liceat imposterum, quin ullius vivæ vis productio ad velocitatis generationem requiratur.

15. Potentias plerunque concipimus tanquam perpetuo agentes, ut gravitatem, & elasticitatem. Eæ singulis momentis temporis solam producunt pressionem, quæ in velocitatem non transit ulla multiplicatione, sed solo ductu per tempus continuum; prorsus ut linea nulla sui multiplicatione evadit superficies, sed continuo ductu per aliam lineam. Verum impenetrabilitas, ut in congressu eorum corporum, quæ figuram nulla vi mutant, & dicuntur dura (quæ corpora an existant in natura hic non quærimus, ea autem inferius excludemus) ipso momento temporis, quo contactus fit, velocitatem generat; & tanquam per saltum mutat; atque idcirco vis, quæ in percussione exeritur, dicitur esse altioris ordinis, nec pura pressio utcunque multiplicata ipsam adæquat, sed solum, ut diximus, ducta per tempus continuum.

16. Pressio tamen ita cum velocitate connectitur, ut linea

nea recta cum plano. Ut enim recta linea per aliam datam rectam ducta in eodem angulo planum describit sibi proportionale, sic pressio per datum tempus continuata abit in velocitatem sibi proportionalem. Ut variata etiam linea, in quam altera ducitur, est planum genitum in ratione composita lineæ, quæ ducitur, & per quam ducitur; ita etiam variato tempore, quo eadem pressio durat; velocitas genita est in ratione composita pressionis, & temporis, per quod ea continuatur. Ut si in fig. 3. recta *EF* perpetuo maneat ejusdem longitudinis, dum per rectam *AC* ducitur ad angulos rectos; describit rectangulum, in quo singulis particulis *Ee* respondeant spatiola *FEef* æqualia; At si ipsa perpetuo vel crescat, vel minuatur, & fortasse etiam evanescat, ac ad partes oppositas abeat; aliam figuram planam describit, vel ad easdem partes jacentem, vel partim ad easdem, partim ad contrarias; sic & pressio, si semper ejusdem magnitudinis perseveret, motum generat uniformiter acceleratum, in quo singulis tempusculis æqualibus accedunt æqualia velocitatis incrementa; at si perpetuo varietur, producit motum difformiter acceleratum, in quo incrementa ipsa celeritatis tempusculis æqualibus facta, vel majora sint, vel minora perpetuo, aut etiam pressione directionem mutante, abeant in decrementa. Ut demum si spatiolum *Ee* concipiatur indefinitè parvum, ob differentiam rectarum *ef*, *EF* indefinitè parvam concipitur areola *FEef* tanquam rectangulum; Ita ob binarum pressionum differentiam tempusculo indefinitè parvo indefinitè parvam, motus etiam difformiter acceleratus tempusculo illo ipso concipitur tanquam uniformiter acceleratus. Quamobrem si segmenta *AE* rectæ *AC* exprimant tempora: recta autem *EF* exprimat pressiones ipsas; optimè per planum *BAEF* exprimetur ipsa celeritas, in quam abit pressio *EF* continuata per tempus *AE*. Quanquam ut omne aliud quantitatum genus, velocitates quoque per lineas exprimi poterunt, assumpta ad arbitrium una aliqua linea, quæ unam aliquam velocitatem exponat.

17. Ut autem hæc theoria generalior sit, in ipso æquilibrio, in quo oppositis pressionibus binæ potentiæ inter se pugnant, & nullus consequitur motus, nulla celeritas in actu secundo; concipimus tempore quovis continuo velocitates in actu primo produci, sed contrarias, & æquales, quarum proinde summa perpetuo maneat =0; actione autem potentiæ exercita momento temporis, quod temporis continui non est pars, sed terminus, eodem prorsus pacto, quo punctum in geometria non est lineæ pars, sed terminus, generari concipimus pressionem illam tantum, quæ ad celeritatem est ut linea ad superficiem.

18. Celeritas nova, quæ generatur, si generatur in eadem directione cum priore, additur ipsi, & exurgit utriusque summa, ut in analysi accidit quantitatibus eodem signo affectis: si generetur in directione contraria, ipsi negativè additur, nimirum subtrahitur, & exurgit utriusque differentia, ut quantitas negativa addita positivæ eam minuit, non auget; quo casu si velocitas contraria est æqualis priori; remanet velocitas =0, sive determinatio ad quietem, ut diximus in pressionibus contrariis; si major, remanet velocitas negativa, sive cum directione opposita priori. Si demum nova celeritas generetur in directione aliqua obliqua; ei obliquè applicatur juxta legem notissimam compositionis, & resolutionis motuum. Exponat priorem velocitatem *AB*, posteriorem *AC*; completo parallelogrameno *ACDB*, diameter *AD* exponet & magnitudinem, & directionem velocitatis, quæ ex utriusque compositione exurgit. Idem & in pressionibus, & in velocitatibus contingere ab experimentis manifestè discimus, & cum ex binis velocitatibus, vel pressionibus *AB*, *AC*, tertia *AD* exurgit; ea dicitur compositio motuum: cum una *AD* concipitur tanquam orta a binis *AB*, *AC* definitis per latera parallelogrammi cujuscunque, cujus *AD* sit diameter; ea dicitur resolutio. Nec illud hic quærimus, an ex aliis anterioribus naturæ legibus necessario fluat, & demonstrari possit; an sit potius primaria quædam lex, cui aliam quampiam Naturæ

F.4. 5.

turæ Auctor pro arbitrio suo substituere potuerit, & illud sancire, ut ex motuum compositione alia quæpiam directio, alia mensura novæ pressionis, ac celeritatis exurgeret.

19. In compositione velocitas, quæ exurgit semper est minor componentibus simul sumptis, quia latera *AB*, *BD* ideoque & *AB*, *AC* simul majora sunt latere *AD*. In resolutione augetur ob oppositam rationem, seu, ut verius dicamus, augeri concipitur; facile enim ex theoria, quam traditurі sumus, deducitur, resolutionem nunquam habere locum, sed solum mente concipi; revera autem solam haberi compositionem. At si velocitates componentes intelligantur resolvi in duas, alteram secundum directionem novæ exurgentis, alteram secundum directionem ipsi perpendicularem; perpendiculares ipsæ semper sibi æquales se elident mutuo, reliquarum summa, vel differentia semper eadem erit in ea, quæ exurgit, ac in componentibus. Nam ductis *CF*, *BE* perpendicularibus ad *AD*, & completis rectangulis *Ff*, *Ee*, ac resoluta *AC* in *Af*, *AF*, & *AB* in *Ae*, *AE*, satis patet ex æqualitate triangulorum *AFC*, *BDE*, quæ facile demonstratur, æquales fore *AF*, *DE*, & *CF*, *BE*; ac proinde etiam *Af*, *Ae*; adeoque ipsas *Af*, *Ae* oppositas se mutuo elidere, reliquarum summam in fig. 4., differentiam in fig. 5. esse *AD*.

20. Hisce omnibus præmissis; en demum, in quo cum Leibnitianis, & Antileibnitianis convenimus, & in quo discrepamus. Actionem illam potentiarum, qua generatur pressio, vel celeritas, & quam appellavimus vim ipsarum, metimur per aggregatum celeritatum illarum, quæ generantur in singulis particulis, nimirum per massam in simplicem celeritatem ductam; in quo & Leibnitius convenit, qui vires mortuas ita æstimat. Ea estimatio est satis conformis rationi. Cum enim concipimus ea actione generari vel celeritatem, vel pressionem, quæ per tempus datum continuata, velocitatem producit sibi proportionalem; ea actio, quam nos ad eum unicum finem concipimus, ab ipso effectu æstimanda erit. Eam autem actionem, nos nihil aliud produce-

ducere concipimus, & affirmamus, præter hanc pressionem, & velocitatem. Leibnitiani, & Antileibnitiani admittunt præterea vim vivam, ab his potentiarum actionibus in corpore relictam, & permanentem; quocunque demum modo eam explicent physicè; sive eam velint consistere in Peripatetica quadam qualitate, quæ sit impetus, quod nolunt; sive in alio quocunque. Nos hanc vis vivæ sive qualitatem, sive tantum ideam rejicimus, ut prorsus superfluam, & affirmamus phænomena omnia abunde explicari per ideas tantum a nobis hactenus traditas quibus concipiamus, a potentiis per actiones suas immediatè produci solam velocitatem, & cum priori per vim inertiæ conservata componi vel directè, vel obliquè: illi inter se pugnant, quæ debeat esse mensura vis ejus vivæ, quam vel concipiunt, vel admittunt. Quamobrem si illud ostendimus, phænomena omnia motuum optimè explicari sine hac nova vel re, vel idea; evicimus sanè, vires vivas nullas esse, & objecto quæstionis summoto, quæstionem ipsam summovemus.

21. Verum ut a motu uniformi ducamus exordium; evidentissimè patet ad conservationem velocitatis, quæ per præcedentes potentiarum actiones est acquisita, satis esse solam vim inertiæ, nec ullam vim vivam requiri. Ea conservatio in ipsa idea vis inertiæ manifestè includitur. Quare si, ubi potentiæ agunt ad velocitatem generandam, nulla pariter vis viva necessaria sit; omnia omnino phænomena sine viribus vivis explicabuntur.

22. Jam verò si velocitas producatur per vires earum potentiarum, quæ concipiuntur agere sine ullo etiam contactu, & impulsu alterius corporis, quemadmodum & a Newtonianis, & a Peripateticis concipitur agere gravitas etiam in corpus in vacuo collocatum; pariter manifesto apparet, nullum opus esse viribus vivis. Ex eo, quod vires gravitatis singulis momentis temporis E in fig. 3. producant pressiones EF sibi proportionales, & tempusculis Ee velocitates $FEef$; producent totis temporibus AE, AC velocitates $BAEF$, $BACD$ juxta num. 16. Si autem ejusmodi velo- F. 3.

B loci-

locitates exprimantur per ordinatas *EH* ad lineam quandam *AHG*, ſpatiola tempuſculo *Ee* producta a velocitate *EH* erunt, ut areolæ *EHhe*, & tota ſpatia reſpondentia temporibus *AE*, *AC*, ut areæ *AEH*, *ACG*. Licet autem & celeritates ſingulis tempuſculis productæ ſint, ut vires, & ſpatia percurſa ut celeritates; in aggregatis varia deprehendetur ſummarum ipſarum relatio, pro varia mutatione virium *EF*. Si vires ſint conſtantes; evadit *BFD* recta linea parallela *AC*, velocitas *BAEF*, ut vires, & tempora conjunctim: quare manentibus viribus, ſit *FH*, ut *AE*, ſit *AHG* recta deſinens in *G*, evadunt ſpatia *AEH*, ut quadrata laterum *EH*, vel *AE*, nimirum ut quadrata velocitatum, vel temporum, vel etiam ut productum ex *AE*, & *EH*, nimirum ex tempore, & velocitate. Patet igitur cur in hac hypotheſi gravitatis corpus ex quadrupla altitudine deſcendens duplam celeritatem acquirat, & duplum tempus impendat. Eadem prorſus de cauſa ſi ſurſum impellatur cum dupla celeritate; aſcendet ad altitudinem quadruplam ſine ulla neceſſitate quadruplæ vis vivæ, quæ ſurſum trudat ipſum corpus. Aſcendit enim donec dupla velocitas contraria impreſſæ generetur, quæ impreſſam elidat, & mutet directionem motus in contrariam. Quod aſcenſus ille habet de poſitivo motu ſurſum, pendet a ſola vi inertiæ conſervante priorem celeritatem: quod habet de negatione ulterioris motus, provenit a gravitate, quæ poſt quadruplam demum altitudinem duplam genuit velocitatem.

23. Quod ſi jam *AE* exprimat non tempora, ſed ſpatia, & *EF* vires, quæ ſingulis æqualibus tempuſculis generent velocitates ſibi proportionales; jam areola *FEef* non exprimet velocitatem genitam ſpatiolo *Ee*, quia quo celerius id ſpatiolum percurritur, eo minorem velocitatem generabit vis eadem. Erit autem celeritas producta in ratione compoſita ex directa vis *FE* & tempuſculi, quod tempuſculum cum ſit ut ſpatiolum *Ee* directè, & velocitas tota inversè; erit velocitatis incrementum directè ut *FE*, & *Ee*, & reci-

procè

procè ut tota velocitas, ac proinde productum ex velocitate in suum incrementum, erit ut areola *FEef*. Inde autem ex infinitesimorum lege colligitur, fore quadratum Celeritatis corporis ex *A* descendentis ex quiete, ut est areola *BAEF*: & cum de decremento in velocitatem contrariam ducto idem discursus sit; si motus incipiat in *A* verus *C* cum velocitate, quam exprimat *BACD*, & vires contraria directione agant; erunt residuarum velocitatum quadrata ut *CEFD*, & motus in *C* extinguetur totus. Si autem sit *EI* ordinata ad lineam quandam continuam *NIM* reciproca velocitatis *EH*; quæ nimirum sit ad datam quandam rectam *L*, ut hæc ad *EH*; erit areola *EIie* directè ut spatiolum *Ee*, & reciprocè ut velocitas *EH*, nimirum ut tempusculum; ac proinde totum tempus, quo percurritur *AE*, erit, ut tota area *MAEIm*. Ex ejusmodi autem linearum natura, omnia quæ ad hosce motus acceleratos, aut retardatos pertinent in elementis Mechanicæ facile deducuntur: ut *e*: *g*: si vires *EF* fuerint ut distantiæ *EC* a fine motus *C*; linea *BD* sit recta desinens in *C*, linea *AHG* vertitur in quadrantem vel Ellipseos, vel circuli, area *MAEIm* datur per quadraturam circuli, velocitates in fine spatiorum acquisitæ sunt ut ipsa spatia, & tempora sunt æqualia. Hinc in hac lege gravitatis, quæ decrescat in ratione distantiarum a centro, velocitas, quæ acquiritur in casu per duplam distantiam, est dupla; ideoque e contrario si corpus exeat e centro cum dupla velocitate; elevatur ad duplam altitudinem. Atque ut elevatio ad altitudinem quadruplam in hypothesi gravitatis constantis non evincit vim vivam quadruplam; sic in hoc casu elevatio ad altitudinem duplam non evincit vim vivam duplam. Pendet utrunque phænomenum a solis summis velocitatum, quas singulis tempusculis æqualibus producunt vires ipsis proportionales, & a solis summis spatiorum, quæ singulis tempusculis æqualibus percurruntur cum velocitatibus sibi proportionalibus.

24. Quod autem attinet ad corporum collisionem præmittimus prius principium satis celebre *Actioni semper æqua-*

lem, & contrariam esse reactionem, quo tam feliciter usus est Wrennus, Vallisius, Hugenius ad elasticorum corporum congressus definiendos, & Newtonus ad suam mutuam gravitatem, per quam cœlestium corporum motus implicatissimos explicavit. Nos id principium ita intelligimus, ut quotiescunque vis alicujus potentiæ agat secundum unam directionem in unum corpus, ita æquè agat in aliud secundum oppositam; ut æquales summas velocitatum producat utrinque in particulis, a quibus æquales motuum quantitates pendeant; ac proinde velocitates singularum particularum generet massis reciprocas. Nullum sane phænomenum huic adversatur principio, plurima illi favent, immo quantum experiundo licet animadvertere, favent omnia. Sic in magnete, & ferro, vis magnetica velocitates producit massis reciprocas: sic in navicula, & navi majore funis distentus: sic si ceram digito premas, & digitus premitur simul, & illa materia. Quare hoc principium ex analogia naturæ satis apertè deducitur. At nos ex eo, & durorum, & elasticorum, & mollium corporum congressus eadem generali methodo facillimè deducemus.

F. 6. 25. Sint jam in fig. *6.* bini globi duri *AB*, & *CD*, quorum massæ *M*, & *m*, velocitates, cum quibus sibi invicem occurrunt *V*, & *u*, quæ quidem dicantur positivæ secundum directionem *BC*, negativæ secundum oppositam. Momento temporis, quo puncta *B*, & *C* se contingunt, debent immutari velocitates vi impenetrabilitatis ita; ut ad quietem respectivam reducantur, sive ad æqualem velocitatem, cui nimirum impenetrabilitas non opponitur. Considerabimus igitur impenetrabilitatem, tanquam potentiam quandam, quæ ita in utroque globo producat velocitates oppositas, ut eæ ex una parte relinquant velocitatem utrobique eandem, ex altera sint ob actionem utrinque æqualem reciprocæ massis. Dicatur communis velocitas x; erit velocitas a priore amissa $V-x$ ad velocitatem acquisitam a posteriore $x-u$, ut m ad M; ac proinde $VM - Mx = mx - mu$, sive $VM + mu = Mx + mx$, sive $\frac{VM+mu}{M+m} = x$; formula communis

nis pro colliſione corporum durorum, in qua velocitas communis poſt colliſionem habetur; ſi ſingulæ maſſæ per ſuas velocitates multiplicentur, & productum dividatur per maſſarum ſummam. Si autem quæratur V-x velocitas in priore globo producta ad partes oppoſitas; inveniturr ipſa $\frac{VM+Vm-VM-um}{M+m} = \frac{Vm-um}{M+m}$; nimirum ut $M+m$ ſumma maſſarum eſt ad m maſſarum alteram; ita V-u differentia velocitatum ad eaſdem partes, vel ſumma ad oppoſitas, quæ eſt velocitas reſpectiva, ad velocitatem illam, quæ in altero globo producitur ſecundum directionem oppoſitam rectæ jungenti centra.

26. Nulla hic pariter neceſſitas virium vivarum. Si bini globi celeritatibus, quæ ſint reciprocè proportionales maſſis, ſibi invicem occurrant; ſiſtitur ex eadem formula momento temporis utriuſque motus. Inde colligunt Antileibnitiani, vires vivas eorum fuiſſe ante concurſum ut maſſas, & celeritates; ac proinde in conflictu ob earum æqualitatem ſiſti motum. Si impenetrabilitatem reſpicimus ut potenti am quandam, quæ ſecundum communes leges agat, licet per ſaltum, ex natura ſcilicet duritiei; nulla virium vivarum neceſſitas eſt in eo caſu.

27. Concipiamus jam eoſdem globos, ubi venerint ad diſtantiam BC, repelli vi quadam, quæ ulteriori acceſſui reſiſtat, & imminutis diſtantiis augeatur. Mutabitur, non quidem momento temporis, ſed ſucceſſivè velocitas utriuſque ita, ut ex principio actionis, & reactionis æqualis poſt quodcunque tempus continuum producantur velocitates maſſis reciprocæ ad partes contrarias. Interea verò minuetur perpetuo diſtantia, donec ſi vis illa repulſiva fuerit ſatis magna, diſtantia maneat quidem aliqua, ſed ſit minima: quo caſu reducentur ad eandem velocitatem, quod nimirum requiritur, ut diſtantia ulterius non minuatur. Tum verò, vel incipiet iterum creſcere diſtantia, ſi nimirum perſeveret repulſiva illa vis: vel perſeverabit; ſi ibi ea omnis ceſſet. Primus caſus exhibet nobis binos globos impingentes in ela-

strum *BHC*, quod dum clauditur angulus *H*, globi ipsi repelluntur, donec ad priorem positionem ventum sit, post quam elastrum retrahi incipit plus æquo apertum a celeritate jam acquisita, & globi cum acquisita celeritate pergunt recedere a se invicem: ac potest idem primus casus referre etiam binorum elasticorum globorum concursum, quorum partes, dum post contactum in *B*, & *C* introrsum cedunt, velocitatis inæqualitate in iis punctis inhibita per vim impenetrabilitatis; elasticitas, quæ earum accessui ad reliquas resistit, agit utrinque æqualiter. Secundus casus exhibet corporum mollium naturam, qui haberetur, si elastrum in illa minima distantia disrumperetur in *H*; quæ proinde concipi possunt tanquam composita fibrillis elasticis illis quidem, sed breviusculis, & quæ citissimè vel disrumpantur, vel dissolvant quosdam veluti nodos, quibus continebantur. Sic enim partes, dum introcedunt, resisterent, sed figuram nequaquam recuperarent.

28. Quoniam autem in illa minima distantia habemus globorum velocitates redactas ad æqualitatem, & velocitates utrinque productas massis reciprocas; habemus elementa eadem, ex quibus in congressu corporum durorum eruta est velocitas, quæ ab altero globo acquiritur secundum directionem oppositam rectæ jungenti centra. Eadem igitur erit formula pro corporum mollium congressu; & pro elasticorum corporum collisione duplicanda erit eadem acquisita velocitas; eritque ut summa massarum, in iis quidem ad massam simplicem alterius, in his vero ad duplam; ita velocitas respectiva ad velocitatem ab altero acquisitam.

F. 7. 29. Si fuerint quotcunque globi intermedii in *EFG*; sub initium quidem punctum *B* cum tota velocitate globi *AB* celerrimè accedet ad *E*; interea *E* incipiet acquirere velocitates versus *F*, & *B* cum globo *AB* ad partes oppositas, ac proinde incipiet globus *AB* retardari. Ad accessum puncti *E*, vis, quæ repellit *E*, & *F*, statim utrumque punctum ad partes oppositas urgebit, sed minus, quamvis, quæ repellebat *B*, & *E*, ob minorem sub initium veloci-

cita-

citatem puncti E, quam B, adeoque minorem acceſſum. Quantumvis exiguo tempore poſt primum occurſum in B ſublato æquilibrio propagabitur mutatio ſtatus per omnia puncta $EFGC$, ſed multo major erit velocitas acquiſita ſecundum directionem BC in proximis globis, quam in remotioribus. Progreſſu temporis deveniri debet ad diſtantias omnium minimas, poſt quas globi incipiant a ſe invicem recedere. Id non contiget; niſi ubi velocitas reſpectiva evaſerit nulla; & proinde omnium globorum velocitates æquales. In eo caſu ob actionem & reactionem æquales ſumma celeritatum, quas ob vim repulſivam exercitam per BE acquiſiverunt particulæ globi AB, erit æqualis celeritati acquiſitæ ad partes oppoſitas a particulis globi E; ac ad partes pariter oppoſitas velocitatem acquirent æqualem globi E, & F, & ita porro uſque ad globum CD. Summæ velocitatum particularum omnium productæ a vi repulſiva in intervallis BE, EF, FG, GC, ſint x, y, z, u: erit ſumma omnium velocitatum, quas acquirent particulæ globi AB ſecundum directionem CB uſque ad illam minimam diſtantiam, $= x$ ſumma autem omnium, quæ remanent ſecundum directionem oppoſitam ex iis, quæ productæ ſunt in particulis reliquorum globorum, erit $= x-y$, $+ y-z$, $+ z u$, $+ u$ ſive erit $= x$. Nimirum prior ſumma poſteriori æqualis. Quamobrem ſi in plures globos quotcunque delatos eadem velocitate cum globo CD incurrat globus AB; eodem prorſus modo res cedet, ac ſi ii globi omnes in unicam maſſam coaleſcerent, & ſola vis per BE ageret; ac proinde recurrent, quæ dicta ſunt num. 28. Idem autem eſſet diſcurſus, ſi globi quotcumque pergerent etiam cum globo A, & alii quotcunque cum globo D cum iiſdem velocitatibus eorundem globorum. Semper in minima diſtantia reducerentur omnes ad velocitatem æqualem, & reducerentur productis utrinque æqualibus velocitatum oppoſitarum ſummis ita, ut velocitas ſingularum particularum primi aggregati acquiſita per vires repulſivas ad velocitatem particularum ſingularum ſecundi aggregati eſſet in ratione reciproca maſſæ ſecundi ad maſſam primi. Et idem pariter discursus esset, si vires aliquæ non solum agerent in globos proximos, sed & immediatè removerent *E* a *G*, vel a *CD*.

30. Potest hic casus accommodari globis vel elasticis, vel mollibus, dum concurrunt: in quorum primas partes, quæ se contingunt, agat vis impenetrabilitatis, in reliquas verò, & in eas ipsas, dum introcedunt, & ad se accedunt magis, quam pro data distantia, vires repulsivæ. Potest pariter accomodari corporibus duris, concipiendo ea divisa in plures particulas, quarum alias ab aliis removeat vis impenetrabilitatis, qui casus a casu elasticorum solum differet in eo, quod in corporibus duris impenetrabilitas aget momento temporis, & in reliquis elasticitas successivè, nec dura post æqualem celeritatem resilient. Potest demum accommodari globis impingentibus in elastra pluribus angulis constantia, quem casum figura exprimit, considerando solum effectum elasticitatis, & abstrahendo ab illa translatione virgarum elastri, quæ pendet ab aliqua rigiditate, & parum effectum turbat. Ubi datis singulorum intervallorum viribus absolutis determinari posset, globis *AB*, *CD* ad se invicem accedentibus, quod punctum debeat quiescere, qui debeat esse singulorum punctorum motus, quando singula puncta, quorum propiora potissimum initio plurimum accelerantur, tum retardantur, ad maximam celeritatem deveniant, & alia ejusmodi. Nobis satis est ostendisse, quomodo per solam generationem velocitatis ortam a potentiis agentibus utrinque æqualiter pendeant hi omnes effectus, sine ulla necessitate virium vivarum.

31. Et quidem illud etiam simul patet, quonam pacto in elasticis, & in mollibus corporibus fiat illa introcessio partium, & fovearum excavatio. Cum primum se molles globi contingunt, mutatur initio magis celeritas particularum contactui proximarum; donec paulatim partes omnes ad æqualem celeritatem reducantur. Ob illam velocitatis inæqualitatem accedunt partes aliæ ad alias magis, quam prius; ea est mutatio figuræ, introcessio partium, excavatio foveæ.

veæ.

(XXV)

veæ. Si materia sit elastica; figura recuperatur, immo etiam ultra priores limites jam conceptos excurritur, & oscillationes quædam fiunt, ex quibus in fluidis elasticis undæ quedam exurgunt: si materia sit mollis; ubi ad illam celeritatem communem ventum est, manet distantia particularum eadem, & manet fovea. Sic in fig. 2. dum globus *A* impingit in primas materiæ mollis particulas in *B*, statim ex vi impenetrabilitatis, & repellentium potentiarum acquirunt velocitates, per quas æquilibrio summoto, velocitas aliqua generatur in omnibus, ita tamen; ut in propioribus sub initium multo major generetur, quam in remotioribus, donec demum, & globus, & particulæ, & tota massa *MN*, cum toto sustentaculo ad eandem velocitatem reducantur, quæ minima erit, & fere nulla ob immensam totius Telluris massam, cui fulcrum innititur.

31. Hisce autem omnibus præmissis sponte propemodum fluit explicatio phænomenorum, quæ a Leibnitianis adducuntur ad probandum, vires vivas adesse, quæ sint ut massæ in quadrata celeritatis ductæ. Concipiatur globus *CD* maximus, versus quem globus *AB* delatus cum una velocitate elastrum claudat ad datum intervallum. Si globus idem cum dupla velocitate impingat in quatuor ejusmodi elastra illa eodem intervallo claudet, & ab aliis quatuor duplam pariter in regressu non quadruplam velocitatem acquiret. Quia si recta *AC* in fig. 3. sit eadem ac *BC* in fig. 6.; vires *EF* in singulis spatiis *E* erunt, ut numerus elastrorum, sive quadruplæ in secundo casu; quare & areolæ *FEef*, & totæ areæ *ACDB*, quæ per num. 23. exprimunt quadrata velocitatum tam acquisitarum, quam amissarum spatio eodem *AC*, erunt in secundo casu quadruplæ, ac proinde velocitates duplæ; quamobrem rectæ *EI* semper subduplæ, & subdupla aggregata omnium tempusculorum *EeiI*. Ex eo nimirum, quod singulis tempusculis velocitates generantur viribus proportionales; cum per idem spatiolum *Ee* corpus cum majore velocitate delatum, minus diuturnam sentiat quatuor elastrorum actionem velocitatis generativam, quam corpus delatum

F. 6.

F. 3. 6.

tum cum unica vim sui elastri; minus quam quadrupla velocitas generatur, vel destruitur per id spatiolum, & aggregatum simul omnium est ex exposita demonstratione non quadruplum, sed duplum. Nulla igitur virium vivarum necessitas: quas tamen si quis velit admittere, licet inutiles, & ponat singulis tempusculis æqualibus generari proportionales viribus eodem passu, quo celeritates; hic profecto æque bene, ac nos, hæc phænomena explicabit, quod & de sequentibus intelligi debet. Et eo reducitur luculentissima Mairanii explicatio, requirentis, ut amissarum virium summa colligatur.

F. 2. 32. Eodem modo explicatur, & Polenianum experimentum, quo demissis globis *A* ejusdem molis, diversarum massarum ab altitudinibus, quæ massis ipsis sint reciprocè proportionales, excavantur in argilla foveæ æquales *DCE*. Deveniet globus subquadruplus cum dupla tantum velocitate: & si globum quadruplum in quatuor æquales partes mente dividimus; singulis viribus in hasce partes æquales distributis, agent in globum minorem in singulis punctis spatii vires quadruplæ earum, quæ agent in partes singulas globi majoris; ac iccirco prorsus, ut numero superiore, duplam tantum iisdem illis spatiis percursis usque ad quietem destruent velocitatem, tempore subduplo dimidiam tantum contrariam producendo.

33. At in eo experimento de quo num. 6. & 7. diximus, cum globus idem ex diversis altitudinibus demissus semper foveas excavarit altitudinibus, adeoque, quadratis velocitatum proportionales; causa pariter ex eodem fonte petenda est. Superficies *DCE* segmenti sphærici est, ut sinus versus *CB*, quod ex Archimede constat. Quare dum globus immergitur incurrit in singulis punctis spatii *BC* in numerum particularum proportionalem distantiæ *BC*. Hinc fit ut vires quæ in eo producunt velocitates contrarias, sint ut distantiæ ab initio *B* motus retardati. Quare, ut in num. 23. notavimus, in hac virium hypothesi velocitas dupla extinguetur duplo emenso spatio *BC*, & eodem tempore. Quadrupla

drupla eſt materiæ quantitas, ea fovea contenta, quæ comprimitur; ſed non iccirco quadrupla velocitas contraria generatur. Globus duplo velocior ſingulis tempuſculis æqualibus ſucceſſivè incurrit ille quidem in quadruplum numerum particularum, ſed ea potiſſimum de cauſa ſingularum virium actiones excipit dimidio tantum tempore, ac proinde dimidias, & omnium ſimul duplas. Nuſquam autem virium vivarum veſtigium ullum, & multo minus neceſſitas.

34. Demum, & in globorum elaſticorum colliſione, quo pacto ſe res habeat, facile eſt expedire. Impingat globus in globum triplum, cum binis gradibus velocitatis, inquit Hermānus; unum illi communicabit, cum uno ipſe reſiliet, cum quo ſi incurrat in aliam ſibi æqualem, quieſcet, illo abeunte cum eodem gradu. Quare quadruplam habebat vim vivam, quam in quadruplam maſſam diviſit. Phænomenum quidem ita ſe habere debet, ut evincitur etiam ex noſtris formulis quas expoſuimus num. 25. & 28. Sed cauſa in promptu eſt. Elaſticitas in globo triplo unum gradum velocitatis produxit, in globo impingente tres oppoſitos, quorum duo priorem velocitatem elidunt; tertius relinquitur, qui pariter in ſecunda colliſione amittitur æquali velocitate per elaſticam vim in utroque globo producta. Nulla igitur hìc quoque neceſſitas vis vivæ e globo in globos translatæ. Sic ſi F. 8. globus A delatus ad C ita obliquè impingat in globum B, ut facta $AC = 2$, & ducto perpendiculo in rectam jungentem centra BC, ſit $CD = 1$, perget globus per CF parallelam AD cum velocitate $AD = \sqrt{3}$, & globus B abibit cum velocitate $= 1$. Si autem rurſus cum data lege impingat in globum G, tum in I; iidem globi abibunt cum velocitate $= 1$, & globo A relinquetur primum velocitas $= \sqrt{2}$, tum $= 1$. Sed inde colligi non poterit habuiſſe vires vivas 4. quas diviſerit in 3. globos, una ſibi reſervata. Vis elaſtica in globo B generavit illam ejus velocitatem $= 1$, & in globo C contrariam CD, quæ compoſita cum $CD = CA$ obliquè, ipſam potius minuit, & reduxit ad $\sqrt{3}$. Et idem in reliquis colliſionibus contigit, vi elaſtica ſemper binas æquales contrarias velocitates producente.

35. Cæ-

(XXVIII)

35. Cæterum quod in experimentis potiſſimum, in quibus globus in argillam decidit, excavatio fovearum a nulla vi viva pendeat, ſed a potentiarum actionibus explicatis; ſic manifeſtè colligitur. Si maſſa *MN* impingat in globum *A*; eadem prorſus fovea excavatur, ac ſi globus cum eadem velocitate impingat in maſſam. Excavatio autem ejuſmodi nec tribui poteſt vi vivæ globi *A*, qui nimirum quieſcebat, neque viribus vivis particularum materiæ mollis *MN*, quæ vires vivæ tendunt ad conſervandum omnium motum, non ad minuendum. In eo caſu provenit ex eo, quod impenetrabilitas, & aliæ potentiæ, dum agunt in globum *A*, ad generandam velocitatem in eo, agunt & in partes materiæ mollis generando celeritates oppoſitas, majores quidem initio in proximis, in remotioribus minores; donec paulatim omnes evadant æquales; & acceſſus particularum ad ſe invicem, pendens ab illa inæquali velocitate initio motus, tandem ſiſtatur, & maneat fovea.

36. Hoc pacto per omnia phænomenorum genera excurrendo, oſtendimus, nuſquam viribus vivis opus eſſe: ſed ex ſimpliciſſimis principiis omnia omnium generum phænomena motuum explicari poſſe per immediatam celeritatis productionem factam actionibus potentiarum nihil poſt ſe relinquentibus in ipſis corporibus, præter diverſam determinationem vis inertiæ, cum ipſa vi inertiæ perſeverantem. Jam verò ſi quis, non obſtante inutilitate vis vivæ, illam adhuc velit admittere; poterit, ut libuerit, ſalvis prorſus phænomenis. Si enim ſtatuat, potentias illas quotieſcunque in ſingulis particulis ſingulis temporibus producunt celeritatis gradus ſibi proportionales, producere etiam vires proportionales; erunt vires ipſæ, ut maſſæ in ſimplices celeritates ductæ. Si autem velit, ſingulis æqualibus ſpatiis confectis, produci ſingulos vis vivæ gradus viribus producentibus proportionales; tum vero erunt virium aggregata, ut maſſæ in quadrata velocitatum ductæ. Nam ſingulis ſpatiolis *Ee* in fig. 4. producentur vires proportionales areolæ *FEef*; ac proinde vires productæ toto ſpatio *AE* exprimentur per aream

aream $BAEF$ exprimentem etiam quadrata velocitatum. In utraque ſententia phænomena eodem modo contingent, quæ, ut vidimus, pendent a ſola celeritatum productione.

37. Prior ſententia eſt Antileibnitianorum, poſterior Leibnitianorum. Neutram amplectimur ob inutilitatem vis vivæ. Neutrius falſitatem ex phænomenis demonſtrari poſſe affirmamus. Prima tamen magis conformis eſſet ſimplicitati, & analogiæ naturæ, & illam quidem potius defenderemus, ſi alterutra omnino defendenda eſſet. Cum Potentiæ ſingulis temporibus, non ſingulis ſpatiis producant celeritates ſibi proportionales; analogia melius ſervabitur, ſi & vires eadem lege producat. In oppoſita ſententia minima quæcunque vis per magnam velocitatem elevari poſſet ad maximam vim breviſſimo tempore producendam, & multo majorem quam maxima vis longiſſimo. Id ſane ſimplicitati naturæ minus conſonum videtur eſſe. Demum cum mortuæ vires ſint in ratione maſſarum & celeritatum; etiam vivæ, ſi æquè bene poſſunt, debent potius eodem modo æſtimari. At poſſunt: nam quæcunque diximus de potentiis generantibus celeritates, ſi dicantur de generantibus vires, & colligantur ſummæ ſive eorum, quæ acquiruntur, ſive eorum, quæ amittuntur; conſtabunt ſibi ſimul omnia, & phænomenum nullum repugnabit, ut in num. 31. indicavimus.

38. Nec nos magnopere movet Leibnitiana, & Bernoulliana conſervatio virium vivarum, quæ habetur in Leibnitiana ſententia in corporibus elaſticis. Demonſtravit jam olim Hugenius in congreſſu corporum elaſticorum ſemper conſervari poſt congreſſum ſummam productorum, quæ fiunt ſingulorum maſſas ducendo in quadrata ſuarum celeritatum. Id Leibnitius, & Bernoullius attribuunt legi naturæ vires vivas conſervanti ſemper eaſdem. At noſtro quidem judicio melius vires in oppoſita ſententia conſervarentur, ſi ullæ eſſent. Nam quadrata velocitatum, licet in Leibnitiana ſententia ſatis exprimant quantitatem virium; earum directionem exprimere non poſſunt; cum quadrata ſemper poſitiva ſint, & vires habere poſſint directiones contrarias, ac proinde ex

poſi-

poſitivis in negativas tranſire. Sic in Newtoni ſententia gravitatis decreſcentis in ratione reciproca duplicata diſtantiarum a centro, ſi diſtantiæ dicantur x, vires exprimi quidem poſſunt per $\frac{1}{xx}$; donec directionem non mutant, Ea mutata formulæ motuum, quæ ex tali expreſſione eruuntur, fallaces ſunt. Ex: gr: notum eſt, in ea virium lege, ſi punctum tendat ad ſingula puncta ſuperficiei ſphæricæ, menſuram attractionis ex omnibus reſultantis, donec eſt extra ſuperficiem, poſita diſtantia a centro $= x$ fore $\frac{1}{xx}$; at ſimul ac infra ſuperficiem deſcendit, evadit $= 0$. Jam verò quoniam vires vivæ deberent eſſe & poſitivæ, & negativæ; ſi ſumma maneret, maneret utique, ut in omni & geometria, & analyſi ita, ut negativa addita poſitivis ea minuerent, & additioni ſubtractio ſubſtitueretur. At eo pacto in Leibnitiana ſententia ſumma non manet: in Antileibnitiana verò ſententia, cum ſumma motuum ad eaſdem partes, & differentia ad oppoſitas conſervetur, motibus nimirum, qui producuntur ab actionibus potentiarum æquè ſemper in partes oppoſitas agentium, neutram turbantibus; vis autem viva in ea ſententia ſit ut maſſa in celeritatem ducta, adeoque ut motus: conſervatur utique etiam vis viva ita, ut poſitiva pro poſitivis in ea ſumma, & negativa habeantur pro negativis. Quin immo ſi hoc ſenſu reformetur Carteſii principium de conſervatione quantitatis motus, rite ſervatis directionum ſignis; ita erit verum, & de iis viribus, & de motibus; ut animæ quoque liberæ vires nihil turbent ejuſmodi conſervationem; ſi modo ea tantum lege ipſa etiam in corpora agat; ut ſemper oppoſitas debeat binis particulis celeritates imprimere, cujus oppoſitum non evincitur.

39. Si demum, quis vires vivas nullas admittat, at in corpore conſideret diſpoſitionem illam, quam habet, ad foveam excavandam in molli maſſa, ad tendendum numerum elaſtrorum, ad aſcendendum contra gravitatem uniformem ad aliquem altitudinem, conſiderando hos effectus tanquam ab ipſo præſtitos, ſine ullo reſpectu ad potentias, a quibus pendent, ad ſeriem actionum, & tempora, quibus exercentur;

tur; poterit is eam dispositionem ita consideratam appellare vim vivam, eritque ejus mensura massa ducta in quadratum velocitatis. At æquè alter poterit considerare dispositionem ad quoddam spatium dato tempore motu uniformi percurrendum, vel in vincendis obstaculis, seriem, & tempora actionum considerare, & huic erunt vires vivæ in ea considerationе usurpatæ, ut massæ ductæ in simplices celeritates. Qui ita voces usurpari non permittat, quæstionem de nomine instituet. Verum in quæstione de nomine vetustiori potius loquendi modo est adhærendum, quam recentiori. Nec est cur Leibnitius, si de nomine tantum immutando contendit, se tantopere jactet, tanquam si magnum aliquem omnium Mechanicorum errorem deprehenderit; quod bene notat Mairanius.

40. Explicatis hoc pacto phænomenorum generibus omnibus per actiones potentiarum, quæ communiter considerari solent, & reductis ad simpliciora, & generalissima principia productionis immediatæ velocitatis; remanet, ut nostram sententiam quandam aperiamus, quæ majorem etiam simplicitatem inducit, & analogiam circa potentias ipsas, & eorum agendi modum: in quam nos quidem maximè inclinamus, tum ob hanc ipsam simplicitatem, & analogiam; tum quod plurimis etiam primariis corporum affectionibus explicandis sit apta; licet videamus, eam quidem ab iis omnibus, qui rem altius non perpenderint, cum risu quoque excipiendam. Nihilo tamen minus diutissimè meditati eam hic proferre non dubitamus, paratissimi tamen si gravius quidpiam contra ipsam proferatur nobis, eandem deserere, & communem sequi. Lis ea est acerrima Newtonianos inter & Cartesianos circa motuum generationem, quod Cartesiani solo corporum impulsu eorum motum mutari, contendunt, Newtoniani vires admittunt etiam in corporum distantia agentes. Sic gravitatem hi etiam in vacuo agnoscunt, illi contra vociferantur, unum esse in Mechanica impulsum admittendum, cætera omnia a mechanica plurimum abhorrere.

41. No-

(XXXII)

41. Nobis autem rem diutius, & diligentiſſimè conſiderantibus illud in mentem venit; Si analogiæ, & ſimplicitati naturæ conſulatur; nullam mutationem motus fieri per impulſionem, ſed ſemper per vires agentes in aliqua diſtantia, ſive eæ in natura ipſa corporum ſitæ ſint, ſive potius ex libera quadam pendeant Opificis ſupremi lege, qui pro arbitrio ſuo potuiſſet non ſolum hanc materia mcondere potius, quam non condere, ſed etiam, cum his potius, quam cum illis condere affectionibus, & legibus, nulla vi illata naturæ corporum nihil aliud requirenti, niſi ſummam ſubjectionem Conditoris ſui Divinis nutibus. Quamobrem cenſemus, ab illis principiis derivari, corpora, & eorum particulas nullo unquam caſu ſe ita contingere; ut verè nihil intermedii ſpatii interſit; ſed viribus quibuſdam præditas eſſe ſingulas materiæ particulas, quæ in aliis diſtantiis attractivæ ſint, in aliis repulſivæ ita;ut demum imminutis in infinitum diſtantiis, augeatur vis repulſiva in infinitum, non vincenda niſi infinita vi, quam ſolus Deus ipſe O. M. poſſit exerere, qui proinde ſolus poſſit, compenetrare corpora, & iis adimere extenſionem.

42. Nec illud nos movet, quod videamus continuas, & non interruptas ſuperficies corporum, videamus, admotis globis nullum apparere intervallum, admota manu contactum experiamur; nec illud veremur, ne quis baculo utendum dicat, ut innoteſcat nobis; an verè contactus corporum habeatur. Minima intervalla ſub ſenſum non cadere, ſatis patet. Trans pellucidam criſtallum liberè radii permeant quaquaverſus: immo, ut norunt, quicunque microſcopiis tractandis aſſueverunt, trans omnium corporum tenues laminas, licet ad ſenſum continuas, tranſeunt. Adſunt iccirco meatus, qui non apparent, & adſunt in immenſa copia. Idem globorum intervallis poteſt contingere. Si maxima vis repulſiva in minimis diſtantiis ſeſe exerat; ubi globum globo admoveris; vis illa, ut in fig. *6.*, aget in utrunque globum; donec utrunque ad eandem celeritatem reduxerit. Promovebi-

vebitur globus, qui ante quiescebat, altero, si ipsum semper promoveas, semper intervallum illud minimum retinente, quod tu sensu percipere cum non possis; non poteris sanè inde arguere, ipsum intervallum verè nullum esse. Idem in manu continget, idem in baculo. Ubi ad minimas eas distantias ventum fuerit, vis repulsiva aget illa quidem & in id corpus, & in fibras, ut in vero immediato contactu vis impenetrabilitatis: fiet introcessio partium, ut in pressione ex contactu derivata: tendentur fibræ ea vi, & inde motu ad cerebrum propagato, eodem prorsus modo perceptio fiet, quo fieret per contactum. Ea omnia adduximus, ut ante quam fundamenta ipsa nostræ sententiæ aperimus; ostendamus manifestò, neque ejus veritatem, neque ejus falsitatem hujusmodi experimentis, & sensuum testimonio evinci, ac in ipsis sensibus nullum prorsus fundamentum haberi posse pro utralibet. Sed ut magis communi loquendi modo consulamus, quo & nos utimur, contactum dicemus physicum, & cui, ut unicè per sensus noto, nomen contactus ex hominum institutione est impositum, eum, in quo bina corpora devenerint ad distantiam; quæ nullo hominum sensu possit percipi, & in qua vis repulsiva ita sit magna, ut nulla humana vi vinci possit. Contactum mathematicum, & immediatum eum, in quo intervallum in se sit nullum. Illum priorem in baculo formidaremus, hunc secundum, si nostra sententia vera sit, timere non possumus.

43. Sed ut ad fundamentum nostræ hujus sententiæ deveniamus; in primis difficultatem omnem amovebimus, qua hujusmodi vires in distantia quadam agentes reiici solent, tanquam hic agendi modus, nec mechanicus sit, nec naturæ congruens. Quæ nobis communis est difficultas cum Newtonianis, & quidem etiam Peripateticis gravitatem suam vel in libera Dei lege, vel in ipsa natura, & essentia corporis, vel in qualitate quadam reponentibus, quæ licet in vacuo positum, corpus ad aliud corpus, vel ad centrum distans adduceret. Illud a Cartesianis petimus. Cur tandem per impulsum communicatur motus? Cur ubi globus globum im-

pellit, motus quieto globo communicatur? Dicent ſanè, impenetrabilitatem eſſe in cauſa; ſi enim bina corpora idem ſpatium occupare poſſent; non eſſet, cur alterum ab altero retineretur. Urgebimus: quid autem eſt impenetrabilitas iſta? unde fit, ut idem ſpatium bina corpora occupare non poſſint? Dicent ſanè, eam eſſe vel naturam corporum, ut alterum alterius locum non occupet, vel liberam Dei legem, vel ignotum aliquid; & ſiquidquam aliud reponant; ſemper urgebimus, donec eodem recidant. Sinant igitur, nos quoque eadem reſponſione uti: nimirum eam eſſe vel corporum naturam, vel liberam Dei legem, ut alterum ad alterum in quibuſdam diſtantiis accedere, in aliis recedere debeat, & quidem in minimis ſemper recedere ſecundum certas quaſdam leges, quas paulo infra explicabimus.

44. Et ſane ut alia innumera attractionum & repulſionum genera omittamus, quæ in minoribus diſtantiis ſe abunde produnt; luculentiſſima ejuſmodi virium exempla in gravitate habemus, & in viribus illis, quibus corpora in lumen agunt, & lumen in corpora. Multa a doctiſſimis viris ingenioſiſſimè reperta ſunt ad gravitatem explicandam per corporum impulſionem ope materiæ gyrantis. Cenſemus nec per Carteſianos vortices, licet reformatos, nec per Hugenianum, gravitatem explicari poſſe. Et Carteſianorum potiſſimum vorticum reformatio, quam infeliciter a ſummis etiam viris tentata ſit, exemplis aliquot illuſtravimus in Diſquiſitione in univerſiam Aſtronomiam, quam anno 1742. exhibuimus. Hic ipſe infelix exitus tantorum tentaminum nobis abunde ſuadet, gravitatem ab impulſione nequaquam pendere, & Planetarum, Cometarumque motus tam diuturnos procedere a vi inertiæ, & a viribus gravitatis agentibus in immenſo pene vacuo, vix ullam reſiſtentiam exhibente. Radios autem luminis in tranſitu prope corporum opacorum acies intorqueri vi quadam ſine ullo contactu, deprehendit olim Grimaldus noſter, & Newtonus inde illam activam vim deduxit, qua tam feliciter uſus eſt, ad reflexionem, inflexionem, & refractionem potiſſimum explicandam.

Et

(XXXV)

Et quidem ita putamus, luminis repulsum in reflexione non fieri ab impactione in eam superficiem, a qua id reflectitur, ut eam propositionem censeamus a Newtono demonstrari, quantum in physicis licet, Optices l.2.parte 3. prop. 8. Binis hisce luculentissimis exemplis instructi, adversariorum clamores nullis rationibus, sed solis præjudiciis ab infantia secum deductis innixos non formidamus; & vires aliquas adesse in natura, per quas sine immediato contactu mutetur corporum status, & velocitas generetur, ita admittimus; ut eum agendi modum satis naturæ ipsi familiarem esse immo etiam in hac nostra sententia unicum arbitremur. Accedit mira illa vis magnetica diu, & pariter frustra tentata per vortices materiæ magneticæ, cujus præcipua phænomena, qua ratione a nobis explicari possint, innuemus inferius.

45. Cur autem hujus tantum generis vires admittamus in natura, & impulsionem excludamus; causa inpromptu est. Communis jam est multorum sententia, nihil in natura per saltum fieri, sed ut in locis etiam geometricis, & in algebraicis formulis accidit, quidquid augetur, aut minuitur, ita continuo augeri, aut minui, ut ab una quantitate ad aliam motu semper continuo per omnes intermedias quantitates transeatur. Hujus principii nulla experimenta falsitatem evincent: plurima, quantum per sensus licet deprehendere, eo nos manifestè deducunt. Et quidem in ipso locali motu nulla sanè alia de causa per saltum ex uno loco transire non licet in alium; nisi continuo motu per intermedia transeatur. Sic & per tempus continuum ab uno momento ad aliud distans devenimus, sine interruptione, & saltu. Id ipsum autem, & in motuum generatione ita a Leibnitianis potissimum admitti solet; ut nulla velocitas momento temporis intereat tota, aut oriatur, nec ab uno velocitatis gradu transeatur ad alium, nisi per intermedios omnes transitus fiat. Hinc dura corpora excludunt a natura, in quorum congressu momento temporis generaretur velocitas, vel extingueretur; & omnia corpora vel elastica esse volunt plerique, vel mollia, vel potius mixta, ita nimirum, ut in congressu

binorum corporum, dum partes introrſus cedunt, paulatim extinguatur velocitas per decrementum continuum, quæ vel iterum reſtituatur paulatim ad partes contrarias per continuum incrementum, ut in elaſticis, vel prorſus intereat, ut in mollibus.

F. 9. 46. Jam verò ſi id principium verum eſt; verum erit etiam mutationem motuum nunquam fieri per impulſionem; quod ex ipſo, nobis quidem videtur evidenter conſequi. Fac enim duo globi elaſtici *AB*, *CD* æquales & cum æqualibus celeritatibus delati, quas exprimant rectæ *AF*, *DO* ipſi *AD* perpendiculares, in ſe invicem impingant in *E*: ipſo momento temporis, quo impingunt in ſe invicem puncta diametrorum C & *B*, motum omnem neceſſariò ſiſtent diametris *BA*, *CD* abeuntibus in *Ea*, *Ed* æquales: at omnes reliquæ particulæ preter illas primas, ut poſtremæ *a* & *d*, adhuc moveri pergent motu retardato ſemper; donec omnis earum celeritas alicubi extinguatur in *M*, & *N* mutata jam figura, & diametris contractis: & ſi globi quidem ſint molles; perſeverabunt in eo ſtatu: ſi elaſtici; ſingulæ particulæ per eoſdem gradus retro reflectentur. Si autem erigantur ſemper *BG*, *aH*, *EI*, *dK*, *CL* uſque ad rectam *FO*; velocitates punctorum *A*, & *D*, exprimentur illæ quidem per ordinatas ſemper æquales ad rectam *FO* uſque ad *H*, & *K*; tum per ordinatas perpetuo decreſcentes ad lineas quaſdam *HM*, *KN*. At velocitates particularum *B*, & *C*, ſi quæ primæ particulæ ſolidæ ſunt, vel ſaltem punctorum, *B*, & *C*, vel ſuperficierum circa *B*, & *C*, ſi globis ſubſtituantur cylindri, momento temporis extinguentur totæ, & quieſcent ea puncta, vel ſuperficies toto eo continuo tempore, quo *a*, & *d* abeunt in *M* & *N*; exponentur autem multo etiam poſt velocitates ipſæ per ordinatas ad rectam *FO* uſque ad *I*, tum in *I* abrumpetur omnis expreſſio per ordinatas, & ordinatæ *EI* ſuccedet punctum. Si igitur nulla velocitas momento temporis extinguitur; non pergunt globi cum uniformi velocitate uſque ad contactum; ſed ubi particulæ *B*, & *C* acceſſerint ad quandam exiguam diſtantiam; vis aliqua repulſiva eas per-

perpetuò repellet ita, ut velocitas paulatim extinguatur ante contactum. Substituendo corpora mollia, & elastica duris, evitatur quidem saltus in velocitatibus particularum *A*, & *D*; saltus autem in velocitatibus particularum *B*, & *C* evitari non potest, nisi in minimis distantiis ejusmodi vis repulsiva admittatur.

47. Et verò, quod in motu globorum æqualium, cum velocitatibus contrariis, & æqualibus ostensum est, idem contiget in congressu quorumcunque corporum cum inæqualibus velocitatibus. Velocitates primarum superficierum momento temporis reduci debent ad æqualitatem, cum impenetrabilitas non sinat alterum corpus alterius locum subire, & toto eo tempore, quo mutantur figuræ, & cæterarum partium velocitates ad æqualitatem pariter reducuntur, quies illa respectiva partium contingentium perseverabit. Hanc autem vim repulsivam distantiis perpetuò imminutis crescere ultra quoscunque limites, inde eruitur; quod sit finita esset, globis cum aliqua velocitate delatis, quæ definiri posset, punctorum *B*, & *C* velocitas in ipso contactu elidi desineret; at ea velocitate aucta contactus haberetur, ante destructam velocitatem illam totam, & proinde saltus. Et multa quidem saltuum hujusmodi afferri possent exempla alia, tum pressionum simplicium, tum mutationis momentaneæ loci geometrici, celeritates exprimentis; Sed casum evidentissimum, & facillimum delegimus. Ex analogia, & simplicitate naturæ deducitur principium illud expositum num. 45.; illo principio admisso, contactus mathematicus necessariò excluditur, & vires repulsivæ in minimis distantiis crescentes ultra quoscunque limites recta ratiocinatione colliguntur.

48. Ut autem alius impediatur saltus; oportet vires easdem, quibus particulæ in minimis distantiis se invicem repellunt, ad omnes etiam distantias in infinitum extendi; licet possint in majoribus distantiis ita decrescere, ut sensum omnem effugiant, & in attractivas etiam mutentur, ut jam explicabimus. Si enim ejusmodi vires aliquo intervallo nullæ prorsus essent, tum alicubi agere inciperent; novo ibi ele-

mento adveniente, abrumperetur prior geometricus locus exprimens celeritates, & novus fubftitui deberet. Sic fi particulæ *A* & *D* motu uniformi delatæ ufque ad *a* & *d*, ibi tantum vires repulfivas fentire inciperent; velocitates ufque ad *a*, & *d* exprimerentur per ordinatas ad rectas *FH*, *OK*, quæ ibi abrumperentur, & iis fuccederent vel rectæ, vel curvæ quædam *HM*, *KN*. Id ne fiat oportet actionem aliquam fuiffe in omnibus diftantiis, & quidem expreffam per ordinatas ad curvas quafdam continuas, de quibus mox agemus, ac nullam, fi ullibi nulla eft, folum in punctis quibufdam, in quibus eæ curvæ axem fecant, & repulfio mutatur in attractionem, vel viceverfa; eo enim pacto, velocitates exprimentur per curvam quandam, quæ ad datam quidem rectam accedere poterit, fed nufquam ineam ipfam mutabitur.

49. Directa igitur ratiocinatione ex illo principio deducto per analogiam naturæ devenimus ad vires particularum corporum in minimis diftantiis repulfivas, & iis imminutis auctas ultra quofcunque limites, iis auctis variatas ita, ut exprimantur per ordinatas ad curvas quafdam continuas. Mirum autem, quam ea particularum idea explicandis plurimis corporum phænomenis per quam idonea fit; mirum quanta inde pulcherrimorum, & difficillimorum problematum feges erumpat, quibus & geometria fublimior, & analyfis exerceatur. Rerum multitudine, & magnitudine obruimur, quæ cum per univerfam latè naturam excurrant intra tam anguftos unius differtatiunculæ fines contineri non poffunt. Quamobrem delibabimus tantum nonnulla, omiffis quamplurimis.

50. In corporibus omnibus gravitatem mutuam detexit Newtonus, quam ipfe in particulis omnibus agnovit decre-
F. 10. fcentem in ratione reciproca duplicata diftantiarum: agnofcimus nos repulfiones has in minimis diftantiis, quæ diftantiis imminutis in infinitum excrefcant. Si ad eas folas vires in corporum particulis attendendum effet; fic exponi poffent. Exponant fegmenta rectæ *AG* diftantias binarum particularum a fe invicem; Sitque curva quædam *MCKIH* ejus natu-
ræ,

ræ, ut habeat pro aſymptoto rectam NL perpendicularem axi AG, a qua perpetuò recedat; ſecet axem alicubi in C, a quo recedat uſque ad K, tum reflectatur verſus ipſum, & ab aliquo puncto I habeat pro aſymptoto hyperbolam ſecundi ordinis, cujus factum ſub abſciſſis, & quadrato ordinatarum conſtans ſit, ad quam nimirum hyperbolam arcus in I accedat ultra limitem ſenſibilem, tum perpetuò magis, & diſtantia pariter puncti I a recta NL ſit perquam exigua. Ejus curvæ ordinatæ BM, quæ verſus alteram plagam ſpectant, exprimant vim repulſivam; quæ ſpectant oppoſitam plagam, ut DK, EI, FH, mutatæ in negativas, expriment vires attractivas. Utimur autem virium attractivarum, & repulſivarum nomine, non quod aliquam phyſicam actionem ponamus particulæ diſtantis in diſtantem, ſed ut hiſce vocabulis exprimamus determinationem illam, quæ vel ſita eſt in libera Dei lege, vel in natura, & eſſentia particularum corporum, vel in qualitate aliqua, qua particulæ ad ſe invicem conentur accedere, vel a ſe invicem conentur recedere; quæcunque ex iis ſit cauſa phyſica ejus conatus. Hæc quidem curva, & gravitati Newtonianæ, & noſtræ vi repulſivæ ſatisfaciet.

51. In omnibus enim diſtantiis majoribus, quam ſit AE, ut AF, poſita ipſa $AF = x$, & $FH = y$, erit ad ſenſum xxy conſtans, & y ut $\frac{1}{xx}$; ſive attractio in ratione reciproca duplicata diſtantiarum. Creſcet ea attractio imminutis diſtantiis uſque ad AD, tum decreſcet, & in C erit nulla. In minoribus autem diſtantiis ut AB mutabitur in repulſivam, quæ, in infinitum imminuta diſtantia, in infinitum augetur.

52. At ecce tibi ſimul, ex eadem lege per ejuſmodi curvam expreſſa, & impenetrabilitatis ratio patet, & extenſionis, quæ ſemper habitæ ſunt tanquam primariæ quædam corporum affectiones, a ſimpliciori quodam principio non pendentes. Profecto ſi imminuta diſtantia AB, vires ejuſmodi repulſivæ in infinitum creſcunt: ſine infinita vi particulæ ad ſe invicem ita admoveri non poterunt; ut eundem occu-

pent locum. Quamobrem solus Naturæ auctor infinita potentia pollens eam poterit resistentiam vincere, & corpora compenetrare. Pariter si se in minimis distantiis particulæ ita repellunt; disponentur profecto ita, ut per locum aliquem distribuantur in longum, latum, atque profundum.

53. Verum & illud statim sese obiicit oculis, quo nimirum pacto fluidorum particulæ inter se adhæreant ita; ut aliæ magis compressioni, & dilatationi resistant, aliæ minus. Si enim eorum particulæ sint in illa distantia *AC*, & ea utcunque parum imminuta, vel aucta statim ordinatæ utrinque plurimum crescant; vi ad comprimendum adhibita etiam maxima, minimum accedent: quia cito vi comprimenti æqualis invenietur repulsiva; & idem dilationi accidet. Sic aqua nulla vi adhibita comprimetur ad spatium ita minus, ut sub sensus cadat: nec tamen inde erui poterit, eam constare globulis solidis, se contingentibus, quo casu nullum aliud fluidum continere posset duplum materiæ, adeoque & ponderis, quam aqua: sed nec illud, elasticitate carere aquæ particulas; verum potius summam esse elasticitatem, concludetur. Sic etiam separationi resistet, magis, vel minus pro natura rami *CK*. Contrarium accidet, ubi eæ ordinatæ non statim multum augentur.

54. At quoniam aqua majore vi, ut per ignis actionem, in vapores convertitur, quorum particulæ maxima vi a se invicem recedunt, & in exiguis distantiis sibi invicem adhærent vi majore, quam quæ ex gravitate oritur; iis viribus, ut & aliis chymicis aliorum corpusculorum effectibus explicandis, arcus curvæ *CKI* figuræ 10. ita flectendus est, ut axem in aliis binis, vel etiam quotcunque punctis secet. Mutabitur curva in aliam in fig. 11., in qua in maximis di-
F.11. stantiis *AF* sit vis attractiva proxime in ratione reciproca duplicata distantiarum usque ad *AE*: usque ad *AD* adhuc crescat, sed ab ea ratione magis recedat, ut possit deinde decrescere usque ad *AT*: tum fiat repulsiva crescens usque ad *AS*, decrescens usque ad *AQ*: ibi iterum vertatur in attractivam crescentem usque ad *AO*, decrescentem usque

ad

(XLI)

ad AC, & demum in repulſivam abeat. Si particulæ aquæ habeant diſtantiam AC eam tuebuntur, donec vis aliqua, ſuperata maxima vi attractiva OP, eas ultra AQ removeat: tum enim ſpontè a ſe recedent plurimum; & ſi punctum R plurimum recedat ab axe; maximas vires repulſivas acquiret. Vires autem attractivæ verſus O poſſunt eſſe multò majores, quam quæ a gravitatis expreſſione requirantur.

55. Harum attractionum uſque ad certos limites, & repulſionum poſt eoſdem exemplum habemus in elaſtris, quæ in certis angulis aperta quieſcunt, magis diſtracta ad ſe invicem conantur accedere, magis compreſſa vim exerunt repulſivam. Et quidem ex eadem theoria, & mollium corporum diſcrimen habebitur ab elaſticis. Si enim intervalla QT, CQ, per quæ vires repulſivæ, vel attractivæ exeruntur, majora ſint; corpus erit elaſticum: ſi poſt modiciſſima intervalla, repulſivæ vires in attractivas tranſeant; erit molle. In primo caſu poſt multam compreſſionem a T verſus Q, adhuc ſemper vires repulſivæ agent, & ad veteres diſtatias redibitur. In ſecundo caſu ſtatim pervenietur ad Q, poſt quem limitem vi repulſiva in attractivam verſa nullus erit conatus ad regreſſum. Sic & in filis, ac funibus videmus, earum maſſas plus æquo compreſſas, compreſſioni reſiſtere: fiet id per intervallum AC; ſi autem diſtendi incipiant, quo plus diſtenduntur, plus diſtenſioni reſiſtunt; id verò continget per CO. Si ſuperetur maxima vis attractiva OP, multò magis, & citiſſimè minores quoque vincuntur uſque ad OQ, & vi attractiva in repulſivam verſa funis diſrumpitur.

56. Multò autem plures itus curvæ, & reditus, ad alia complicatiora phænomena explicanda requiruntur, quæ ſingula perſequi, infinitum foret, nec eſt hujus loci. Illud notandum omnes hujuſmodi curvas eſſe de genere earum, quas Parabolicas vocant; & quæ exprimuntur per $a+bx^m+cx^n+dx^r$ &c. $= y$; in quibus nimirum data diſtantia x, unica habetur vis y, vel attractiva, vel repulſiva; poteſt autem eadem vis y reſpondere pluribus diſtantiis x. Et quoniam ſolu-

ſolutum jam eſt a Newtono problema, invenire curvam parabolici generis, quæ per data quotcunque puncta tranſeat, poterit ſemper inveniri curva continua, & regularis, quæ exprimat vires cujuſcunque particulæ reſpectu cujuſcunque alterius, quæ vires ex phænomenis deductæ ſint; & eadem curva poterit ad arcus datos quaruncunque aliarum accedere quantum libuerit, & eos in quotlibuerit, & quam libuerit proximis punctis interſecare; dummodo ii arcus diverſis axis ſegmentis reſpondeant, Harum verò curvarum natura, & ea puncta, per quæ tranſeunt, ex phænomenis investiganda ſunt.

F.12. 57. Illud tamen nequaquam omittendum, quo pacto & ſolidorum corporum adhæſio ex iiſdem fontibus repetatur. Si enim vires particulæ *A* verſus particulam *C* per omnem directionem in gyrum circa eas diſtantias, in quibus ſunt poſitæ, ſint fermè æquales; conſtituent corpus fluidum, cujus partes reſiſtent quidem ſeparationi, qua cogantur majores diſtantias acquirere, ſed, ſervatis diſtantiis iiſdem, liberè altera circa alteram movebitur, & excurret, quo excurſu fiet, ut fluidum cedat vi cuicunque illatæ, & cedendo facile moveatur, ac corpus utcunque parum excedens fluidum in gravitate, ſi totum demergatur, deſcendat lentè quidem, ſed tamen ſemper deſcendat, eodem particularum numero ad ſe invicem accedente, qui recedit, & motu circa, ſe ſervatis diſtantiis, nullam habente difficultatem. Unde etiam fiet, ut ſi maſſa fluidi ſeparanda ſit; non magna aliqua ſuperficies ſimul abrumpatur; ſed attenuato fluido in loco ſeparationis per excurſum particularum circa ſe revolutarum, ſucceſſivè aliæ poſt alias ſeparentur; quod & in decidentibus aquæ guttis aſpicimus. Et id quidem ſeparationem fluidorum perfectorum facillimam redderet. At ſi alia curva exponat vires particulæ *A*, ſecundum directionem *Gg*, alia ſecundum aliam quamcunque ita; ut ſit axis quidam virium *qQ*, & vires quaquaverſus non exprimantur per curvam aliquam, ſed per ordinatas ad ſuperficiem quandam, & in eadem diſtantia *AC* per gyrum ſuperficies illa ordinatas habeat jam poſitivas, jam nega-

negativas; in eadem pariter distantia particulæ se mutuo fugabunt, si in una aliqua directione sint, se attrahent in alia, & in limitibus attractionis, ac repulsionis constitutæ eam positionem servare poterunt, & ab ea depulsæ verticitatem quandam acquirere, qua se restituant, in quo ipsa corporum solidorum connexio sita esse poterit, qua non solum separationi resistant, sed etiam inflexioni. Id autem potissimum necessariò accidet, si major pars ex minoribus constet, quæ inter se sint in distantiis multò minoribus habentibus validissimos connexionis limites; sed in illis majoribus distantiis aliæ attrahant magis, aliæ minus, aut etiam repellant; tum enim necessariò consequetur verticitas.

58. In plurimis autem problematis, quæ circa hasce expressiones virium, ut ita dicamus, superficiales proponi possunt, & circa motus, qui inde consequuntur, patet quantæ in Mechanica utilitatis sint præclarissima inventa D. Cleraut circa curvas duplicis curvaturæ, & loca ad superficies. Sed fieri posset, ut nec axis ullus haberetur in his viribus, & nullæ binæ rectæ lineæ a particula exeuntes eandem haberent curvam; quo casu per ordinatas ad eandem superficiem eæ vires generaliter exprimi non possent; analyticè possent; sed ea non sunt hujus loci, & tam multa persequi non vacat.

59. Hæc autem idea nos perducit ad compositionem particularum majorum ex minoribus omnino homogeneis, dissimillimam tamen. Ponatur, vires minorum particularum tam secundum axes quosdam, quam secundum quancunque aliam directionem habentem respectu ejus axis positionem datam, exprimi iisdem curvis in omnibus iis particulis, & diversis curvis secundum diversam positionem in singulis; ubi autem binæ combinantur in quavis distantia secundum quamvis directionem, vim mutuam exprimi per summam ordinatarum, quæ pertinet ad particulam utranque in iis distantiis, & directionibus: & poterunt majores particulæ componi ex minoribus ita; ut dissimillimas habeant virium leges, & ex his aliæ majores gradatim pariter, ut libuerit, dissimiles.

Nam

Nam si distantiæ assumantur aliæ aliis ita minores, ut ratio minorum ad proximè majores sit insensibilis; & circa terminos singularum ex iis distantiis fiat in recessu transitus a magna vi repulsiva ad magnam attractivam, quæ tamen, antequam ad sequentem distantiam ventum sit, iterum in magnam repulsivam convertatur, ac deinde varietur utcunque; plures particulæ minores, positæ circa eos terminos, coalescent validissimè in unam majorem particulam, ac in majoribus distantiis unitim agent: nec majores particulæ ejusdem ordinis se mutuò dissolvent; aut ultra quosdam limites ad se accedent. Quid autem, si eodem modo Fixæ quoque sint in limitibus quibusdam attractionum, & repulsionum omnium, curva nimirum *KIH* ut in minimis, ita quo-
F.11. que in maximis ultra omnes Planetas distantiis plurimum abludente ab ea Hyperbola, quæ exprimit gravitatem decrescentem in ratione reciproca duplicata distantiarum, & secante axem iterum, ac fortasse in aliis punctis quamplurimis? An non distantiam servarent a se invicem proximè eandem, nec in se mutuò irruerent, & Mundus totus ita constaret sibi, ut una ex majoribus illis particulis? Quid ni ea potissimum de causa in tam immensa distantia a nobis, & a se invicem collocatæ sunt? Quid ni Cometæ, qui longè ulterius procurrunt, dum in nostra quidem vicinia sunt, Planetarium systema subeuntes, viribus, quæ sunt quamproximè in ratione reciproca duplicata distantiarum, describant curvas quamproximè accedentes ad Parabolas, vel Ellipses; at mutata in majoribus distantiis virium lege, ab iis orbibus plurimum recedant, & redeant illi quidem, at longè alios, longè aliarum orbitarum arcus describant in reditu? An non saltem in iis, qui procul recedunt, nullum haberi poterit indicium reditus, licet iidem redeant, mutata fortasse etiam Athmosphæræ illius vastissimæ magnitudine, & forma, ex qua eorum apparens magnitudo æstimatur, nucleo ipso ingenti semper caligine quadam involuto?

60. Porro majorum particularum vires, quæ ex minorum combinatione prodeunt, poterunt esse, ut diximus, inter

se

se dissimillimæ: nam ex diversa axium combinatione, & minorum particularum numero diversissimæ virium leges exurgerent. Qui autem inde elegantissimis tam directis, quam inversis problematis aditus aperitur! ut nimirum, si data minorum particularum communi lege, dato numero, & earum positione ad se invicem, quæratur lex, quæ in majoribus ab iis compositis consequi debeat: vel numerus, & positio axium quæratur ejusmodi, ut in particula majore ex iis composita data aliqua exurgat lex, vel saltem datæ aliquæ vires in datis datarum directionum punctis: quæ quidem problemata solus ille semper omnia unico intuitu penetrat, qui Mundum dum conderet, si hoc, quo diximus modo se res habent, iis est usus.

61. Quin immo quoniam per illos attractionum, & repulsionum limites tam feliciter explicatur adhæsio partium; quid ni nullæ sint minimæ particulæ solidæ; sed, ut omnes adhæsiones ejusdem generis sint, ultimò resolvantur corpora in puncta quædam, quæ partes non habeant, ac proinde continuam extensionem nec habeant, nec componant? Ut puncta Mathematica in Geometria nec lineam, nec superficiem, nec solidum continuum componunt; sed vel congruunt, vel aliquâ lineâ a se invicem distant; sic ejusmodi puncta physica, & realia, iis viribus prædita continuam extensionem non possent componere, sed vel compenetrari deberent, ad quod ipsum divina infinita vis requireretur, vel a se invicem aliquo intervallo distare, quod in utrisque ex ipsa indivisibilitate, & extensionis carentia consequitur. Continuum physicum eo pacto summoveretur e natura. At quoniam in hac hypothesi phænomena omnia ex earum virium actionibus pendentia eodem modo se haberent; continui existentia probari non potest. Qui autem de continuo ipso diu cogitaverit, agnoscet fine, in lucro potius ponendum esse, si id e natura expelli possit, atque exturbari. Quid quod ex una parte omne quantitatum genus, quod augeri potest in infinitum, potest etiam minui, naturâ utraque ex parte limites omnes respuente; ac proinde moles corporis, quæ particulis a se invicem di-

diſtractis poteſt augeri in infinitum, videtur illa quidem ex naturæ analogia debere poſſe in infinitum & minui: ex altera verò parte, ſi nullæ ſunt infiniteſimæ partes in ſe determinatæ, ſed infinitè parva ſunt indefinitè parva, in quibus nos tantum a determinata magnitudine abſtrahimus, ut in ſingulis caſibus demonſtrationem liceat deducere ad abſurdum, & ſi eadem materiæ particula non poteſt jam majorem, jam minorem locum occupare totum; in nulla alia ſententia moles vltra quoſcunque limites minui poteſt, particulis ſolidis, ubi ad contactum devenerint, omnem vlteriorem compreſſioſionem omnino reſpuentibus: dum punctorum intervalla utcunque parva, in quacunque data ratione poſſint ſemper dividi, & moles corporis cujuſcunque, ſi punctis conſtet hujuſmodi, reduci ad aliam in quacunque data ratione minorem? Quid quod ibi ſane multò expeditius illud intelligitur, qui fieri poſſit; ut radii luminis ſecundum omnes directiones liberrimè excurrant, nec quidquam ſe invicem turbent. Nimirum numerus punctorum utcunque maximus, ex quo conſtarent, ad ſpatium totum haberet rationem quavis data minorem, ſive nullam; & eadem eſſet ratio numeri caſuum, in quibus ſibi invicem deberent occurrere, ad numerum caſuum, in quibus ſe vitarent? Quid autem, ſi ea potiſſimum de cauſa tanta lumini celeritas, tanta raritas data eſt; ut cum occurſus evitari neceſſariò debeant, virium quoque omnium, quas in exiguis diſtantiis in ſe invicem exercerent diverſorum radiorum particulæ, actiones minimæ evadant, & inceptum iter ad ſenſum non mutent? Non hæc ita ſe habere, dicimus: Sed campi hujuſce incredibilem quandam, & ingeniis exercendis aptiſſimam innuimus ubertatem.

62. Demum quod ad magneticos effectus pertinet; potiores ſanè ſponte inde fluunt. Nam tres in primis ſunt præcipuæ magnetis affectiones: Attractio, ac repulſio juxta diverſos polos, Communicatio virtutis, & Directio. Attractio inde pendere poteſt, quod lex virium inter particulas ferri potiſſimum, & magnetis, ad multo majorem diſtantiam, quam reliquæ, a gravitatis lege plurimum adhuc diſſideat,

& ſe-

& secundum diversas directiones vires exerceantur in iis particulis quà repulsivæ, quà attractivæ. Vbi multæ ejusmodi particulæ coaluerunt simul cum axibus Attractionum vel congruentibus, vel parallelis, ii enimverò erunt magnetes optimi, qui quidem vires etiam aut acquirere poterunt, aut amittere; prout plures particulæ, quocunque demum artificio eandem positionem acquirant, vel amittant, vel cum aliis coniungantur, ex quarum coniunctione immutetur lex. Patet autem eos habere etiam posse polos attractionis, & repulsionis, & iis confractis, singula frusta suos pariter polos habitura. At si ferri particulæ quocunque demum pacto eam axium positionem acquirant; ferrum ipsum poterit in magnetem abire, & eandem attractivam, ac repulsivam vim exercere.

63. Hinc Communicatio virtutis in eo sita esse potest, quod ferri particulæ casu & sine vllo ordine dispositæ, ob magnetis vicini actionem obvertant axes suos ita, vt in pluribus particulis ii congruant; tum enim se prodet magnetica vis in ferro quoque. Et eadem de causa si filum ferreum, quod super magnetem ductum virtutem contraxit, poterit virtutem amittere, si motu contrario priori ducatur ita; ut axium positiones iterum perturbentur. Ferrum autem, quod diu in eodem jacuit situ, in magnetem abire poterit, particularum axibus paulatim convergentibus ex actione continua subpolarium magnetum, quos ibi in magna esse copia infra superficiem telluris patebit ex ipsa directionis explicatione.

64. Directio acus in singulos magnetes pendere potest ab ipsa attractione, & repulsione juxta diversos particularum polos, & axium positionem, ex quibus, licet in majore distantia, verticitas pendeat prorsus, ut in num. 57. Directio autem versus certas Terræ plagas polo proximas, & altero tantùm polo magnetis eo se sponte obvertente, provenire potest ex eo, quod per universam quidem Tellurem ingentes adsint sub ipsa superficie massæ ferri, & magnetum, sed multò plures, quam alibi, versus polos. Quod enim ejusmodi fodinæ adsint non tantum sub ipso polo; id efficiet; ut non versus polum accuratè dirigantur acus; sed hinc inde aberrent. Quod ejus-

mo-

modi fodinæ minores nullo certo ordine disperſæ ſint per omnem tellurem, id efficiet, ut in declinatione magnetis nullus ſit certus quidam ordo, ſed & linea, in qua nulla eſt declinatio, & reliquæ, in quibus ea eſt certi graduum numeri, ſint admodum irregulares ad ſenſum, & compoſitæ: quæ quidem ex hiſtoria magnetica habemus omnia. Atque ejus rei imaginem quandam expreſſam habere poſſumus; ſi majorem aliquem magnæ virtutis magnetem ad menſæ caput collocemus; tum alios minores diſpergamus irregulariter. Acus ſe ad magnum illum magnetem potiſſimum diriget; ſed minorum actionibus deflectetur nonnihil. Erit autem linea quædam irregularis, in qua laterales actiones ſe mutuo elidant, & directio fiat verſus magnetem illum maximum: hinc inde ab ea linea declinationes habebuntur contrariæ, & curvæ, in quibus eæ ſint certi graduum numeri, erunt pariter ſatis compoſitæ.

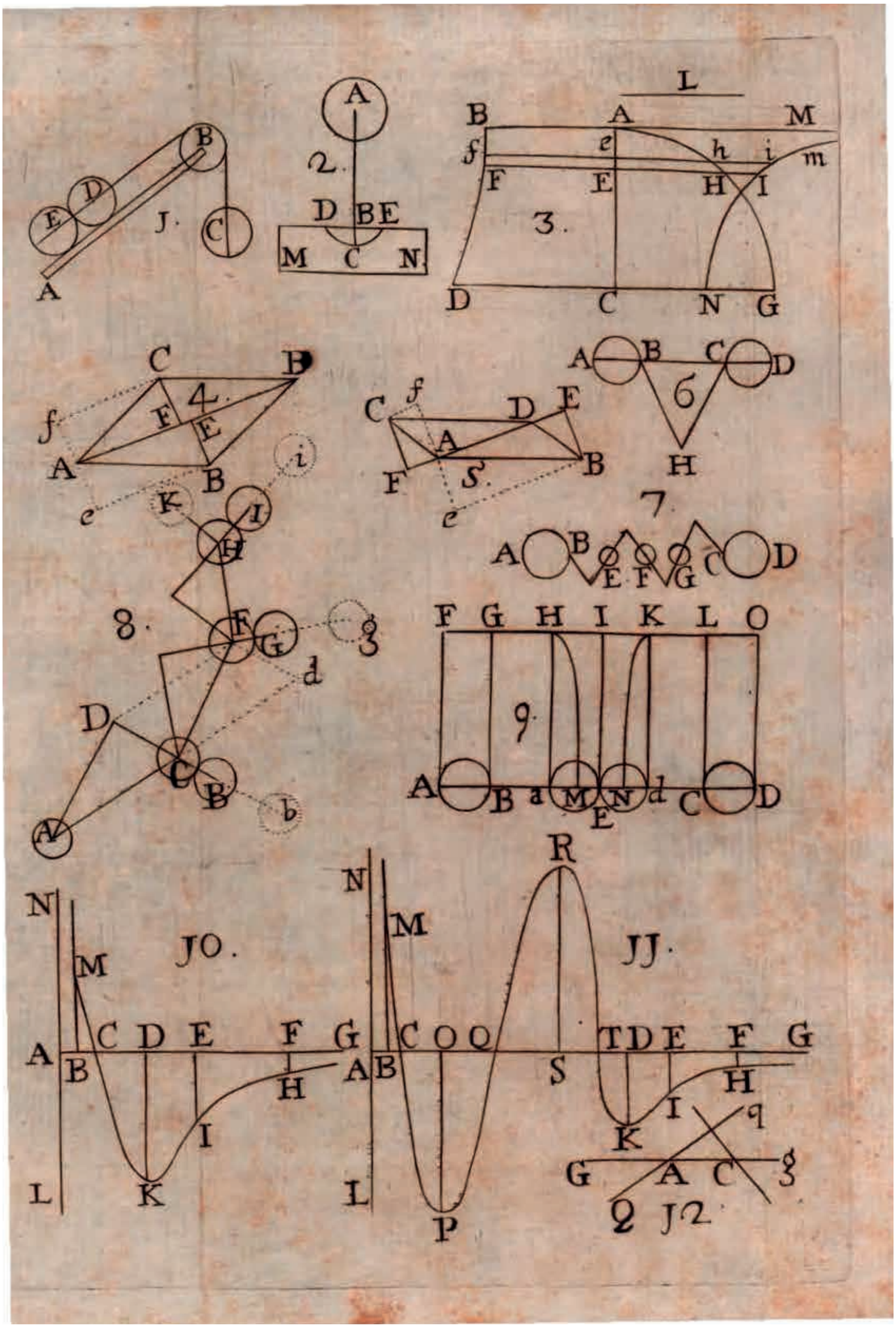
65. Hinc autem elegantiſſimis, & difficillimis problematis aperitur iterum aditus: ut ſi datis in plano binis, vel ternis, vel quotcunque maſſis utcunque inæqualibus materiæ attrahentis in quacunque diſtantiarum ratione, oporteat invenire curvam, in qua corpuſculi attracti directio fiat verſus datum punctum, vel ab eo deflectat per datum angulum. Id autem difficilius, & generalius evadit; ſi eæ maſſæ dentur extra planum utcunque: multò autem magis creſcit difficultas; ſi attractiones exprimantur per curvas quaſcunque datas, vel etiam per ordinatas ad ſuperficiem, vel ita, ut in diverſis quibuſvis directionibus diverſæ curvæ adhibendæ ſint. Quid autem ſi problemata proponantur inverſa, ut ſi datis attractionis legibus, & datis curvis directiones eaſdem exprimentibus, quæratur numerus, & diſpoſitio ejuſmodi maſſarum? An non eo pacto ineretur via ad determinandam ex obſervationibus fodinarum magneticarum poſitionem, & magnitudinem?

66. Ac ſi ea eſt declinationis, & inclinationis cauſa; quid ni inde fiat; ut quotidie parum admodum mutetur directio; at procedente tempore mutatio fiat multo major, & alicubi poſt ingentes Terræmotus ſtatim haud ita parva deprehenſa ſit?

(XLIX)

ſit? Nimirum fodinæ illæ perpetuas mutationes ſubeunt, novæ alibi generantur, augenturque, alibi minuuntur, & intereunt; quæ mutatio & perpetua eſt, & exiguo quidem tempore exigua, ſi ſummam ſpectes mutationum omnium contrariarum, longiore verò multò major. At ſi ita res habet; an non inanis eſt cura, variationem declinationis ad certas leges, quas omnino reſpuit, revocandi? Fodinas autem magneticas & ferreas in pluribus locis eſſe maximas, ignorat nemo. Ad hoſce effectus explicandos eæ ſufficiunt; eæ igitur ſunt cauſæ. A phænomenis earum poſitio determinanda, ex quibus, maximam eſſe ſub polo copiam, deducitur. Si quis verò & difficiliora velit problemata; is motum quærat puncti attracti a maſſis diſperſis, quarum attractiones, vel exprimantur per curvas, vel per ordinatas ad ſuperficiem, vel in quavis recta ex ipſis maſſis exeunte diverſæ ſint; vel ab ejuſmodi motibus quærat vel maſſas datis legibus, vel leges datis maſſis. Quam vaſtus hic Geometriæ, & ſublimiori analyſi campus, in quo vires ſuas experiantur, & promoveant analyſim ipſam ſummi etiam Geometræ, & Analyſtæ!

67. Nos autem nimium ſane evagatos eo regredi neceſſe eſt; vnde digreſſi ſumus; ut manum tandem de tabula removeamus. Omnia virium genera per haſce curvas ad unicum, & ſibi ſemper conſtantem agendi modum reducuntur. Corpora dura eliminantur e natura, eliminatur ſaltus omnis, qui etiam in aliis quibuſdam virium legibus haberetur; ut ſupra vidimus num.38. in puncto a punctis ſuperficiei ſphæricæ attracto in ratione reciproca duplicata diſtantiarum; ubi attractio in infinitum poteſt excreſcere in acceſſu; quod in noſtris curvis nunquam accidit. Phænomena autem motuum eodem, quo ſupra, modo hic explicantur per actiones utrinque æquales virium per curvas explicatas expoſitarum, quæ novas celeritates immediatè producant in corporibus tam elaſticis, quam mollibus, ſine ulla uſpiam neceſſitate virium vivarum, ſine ulla neceſſitate impenetrabilitatis agentis per ſaltum in impulſu corporum, & contactu.


J.
2.
3.
4.
5.
6
7.
8.
9.
JO.
JJ.
J2.

AD MAIOREM DEI GLORIAM

SULLE
FORZE VIVE

Dissertazione

tenuta nel Collegio Romano della Compagnia di Gesù
dai Padri della medesima Compagnia

il 6 settembre 1745

Roma MDCCXLV.
Per i tipi Komarek in Via del Corso.
Con il permesso dei superiori.

[altro frontespizio: «Dissertazione / del Padre Ruggiero Giuseppe Boscovich S.J. / professore di matematica presso il Collegio Romano» / MDCCXLV. / A spese della libreria di Venanzio Monaldini in Via del Corso / per i tipi Komarek. / Con il permesso dei superiori.]*

* Da una copia custodita presso la ETH-Bibliothek Zürich, (collocazione: Rar 4637).

Affronteremo, dottissimi Congregati, la celeberrima controversia circa la misura delle forze, per dirimerla, comporla, oppure accantonarla. L'opera è certamente ardua; il proposito, audace: infatti, forse nessun'altra controversia ha diviso più profondamente e più a lungo in fazioni matematici di pregio, e senza dubbio gli studiosi di meccanica. Ma che nuocerà tentare? Se la cosa avrà un esito non troppo felice, sarà almeno lecito servirsi del notissimo detto: «Averci provato fa onore».

1. Gli antichi tutti hanno distinto due generi di forze nei corpi, ciascuno dei quali deriverebbe da certe potenze che generano o trasformano tutti i moti: il primo genere consisterebbe in una certa tendenza al moto, la quale può aver luogo anche senza moto alcuno, come quando, collocando un piano sotto un oggetto, si impedisce l'effetto della gravità; il secondo genere, che è sempre connesso con il moto, è stato chiamato *impetus* dai Peripatetici, e costoro hanno ritenuto che esso venisse generato e comunicato ai corpi per mezzo di tale tendenza, una volta rimosso l'ostacolo, così come per suo mezzo i corpi proseguirebbero il loro moto, cercando di superare ed eliminare gli ostacoli, qualora se ne presentassero. Inoltre, in entrambi i generi, si è soliti misurare le forze dalla sola velocità, ove si tratti di singole particelle uguali di materia; sicché appunto sarebbe doppia o tripla quella tendenza che, rimosso l'ostacolo, avesse generato una velocità doppia o tripla in una medesima particella di materia nello stesso tempo; d'altra parte sarebbe pure misurato doppio o triplo l'impulso connesso a una velocità doppia o tripla di una medesima particella. Analogamente, ove si fosse trattato di quantità disuguali di materia, ovvero (che è lo stesso) di masse disuguali, si misuravano le forze dell'uno e dell'altro genere dalla somma delle velocità di tutte le particelle uguali, cioè dalle masse stesse moltiplicate per la velocità semplice.

2. Per quanto riguarda le forze del primo genere, la loro misura veniva facilmente confermata dagli esperimenti, in quanto l'uguaglianza delle forze – qualora fossero state effettivamente uguali – verrebbe conosciuta dall'equilibrio, e attraverso tale uguaglianza si dedurrebbe pure il loro rapporto nel caso le forze fossero differenti, scoprendo facilmente tramite l'osservazione le velocità generate in un tempo dato. Alla sommità B (Figura 1) di un piano inclinato AB, molto accuratamente levigato, ci sia una carrucola con avvolto un filo DBC, a un estremo del quale penda liberamente una sfera C, mentre all'altro estremo due sfere uguali E e D, dello stesso materiale, vengano sostenute in parte dal filo e in parte dal piano inclinato. Poiché constatiamo una tendenza [*nisum*] alla discesa lungo il piano inclinato minore che per la discesa libera, è facile trovare l'inclinazione che trattenga la sfera C in equilibrio con le sfere E e D. In questo caso, la tendenza alla discesa della sfera D, uguale a quella della sfera E, equivarrà a metà della tendenza della sfera C, in quanto, per equilibrio, le prime due [E, D] prese insieme uguagliano la terza [C] presa da sola. Se poi, troncato il filo, si

annotassero con precisione le velocità acquisite nello stesso intervallo temporale dalle sfere C e D durante la discesa, si troverà che la velocità della prima è doppia rispetto alla velocità della seconda, cioè nel medesimo rapporto delle tendenze. Più in generale, lo stesso vale se in D si appende un numero qualunque di sfere uguali oppure una sfera di massa qualsiasi: infatti le velocità delle singole particelle [*particularum*], acquisite simultaneamente nella discesa, staranno come le tendenze dedotte dall'equilibrio. Ciò si può pure sperimentare con altri metodi e per altri tipi di forze.

3. Quanto alle forze del secondo genere, nell'impresa si sono cimentati Galilei, Mersenne, Riccioli e altri, ma con esperimenti che coinvolgono molteplici circostanze non così comunemente ammesse da potervi ricavare qualcosa che impedisse occasioni di controversia. Tuttavia, ancora fino al 1686, la stessa misura è applicata abbastanza usualmente anche alle forze del secondo genere. D'altra parte in quell'anno, negli Atti di Lipsia, Leibniz pubblicò uno schediasma intitolato *Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii, et aliorum circa legem naturae*[1], in cui chiamava *morte* le forze del primo genere, e *vive* quelle del secondo genere, e propose di misurare le prime dalle masse moltiplicate per le velocità, mentre le seconde dalle masse moltiplicate per i quadrati delle velocità; ovvero lo stesso corpo mosso con velocità doppia deve avere non forza viva doppia, bensì quadrupla; con velocità tripla o decupla, non forza viva tripla o decupla, bensì nonupla o centupla rispettivamente. Quell'uomo celeberrimo ha posto soprattutto il fondamento di tale nuova concezione, avendo visto i gravi lanciati verso l'alto ascendere ad altezze proporzionali non alle velocità stesse bensì ai quadrati delle velocità.

4. All'inizio questa nuova concezione non ebbe così tanti fautori; i più sono sinora dediti a quella antica, e si schierò contro la nuova idea soprattutto Papin, con cui Leibniz per qualche tempo ebbe contrasti. Tuttavia, dopo che Johann Bernoulli ha rinnovato la contesa, avendo ristabilito la concezione leibniziana con nuovi esperimenti sulle molle elastiche, immediatamente parecchi eminenti personaggi, in particolare in Germania e anche in Italia, hanno abbracciato lo stesso partito che si è tentato da più parti di corroborare e stabilire, come nel caso di [Jacob] Hermann con gli urti fra sfere elastiche, e in quello di Poleni con le buche prodotte in un corpo molle per la pressione di svariate sfere in caduta da altezze diverse. Col grandissimo peso dell'autorità apportata alla concezione leibniziana dai consensi degli altri Bernoulli e di Wolff in Germania, di 's Gravesande e Musschenbroeck in Olanda, in Italia del Conte Jacopo Riccati (tempo fa) e, più recentemente, del padre Vincenzo Riccati, di lui figlio nonché acuto matematico della nostra Compagnia, e infine, della nobile signora du Châtelet,

[1] G.W. Leibniz, *Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum circa legem naturalem*, «Acta eruditorum anno MDCLXXXVI…», Lipsia 1686, pp. 161-163 (ora in *Leibnizens mathematische Schriften*, herausgegeben von C.I. Gerhardt, zweite Abtheilung, *Die mathematischen Abhandlungen Leibnizens enthaltend*, Band II, Schmidt, Halle 1860, pp. 117-119).

la quale, nella stessa Francia consacrata alla concezione antica, ha sostenuto assai strenuamente la parte di Leibniz nelle sue *Institutions de Physique*[2].

5. E tuttavia la vecchia idea non è crollata sotto il peso di tanta autorità né è caduta dal suo rango di prestigio, grazie ai tanti studiosi che resistevano, combattendo per essa assai tenacemente come per le cose più care, soprattutto in Francia e poi in Inghilterra: in quest'ultimo paese Stirling e MacLaurin, nell'altro Mairan. A nostro giudizio proprio quest'ultimo ha spiegato la concezione antica e l'ha protetta da tutte le armi degli avversari, sicché dagli esperimenti non si può addurre nulla che, attraverso il metodo di Mairan, non si riuscisse ad accordare meravigliosamente con essa e con la conformità e la semplicità della natura che la favoriscono abbondantemente. Con l'ingiuria, e più aspramente di quanto fosse opportuno, Pietro Martini denigra un così grand'uomo in un opuscolo "sulle forze vive"[3] pubblicato quattro anni fa, pur sostenendovi la stessa idea di Mairan. In esso a Martini capita ciò che spesso accade a coloro che aggrediscono autori di pregio: essi stessi vacillano in ciò in cui pensano di correggerli. Riportiamo la cosa con la massima brevità, non perché riteniamo che quell'uomo insigne abbia bisogno di questa nostra difesa in una questione di fatto abbastanza evidente per se stessa, ma per dare una qualunque prova del nostro ossequio nei confronti di quell'uomo dottissimo, nostro amico assai stretto; e affinché proprio in questo ambiente, dove un tempo Mairan fu così pesantemente accusato, non manchi chi si assuma la difesa di un tal uomo, benché essa si faccia cogliere da sola già a prima vista.

6. Fra i vari esperimenti che si possono addurre a favore della concezione leibniziana c'è il seguente, non troppo comune. Se una sfera A (Figura 2) viene fatta scendere da diverse altezze AB su un ammasso MN di argilla molle, sego, o qualunque altro materiale analogo, si scopre che essa scava delle buche DCE proporzionali alle altezze da cui la sfera viene fatta cadere: e poiché per le leggi di Galilei i quadrati delle velocità che i gravi acquistano cadendo stanno come le altezze da cui cadono, è evidente che quelle buche sono proporzionali non alle velocità, bensì ai quadrati delle velocità. Da ciò i leibniziani deducono che le forze vive dei corpi, il cui effetto è appunto lo scavo di tali buche, non corrispondono alle velocità, bensì ai quadrati delle velocità. Questo stesso esperimento, addotto talvolta dai leibniziani, è stato esaminato, insieme con altri, da Mairan nella sua dissertazione, inserita nel 1728 nelle memorie dell'Accademia di Parigi[4], aggiungendo che di queste cose non si può dubitare, poiché esse sono state comunicate da uomini non meno dotti, abituati a predisporre esperimenti in maniera assai accurata. Accettato dunque l'esperimento, Mairan aveva dimostrato che

---

[2] É. du Châtelet, *Institutions de Physique*, Prault, Paris 1740.
[3] P. Martini, *De corporum quae moventur viribus, Earumque aestimandarum Ratione dissertatio philosophica*, Neapoli Anno MDCCXLI.
[4] J.J. Dortous de Mairan, *Dissertation sur l'estimation et la mesure des forces motrices des corps*, «Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Memoirs de mathematique et de physique», 1728, pp. 1-49.

dalla stessa concezione antica sulle forze vive dovrebbe conseguire esattamente il medesimo fenomeno, posto che si abbia il rapporto fra i tempi in cui le singole velocità vanno perdute: egli infatti aveva mostrato che, considerando il rapporto tra le forze che vanno perdute nello scavare la buca, non può andar perduta una forza doppia se non dopo che sia stata spostata e compressa una quantità quadrupla di materia molle.

7. Martini presenta la posizione di Mairan nelle note in quella sua dissertazione dove aggiunge anche che il medesimo esperimento sarebbe stato sia comunicato da Fontenelle come eseguito con precisione e ripetuto più volte, sia proposto da Crivelli e accettato da Poleni; infine, al termine della sua dissertazione, Martini dichiara di aver letto la stessa cosa anche in Musschenbroeck. Pur tuttavia egli dice: «Se occorresse, io giurerei che questo esperimento non è stato realizzato da nessuno. Ma perdoniamo a Mairan il fatto di non aver conosciuto l'esperimento: egli, infatti, sembra presentarsi disposto a credervi. Chi gli perdonerà ciò che fiduciosamente riferisce, che l'esperimento stesso si accorda mirabilmente con la misura ordinaria delle forze?». Inoltre, verso la fine, trattando di Musschenbroeck, dice: «Presenta svariati esperimenti, e fra di essi non tace di quello della sfera che cade da altezze differenti scavando buche proporzionali alle altezze stesse: un errore, questo, che indubbiamente lo accomuna a tutti i cartesiani e i leibniziani che riferiscono che l'esperimento ha luogo in tal modo». Apparirà certo sorprendente che contro tanta autorità, in una questione di fatto, di uomini così eminenti – anzi di tutti i cartesiani e leibniziani, per quanto aderenti a partiti opposti –, si affermasse in questa nostra epoca, in cui ovunque si indaga sulla natura con esperimenti assai accurati e ripetuti più e più volte, di essere pronti a giurare che quell'esperimento non sia mai stato realizzato da alcuno, e si biasimasse la credulità di Mairan. Non meno degna di meraviglia è la fonte di tanta fiducia. Martini, infatti, aveva preparato lo stesso esperimento, il cui successo è di gran lunga confermato dalle testimonianze di Mairan e di tutti gli altri, come risulta dal suo stesso racconto, ed era giunto a conclusioni diametralmente opposte rispetto a loro. Di fatto, misurando le profondità BC delle buche, cioè verso l'interno degli archi DCE, aveva trovato che la profondità della buca scavata dalla sfera caduta da un'altezza quadrupla era vicinissima a una quantità doppia anziché quadrupla. Gli altri, però, quando parlano della buca, non intendono la sua profondità, bensì l'intero spazio DCE in lunghezza, larghezza e profondità. Ciò rivela una quantità di materia spostata e compressa, cioè un segmento solido di sfera il cui asse è la stessa profondità CB. Risulta inoltre che se gli assi CB di più segmenti avessero un rapporto piccolo col diametro della sfera, i segmenti stessi starebbero fra loro in un rapporto vicinissimo ai quadrati delle profondità: posto infatti il rapporto del diametro con la circonferenza pari a 1 a c, il diametro della sfera $= a$, l'asse $CB = x$, la porzione sferica sarà $\frac{1}{2}acxx - \frac{1}{3}cx^3$. In tale formula, se x è abbastanza piccola rispetto a a, il secondo termine si potrà trascurare senza che il primo cambi notevolmente; di conseguenza, il rapporto fra le porzioni sferiche sarà prossimo a $\frac{1}{2}acxx$, cioè, per $\frac{1}{2}ac$ costante, prossimo a xx, ovvero proporzionale al

quadrato delle profondità. Per questa ragione, qualora a Martini fosse capitato di constatare una profondità delle buche prossima al doppio nel caso di un'altezza quadrupla, si ricava che la buca stessa doveva esser stata pressoché quadrupla. E sia Mairan, sia Fontenelle, sia Musschenbroeck, sia tutti i cartesiani e i leibniziani – testimone lo stesso Martini –, senza che costoro fossero più creduli del dovuto, avrebbero affermato che le cose vanno proprio in tal modo.

8. E non si tratta del primo caso sfortunato di questo tipo in cui Martini è incappato. Nella lettera sulla rifrazione della luce[5] (cui abbiamo accennato anche noi nella dissertazione *De Natura, et usu Infinitorum, et Infinite parvorum*[6], pubblicata nel 1741, e che lo stesso Martini ricorda nell'opuscolo citato sopra, pubblicato nel medesimo anno) egli aveva accusato pesantemente i padri Clavio e Tacquet, che avrebbero affermato che ragionando per assurdo si può dimostrare il vero, e aveva promesso una dissertazione scevra da errori sul medesimo argomento. In quell'opera noi abbiamo esposto brevemente le cose che Martini avrebbe confuso fra loro e in cui si sarebbe oltremodo ingannato, offrendoci di assumere la difesa se egli avesse pubblicato tale dissertazione, e avremmo reso pubblico quanto ci fosse dispiaciuto in quella lettera così come nella dissertazione che doveva pubblicare. Lui, però, quasi contemporaneamente pubblicava il suo breve scritto sulla misura delle forze vive, nelle cui note ha mescolato alcune cose che riguardavano tale questione. Poiché, del resto, non vi abbiamo trovato assolutamente nulla a riguardo delle nostre obiezioni, riteniamo che la stampa dell'opuscolo fosse stata terminata prima che un esemplare della nostra dissertazione gli fosse pervenuto. E invero, fra le aggiunte fatte in quell'opera, non c'è alcunché che ci turbi particolarmente, sia che consideriamo il ragionamento di cui Martini fa uso per dimostrare che dal falso non si può dedurre il vero, sia che osserviamo la risposta con cui tenta di eludere la dimostrazione di Tacquet. Di fatto, non è difficile mostrare che in tale ragionamento si nasconde un equivoco; ciò, tuttavia, traspare più chiaramente dalla stessa dimostrazione di Tacquet, ove certamente Martini non può contestare che dall'ipotesi falsa che una linea retta, che Tacquet cita in essa, è perpendicolare a un piano dato si arriva alla proposizione vera che essa non è perpendicolare, a meno che si possa cogliere un qualche difetto di ragionamento nell'intero discorso. Tacquet conduce la dimostrazione in modo da ricavare che, data per falsa quell'ipotesi, un certo angolo, che in realtà dev'essere retto, è invece obliquo; ma per questa ragione, Martini deduce maldestramente che secondo Tacquet dal falso non verrebbe che il falso; ora, Tacquet non si ferma a quella proposizione, ma con ragionamento assolutamente corretto, movendo dall'obliquità dell'angolo già dedotta procede infine alla proposizione vera, cioè che quella retta non è perpendicolare al piano; questa proposizione è dedotta dal falso, e poiché da essa si deduce la sua contraddittoria, la prima viene riconosciuta evidentemente come vera. Qui, tuttavia, non

[5] P. Martini, *De lumine refractione et motu Brevis Lucubratio*, Neapoli Anno MDCCXL.
[6] R.G. Boscovich, *De Natura, et usu Infinitorum, et Infinite parvorum*, Komarek, Roma 1741.

possiamo né vogliamo intrattenerci più ampiamente su questo: ci soffermeremo forse altrove, specialmente in caso che qualcosa riconduca in parte a quanto abbiamo proposto nella nostra dissertazione [*De natura, et usu Infinitorum, et Infinite parvorum*]. Frattanto, invece, ci richiama a sé la controversia proposta sulle forze vive.

9. Noi, dopo aver considerato in modo accuratissimo e per lungo tempo tutti i fenomeni e le spiegazioni dei fenomeni proposte dai sostenitori dell'una e dell'altra parte, siamo giunti infine a questo giudizio che a voi, compagni dottissimi, qui proponiamo: *non ci sono forze vive nei corpi*. Sosteniamo infatti che tutti i fenomeni dipendono dalla forza d'inerzia e da azioni istantanee e via via decrescenti all'infinito che si originano da potenze, ovvero da forze morte, in modo che le forze vive siano del tutto superflue e da rigettare completamente dalla fisica, in base al principio dovuto a Newton, comunemente accettato, che non si devono ammettere più cause di quante siano quelle vere e bastanti a spiegare gli effetti. Se avremo portato sufficienti argomenti per tale concezione, la stessa controversia sulla misurazione delle forze vive svanirà. Ma se qualcuno vorrà ancora far uso del nome di forze vive, e associare tale nome a qualche altra idea che comprenda altri oggetti conosciuti a partire da qualcos'altro, esso potà certamente venire impiegato in modo che le forze vive corrispondano sia a masse moltiplicate per velocità semplici sia a masse moltiplicate per i quadrati delle velocità, sicché la controversia si comporrebbe, venendo ricondotta a un disputa sul nome. Se infine, messo da parte quel principio, qualcuno volesse assolutamente ammettere le forze vive – sia pure quelle superflue e inutili – dichiariamo che, fatti salvi i fenomeni, si può accettare sia che queste corrispondano a masse moltiplicate per velocità semplici, sia a masse moltiplicate per i quadrati delle velocità, tali tuttavia che alla semplicità e analogia della natura si provveda meglio nella prima concezione che nella seconda, e appunto in questo modo dirimeremo la controversia. Chiarito tutto ciò, aggiungeremo all'occasione alcuni dettagli circa la composizione dei corpi e delle parti da cui sono formati, la loro natura e le forze: cose nuove almeno per noi e, speriamo, non sgradite (soprattutto ai geometri) né sterili, capaci di rendere più semplice ed elegante questa stessa nostra concezione delle forze vive.

10. Tutti gli studiosi di meccanica, sostenitori dell'una e dell'altra concezione, riconoscono nei corpi quella forza che Keplero, primo fra tutti, chiamò forza *d'inerzia*, e Newton forza insita e passiva. Essa è una disposizione della materia a perseverare in quello stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, una volta che essa vi sia stata posta, a meno che una qualche potenza costringa a mutare tale stato. Si tratta o di una legge di natura liberamente data dal creatore, oppure di una – per usare un termine degli scolastici – esigenza condizionata dell'essenza stessa del corpo, che i peripatetici possono accettare e anche (qualora lo vogliano) collocare in una qualche qualità che possegga siffatta esigenza condizionata. In quale essa sia fisicamente riposta non indagheremo qui. Ci basta sapere che gli studiosi di meccanica l'ammettono nei corpi: sia coloro che intendono le forze vive come proporzionali alle velocità soltanto, sia quelli che le intendono come proporzionali ai quadrati delle velocità con cui operiamo.

Per tale forza d'inerzia, se i corpi hanno velocità nulla stanno in quiete; se hanno una velocità, la conservano finché ne venga generata una nuova da una qualche potenza.

11. Inoltre la velocità o celerità può essere considerata (anche in questo caso impieghiamo i termini degli scolastici, qui sommamente appropriati) in atto primo o in atto secondo. La velocità in atto secondo è una certa relazione tra lo spazio percorso e il tempo in cui esso viene percorso: e il suo concetto non comporta nient'altro che tempo, spazio e una qualche relazione fra loro, per la quale questa velocità si definisce tanto più grande quanto più spazio viene percorso con moto uniforme nello stesso tempo, e quanto meno tempo si spende nel percorrere lo stesso spazio. Di conseguenza, essa è come uno spazio diviso per un tempo. A questa velocità, nelle particelle singole di materia corrisponde una quantità del moto eseguito in un dato tempo dalla stessa particella; moto che – trattandosi di una traslazione da luogo a luogo – è come lo spazio percorso. Dunque, nell'intero corpo la quantità di moto è come la somma delle velocità di tutte le particelle, cioè equivale alla velocità moltiplicata per la massa. Tutto ciò è ben noto persino ai neofiti di meccanica.

12. La velocità in atto primo è la disposizione che un corpo possiede ad assumere tale velocità in atto secondo, ossia la disposizione a percorrere un determinato spazio in un tempo dato. Un corpo che si muove di moto uniforme mantiene tale velocità per forza d'inerzia; anzi, essa non è altro che la forza d'inerzia stessa determinata da disposizioni precedenti, cioè o da un primo stato in cui il creatore ha posto quella materia mentre la stava creando, o dall'azione di potenze che vi hanno agito in passato.

13. Col nome di potenze intendiamo quelle cause che, con le loro azioni, mutano lo stato di un corpo, le quali, poiché lo dispongono ad avere una diversa velocità in atto secondo, sono dette produrre in esso una nuova velocità in atto primo. L'azione istantanea dalla quale si pensa generata questa velocità si chiama forza attiva: essa è per noi l'unica forza; da Leibniz, invece, è detta forza morta. Potenze del genere sono l'impenetrabilità nell'urto fra i corpi, posto che avvenga per contatto; la gravità nell'avvicinarsi al centro di un corpo o nell'avvicinarsi a un secondo corpo; la forza elastica, cioè la causa che respinge parti di corpi qualora esse si avvicinino fra loro più del dovuto, e le fa avvicinare qualora si allontanino reciprocamente più del dovuto. Lo stesso dicasi per la causa dell'adesione fra le particelle dei corpi (per la quale il moto dell'una segue quello dell'altra), per la causa che si oppone alla compressione in certi altri corpi (che non recuperano la forma perduta, e vengono detti molli), e per altre, eventuali, cause del genere.

14. Analogamente, queste potenze possono essere riposte nella libera legge di Dio o in un'altra esigenza condizionata dell'essenza del corpo stesso, o anche – stando ai peripatetici, se vogliono – in una certa qualità, fatti comunque salvi i fenomeni. Infatti, in qualunque cosa tali potenze siano fisicamente collocate, purché generino in un corpo la stessa velocità in atto primo, cioè lo dispongano alla stessa velocità in atto secondo, si avranno sempre i medesimi fenomeni di moto. D'altra parte, sebbene qui ci serviamo dei nomi di azione e generazione, tuttavia in tale generazione di velocità

in atto primo non c'è bisogno di alcuna vera e propria azione o produzione fisica, in quanto la stessa velocità, secondo l'idea che ne abbiamo dato, non è qualcosa che sia prodotta fisicamente e arrivi all'improvviso. Ce n'è abbastanza per la presente combinazione fra quella legge o esigenza condizionata in cui è insita la forza d'inerzia e l'altra, in cui è insita la potenza stessa, nonché per la circostanza del luogo o un'altra del genere, che determini la condizione stabilita nella potenza stessa. Così per i newtoniani la gravità è o una disposizione della natura dei corpi oppure una libera legge di Dio, tale che, se due corpi sono posti a una distanza qualunque, anche nel vuoto, essi acquisiscono immediatamente la disposizione ad avvicinarsi fra loro e ad acquistare una nuova velocità in atto secondo tanto maggiore quanto minore è il quadrato della distanza. Si immagini che quei corpi esistano, si immagini la forza d'inerzia, per la quale essi mantengano la velocità precedente, posto che non agisca alcuna potenza; si immagini una distanza determinata; si immagini che sia stata generata la nuova velocità in atto primo, essendo determinate tutte le condizioni: si capirà anche il continuo sopraggiungere di una nuova velocità, se si comprenderà che le stesse condizioni vengono determinate continuamente. In tale idea non si cela alcuna vera produzione di qualcosa che sia la velocità in atto primo, non si cela alcuna azione fisica. Lo premettiamo qui una volta per tutte, affinché si capisca per sempre in che senso intendiamo l'azione generativa della velocità, e ci sia possibile farne uso nel seguito, senza che sia richiesta la produzione di alcuna forza viva per la generazione della velocità.

15. Generalmente pensiamo le potenze in quanto agenti continuamente attivi, come la gravità e l'elasticità. Esse producono un'unica pressione istante per istante, che si trasforma in velocità non per una qualche moltiplicazione, ma per il solo fatto di essere condotta per un tempo continuo; proprio come una linea si trasforma in superficie non per una sua moltiplicazione, ma perché trascinata in modo continuo lungo un'altra linea. L'impenetrabilità, per esempio nell'urto fra i corpi che nessuna forza deforma e che si dicono rigidi (non ci chiediamo qui se questi corpi esistano in natura; ma più avanti lo escluderemo), genera, in realtà, una velocità nell'istante stesso del contatto, e la cambia come per salto. Per tale ragione si dice che la forza che si esercita nella percussione è di ordine superiore, e che non è uguagliata dalla pura pressione moltiplicata in qualsiasi modo, ma solo, come abbiamo sostenuto, dalla pressione condotta per un tempo continuo.

16. Tuttavia, la pressione è connessa con la velocità come una linea retta con un piano. Infatti, come una retta condotta lungo un'altra secondo uno stesso angolo descrive un piano proporzionale a sé, così una pressione proseguita per un tempo dato si trasforma in una velocità proporzionale a sé. Come, variando la linea lungo la quale l'altra viene condotta, il piano generato sta in proporzione composta con la retta che viene condotta e con quella lungo la quale viene condotta, così pure, variando il tempo in cui una stessa pressione perdura, la velocità generata è in proporzione composta con la pressione e col tempo in cui essa viene proseguita. Nella Figura 3, se la retta EF rimane sempre della medesima lunghezza mentre viene condotta ad angolo retto lungo la retta AC, essa descrive un rettangolo ove alle singole particelle Ee corrispondano spazietti

$FEef$ uguali; se, però, la retta si allunga o si accorcia continuamente e poi eventualmente svanisce o va dalla parte opposta, essa descrive un'altra figura piana, che giace dalla stessa parte o parzialmente da una parte e da quella opposta. Allo stesso modo, se una pressione mantiene sempre lo stesso valore, genera un moto uniformemente accelerato, ove in singoli tempuscoli uguali si aggiungono uguali incrementi di velocità; se, però, la pressione viene variata continuamente, essa produce un moto variamente accelerato ove gli incrementi stessi di velocità, fatti in tempuscoli uguali, sarebbero di continuo ora maggiori ora minori, sino a divenire decrementi, se la pressione cambia direzione. Infine, se lo spazietto Ee viene immaginato infinitamente piccolo, data la differenza infinitamente piccola fra i segmenti ef , EF, l'areola $FEef$ viene pensata come un rettangolo. Allo stesso modo, data la differenza infinitamente piccola fra due pressioni in un tempuscolo infinitamente piccolo, in quello stesso tempuscolo anche un moto variamente accelerato viene pensato come uniformemente accelerato. Per tale ragione, se i segmenti AE della retta AC esprimono tempi e la retta EF esprime invece le pressioni, attraverso il piano $BAEF$ verrà espressa benissimo appunto la velocità in cui si trasforma la pressione EF proseguita per il tempo AE. Pertanto, come ogni altro genere di grandezze, anche le velocità potranno venire espresse mediante linee, assumendo ad arbitrio una qualche linea che rappresenti una qualche velocità.

17. E perché questa teoria sia più generale: nello stesso equilibrio, in cui due potenze si contrastano con pressioni opposte e non si ha alcun moto o alcuna velocità in atto secondo, in un qualsiasi tempo continuo si pensano prodotte velocità in atto primo, ma contrarie e uguali, la somma delle quali, dunque, rimanga ininterrottamente $= 0$. Esercitandosi poi l'azione della potenza istantaneamente, poiché l'istante non è parte, bensì termine di un tempo continuo (proprio come un punto in geometria non è parte di una linea, ma suo termine), pensiamo come generata soltanto quella pressione che sta alla velocità come la linea alla superficie.

18. La nuova velocità generata, se è generata nella stessa direzione della precedente, si aggiunge a quella, e la somma delle due cresce, come accade in analisi con quantità dotate dello stesso segno; qualora sia generata in direzione contraria, si aggiunge a quella in senso negativo, cioè viene sottratta, e a crescere è la differenza fra le due, come una quantità negativa aggiunta a una positiva la diminuisce anziché aumentarla. In tal caso, se la velocità contraria è uguale alla precedente, la velocità rimane $= 0$, ossia disposizione alla quiete, come abbiamo detto per le pressioni contrarie; se maggiore, rimane una velocità negativa, ossia con direzione opposta alla precedente. Se, di nuovo, la nuova velocità viene generata in una qualche direzione trasversale, verrebbe applicata trasversalmente all'altra, secondo la ben nota legge di composizione e scomposizione dei moti. Nelle Figure 4 e 5, AB rappresenti la prima velocità, AC la seconda; costruito il parallelogramma $ACDB$, la diagonale AD rappresenterà la grandezza e la direzione della velocità, che risulta dalla composizione delle due. Gli esperimenti insegnano chiaramente che lo stesso accade sia nelle pressioni sia nelle velo-

città; e poiché da due velocità o pressioni AB, AC ne risulta una terza AD, tale procedimento si chiama composizione dei moti. Poiché l'unica velocità AD viene pensata come originata dalle due AB, AC, definite mediante i lati di un parallelogramma qualsiasi, di cui AD sia una diagonale, tale procedimento viene detto scomposizione. Qui non ci chiediamo se ciò venga necessariamente da altre, precedenti leggi di natura e se lo si possa dimostrare; o se si tratti piuttosto di una legge primaria, a cui l'autore della natura avrebbe potuto sostituirne qualche altra a suo arbitrio, e stabilire che dalla composizione dei moti risultasse una qualche altra direzione, un'altra misura della nuova pressione e un'altra velocità.

19. La velocità che risulta nella composizione è sempre minore delle componenti prese insieme, giacché i lati AB, BD, e perciò anche AB, AC presi insieme, sono maggiori di AD. Nella scomposizione la velocità aumenta in ragione inversa; o meglio, per essere più aderenti al vero, si immagina che aumenti: infatti, dalla teoria che stiamo per presentare si deduce facilmente che una scomposizione non ha mai luogo, ma è solo pensata dalla mente; in realtà può esserci solo composizione. Ma se pensiamo di scomporre ciascuna velocità in due componenti, l'una secondo la direzione della nuova risultante, l'altra secondo la direzione a essa perpendicolare, le perpendicolari stesse, sempre uguali fra loro, si elideranno reciprocamente, e la somma delle rimanenti (o la loro differenza) sarà sempre la stessa, nella risultante così come nelle componenti. Infatti, tracciate CF, BE perpendicolari a AD, e costruiti i rettangoli Ff, Ee, scomposta poi AC in Af, AF, e AB in Ae, AE, è abbastanza evidente che dall'uguaglianza dei triangoli AFC, BDE, si può facilmente dimostrare che AF, DE; CF, BE saranno uguali, e lo saranno quindi anche Af,, Ae. Perciò, le stesse Af, Ae, opposte fra loro, si elideranno reciprocamente e la somma delle rimanenti (Figura 4) o la differenza (Figura 5) sarà AD.

20. Tutto ciò premesso, ecco infine in che cosa siamo d'accordo con i leibniziani e con gli antileibniziani, e in che cosa non lo siamo. L'azione delle potenze dalla quale viene generata la pressione o la velocità e che abbiamo chiamato la loro forza, si misura componendo le velocità generate nelle singole particelle, cioè moltiplicando la massa per la velocità semplice. Ciò trova d'accordo anche Leibniz, il quale misura così le forze morte. Tale modo di misurare è abbastanza conforme a ragione. Quando, infatti, pensiamo che da quest'azione si genera una velocità o una pressione la quale, continuata per un tempo dato, produce una velocità proporzionale alla pressione stessa, tale azione, che noi pensiamo per quell'unico fine, sarà da misurare in base a quell'effetto. Inoltre noi pensiamo e affermiamo che quell'azione non produce nient'altro che questa pressione e questa velocità. Leibniziani e antileibniziani ammettono in più una forza viva, lasciata perdurare nel corpo da tali azioni delle potenze. Infine, qualunque spiegazione fisica ne diano, sia che vogliano che la forza viva consista in una qualche qualità peripatetica com'è l'impeto (il che non vogliono), sia che la vogliano consistente in qualsiasi altra cosa, noi respingiamo tanto questa qualità di forza viva quanto anche solo l'idea, in quanto essa è completamente superflua, e affermiamo che tutti i

fenomeni si spiegano in misura più che soddisfacente con le idee da noi fin qui sostenute. In base a esse pensiamo quanto segue: attraverso le azioni delle potenze si produce immediatamente la sola velocità, ed essa si compone direttamente o trasversalmente con quella conservata in precedenza per forza d'inerzia. Leibniziani e antileibniziani, invece, combattono fra loro su quale debba essere la misura di quella forza viva che concepiscono nel pensiero o ammettono. Per tale ragione, se abbiamo mostrato che tutti i fenomeni di moto possono venire spiegati al meglio senza questa nuova entità o idea, abbiamo certamente ricavato che non vi sono forze vive e, eliminato l'oggetto del contendere, eliminiamo la contesa stessa.

21. Veramente, per cominciare dal moto uniforme, è quanto mai evidente che per la conservazione della velocità, acquisita per le precedenti azioni di potenze, è sufficiente la sola forza d'inerzia, e non è richiesta alcuna forza viva. Tale conservazione è evidentemente inclusa nell'idea stessa di forza d'inerzia. Di conseguenza, se analogamente non è necessaria alcuna forza viva ove vi siano potenze che inducono una generazione di velocità, proprio tutti i fenomeni si spiegheranno senza forze vive.

22. Ora, se la velocità viene prodotta mediante le forze di quelle potenze che sono pensate agire anche senza alcun contatto o impulso di altro corpo, nel modo in cui tanto i newtoniani quanto i peripatetici pensano agisca la gravità anche su un corpo collocato nel vuoto, appare altrettanto chiaro che non c'è alcun bisogno di forze vive. Dal fatto che le forze di gravità in singoli istanti E (vedi la Figura 3) producono pressioni EF proporzionali alle forze stesse, e nei tempuscoli Ee producono le velocità $FEef$, tali forze, negli intervalli AE , AC produrranno le velocità $BAEF$, $BACD$, in base al n. 16. Qualora, invece, tali velocità siano espresse mediante le ordinate EH relative a una certa linea AHG, gli spazietti coperti nel tempuscolo Ee dalla velocità FH staranno come le areole $EHhe$, e gli interi spazi corrispondenti agli intervalli di tempo AE, AC, staranno come le aree AEH, ACG. D'altra parte, benché le velocità prodotte nei singoli tempuscoli stiano come le forze e gli spazi percorsi come le velocità, nei composti si scoprirà una relazione mutevole delle loro somme, secondo la mutevole variazione delle forze EF. Se le forze sono costanti, BFD risulta una linea retta parallela a AC, la velocità $BAEF$ è proporzionale a forze e tempi congiuntamente: perciò, rimanendo costanti le forze, EH sta a AE, AHG è una retta che termina in G, gli spazi AEH risultano proporzionali ai quadrati costruiti sui lati EH e AE, cioè ai quadrati delle velocità o a quelli dei tempi, o anche al prodotto fra AE e EH, cioè fra tempo e velocità. È quindi evidente perché, in questa ipotesi della gravità, un corpo che discenda da un'altezza quadrupla acquisti velocità doppia e impieghi tempo doppio. Per l'identica ragione, qualora venga spinto verso l'alto con velocità doppia, salirà ad altezza quadrupla senza alcuna necessità di una forza viva quadrupla che sospinga tale corpo. Sale, infatti, finché si genera una velocità doppia contraria a quella impressa e che l'annulli, invertendo la direzione del moto. Nella salita, il moto positivo verso l'alto dipende dalla sola forza d'inerzia, che conserva la velocità precedente; la negazione di un moto ulteriore proviene dalla gravità, la quale, dopo un'altezza quadrupla, ha infine generato una velocità doppia.

23. AE esprima ora non tempi ma spazi, mentre EF esprima forze che in singoli tempuscoli uguali generino velocità a loro stesse proporzionali; allora l'areola $FEef$ non esprimerà la velocità generata nello spazietto Ee, giacché quanto più velocemente viene percorso quello spazietto, tanto minore è la velocità generata dalla medesima forza. Invece, la velocità prodotta sarà in proporzione composta fra la forza diretta FE e il tempuscolo. E poiché quest'ultimo è direttamente proporzionale allo spazietto Ee, e inversamente proporzionale all'intera velocità, l'incremento di velocità sarà direttamente proporzionale a FE e Ee, e inversamente proporzionale all'intera velocità; di conseguenza, il prodotto fra la velocità e il suo incremento sarà come l'areola $FEef$. Da qui inoltre, per la legge degli infinitesimi, si deduce che il quadrato della velocità del corpo in discesa da A, partendo dalla quiete, è come l'areola $BAEF$; e poiché per il decremento calcolato per la velocità contraria vale lo stesso, se il moto inizia in A verso C con una velocità espressa da $BACD$, e le forze agiscono in direzione contraria, i quadrati delle velocità residue saranno come $CEFD$, e il moto in C si estinguerà interamente. Sia invece l'ordinata EI, su una certa linea continua NIm, la reciproca della velocità EH, la quale appunto stia a una certa retta data L come questa sta a EH; l'areola $EIie$ sarà direttamente proporzionale allo spazietto Ee, e inversamente proporzionale alla velocità EH, cioè al tempuscolo. Di conseguenza, l'intero tempo in cui viene percorso AE starà come l'intera area $MAEIm$. Da linee di questo tipo si deduce facilmente, in meccanica elementare, tutto ciò che attiene a questi moti accelerati o decelerati: per esempio, se le forze EF stessero come le distanze EC dalla fine del moto in C, se la linea BD divenisse una retta che termina in C, la linea AHG si trasformerebbe in un quadrante di ellisse o di cerchio, l'area $MAEIm$ sarebbe data quadrando il cerchio, le velocità acquisite alla fine degli spazi starebbero come gli spazi stessi, i tempi sarebbero uguali. Di qui, per questa legge della gravità che diminuisce in ragione delle distanze dal centro, la velocità acquisita cadendo da una distanza doppia è pure doppia; perciò, al contrario, se un corpo parte dal centro con velocità doppia, sale ad altezza doppia. E come dall'elevazione ad altezza quadrupla, ipotizzando gravità costante, non si evince la presenza di una forza viva quadrupla, così in questo caso dall'elevazione ad altezza doppia non si evince la presenza di una forza viva doppia. Entrambi i fenomeni dipendono unicamente dalle somme delle velocità, che in singoli tempuscoli uguali vengono prodotte da forze proporzionali a quelle, nonché dalle sole somme degli spazi, che in singoli tempuscoli uguali vengono percorsi con velocità a essi proporzionali.

24. Per quanto riguarda l'urto fra corpi, premettiamo dapprima l'ormai celebre principio: *a un'azione corrisponde sempre una reazione uguale e contraria*, di cui fecero uso così felice Wren, Wallis e Huygens nel determinare l'urto tra i corpi elastici, e Newton per la sua gravità reciproca, con la quale ha spiegato i complicatissimi moti dei corpi celesti. Noi intendiamo quel principio così: ogni qual volta che la forza di una qualche potenza agisca su un corpo secondo una direzione, agisce ugualmente su un altro secondo quella opposta, in modo da produrre somme uguali di velocità da ambo le parti di particelle da cui dipendano uguali quantità di moto, generando, di conseguenza,

velocità inversamente proporzionali alle masse di ciascuna particella. Certo nessun fenomeno è contrario a questo principio; moltissimi sono in suo favore, e anzi, per quanto è dato osservare dallo sperimentatore, lo sono tutti. Così, nel magnete e nel ferro, la forza magnetica produce velocità inverse rispetto alle masse; così, una fune si tende fra una barca e una nave più grande; così, se si preme la cera con un dito, vengono premuti contemporaneamente il dito e il materiale. Per tale ragione questo principio viene dedotto in modo tutto sommato chiaro dall'analogia della natura. Ma noi dedurremo assai semplicemente da esso, per mezzo dello stesso metodo generale, l'urto fra corpi, siano essi rigidi, elastici o molli.

25. Siano ora, nella Figura 6, due sfere rigide AB e CD, di massa rispettivamente M e m, velocità con cui si urtano V e u, che si diranno positive secondo la direzione BC, negative secondo quella opposta. Nell'istante in cui i punti B e C si toccano, la forza d'impenetrabilità fa sì che le velocità cambino in modo tale da ridursi a quiete dell'una rispetto all'altra oppure a una velocità uguale, cui certamente non si oppone l'impenetrabilità. Considereremo perciò l'impenetrabilità come una potenza che produca velocità contrarie nell'una e nell'altra sfera, in modo che, da un lato, tali velocità lascino da ambo le parti la stessa velocità rimanente, e dall'altro lato, per l'azione uguale sulle due parti, siano inversamente proporzionali alle masse. Si indichi con x la velocità comune: la velocità perduta dalla prima, cioè $V - x$, starà alla velocità acquistata dalla seconda, cioè $x - u$, come m sta a M. Di conseguenza, $VM - Mx = mx - mu$, cioè $VM + mu = Mx + mx$, e infine $\frac{VM+mu}{M+m}$, che è la formula ordinaria per l'urto fra corpi rigidi, ove la velocità comune dopo l'urto si trova moltiplicando ciascuna massa per la sua velocità e dividendo la somma dei prodotti per la somma delle masse. Posto che, invece, si cerchi $V - x$, cioè la velocità prodotta nella prima sfera verso la parte opposta, si troverà $\frac{VM+Vm-VM-um}{M+m} = \frac{VM-um}{M+m}$. In altri termini, come la somma delle masse $M + m$ sta a una delle masse (diciamo m), così $V - u$ (cioè , la differenza delle velocità dirette verso una stessa parte o la somma delle velocità dirette verso parti opposte), che è una velocità relativa, sta alla velocità prodotta nella seconda sfera lungo la direzione opposta alla retta congiungente i centri.

26. Analogamente, non c'è qui alcun bisogno di forze vive. Se due sfere s'incontrano con velocità inversamente proporzionali alle masse, per la stessa formula il moto di entrambe si arresta istantaneamente. Da qui gli antileibniziani concludono che le loro forze vive esistono prima dell'urto, come le masse e le velocità, e che, di conseguenza, l'uguaglianza delle forze vive fa sì che il moto si arresti nell'urto. Se consideriamo l'impenetrabilità come una potenza che agisca secondo le leggi ordinarie, sia pure per salto – evidentemente secondo la natura della rigidità – in questo caso non c'è alcuna necessità di forze vive.

27. Immaginiamo ora che queste stesse sfere, giunte a distanza BC, si respingano con una certa forza che faccia resistenza a un ulteriore avvicinamento reciproco, aumentando al diminuire della distanza. Le loro velocità muteranno non nello stesso istante, ma

prima l'una e poi l'altra, cosìcché, per il principio di azione e uguale reazione, dopo un qualunque tempo continuo si producano verso parti opposte velocità inversamente proporzionali alle masse. Nel frattempo, però,la distanza diminuisce di continuo, finché, se la forza repulsiva sarà stata abbastanza grande, rimane una qualche distanza, ma minima: in tal caso le due sfere verranno riportate alla stessa velocità, e ciò è appunto necessario affinché la distanza non diminuisca ulteriormente. Ma allora, o tale distanza ricomincerà a crescere, se continuerà ad agire la forza repulsiva, oppure – posto che cessi ogni forza – rimarrà invariata. Il primo caso ci mostra le due sfere che spingono la molla BHC, sicché chiudendosi l'angolo in H si chiude, le sfere si respingono fino a quando si giungerà alla posizione precedente, oltrepassata la quale la molla comincia a essere tesa più del dovuto dalla velocità ora acquisita, e le sfere, con la velocità acquisita, continuano ad allontanarsi a vicenda. Lo stesso primo caso può riferirsi anche all'urto fra due sfere elastiche: mentre le loro parti, dopo il contatto in B e in C (poiché in quei punti la forza d'impenetrabilità impedisce la differenza di velocità), vanno verso l'interno, l'elasticità, che oppone resistenza al loro avvicinamento alle parti rimanenti, spinge in modo uguale su ambo i lati. Un secondo caso, che si avrebbe qualora, a tale distanza minima, la molla si rompesse in H, è illustrato dalla costituzione dei corpi molli: questi si possono concepire come se fossero composti da fibrette elastiche, ma più corte, che si rompono rapidissimamente o sciolgono dei nodi che, per così dire, le tenevano legate insieme. Di fatto, così le parti resisteranno introflettendosi, senza però mai riacquistare la forma.

28. D'altra parte, poiché a tale distanza minima abbiamo le velocità delle sfere riportate a uguaglianza e le velocità prodotte da entrambi i lati inversamente proporzionali alle masse, abbiamo gli stessi elementi dai quali, nell'urto fra corpi rigidi, è scaturita la velocità che viene acquisita dalla seconda sfera in direzione opposta rispetto a quella della prima, lungo la retta congiungente i centri. Pertanto, la formula per l'urto fra corpi molli sarà la stessa; per l'urto fra corpi elastici bisognerà raddoppiare la stessa velocità che è stata acquisita, e questa sarà proporzionale alla somma delle masse; e la velocità relativa starà alla velocità acquisita dalla seconda sfera come la somma delle masse sta alla massa semplice della seconda sfera nel caso dei corpi molli, e come al doppio della massa nel caso dei corpi elastici.

29. In EFG (Figura 7) ci sia un numero qualunque di sfere intermedie; all'inizio un certo punto B si avvicinerà rapidissimamente a E, con tutta la velocità di cui è dotata la sfera AB; intanto E comincerà ad acquistare velocità verso F, e B (con la sfera AB) l'acquisterà nel verso opposto, sicché AB comincerà a rallentare. All'avvicinarsi del punto E, la forza che respinge E e F, spingerà immediatamente entrambi i punti verso direzioni opposte, ma meno della forza che respingeva B e E, a causa della minore velocità iniziale del punto E rispetto a B; si avrà, perciò, un minore avvicinamento. In un tempo piccolo a piacere, dopo il primo urto, distrutto l'equilibrio in B, il cambiamento di stato si propagherà per tutti i punti $EFGC$, ma la velocità acquistata nella direzione BC sarà molto maggiore nelle sfere più vicine che in quelle più lontane. Col

passar del tempo si dovrà arrivare alle distanze più piccole di tutte; poi le sfere inizieranno ad allontanarsi a vicenda. Ciò non accadrà se non quando la velocità relativa risulti nulla, e divengano quindi uguali le velocità di tutte le sfere. In tal caso, per l'uguaglianza di azione e reazione, la somma delle velocità che le particelle della sfera AB avranno acquistato per la forza repulsiva esercitata lungo BE sarà uguale alla velocità acquistata dalle particelle della sfera E verso parti opposte; analogamente, le sfere E e F acquisteranno velocità uguale verso parti opposte, e così via fino alla sfera CD. Le somme delle velocità di tutte le particelle prodotte dalla forza repulsiva negli intervalli BE, EF, FG, GC, siano x, y, z, u: la somma di tutte le velocità che le particelle della sfera AB acquisteranno nella direzione CB, fino alla distanza minima sarà $= x$; invece, la somma di tutte quelle che rimangono in direzione opposta a quelle prodotte nelle particelle delle altre sfere sarà $= x - y, +y - z, +z - u, +u$, ossia sarà $= x$. Cioè la somma iniziale sarà uguale a quella finale. Per tale ragione, se la sfera AB urta la sfera CD, attraverso un numero qualunque di sfere spostate con la stessa velocità, ciò accadrà esattamente come se tutte quelle sfere si fondessero in un'unica massa e la forza agisse soltanto lungo BE; di conseguenza tornerebbe quanto detto al n. 28. Lo stesso discorso varrebbe anche laddove un numero qualunque di sfere andasse con la sfera verso A, e un numero qualunque di altre sfere con la sfera verso D, dotate delle stesse velocità di quelle stesse sfere. Alla distanza minima verrebbero sempre portate tutte a uguale velocità, e vi verrebbero portate dopo aver prodotto da entrambe le parti somme di velocità opposte, in modo che il rapporto fra la velocità delle singole particelle del primo aggregato, acquistata grazie a forze repulsive, e la velocità delle singole particelle del secondo aggregato sia l'inverso di quello della massa del secondo aggregato rispetto alla massa del primo. Lo stesso discorso varrebbe se qualche altra forza non solo agisse su sfere prossime, ma anche allontanasse direttamente E da G oppure da CD.

30. Questo caso può adattarsi sia agli urti fra sfere elastiche sia a quelli fra sfere molli. Sulle prime parti di esse, che si toccano, agisce la forza d'impenetrabilità; sulle altre, invece, e proprio mentre si introflettono e si avvicinano più della distanza assegnata, le forze repulsive. Esso può pure adattarsi ai corpi rigidi, concependoli come suddivisi in una molteplicità di particelle che si respingano a vicenda per la forza d'impenetrabilità; la differenza con i corpi elastici sta solo nel fatto che nei corpi rigidi l'impenetrabilità agisce in uno stesso istante, mentre in quelli elastici agisce in istanti successivi, e i corpi rigidi, dopo che è stata raggiunta la stessa velocità, non tornano alla posizione di partenza. Tale caso può infine adattarsi a sfere che spingono contro molle elastiche formate da più angoli (caso rappresentato nella figura), considerando solo l'effetto dell'elasticità, ed astraendo dalla traslazione delle fascette [*virgae*] della molla, che dipende da una determinata rigidità e perturba poco l'effetto. Ove siano date forze libere [*viribus absolutis*] per singoli intervalli, si potrà determinare, avvicinandosi l'un l'altra le sfere AB, CD, in quale punto si abbia la quiete, quale debba essere il moto dei singoli punti, e quando i singoli punti – i più vicini dei quali acce-

lerano o rallentano moltissimo soprattutto all'inizio – raggiungano la massima velocità, e così via. A noi basta aver mostrato in quale maniera tutti questi effetti dipendano dala sola generazione di velocità, originata da potenze agenti in maniera uguale da entrambe le parti, senza alcuna necessità di forze vive.

31. Certo si vede subito in che modo avvenga, nei corpi elastici e in quelli molli, l'introflessione delle parti e lo scavo di buche. Al primo toccarsi di sfere molli, è la velocità delle particelle più vicine al contatto quella che all'inizio varia maggiormente, finché a poco a poco tutte le parti vengono portate a uguale velocità. Tale disuguaglianza di velocità fa sì che alcune parti si avvicinino ad altre più che in precedenza: ecco il cambiamento di forma, l'introflessione delle parti, lo scavo di buche. Se la materia è elastica, la forma viene recuperata, anzi fuoriesce anche dai limiti già presi e hanno luogo oscillazioni: da queste, nei fluidi elastici, si levano le onde; se la materia è molle, una volta toccata la velocità comune, la distanza fra le particelle rimane la stessa, e rimane una buca. Così, nella Figura 2, mentre la sfera A preme le prime particelle di materia molle in B, per la forza d'impenetrabilità e delle potenze repulsive esse acquistano immediatamente delle velocità; perso l'equilibrio mediante esse, si genera in tutte una qualche velocità, tale che, tuttavia, all'inizio sia generata molto più grande nelle più vicine che nelle più lontane, sino a che, infine, sia la sfera sia le particelle sia l'intera massa MN, insieme con il suo sostegno, vengano portate alla medesima velocità, la quale, data l'immensa massa della Terra, su cui poggia, sarà minima e quasi nulla.

31[bis]. Tutto ciò premesso, quasi da sé viene la spiegazione dei fenomeni che i leibniziani adducono per dimostrare la presenza delle forze vive, che equivalgono alle masse moltiplicate per i quadrati delle velocità. Si immagini grandissima la sfera CD (Figura 6), verso la quale la sfera AB, spinta con velocità uno, serri la molla a un'apertura data. Qualora la stessa sfera spinga quattro molle uguali a quella con velocità doppia, le chiuderà della medesima apertura, parimenti ricevendo in cambio dalle altre quattro una velocità doppia anziché quadrupla. Supponiamo, infatti, che la retta AC, della Figura 3 rappresenti BC nella Figura 6; le forze EF nei singoli spazi E staranno come il numero delle molle, cioè nel secondo caso si quadruplicano; per tale ragione, sia le areole $FEef$, sia le intere aree $ACDB$, che per il n. 23 esprimono quadrati di velocità sia acquisite sia perdute nello stesso spazio AC,, nel secondo caso saranno quadruple; di conseguenza, le velocità saranno doppie. Perciò, le rette EI] saranno sempre in rapporto di $\frac{1}{2}$, e in rapporto di $\frac{1}{2}$ saranno pure gli aggregati di tutti i tempuscoli $EeiI$. Appunto dal fatto che nei singoli tempuscoli vengono generate velocità proporzionali alle forze – poiché un corpo spinto con velocità maggiore per un medesimo spazietto Ee subisce l'azione generativa di velocità di quattro molle meno a lungo di quanto un corpo spinto con velocità 1 subisca la forza della propria molla –, in quello spazietto viene generata o distrutta una velocità meno che quadrupla, e l'aggregato di tutti insieme è, per la dimostrazione esposta, non quadruplo, bensì doppio.

Pertanto non vi è alcuna necessità di forze vive; tuttavia, se qualcuno le volesse ammettere, benché inutili, e supponesse che in singoli tempuscoli uguali esse venissero generate proporzionali alle forze nella stessa misura delle velocità, costui spiegherà i fenomeni tanto bene quanto noi: ciò che bisogna intendere anche circa le cose seguenti. E a questo si riduce la brillantissima spiegazione di Mairan, che richiede di comporre la somma delle forze perdute.

32. Allo stesso modo si spiega l'esperimento di Poleni dove, lasciate cadere delle sfere A (Figura 2) di uguali dimensioni e masse diverse da altezze che siano inversamente proporzionali alle masse, vengono scavate nell'argilla buche DCE uguali. Una sfera di massa $\frac{1}{4}$ arriverà con velocità soltanto doppia: e se immaginiamo di dividere una sfera di massa quadrupla in quattro parti uguali, distribuendo le forze singolarmente in queste parti uguali, nei singoli punti della superficie della sfera più piccola agiranno forze quadruple rispetto a quelle che agiscono sulle singole parti della sfera più grande, perciò certamente, in quanto di numero superiore, consumeranno solo una velocità doppia in quegli stessi spazi percorsi fino alla quiete, producendo in metà tempo soltanto una velocità doppia contraria.

33. Ma nell'esperimento descritto ai nn. 6 e 7, dove una stessa sfera, lasciata cadere da altezze diverse, scava[7] buche proporzionali alle altezze (perciò ai quadrati delle velocità), la causa è parimenti da ricercare nella medesima fonte. La porzione di superficie sferica DCE sta come il senoverso CB, come risulta da Archimede. Perciò, mentre la sfera sprofonda, in singoli punti dello spazio BC urta un numero di particelle proporzionale alla distanza BC. Di qui il fatto che le forze, che in essa producono velocità contrarie, stanno come le distanze dall'inizio B del moto ritardato. Perciò, come abbiamo osservatoo al n. 23, in questa ipotesi delle forze una velocità doppia si estinguerà in uno spazio percorso BC doppio e nello stesso tempo. Quadrupla è la quantità di materia che è contenuta in quella buca e viene compressa; ma non per questo viene generata una velocità contraria quadrupla. Una sfera con velocità doppia incontra una dopo l'altra un numero quadruplo di particelle in singoli tempuscoli uguali; ma proprio per questa ragione subisce le azioni delle singole forze in metà tempo soltanto: si tratta perciò di azioni tutte quante dimezzate e insieme doppie. Ma da nessuna parte v'è traccia di forze vive, e ancor meno ve ne è necessità.

34. Infine, quanto all'urto fra corpi elastici, è facile scovare come avvenga. Dice Hermann: una sfera urti contro un'altra sfera che è tre volte la prima con una velocità di due gradi; le comunicherà un grado e tornerà indietro con l'altro, con cui, se urtasse un'altra sfera uguale a lei, si fermerebbe, mentre l'altra se ne andrebbe con lo stesso grado. Perciò aveva una forza viva quadrupla, che ha diviso in una massa quadrupla. Il fenomeno deve senz'altro avvenire così, come si evince anche dalle nostre formule, che abbiamo esposto ai nn. 25 e 28. Ma se ne vede facilmente la ragione. L'elasticità ha prodotto nella sfera tripla un grado di velocità; nella sfera urtante, tre gradi opposti,

---

[7] Boscovich scrive «*excavarit*»; ma dev'essere «*excavaret*».

due dei quali annullano la velocità precedente; rimane il terzo, che viene analogamente perduto in un'ulteriore collisione essendo stata prodotta dalla forza elastica una velocità uguale in entrambe le sfere. Pertanto, anche qui non v'è alcuna necessità che una forza viva sia trasferita da una sfera all'altra. Così, supposto che la sfera A (Figura 8), spinta verso C, urti trasversalmente la sfera B in modo che, posto $AC = 2$, e tracciata la perpendicolare alla retta congiungente i centri B, C, sia $CD = 1$, la sfera proseguirà lungo CF parallela a AD con velocità $AD = \sqrt{3}$,[8] mentre la sfera B si allontanerà con velocità $= 1$. Qualora poi, con una data legge, urtasse la sfera G, e poi la I, le due sfere se ne andranno con velocità $= 1$, mentre alla sfera A rimarrà dapprima velocità $= \sqrt{2}$, quindi $= 1$. Da qui, però, non si potrà concludere che essa possedeva quattro forze vive, che avrebbe diviso fra le tre sfere riservandone una per sé. Nella sfera B la forza elastica ha generato la sua velocità $= 1$; nella sfera A[9] la velocità contraria CD, che, composta trasversalmente con $Cd = CA$, l'ha anzi diminuita, riducendola a $\sqrt{3}$. Lo stesso accade nelle restanti collisioni, producendo sempre la forza elastica coppie di velocità uguali e contrarie.

35. Del resto, si capisce così in maniera chiarissima che, soprattutto negli esperimenti in cui una sfera cade sull'argilla, lo scavo di buche non dipende da alcuna forza viva, bensì dalle azioni dispiegate di potenze. Se la massa MN (Figura 2) urta contro la sfera A, si scava proprio la stessa buca che si avrebbe se la sfera urtasse contro la massa con la medesima velocità. D'altra parte, tale scavo non si può attribuire a una forza viva della sfera A, che appunto era in quiete, o alle forze vive delle particelle della materia molle MN, le quali tendono a conservare il moto di tutte le sfere, non a diminuirlo. In tal caso, ciò dipende dal fatto che l'impenetrabilità e le altre potenze, mentre agiscono sulla sfera A, per generarvi la velocità, agiscono anche sulle parti della materia molle generando velocità opposte, all'inizio ovviamente maggiori in quelle più vicine e minori in quelle più lontane, finché, a poco a poco, divengono tutte uguali; e il moto di avvicinamento reciproco fra le particelle, che dipende da quell'iniziale disuguaglianza di velocità, infine si arresta, e rimane la buca.

36. In questo modo, passando in rassegna tutti i tipi di fenomeni, abbiamo mostrato che da nessuna parte vi è necessità di forze vive: invece, da principi semplicissimi si possono spiegare tutti i fenomeni di moto di tutti i generi mediante la produzione immediata di velocità da parte delle azioni di potenze che dietro di sé non lasciano niente in quei corpi, se non una diversa disposizione della forza d'inerzia, che permane con la forza d'inerzia stessa. Se qualcuno, nonostante l'inutilità della forza viva, la voglia ancora ammettere, lo potrà, a suo piacimento, fatti salvi i fenomeni. Se infatti stabi-

[8] Infatti per costruzione CD è perpendicolare a CF, dunque a AD. Perciò, per il teorema di Pitagora, $AC^2 = CD^2 + AD^2$, da cui $AD^2 = 4 - 1$, dunque $AD = \sqrt{3}$. Analogamente si procede negli altri casi.

[9] Nel testo originale «C», ma per quanto detto sopra dev'essere «A».

lisse che quelle potenze, ogni volta che producono gradi di velocità a loro proporzionali in particelle singole in singoli istanti di tempo, producono anche forze proporzionali, quelle forze staranno come le masse moltiplicate per velocità semplici. Se invece volesse, confezionati singoli spazi uguali, che si producessero singoli gradi di forza viva proporzionali alle forze che li producono, allora di fatto gli aggregati di forze staranno come le masse moltiplicate per i quadrati delle velocità. Infatti, nei singoli spazietti Ee (Figura 3), si produrranno forze proporzionali all'areola $FEef$; di conseguenza, le forze prodotte nell'intero spazio AE sarranno espresse dall'area $BAEF$, che esprime anche i quadrati delle velocità. Per l'una e per l'altra concezione i fenomeni – che, come abbiamo visto, dipendono dalla sola produzione di velocità – avvengono allo stesso modo.

37. La prima concezione è quella degli antileibniziani, la seconda è quella dei leibniziani. Noi, per l'inutilità della forza viva, non abbracciamo né l'una né l'altra. Affermiamo che dai fenomeni non si può dimostrare la falsità di nessuna delle due. Tuttavia, la prima sarebbe più conforme alla semplicità e all'analogia della natura e, qualora occoresse assolutamente abbracciare una delle due, abbracceremmo più volentieri quella. Poiché nei singoli intervalli di tempo – non nei singoli spazi – le potenze producono velocità proporzionali a loro stesse, l'analogia sarà meglio conservata qualora produca anche forze in base alla medesima legge. Nella concezione opposta, una qualsiasi forza minima, per mezzo di una grande velocità, può venire innalzata a forza grandissima che dev'essere esercitata in un tempo brevissimo, e può essere molto maggiore di una forza grandissima esercitata in un tempo lunghissimo. Ciò sembra certamente meno conforme alla semplicità della natura. Infine, poiché le forze morte sono proporzionali alle masse e alle velocità, anche le forze vive devono essere misurate preferibilmente allo stesso modo, se ciò riesce altrettanto bene. Ma è possibile: infatti, se tutto ciò che abbiamo detto circa le potenze che generano le velocità lo si dicesse di quelle che generano le forze, e si unissero le somme sia di quelle che vengono acquisite sia di quelle che vengono perdute, tutto si terrebbe e nessun fenomeno sarebbe in contraddizione con ciò, come abbiamo indicato al n. 31.

38. Né ci preoccupa granché la conservazione delle forze vive ipotizzata da Leibniz e [Johann] Bernoulli, che entro la concezione leibniziana si ha nei corpi elastici. Già in passato Huygens ha dimostrato che nell'urto fra corpi elastici si conserva sempre, dopo di esso, la somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando le masse di ciascuno per i quadrati delle loro velocità. Leibniz e Bernoulli attribuiscono ciò a una legge di natura che conserva invariate le forze vive. A nostro giudizio, invece, le forze, qualora vi fossero, si conserverebbero meglio sulla base della concezione opposta. Infatti i quadrati delle velocità, sebbene nella concezione leibniziana esprimano in maniera soddisfacente la quantità delle forze, non possono esprimere le loro direzioni; infatti, i quadrati sono sempre positivi, mentre le forze possono avere anche versi contrari, di conseguenza passare da positive a negative. Così, nella concezione di Newton della gravità decrescente secondo l'inverso del quadrato delle distanze dal centro, se le distanze vengono indicate con x, le forze possono ovviamente venire espresse da

$\frac{1}{xx}$ finché la direzione non muta; cambiata questa, le formule dei moti che si traggono da tele espressione si rivelano erronee. Per esempio, è noto che, con quella legge delle forze, se un punto tende verso i singoli punti di una superficie sferica, la misura dell'attrazione risultante da tutti questi, finché è fuori dalla superficie, ponendo la distanza dal centro $= x$, sarà $\frac{1}{xx}$; ma non appena scende sotto la superficie, risulta $= 0$. Ora, poiché le forze vive dovrebbero essere sia positive sia negative, se la somma si conservasse, si conserverebbe in ogni caso, come insegnano tutta quanta la geometria e l'analisi, sicché quantità negative aggiunte a quantità positivi le diminuiranno e all'addizione si sostituirebbe la sottrazione. Sotto tale condizione, però, nella concezione leibniziana la somma non si conserva; all'opposto, invece, nella concezione antileibniziana, poiché a conservarsi sono la somma dei moti nella stessa direzione e la differenza in direzioni opposte, infatti i moti, prodotti da azioni di potenze agenti in modo sempre uguale su parti opposte, non perturbano né l'una né l'altra; d'altra parte la forza viva, in tale concezione, è come la massa moltiplicata per la velocità, cioè come il moto: si conserva in ogni caso anche la forza viva, in modo tale che, in quella somma, le cose positive vengono considerate come positive, e quelle negative come negative. Anzi, se il principio di Cartesio sulla conservazione della quantità di moto venisse riformulato in questo senso, rispettando doverosamente i segni delle direzioni, esso varrà sia per quelle forze sia per i moti, in modo che nemmeno le forze di un'anima libera perturbino in alcunché tale conservazione. Infatti essa opera con quella legge anche sui corpi, tanto da dover sempre imprimere a due particelle velocità opposte, come si dimostra facilmente.

39. Infine, se uno non ammette le forze vive, ma osserva la disposizione di un corpo a scavare buche entro una massa molle, a tendere un certo numero di molle elastiche, a salire a una qualche altezza contro la gravità uniforme, nel considerare questi effetti come dovuti a ciò, senza riferimento alle potenze da cui dipendono, alla sequenza delle azioni e ai tempi in cui vengono prodotti, egli potrà chiamare forza viva quella stessa disposizione così considerata, e la sua misura sarà data dalla massa moltiplicata per il quadrato della velocità. Analogamente, un altro potrà osservare la disposizione a percorrere con moto uniforme un certo spazio in un dato tempo, oppure osservare la sequenza e i tempi delle azioni nel superare ostacoli; per costui, in tal modo di considerare le cose, le forze vive saranno impiegate come masse moltiplicate per velocità semplici. Chi non consenta di utilizzare così i termini, ne fa una questione terminologica. Ma in una questione terminologica ci si dovrebbe piuttosto adeguare al modo di parlare più antico anziché a quello più nuovo. E non c'è ragione per cui Leibniz, se aspira soltanto a un cambiamento di termini, si vanti tanto, quasi avesse colto un qualche grande errore di tutti gli studiosi di meccanica, come nota giustamente Mairan.

40. Spiegati in tal modo tutti i tipi di fenomeno con le azioni delle potenze che si è comunemente soliti prendere in considerazione, e ricondottili ai più semplici e generalissimi principi della produzione immediata di velocità, resta, Congregati elettissimi, da

portare a conoscenza una nostra idea, che introduce anche maggiore semplicità e analogia circa le potenze stesse e il loro modo di agire: verso di essa noi abbiamo la massima inclinazione, sia appunto per la semplicità e l'analogia, sia perché è adatta a spiegare moltissime caratteristiche anche primarie dei corpi, benché constatiamo che essa viene accolta con derisione da tutti coloro che non abbiano esaminato la cosa con maggiore profondità. Ciononostante, avendo meditato per lunghissimo tempo, non esitiamo a enunciarla qui, rimanendo tuttavia prontissimi ad abbandonarla e a seguire l'opinione corrente se a essa venissero opposte più gravi obiezioni. Violenta è la disputa fra newtoniani e cartesiani circa la generazione dei moti, poiché i cartesiani ritengono che soltanto l'urto fra i corpi ne modifichi il moto; i newtoniani ammettono anche forze agenti a distanza fra i corpi. Così questi riconoscono l'esistenza della gravità anche nel vuoto; quelli, invece, proclamano che nella meccanica bisogna ammettere il solo urto, mentre tutte le altre cose stanno con essa in profonda contraddizione.

41. Quanto a noi, che abbiamo considerato la cosa a lungo e in maniera assai accurata, ci è venuto in mente quanto segue. Se si prende in considerazione l'analogia e la semplicità della natura, nessuna variazione di moto accade per urto, ma sempre attraverso forze agenti a una qualche distanza – si tratti di forze insite nella natura stessa dei corpi o dipendenti da una qualche libera legge dell'artefice supremo, il quale a proprio arbitrio abbia potuto non solo creare o non creare questa materia, ma anche crearla con queste o quelle caratteristiche e leggi, non essendovi alcuna forza infusa che richieda alla natura dei corpi altro se non la più elevata sottomissione ai divini comandi del loro Creatore. A nostro giudizio, perciò, da quei principi deriva che in nessun caso mai i corpi e le loro particelle si toccano in modo che non rimangano spazi intermedi a separarli; invece, ci sono singole particelle di materia dotate di certe forze, che ad alcune distanze sono attrattive e ad altre repulsive, in modo tale che, infine, diminuite le distanze all'infinito, la forza repulsiva si accresca all'infinito, non superabile se non da una forza infinita che solo Dio stesso, Ottimo Massimo, può esercitare; dunque, egli solo può compenetrare i corpi e privarli dell'estensione.

42. Né ci turba che vediamo le superfici dei corpi continue e ininterrotte; che, avvicinate due sfere, non vediamo apparire alcun intervallo; che, accostata la mano, avvertiamo un contatto; né temiamo che qualcuno, impugnando un bastone, ci chieda se sappiamo che in verità si ha contatto fra i corpi. Che intervalli minimi non cadano sotto i sensi è cosa affatto chiara. Attraverso un cristallo trasparente i raggi passano liberamente in ogni direzione; anzi, come sanno tutti quelli che sono abituati a utilizzare microscopi, passano attraverso lamine sottili di tutti i corpi, benché ai sensi esse appaiano continue. Perciò[10] vi sono movimenti che non appaiono, e sono in quantità immensa. Lo stesso può accadere con gli spazi che separano sfere. Supponiamo che a distanze minime si eserciti la massima forza repulsiva; avvicinando sfera a sfera, tale forza (come nella Figura 6) agirà su entrambe le sfere, fino a ridurle tutt'e due alla stessa velocità. Si sposti una sfera, in precedenza ferma, verso un'altra; se si continua a spostarla,

[10] Nel testo originale: «*icciro*», ma dev'essere «*iccirco*».

verrà sempre mantenuto quell'intervallo minimo che non si può percepire coi sensi; non si potrà concludere da ciò sensatamente che quell'intervallo in verità sia pari a zero. Lo stesso vale per la mano così come per il bastone. Quando si sarà arrivati a tali distanze minime, quella forza repulsiva agirà sia sul corpo sia sulle fibre: per esempio, nel contatto diretto vero e proprio agirà la forza dell'impenetrabilità; vi sarà introflessione delle parti, come nella pressione derivante dal contatto; le fibre verranno tese da quella forza, sicché, propagatosi il moto al cervello, la percezione avverrà allo stesso modo in cui avverrebbe per contatto. Abbiamo addotto tutto ciò per mostrare chiaramente, prima di esporre i fondamenti di questa nostra idea, che né la sua verità né la sua falsità si ricavano da esperimenti siffatti o dalle testimonianze dei sensi, e che nei sensi stessi non può esservi alcun fondamento per l'una o per l'altra. Ma per discutere in un linguaggio più comune, di cui noi stessi facciamo uso, chiameremo contatto fisico – al quale, essendo esso noto unicamente attraverso i sensi, il nome di contatto è stato imposto dall'ordinamento umano – quello in cui due corpi saranno giunti a una distanza che non può essere percepita da alcun senso umano e a cui la forza repulsiva è così grande che non può essere vinta da alcuna forza di uomo. Chiameremo contatto matematico e immediato quello in cui l'intervallo in sé sia pari a zero. Del primo – quello col bastone – avremo paura; il secondo, se la nostra idea è conforme a verità, non lo possiamo temere.

43. Ma, per arrivare al fondamento di questo nostro giudizio, toglieremo anzitutto ogni difficoltà per cui forze siffatte, agenti a distanza, vengono di solito rigettate, come se questo modo di agire non fosse né meccanico né conforme a natura. Questa difficoltà ci accomuna ai newtoniani, e certo anche ai peripatetici, che pongono la loro gravità nella libera legge di Dio o nella natura ed essenza dei corpi, o ancora in una qualità per cui un corpo distante, anche se posto nel vuoto, tenderebbe verso un altro corpo o verso un centro. Questo chiediamo ai cartesiani: perché mai un moto varrebbe comunicato per impulso? Perché, quando una sfera ne urta un'altra, il moto viene comunicato alla sfera in quiete? Loro diranno senz'altro che è in gioco l'impenetrabilità; infatti, se due corpi potessero occupare lo stesso spazio, non ci sarebbe motivo per cui l'uno venga trattenuto dall'altro. Incalzeremo: ma cos'è questa impenetrabilità? Qual è la ragione per cui due corpi non possono occupare il medesimo spazio? Risponderanno certo o che è la natura a far sì che l'uno non occupi il posto dell'altro, o che è la libera legge di Dio, o che è qualcosa di ignoto; e se replicassero qualcos'altro, continueremo a ribattere finché desistano. Pertanto, concedano anche a noi di far uso della della stessa risposta, cioè che sia la natura dei corpi o la libera legge di Dio a far sì che l'uno si avvicini all'altro entro certe distanze e debba allontanarsene entro certe altre, dovendo certamente allontanarsi sempre alle distanze minime, secondo leggi che esporremo fra poco.

44. Se ragionevolmente trascuriamo innumerevoli altri tipi di attrazioni e repulsioni, che si scoprono in gran quantità alle distanze più piccole, abbiamo splendidi esempi di forze del genere nella gravità e nelle forze con le quali i corpi agiscono sulla luce e la luce sui corpi. Molte cose sono state escogitate in modo assai ingegnoso dai migliori

studiosi per spiegare la gravità attraverso l'urto fra corpi per mezzo di materia rotante. Riteniamo che la gravità non si possa spiegare né mediante i vortici cartesiani, per quanto modificati, né attraverso quelli di Huygens. In particolare, abbiamo dato un'illustrazione con non pochi esempi della riformulazione dei vortici cartesiani, che è stata infelicemente tentata anche da personalità di altissimo livello, nella *Disquisitio in universam astronomiam* presentata nel 1742[11]. Appunto questo esito infelice di così tanti tentativi ci convince pienamente che la gravità non dipende assolutamente dall'urto e che i moti incessanti dei pianeti e delle comete provengono dalla forza d'inerzia e da forze di gravità che agiscono nell'immenso vuoto quasi totale, che oppone una resistenza pressoché nulla. Ma che i raggi di luce vengano piegati passando vicino alle estremità di corpi opachi da una certa forza senza che vi sia contatto, lo riconobbe tempo fa il nostro confratello Grimaldi, e da ciò Newton dedusse quella forza attiva di cui così felicemente si è fatto uso per spiegare la riflessione, l'inflessione, e soprattutto la rifrazione. E riteniamo certamente che il rimbalzare indietro della luce nella riflessione non derivi dalla collisione con quella superficie da cui viene riflessa, cosicché a nostro giudizio quella proposizione viene dimostrata da Newton – per quanto possibile in fisica – in *Optice*, Libro 2, Parte iii, Proposizione 8. Armati di questi due splendidi esempi, non temiamo le grida degli avversari, fondate non su ragioni, bensì soltanto su pregiudizi che costoro si trascinano seco dall'infanzia. Ammettiamo che in natura ci sono forze per le quali lo stato dei corpi muta senza contatto diretto e si genera velocità, sicché tale modo di operare è più che abituale per la natura, e anzi in questa nostra concezione esso è per noi l'unico. Da lungo tempo si aggiunge quella meravigliosa forza magnetica che parimenti si è cercato invano di spiegare per mezzo di vortici di materia magnetica. Accenneremo in seguito in che modo possiamo spiegare i fenomeni che la caratterizzano.

45. La ragione per cui ammettiamo soltanto forze di questo genere in natura ed escludiamo l'urto è evidente. È ormai opinione comune quanto molti sostengono, che in natura nulla avviene per salto, ma, come accade anche per i luoghi geometrici e le formule algebriche, qualunque cosa aumenti o diminuisca, aumenta o diminuisce in modo continuo, sicché si passa sempre da una quantità all'altra con moto continuo attraverso tutte le quantità intermedie. Non v'è esperimento che provi la falsità di questo principio: moltissimi, per quanto è dato apprendere attraverso i sensi, ci conducono manifestamente a esso. Quanto al moto locale, non v'è altra causa per il passaggio da un posto a un altro se non il moto continuo attraverso posizioni intermedie. Analogamente, attraverso un tempo continuo arriviamo da un istante a un altro successivo senza interruzione o salto. La stessa cosa viene usualmente ammessa dai leibniziani anche nella generazione dei moti: cioè nessuna velocità va perduta o sorge in un istante, né da un certo grado di velocità si passa a un altro se non attraversando tutti i

[11] R.G. Boscovich, *Disquisitio in universam astronomiam publicae disputationi proposita in Collegio Romano Societatis Jesu […]*, Anno 1742. Mense Decembri Die 16., Komarek, Romae.

gradi intermedi. Muovendo da qui costoro escludono dalla natura i corpi rigidi, nei cui urti si genererebbe o si estinguerebbe istantaneamente una velocità; stando ai più, tutti i corpi sarebbero elastici o molli, o piuttosto misti, cosicché appunto, nell'urto fra due corpi, mentre alcune parti si introflettono, la velocità si estingue a poco a poco per diminuzione continua. Nei corpi elastici essa viene nuovamente comunicata per incremento continuo alle parti opposte; in quelli molli si estingue completamente.

46. Ora, se questo principio è vero, sarà anche vero che la variazione dei moti non avviene mai per urto. Che ciò segua da tale principio ci pare evidente. Supponiamo, infatti (Figura 9), che due sfere elastiche AB, CD uguali e in moto con uguale velocità, espresse dalle rette AF, DO perpendicolari a AD, si urtino in E: nello stesso istante in cui i punti C e B dei diametri si toccano, necessariamente arrestano l'intero moto, mentre i diametri BA, CD finiscono in Ea, Ed uguali; invece, tutte le altre particelle, tranne le prime e le ultime (a e d), continuano a muoversi con moto via via rallentato, finché la loro velocità si estingue per intero in M e N, mentre la forma è cambiata e i diametri si sono accorciati. Se le sfere saranno molli, rimarranno in tale stato; se elastiche, le singole particelle rimbalzeranno all'indietro col medesimo grado di velocità. Se poi continuiamo a innalzare BG, aH, EI, dK, CL fino alla retta FO, le velocità dei punti A e D saranno ovviamente espresse da ordinate alla retta FO, sempre uguali fino a H e K; poi da ordinate alle linee HM, KN, progressivamente decrescenti. Ma le velocità delle particelle B e C (se quelle prime particelle sono solide), o almeno dei punti B e C, o delle superfici intorno a B e C (qualora alle sfere vengano sostituiti dei cilindri) si estinguerebbero del tutto istantaneamente, e tali punti o superfici rimarranno in quiete per tutto il tempo continuo che a e d impiegano per raggiungere M e N; pertanto, le velocità dei punti B e C verranno espresse dapprima dalle ordinate alla retta FO fino a I; poi in I si interrompe ogni espressione mediante ordinate, e all'ordinata EI succederà un punto. Poniamo ora che nessuna velocità si estingua istantaneamente: le sfere non continuano con velocità uniforme fino al contatto, ma, una volta che le particelle B e C si saranno avvicinate a una certa distanza brevissima, una qualche forza repulsiva continuerà a respingerle in modo che la velocità si estingua a poco a poco prima del contatto. Sostituendo corpi molli e corpi elastici a quelli rigidi si evita certamente il salto nelle velocità delle particelle A e D. Invece, il salto nelle velocità delle particelle B e C non si può evitare se non ammettendo siffatta forza repulsiva, che agisce alle minime distanze.

47. In realtà, ciò che abbiamo mostrato per il moto di sfere identiche con velocità uguali e opposte ha luogo anche nell'urto fra corpi qualsiasi con velocità differenti. Le velocità delle prime superfici devono divenire uguali istantaneamente, in quanto l'impenetrabilità non consente che un corpo s'introduca nel posto occupato da un altro, e in tutto il tempo in cui le forme si modificano e le velocità delle parti rimanenti vengono analogamente ridotte all'uguaglianza, la quiete relativa fra le parti a contatto si conserverà. Inoltre, da qui si ricava che questa forza repulsiva cresce oltre ogni limite al continuo diminuire delle distanze. Infatti, ipotizziamo che essa sia finita: mosse le sfere con una velocità determinabile, la velocità dei punti B e C finirà coll'annullarsi

al contatto stesso; ma se questa velocità venisse aumentata, vi sarebbe contatto prima che essa venga totalmente distrutta, perciò vi sarebbe pure salto. E certo si potranno addurre molti altri esempi di salti analoghi, sia di semplici pressioni sia della variazione istantanea di un luogo geometrico che esprima delle velocità; ma abbiamo preferito un caso estremamente evidente e semplice. Dall'analogia e dalla semplicità della natura si deduce il principio esposto al n. 45; ammesso questo, il contatto matematico è necessariamente escluso, e si deducono per retto ragionamento forze repulsive che alle minime distanze aumentano oltre qualunque limite.

48. D'altra parte, per impedire un altro salto, occorre che le stesse forze con cui le particelle si respingono a vicenda alle minime distanze si dispieghino anche a tutte le distanze all'infinito, sebbene a distanze maggiori possano diminuire così tanto da sfuggire a ogni senso, e poi – come abbiamo già spiegato – mutarsi in attrattive. Infatti, se tali forze fossero assolutamente nulle su un qualche intervallo, allora comincerebbero ad agire altrove e, col sopraggiungere in quel posto di un nuovo principio elementare, si interromperebbe il precedente luogo geometrico esprimente le velocità, e si dovrebbe sostituire il nuovo. Così, se le particelle A e D, spinte da moto uniforme in a e d, cominciassero a subirvi soltanto forze repulsive, le velocità fino a a e d si esprimerebbero mediante le ordinate alle rette FH, OK, che lì s'interromperebbero, e a esse succederebbero certe rette o curve HM, KN. Perché ciò non avvenga, ci dev'essere stata, a tutte le distanze, una qualche azione espressa mediante ordinate a curve continue, di cui presto tratteremo; e pari a zero (se tale è in qualche posto) l'azione è solo in certi punti in cui tali curve intersecano l'asse e la repulsione si muta in attrazione, o viceversa. In tal modo, infatti, le velocità saranno espresse da una certa curva che potrà avvicinarsi a una retta data, tuttavia senza mai mutarsi in essa.

49. Pertanto, da quel principio dedotto per analogia della natura siamo giunti, via ragionamento diretto, alle forze delle particelle dei corpi, che sono repulsive alle minime distanze e crescono oltre qualunque limite al ridursi delle distanze stesse; mentre, aumentando le distanze, le forze variano in modo da essere espresse dalle ordinate di certe curve continue. È poi straordinario quanto quest'idea propria delle particelle sia adatta a spiegare un gran numero di fenomeni propri dei corpi; ed è straordinario qual messe di problemi bellissimi e difficilissimi ne scaturisca, sui quali si esercitano la geometria sublime e l'analisi. Siamo sopraffatti dalla moltitudine e dalla grandiosità di cose che, dispiegandosi sull'intera natura, non possono venire contenute entro i confini così angusti di una sola, piccola dissertazione. Per tale motivo ne saggeremo soltanto alcune, tralasciandone la maggior parte.

50. In tutti i corpi Newton ha svelato una gravità reciproca, riconoscendo che essa diminuisce, in tutte le particelle, secondo l'inverso del quadrato delle distanze; da parte nostra, riconosciamo le repulsioni alle distanze minime di cui abbiamo parlato sopra, le quali crescono all'infinito al ridursi delle distanze. Se ci si dovesse occupare solo delle forze agenti sulle particelle dei corpi, le si potrebbe presentare come segue. Segmenti della retta AG (Figura 10) rappresentino le distanze reciproche di due particelle,

e si abbia una certa curva $MCKIH$ di natura tale da avere per asintoto la retta NL perpendicolare all'asse AG, dal quale si allontani incessantemente; tale curva intersechi l'asse in un qualche punto C, dal quale si allontani fino a K, inverta quindi la direzione e, a partire da un qualche punto I, abbia per asintoto un'iperbole del secondo ordine, il cui andamento sia costante rispetto alle ascisse e al quadrato delle ordinate; cioè in I l'arco si avvicini a tale iperbole oltre il limite sensibile, continuando poi ad avvicinarglisi sempre di più; analogamente la distanza del punto I dalla retta NL sia piccolissima. Le ordinate BM della curva rivolte all'altro settore esprimano la forza repulsiva; quelle rivolte al settore opposto – per esempio DK, EI, FH –, che si sono trasformate in negative, esprimeranno le forze attrattive. Inoltre, facciamo uso del nome di forze attrattive e repulsive non perché supponiamo una qualche azione fisica fra particelle poste a distanza, ma per esprimere con tali vocaboli quella disposizione la quale o è insita nella libera legge di Dio, o nella natura ed essenza delle particelle dei corpi, o in una qualche qualità per cui le particelle tendono vicendevolmente ad avvicinarsi o ad allontanarsi fra loro – qualunque sia fra queste la causa fisica di tale tendenza. Certamente questa curva soddisferà sia alla gravità newtoniana sia alla nostra forza repulsiva.

51. Infatti, a tutte le distanze maggiori, come AE e AF, posta $AF = x$ e $FH = y$, per i sensi xxy risulterà costante, e y sarà $\frac{1}{xx}$, ossia vi sarà attrazione inversamente proporzionale al quadrato delle distanze. Tale attrazione, al ridursi delle distanze, crescerà fino a AD, poi diminuirà e in C sarà pari a zero. Infine, a distanze minori, come AB, si muterà in forza repulsiva, che, a distanze infinitamente piccole, crescerà all'infinito.

52. Ed ecco che, contemporaneamente, questa stessa legge, espressa mediante una curva siffatta, rivela anche la ragione dell'impenetrabilità e dell'estensione, che sono sempre state considerate caratteristiche primarie dei corpi, indipendenti da un principio più semplice. Se al ridursi della distanza AB tali forze repulsive crescono all'infinito, senza una forza infinita le particelle certo non potranno avvicinarsi tra loro sì da occupare la medesima posizione. Perciò, solo l'autore della natura, forte d'infinita potenza, potrà vincere quella resistenza e far sì che i corpi si compenetrino. Analogamente, se alle minime distanze le particelle si respingono, si disporranno certamente in modo da assumere una qualche distribuzione secondo lunghezza, larghezza e profondità.

53. In verità balza subito agli occhi in che modo le particelle di fluidi aderiscano fra loro, cosicché alcune resistano di più a compressione e a dilatazione, altre di meno. Infatti, se le loro particelle si trovassero a quella distanza AC, e questa venisse ridotta o aumentata di una quantità piccola a piacere, le ordinate crescerebbero immediatamente moltissimo dall'una o dall'altra parte; anche servendosi di una forza grandissima per comprimerle, si avvicineranno pochissimo, perché ben presto verrà trovata una forza repulsiva uguale a quella di compressione; lo stesso dicasi per la dilatazione. Così l'acqua, senza che venga esercitata alcuna forza, verrà compressa troppo poco, quanto a spazio occupato, per cadere sotto i sensi; e tuttavia, da qui non si potrà trarre che

essa sia costituita da globuli solidi contigui. Se così fosse, nessun altro fluido potrebbe contenere il doppio della materia (dunque anche del peso) dell'acqua. Ma non si potrà neppure concludere che le particelle d'acqua manchino di elasticità, che anzi sarà assai elevata. Così l'acqua resisterà anche alla separazione, in misura maggiore o minore a seconda della natura del ramo CK. Il contrario accade laddove quelle ordinate non crescano repentinamente di molto.

54. Ma poiché da una forza più intensa – per esempio, per azione del fuoco – l'acqua viene convertita in vapore, le cui particelle si allontanano le une dalle altre con grandissima forza, e a piccole distanze aderiscono le une alle altre con forza più intensa di quella che viene dalla gravità: per spiegare tali forze, così come altri effetti chimici fra altri corpuscoli, l'arco di curva CKI della Figura 10 deve piegarsi sì da intersecare l'asse in altri due punti, o in un numero di punti a piacere. La curva si trasformerà in un'altra, presentata nella Figura 11, in cui alle grandissime distanze AF vi sia una forza attrattiva approssimativamente proporzionale all'inverso del quadrato delle distanze fino a AE, la quale continui poi a crescere fino a AD, scostandosi però maggiormente da tale rapporto di proporzionalità, sì da poter successivamente diminuire fino a AT. A questo punto, la forza diverrà repulsiva, crescendo fino a AS, poi diminuendo fino a AQ. Qui s'invertirà di nuovo in attrattiva crescente fino a AO, decrescente fino a AC, per diventare infine repulsiva. Qualora le particelle d'acqua abbiano distanza AC, la conserveranno finché una qualche altra forza, superata la massima forza attrattiva OP, le sposti oltre AQ: in tal caso, infatti, si allontaneranno moltissimo le une dalle altre da sole; e qualora il punto R si scosti parecchio dall'asse, acquisterà notevolissima forza repulsiva. D'altra parte, le forze attrattive verso O possono essere assai maggiori di quelle che richiede l'espressione della gravità.

55. Di queste attrazioni fino a certi limiti e di queste repulsioni al di là di essi abbiamo un esempio nelle molle elastiche, le quali, aperte entro certi angoli rimangono in quiete; maggiormente divaricate tendono a riavvicinarsi; compresse in maniera rilevante esibiscono una forza repulsiva. E dalla medesima teoria si avrà certamente una distinzione fra corpi molli ed elastici. Infatti, se gli intervalli QT, CQ lungo i quali si rivelano le forze repulsive o attrattive sono più grandi, il corpo sarà elastico; se, dopo intervalli piccolissimi, le forze repulsive diventano attrattive, sarà molle. Nel primo caso, dopo la grande compressione da T verso Q, agiranno sempre forze repulsive, e si ritornerà alle vecchie distanze. Nel secondo caso si perverrà immediatamente a Q, limite oltre il quale, invertitasi la forza repulsiva in attrattiva, non ci sarà alcuna tendenza a tornarvi. Così anche nei fili e nelle funi vediamo che le loro masse, se compresse più del dovuto, resistono alla compressione: ciò avverrà nell'intervallo AC. Ma se si cominciasse a tenderle, più vengono tese, più resistono alla tensione; ciò capita, invece, nel tratto CO. Qualora si superi la massima forza attrattiva OP, anche le forze minori verranno vinte in modo assai più marcato e rapidissimamente fino a OQ e, invertitasi la forza attrattiva in repulsiva, la fune si romperà.

56. Per spiegare altri fenomeni più complicati sono necessari andamenti di va e vieni molto più numerosi, e seguirli uno per uno sarebbe un compito infinito, né è questa la sede. È da notare che tutte le curve di tal fatta sono del tipo di quelle che si chiamano parabole, che vengono espresse come $a + bx^m + cx^n + dx^r + \text{ecc.} = y$. In esse appunto, data una distanza x, si ha un'unica forza y sia attrattiva sia repulsiva; d'altra parte, la stessa forza y può corrispondere a più distanze x. E poiché Newton ha già risolto il problema di trovare una curva di tipo parabolico che passi per un numero a piacere di punti[12], si potrà sempre trovare una curva continua e regolare che esprima le forze di una particella qualunque rispetto a una qualunque altra – forze che vengono dedotte dai fenomeni. Inoltre, la stessa curva potrà approssimare quanto si voglia archi dati di qualsiasi altra curva, e intersecarli in quanti punti piacerà, e vicini quanto piacerà: purché quegli archi corrispondano a porzioni diverse dell'asse. Quanto alla natura di queste curve e i punti per cui passano, bisogna investigarli a partire dai fenomeni.

57. Tuttavia, non bisogna assolutamente trascurare in che modo anche l'adesione fra corpi solidi risalga alla stessa origine. Infatti, [guardando alla Figura 12] siano le forze della particella A dirette verso la particella C pressoché uguali in ogni direzione attorno alle distanze a cui sono poste; le due particelle costituiranno un corpo fluido le cui parti resistano sì alla separazione (dalla quale sarebbero costrette ad acquisire distanze maggiori), ma, conservando le stesse distanze, l'una si muoverà liberamente scorrendo attorno all'altra, e in seguito a tale scorrimento risulterà che il fluido cede a qualsiasi forza introdotta, e cedendo viene facilmente spostato. Un corpo appena più pesante del fluido, qualora vi venisse completamente immerso, scenderà lentamente (ma comunque scenderà), poiché il numero di particelle che si avvicinano le une alle altre è uguale al numero di particelle che si allontanano reciprocamente, e poiché il moto attorno a loro, se le distanze vengono conservate, non trova alcun ostacolo. Da qui risulterà pure che, se occorresse separare la massa fluida, una grande superficie non si separerà tutta in una volta, ma, assottigliatosi il fluido nel punto di separazione per lo scorrere delle particelle le une attorno le altre, esse si separeranno una dopo l'altra, come si osserva anche nelle gocce d'acqua che cadono. Ciò renderebbe indubbiamente assai semplice la separazione dei fluidi perfetti. Ma se una certa curva esprime le forze della particella A nella direzione Gg, un'altra secondo un altro verso qualsiasi, in modo che vi sia un asse delle forze qQ, da una parte le forze, qualunque sia il loro verso, saranno espresse non da una qualche curva, bensì da ordinate rispetto a una superficie, d'altra parte quella superficie avrà ordinate ora positive, ora negative, disposte circolarmente rispetto alla stessa distanza AC. Alla medesima distanza, analogamente, le particelle si respingeranno a vicenda qualora si trovino in una certa di-

[12] Vedi I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Editio tertia aucta & emendata, Londini, apud Guil. & Joh. Innys, 1726, Liber III, Lemma V, pp. 486-487: «*Invenire lineam curvam generis Parabolici, quae data quotqunque puncta transibit*».

rezione, si attrarranno qualora si trovino in un'altra e, se collocate sui limiti dell'attrazione e della repulsione, potranno conservare quella posizione. Tolte da lì, potranno acquisire una certa verticità, che tendono a ristabilire. Da ciò potrà dipendere la stessa connessione fra corpi solidi, in virtù della quale essi resistono non solo alla separazione ma anche all'inflessione. E ciò accade necessariamente soprattutto se una parte più grande è costituita da altre più piccole, che fra loro sono poste a distanze molto minori, aventi limiti di connessione fortissimi. A distanze maggiori, invece, alcune parti attraggono o respingono di più, altre di meno. Allora vi sarà inevitabilmente una verticità[13].

58. Inoltre, in non pochi problemi che si possono porre circa queste espressioni per così dire superficiali delle forze, e circa i moti che da lì conseguono, si vede chiaramente quanto siano utili in meccanica le eccellenti scoperte di Clairaut sulle curve a doppia curvatura e sui luoghi sulle superfici[23]. Ma potrebbe darsi che non vi sia alcun asse in queste forze e che nessuna coppia di rette con origine in una particella abbia la stessa curva. In tal caso, quelle forze non si potranno generalmente esprimere mediante ordinate a una stessa superficie; lo si potrà fare analiticamente, ma non è questa la sede per discuterne, e non val la pena di seguire così tante cose.

59. D'altra parte, quest'idea ci induce a immaginare una composizione di particelle più grandi da parte di particelle più piccole assolutamente omogenee, ma assai diversificata. Si supponga che le forze delle particelle più piccole siano espresse dalle stesse curve in tutte queste particelle e da curve differenti secondo la diversa posizione in particelle isolate, tanto secondo certi assi, quanto secondo una qualunque altra direzione avente rispetto a quell'asse una posizione data. Quando due particelle si combinano a qualsiasi distanza secondo qualunque direzione, la forza che esercitano reciprocamente, che interessa entrambe a queste distanze e direzioni, sia espressa dalla somma delle ordinate: le particelle più grandi potranno essere composte da quelle più piccole, in modo che esse abbiano leggi delle forze diversissime e che, allo stesso modo, emergano gradualmente da queste altre particelle più grandi, differenti quanto si voglia. Infatti, si supponga di prendere distanze via via minori, in modo che il rapporto tra una distanza e la più vicina maggiore sia trascurabile, e che in prossimità degli estremi di ciascuna di quelle distanze vi sia, allontanandosi, un passaggio da un'intensa forza repulsiva a un'intensa forza attrattiva, che tuttavia, prima che si sia arrivati alla distanza successiva, s'inverta di nuovo in un'intensa forza repulsiva per poi variare in una qualunque maniera. Allora, o un certo numero di particelle più piccole, collocate attorno a quegli estremi, si fonderanno saldissimamente in una sola particella più grande, agendo unitamente a distanze maggiori (in tal caso, particelle

---

[13] Per *verticitas* Boscovich intende qui, probabilmente, qualcosa di analogo alla verticità introdotta da William Gilbert nel *De magnete* (1600) come tendenza dell'ago magnetizzato a 'ricordare' le distinzioni polari, cioè a privilegiare una direzione.
[23] A.C. de Clairaut, *Recherches sur les courbes à double courbure*, Nyon, Didot et Quillot, Paris 1731.

più grandi del medesimo ordine non si dissolveranno reciprocamente), oppure si avvicineranno l'una all'altra oltre un certo limite. Ma che accadrebbe se, allo stesso modo, anche le stelle fisse fossero collocate su certi limiti di tutte le attrazioni e repulsioni; cioè se la curva KIH (Figura 11) discordasse anche alle massime distanze (oltre i pianeti), così come a quelle minime, dall'iperbole che esprime la gravità decrescente secondo la legge dell'inverso del quadrato delle distanze, e intersecasse più volte l'asse magari in moltissimi altri punti? Esse non avrebbero forse conservato la stessa distanza l'una dall'altra immediatamente, senza precipitare l'una sull'altra, e il mondo intero non sarebbe forse costituito come una di quelle particelle più grandi? Perché non dovrebbe esser stata questa la causa che le ha collocate a distanza tanto immensa da noi e fra loro? E le comete, che si spingono alquanto lontano, perché non dovrebbero descrivere curve assai prossime a parabole o a ellissi mentre sono vicine a noi, penetrando nel sistema planetario con forze pressoché proporzionali all'inverso del quadrato delle distanze; ma, mutata la legge delle forze a distanze maggiori, perché non dovrebbero allontanarsi moltissimo da quelle traiettorie, per poi tornarvi, ma descrivendo nel frattempo tutt'altri archi di orbite di gran lunga diverse? Non si potrà forse avere – almeno per quelle che si allontanano parecchio – un qualche indizio del ritorno, ammesso che tornino, magari una volta cambiate forma e grandezza di quella vastissima atmosfera mediante la quale viene stimata la loro magnitudine apparente, mentre il nucleo è sempre avvolto in una nebbia profonda?

60. Inoltre, le forze delle particelle più grandi, che provengono dalla combinazione di quelle più piccole, potranno essere, come abbiamo detto, assai diversificate: infatti da una differente combinazione degli assi e dal numero di particelle più piccole emergerebbero leggi diversissime delle forze. Quale occasione si apre qui a problemi elegantissimi, tanto diretti quanto inversi! Come appunto se, data una legge comune per le particelle più piccole, dato il numero, e la loro posizione reciproca, si cercasse una legge che, nelle particelle più grandi, debba conseguire dalla composizione delle più piccole, o si cercasse il numero e la posizione degli assi, in modo che in una particella più grande, composta dalle più piccole, emerga una qualche legge data, o almeno altre forze date, in dati punti di date direzioni. Sono problemi, questi, che certamente penetra tutti con un'unica occhiata solo uno che mai creasse il mondo, se ci si vale per essi del modo in cui abbiamo spiegato andare le cose .

61. Ché anzi, giacché attraverso quei limiti di attrazione e repulsione si spiega così elegantemente l'adesione fra le parti. Come potrebbero mai esistere particelle solide più piccole di tutte? Affinché tutte le adesioni siano dello stesso genere, da ultimo i corpi si risolvono in punti privi di parti, e quindi non hanno né compongono estensione continua. Come in geometria i punti matematici non formano una linea, né una superficie, né un solido continuo, ma coincidono oppure distano di una qualche linea; così i punti fisici reali, dotati di quelle forze, non potrebbero comporre un'estensione continua, ma dovrebbero compenetrarsi – per la qual cosa sarebbe necessaria una forza divina infinita – oppure distare fra loro di un qualche intervallo; in entrambi i casi ciò segue dalla loro indivisibilità e dal loro essere privi di estensione. Un continuo fisico

a tale condizione verrebbe bandito dalla natura. Ma poiché in questa ipotesi tutti i fenomeni dipendenti dalle azioni di quelle forze avverrebbero allo stesso modo, l'esistenza di un continuo non può essere provata. E chi avrà a lungo meditato sul continuo stesso, riconoscerà certamente che è da considerare un guadagno che lo si possa espungere completamente dalla natura. E che dire di quanto segue? Da un lato, ogni genere di grandezza che può accrescersi all'infinito può anche diminuire, rifiutando la natura ogni limite da entrambe le parti; di conseguenza, sembra che il volume di un corpo, che può essere aumentato all'infinito separando le particelle le une dalle altre, per l'analogia della natura può anche essere diminuito all'infinito. Dall'altro lato, invece, se non ci sono parti infinitesime in sé delimitate, ma gli infinitamente piccoli sono indeterminatamente piccoli – e in essi noi facciamo astrazione soltanto da una determinata grandezza, cosicché in singoli casi si possa condurre una dimostrazione per assurdo –, e se una stessa particella di materia non può occupare per intero un posto ora più grande ora più piccolo, allora in nessun'altra concezione un volume può venire diminuito oltre qualunque limite, poiché le particelle solide, una volta entrate in contatto, rifiutano ogni ulteriore compressione. Allo stesso tempo, invece, intervalli piccoli a piacere fra punti si possono sempre dividere secondo qualsiasi rapporto dato, e il volume di un corpo qualsiasi, se costituito da punti del genere, può venire ridotto a un altro minore, secondo qualsiasi rapporto dato. Che diremo del fatto che certo si capisce assai più agevolmente come mai i raggi di luce si estendano liberissimi in tutte le direzioni, senza perturbarsi a vicenda? Infatti, il numero di punti comunque grandissimo da cui sarebbero costituiti avrebbe con l'intero spazio un rapporto minore di qualsiasi rapporto dato, o pressoché nullo; e lo stesso vale per il rapporto tra il numero di casi in cui dovrebbero incontrarsi e quello in cui si eviterebbero. E ancora, che diremmo se alla luce è data tanta velocità quanta rarità soprattutto per il seguente motivo, che – poiché devono essere necessariamente evitati gli incontri – anche le azioni di tutte le forze che le particelle di raggi diversi esercitano le une sulle altre a piccole distanze risultano minime, e per i sensi non mutano il percorso intrapreso? Non diciamo che le cose stiano così; piuttosto, indichiamo che c'è una sorta di straordinaria fecondità di questo campo, assai appropriata ad esercitare gli ingegni.

62. Infine, per ciò che riguarda gli effetti magnetici, i più significativi scaturiscono certamente in maniera spontanea da lì. Infatti, sono anzitutto tre le caratteristiche principali di un magnete: l'attrazione e la repulsione secondo i differenti poli, la trasmissione della virtù magnetica, la direzione. L'attrazione può dipendere dal fatto che la legge delle forze fra le particelle in particolare del ferro e del magnete, a una distanza molto maggiore rispetto alle altre, è assai diversa dalla legge di gravità, e secondo le diverse direzioni su queste particelle si eserciteranno forze sia repulsive sia attrattive. Ove molte di tali particelle si uniscano, avendo contemporaneamente gli assi delle attrazioni coincidenti oppure paralleli, si tratterà senza dubbio di ottimi magneti, che certo potranno acquistare o perdere forze, a seconda che più particelle, con qualunque artificio, acquisiscano o perdano la stessa posizione, oppure si congiungano con altre, e tale congiunzione faccia cambiare la legge. D'altra parte, è evidente che essi possono

anche avere poli di attrazione e di repulsione e, qualora vengano spezzati, i singoli pezzi avranno parimenti i loro poli. Ma se le particelle di ferro acquisteranno infine, in un modo o nell'altro, quella posizione degli assi, il ferro stesso potrà diventare un magnete ed esercitare la medesima forza attrattiva e repulsiva.

63. Questa trasmissione di qualità può dipendere dal fatto che le particelle di ferro, disposte a caso e senza alcun ordine, per l'azione di un magnete vicino orientano i loro assi in modo da coincidere in più particelle; allora, infatti, si produrrà una forza magnetica pure nel ferro. Per la stessa causa un filo di ferro che, posto sopra un magnete, ne abbia contratto la virtù, la potrà perdere se venisse mosso in senso opposto, in modo che le posizioni degli assi venissero perturbate una seconda volta. Inoltre, un ferro che sia rimasto a lungo nella medesima posizione potrà diventare un magnete a causa della graduale convergenza degli assi delle particelle per l'azione continua dei magneti subpolari. Che vi sia una gran quantità di questi sotto la superficie terrestre, è evidente dalla stessa spiegazione dell'orientamento.

64. L'orientamento dell'ago nei singoli magneti può dipendere appunto dall'attrazione e dalla repulsione secondo i diversi poli delle particelle e la posizione degli assi, dai quali soli, sia pure a una distanza maggiore, dipende la polarizzazione, come al n. 57. Ma l'orientamento verso certe regioni della Terra prossime a un polo, volgendosi spontaneamente verso di esso soltanto uno dei due poli di un magnete, può provenire dal fatto che, sparse sotto tutta la superficie terrestre, siano presenti ingenti quantità di ferro e di magneti, ma in direzione dei poli molto di più che altrove. Il fatto che riserve del genere non siano presenti soltanto sotto il polo fa sì che gli aghi non puntino esattamente verso di esso, ma risultino declinati da una parte e dall'altra. E che riserve analoghe più piccole siano sparse disordinatamente su tutta la Terra fa sì che nella declinazione di un magnete non vi sia alcun ordine determinato, ma che anche un filo in cui la declinazione è nulla, e altri in cui essa è dell'ordine di alcuni gradi, siano percepiti come totalmente irregolari e composti. Tutto questo è noto dalla storia del magnetismo. Ma possiamo avere un'immagine di ciò collocando all'estremità di un tavolo un magnete più grande, dotato in misura significativa di virtù magnetica, e sparpagliandone altri più piccoli: un ago punterà principalmente verso il magnete grande, ma verrà un po' deviato dalle azioni dei più piccoli. Ci sarà poi una linea irregolare, nella quale le azioni laterali si elidano a vicenda, e sarà orientata verso il magnete più grande; da una parte e dall'altra di quella linea si avranno declinazioni opposte, e le curve nelle quali si hanno declinazioni di qualche grado saranno anch'esse essenzialmente composte.

65. Ed ecco che si rinnova qui l'occasione per affrontare problemi elegantissimi e difficilissimi. Per esempio, stabilire se, date in un piano due, tre, o un numero a piacere di quantità comunque disuguali di materia attrattiva, in qualunque rapporto di distanze, è necessario trovare una curva in cui la direzione di attrazione per un corpuscolo sia verso un punto dato o venga deviata da esso di un angolo dato. Ciò, del resto, diverrà più difficile e generale qualora quelle masse vengano comunque date al di fuori di un

piano; e la difficoltà cresce di gran lunga se le attrazioni vengono espresse mediante curve date a piacere, o anche mediante ordinate rispetto a una superficie, oppure in modo che in diverse direzioni a piacere siano da utilizzare curve diverse. Che accadrebbe poi se si proponessero i problemi inversi, per esempio se, date delle leggi di attrazione, e date curve che esprimano le stesse direzioni, si cercasse il numero e la disposizione di tali quantità di materia? Non s'imboccherebbe forse in tal modo la via per determinare, dalle osservazioni, posizione e grandezza delle riserve magnetiche?

66. E se questa è la causa della declinazione e dell'inclinazione, non ne potrebbe venire che la direzione muta un poco ogni giorno, ma che, col passare del tempo, la variazione diventa assai maggiore, talvolta, dopo grandi terremoti, rivelandosi subito notevole? Infatti, quelle riserve sono sottoposte a continui cambiamenti: in un posto ne nascono e crescono di nuove, in un altro si riducono e scompaiono. Si tratta di un mutamento continuo, indubbiamente piccolo nel breve termine; se, però, si guarda alla somma di tutti i cambiamenti contrari, sarà molto maggiore in un tempo più lungo. Ma se le cose stanno così, non è forse vana premura ricondurre la variazione della declinazione a particolari leggi che esse rigettano completamente? Nessuno ignora che in non pochi luoghi vi sono grandissime riserve magnetiche e di ferro. Bastano queste a spiegare tali effetti: ne sono dunque le cause. La loro posizione è determinabile dai fenomeni, dai quali si deduce che la massima quantità è sotto il polo. Se qualcuno, invece, volesse problemi più difficili, ricerchi il moto di un punto attratto da masse sparse, dotate di differenti attrazioni (siano esse espresse da curve o da ordinate rispetto a una superficie o su una retta qualsiasi che ha origine nelle masse stesse); oppure, partendo da moti di tal genere, cerchi le masse date le leggi, o le leggi date le masse. Quanto vasto è questo campo della geometria e dell'analisi sublime, in cui anche eminenti geometri e analisti sperimentino le loro forze e promuovano l'analisi stessa!

67. È però necessario che noi, avendo sicuramente troppo divagato, torniamo al punto da cui eravamo partiti, e finalmente concludiamo. Attraverso queste curve tutti i tipi di forze vengono riportati a un unico modo d'agire uniforme. I corpi rigidi vengono eliminati dalla natura, viene eliminato ogni salto che pure si avrebbe con altre leggi delle forze, come abbiamo visto sopra (n. 38) per un punto attratto da punti di una superficie sferica secondo l'inverso del quadrato delle distanze, dove l'attrazione può crescere all'infinito via via che ci si avvicina (la qual cosa non accade mai utilizzando le nostre curve). Anche i fenomeni del moto vengono qui spiegati allo stesso modo come sopra, mediante azioni, uguali da entrambe i lati, di forze descritte dallo sviluppo di curve; e tali forze producono immediatamente nuove velocità nei corpi (sia elastici sia molli), senza che via sia alcuna necessità, da nessuna parte, di forze vive; senza alcuna necessità dell'impenetrabilità agente per salto nell'urto e nel contatto dei corpi.

INDICE DEI NOMI

Il seguente indice si riferisce unicamente ai nomi citati nel testo di Boscovich e il numero accanto a ogni nome è riferito al paragrafo in cui compare.

INDICE DELLE OPERE CITATE

Il numero dopo le parentesi quadre indica il paragrafo del testo di Boscovich in cui l'opera è citata direttamente o indirettamente.

BOSCOVICH, RUGGIERO GIUSEPPE

De Natura, et usu Infinitorum, et Infinite parvorum, [Komarek, Roma 1741], 8.

Disquisitio in Universam Astronomiam [Komarek, Roma 1742], 44.

CHATELET, ÉMILIE DU

Institutions de Physique [Prault, Paris 1740], 4.

CLAIRAUT, ALEXIS CLAUDE DE

Recherches sur les courbes à double courbure [Nyon, Didot et Quillot, Paris 1731], 58.

DORTOUS DE MAIRAN, JEAN-JACQUES

Dissertation sur l'estimation et la mesure des forces motrices des corps, «Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Memoirs de mathematique et de physique», [Paris 1728, pp. 1-49], 6.

LEIBNIZ, GOTTFRIED WILHELM

Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum circa legem naturalem, in «Acta eruditorum anno MDCLXXXVI» [Lipsia 1686], 4.

MARTINI, PIETRO

De lumine refractione et motu Brevis Lucubratio [Napoli 1740], 8.

De corporum quae moventur viribus, Earumque aestimandarum Ratione dissertatio philosophica [Napoli 1741], 6, 8.

NEWTON, ISAAC

Optice: sive de Reflexionibus, Refractionibus, Inflexionibus & Coloribus Lucis libri tres [Londra 1706], 44.

DE MATERIÆ
DIVISIBILITATE
ET
PRINCIPIIS CORPORUM
DISSERTATIO

Conscripta jam ab anno 1748. & nunc primum edita

AUCTORE
P. ROGERIO JOSEPHO
BOSCOVICH
Soc. Jesu.

HAnc dissertationem ego perscripsi jam ab anno 1748, cum rogarer, quid de divisibilitate in infinitum sentirem, & ea ipsa mihi occasio extitit illustrandæ, ac extendendæ meæ theoriæ Physicæ Generalis, quam proposueram anno 1745. in Dissertatione de Viribus vivis. Id præstiti eodem anno in dissertatione de Lumine, quam tum edidi. De eadem theoria egi deinde in Dissertatione de Lege Continuitatis edita anno 1754, in qua præcipuum illustravi fundamentum theoriæ ipsius, nimirum exclusionem saltus, & in Dissertatione de lege virium in Natura existentium anno 1755, in qua exhibui naturam, & demonstravi proprietates curvæ exprimentis vires, quas in Natura censeo existere. Quæ autem pertinent ad spatium, & tempus in hac ipsa mea theoria, exhibui in supplementis Philosophiæ Stayanæ duobus ab hinc annis, ubi de spatio, ac tempore. Verum idem argumentum uberius pertractavit, & totam exposuit theoriam P. Carolus Benvenuti Soc. nostræ vir doctissimus in sua synopsi

Physicæ Generalis impressa itidem anno 1754, cui multa etiam, potissimum quæ ad ipsius theoriæ usum extendendum pertinent, communicaveram.

Hanc dissertationem ita hic edendam rogatus permitto, uti tum conscripta est, & ex eodem illo autographo, ne describtam quidem. Sunt quædam ibidem, quæ id respiciunt, quod tum sentiebam, quorum sententiam commutavi deinde; quæ tamen ad ipsam theoriam vel nihil pertinent, vel parum admodum: ea adnotatiunculis adjectis hic innuam. Neque enim graviores permittunt curæ, ut ampliores in ipso textu mutationes aggrediar, & erit operæ pretium illud ipsum, ut constare possit, quo ordine ea mihi in mentem venerint, quæ ad ipsam theoriam meam pertinent, si ea forte aliquando adstipulatores habuerit.

Sunt multa contra ipsam theoriam huc usque objecta typis edita, quorum nonnulla in iis, quas memoravi, dissertationibus dissoluta sunt: alia omisi, liberum lectoribus judicium relinquens, si qui uspiam res ipsas ad trutinam revocare voluerint; litterarias enim etiam altercationes odi penitus, & ani-

nimi quietem humanis bonis omnibus longè antefero, ac quod ocii a reliquis mihi, superest necessariis curis, id melius collocari puto in iis, quæ pacato animo illustrari posse censeo, illustrandis, quam carpendis eorum scriptis, qui me carpunt; potissimum ubi carpendi voluntatem quamdam mihi videor deprehendere, vel ubi res ipsas satis per se se justis æstimatoribus patere posse arbitror. Hujusmodi autem esse censeo binas prorsus contrarias methodos impugnandi, quæ ex continuitatis principio deduxi, cum alius ad excludendum saltum in primis punctis corporum devenientium ad contactum cum velocitatibus inæqualibus, admiserit compenetrationem exiguarum materiæ particularum, post quam compenetrationem incipiat agere repulsiva vis; alius dicat bina puncta etiam, ubi cum velocitatibus oppositis ad se devenerint, licet locum non mutent, pergere tamen moveri, nomine motus intelligens continuationem virium, quæ pergant agere in se invicem, & minuantur per gradus, non ipsum localem motum, qui quidem localis motus, licet spatium vacuum sit pure imagina-

rium, adhuc non est purum nihil, cum per eum mutentur reales utique, & non tantummodo imaginariæ relationes distantiarum, quas habent puncta ad se invicem, & progressum, atque regressum. Sed hæc innuisse sit satis, dum illam ipsam dissertationem proponam.

De Materiæ divisibilitate & Principiis Corporum Dissertatio.

1. CОrpora hæc omnia, quæ in nostros sensus incurrunt, ex ejusmodi materia constituta esse, quæ ita dividi possit in infinitum, ut nulla habeat ultimas partes, ac omnium minimas, ita plerique jam recentiores Physici pro certo habent, ut id omnino Geometriæ ope demonstrari posse arbitrentur. Demonstrationem autem ipsam continuæ extensioni materiæ ita superstruunt; ut nullum esse de ipsa continua extensione dubitandi locum arbitrentur. Hinc & illud passim docent, quî fieri possit, ut quævis exigua materiæ particula spatium utcunque magnum impleat totum ita, ut nullus sit in eo prorsus omnino vacuus, qui lineolæ longitudinem excedat utcunque parvæ. Hæc mihi jamdudum animo reputanti, & iterum, atque iterum pervolutanti quædam a communi Philosophorum sen-

tentia occurrerunt animo circa ipsam materiæ constitutionem, & prima Principia corporum satis aliena illa quidem, at quorum ope illud evidentissimè patere arbitror, quî fieri possit; ut præcipuæ omnes proprietates corporum, & discrimina, atque universa Physica Generalis ex materia, si libeat, prorsus homogenea, ac ex unico principio iis, quæ cernimus satis analogo, derivari possit: ac præterea non deesse argumenta & satis valida illa quidem, quibus etiam definire liceat, quâ potissimum ratione, & ex quibus Principiis ipsa materia, ac ex materia tanta hæc tot corporum compages tam varia componatur.

2. Pleraque ex iis, quæ dicturus sum, duobus ab hinc annis partim exposui, partim innui in dissertatione de Viribus vivis editâ primùm hic Romæ anno 1745, & iterum in tertia parte tomi secundi Actorum Academiæ Bononiensis excusâ, minus digesta illa quidem, & eodem ordine, quo primum in mentem venerant enunciata. Eadem hic longe aliâ methodo multis adjectis, quæ vel ad de-

cla-

clarandum, vel ad confirmandum sententiam pertinent, multo dilucidius explicata proponam: verum indicatis tantummodo geometricis figuris, ubi opus fuerit, & sola imaginatione efformatis, argumentum continua oratione persequar in eorum gratiam, qui geometricas ipsas figuras, identidem consulendas, fastidiunt.

3. Illud tamen hìc in ipso limine Lectorem magnopere monitum velim. Primo quidem ne de iis, quæ fortasse sub ipsum initium offendet, ex præjudiciis quibusdam ferat sententiam; sed tum demum de re tota judicet, cum quæ proponam fundamenta perlegerit, atque etiam animo ad se revocato præjudiciis omnibus abjectis perpenderit. Erunt in iis ipsis, quæ proferam multa sanè communia iis, quæ Nevvtonus indicavit potius, quam exposuit in fine Opticæ; in quæ cum primum jam olim incidi, ita mihi altè insederunt animo, ut assiduis per plures annos meditationibus exercuerint, & ad hanc demum, quam profero, Naturæ constitutionem perduxerint. Mea quidem ab iis, quæ ipse ibidem amplexus est, Principiis corporum in multis maximè dissident; at in aliis

qui-

quibusdam ita consentiunt; ut summa quædam utrobique paria meditationum vestigia, atque aliarum ab aliis derivationem, & ortum facile agnoscas. In quibus cum eo conveniam, in quibus discrepem; quanto ulterius in primariis ipsis materiæ proprietatibus ad unicum principium revocandis, & principio ipso recta ratiocinatione demonstrando progressus sim, quanquam facile eruditus Lector per se ipse invenire possit, adhuc tamen, ubi meam aperuero mentem, atque sententiam confirmavero, paucis indicabo. Deinde [*a*] illud admodum religiosè profiteor, ita omnem hanc meam sententiam a me proponi; ut nequaquam ipsi tenacius adhæream, quam æquum rerum æstimamatorem opporteat, sed ita animo com-

[a] *In eadem nunc etiam animi dispositione omnino sum, quemadmodum decet, ut si quid gravioris momenti contra ejusmodi theoreiam offenderim, ultro paratus sim ab eadem recedere: at ingenue itidem fateor, me nihil ejusmodi huc usque offendisse nec per me*

comparatus sim, ut si quid unquam aut per me ipse invenero, aut ab aliis objectum intellexero eidem contrarium, quod gravioris momenti arbitrer, quam ea sint, quæ proponam, ab eadem libens recedam.

4. In primis ipsam divisibilitatem materiæ in infinitum, licet plerique Physici primæ notæ, jam passim habeant pro demonstrata, non tantùm adhuc demonstratam non esse arbitror, sed ita animo comparatus sum, ut potius falsam omnino judicem, quam veram. Non is ego sum, ut multi geometricarum rerum vel prorsus ignari, vel minus gnari, quam par esset, qui quantitatis continuæ divisibilitatem in infinitum non agnoscam, eamque ex continuæ quantitatis natura geometricis demonstrationibus evidenter derivari non videam. Nec in ea sententia sum, in qua

---

me ipsum, nec apud alios, qui meam hanc oppugnarunt sententiam post annos jam 12; unde factum est, ut ipsi cœperim multo jam tenacius adhærere, potissimum cum alia quædam deprehenderim non ita pauca ipsi omnino conformia.

qua e Peripateticis etiam Recentioribus fuerunt nonnulli, qui ultimas corporum particulas admittebant ejusmodi naturæ, ut licet ipsæ nullas habeant partes, ex quibus compositæ sint, & in quas iterum resolvi possint; tamen extensionem habeant, & per spatium diffundantur continuum extensum in longum, latum, atque profundum, ac in omnibus ejus spatii punctis sit tota, & eadem illa particula eo fere pacto, quo licet nullum sit immensi spatii punctum, in quo Deus non adsit præsens, ipse tamen, nec e partibus constat, nec in partes dividitur, sed idem prorsus ubique adest. Et eas quidem particulas corporum alii suam unamquanque magnitudinem conservare, ac tueri semper posuerunt, licet aliis alias magnitudines dederint ita, ut idem spatium, quod una quædam occupat, quot libuerit aliæ magnitudinis singulæ, tantundem minoris, occupare possint, & in ejus locum succedere. Alii vero ita mutabilem assumpserunt partiuncularum magnitudinem; ut eadem ipsa particula jam in amplius spatium extendi posset, jam in arctius contrahi; ex quo etiam, secluso Inani, discrimen

den-

densitatis corporum repetebant.

5. Horum Peripateticorum sententiam si amplecterer, atque exsuscitarem; exsibilarer ego quidem a nostri ævi Philosophis. Quanquam si forte ab iis quærerem, quibus demum rationibus ejusdem falsitatem demonstrent; haud scio, an quidquam aliud haberent, quod reponerent, præter ideam quandam, quam experimur in animo, & quam corporis & materiæ propriam arbitramur; licet, ut mihi sanè persuasum est, & paulo infra rem ita omnino se habere satis luculenter ostendam, ex mero quodam præjudicio, & impressionibus quibusdam in ipsa infantia receptis, ac tenacius inhærentibus animo, ortum ducat. Ego quidem, (a) dum ex me ipso illud exquiro; cur ea

(a) *Occurrerunt postea mihi etiam argumenta contra ejusmodi sententiam ritè petita ex inductionis principio, quæ alibi proposui & in dissertatione de lege continuitatis; ut itidem analogiam inter locum, & tempus exposui summam multo accuratius in Stayanis elemen-*

ea sententia, a qua amplectenda me etiam alienum experior, vera esse non possit; nihil sane invenio, in quo, præjudiciis omnibus prorsus sepositis, vim ullam possim agnoscere. Quin & illud occurrit animo. Eadem materiæ particula potest illa quidem, juxta naturæ leges, eadem esse eodem loco in infinitis punctis temporis continui, nec iccirco, quod in pluribus temporibus sit a se distinctis, atque aliorum etiam interpositione disjunctis [iis nimirum, quæ sunt partes ejusdem il-

---

mentis, exclusa penitus a Natura etiam quiete, quæ huic extensioni, ut vocant, virtuali responderet. Demonstravi nimirum non posse in natura materiæ punctum conjungere idem punctum loci cum pluribus momentis temporis, & multo minus cum eorum continua serie, quod excludit & regressum ad eundem locum, & multo magis quietem, ac tollit omnem vim argumento, quod pro ejusmodi particularum simplicium extensione ab analogia quietis hic desumpseram, si agatur de extensione ejusmodi habenda in Natura.

illius continui temporis quo ea durat, primæ & postremæ], debet alia esse uno tempore, alia alio. Quid prohibet quominus illæsis pariter naturæ legibus eadem illa particula possit eâdem prorsus ratione eodem momento temporis existere in infinitis punctis spatii continui, quin locorum discrimen, atque distantia [eorum nimirum, quæ sint extremæ partes ejusdem loci continui, cui ea sit præsens] distinctionem ullam partium aut significet, aut requirat? Ut unicus locus cum multis temporibus sed continuum unicum tempus constituentibus eandem materiæ particulam conjungit; cur unicum tempus eandem non possit conjungere cum multis locis eodem pacto unicum locum continuum constituentibus? Ut eadem particula potest in uno tempore continuo composito ex plurimis tempusculis sibi succedentibus esse in uno loco, in alio tempore continuo esse in alio loco, quæ loca singula singulis iis temporibus eadem perseverent [nam potest manere in uno loco una hora, in alio uno die, in alio uno mense]; quin debeat haberi quædam mensura constans ejus temporis continui, quo sit
in

in locis quibuscunque cum eo tempore conjunctis, vel suo cuique loco necessario respondere sua quædam determinata mensura temporis; cur non possit eodem pacto eadem particula in uno loco continuo composito ex plurimis spatiolis contiguis esse in uno tempore, in alio loco continuo esse in alio tempore, quin debeat haberi quædam mensura constans ejus loci continui, in quo sit temporibus quibuscunque cum eo loco conjunctis, vel suo cuique tempori necessario respondere sua quædam determinata mensura loci?

6. Sunt quædam inter locum & tempus analogiæ, quarum intuitum usus quidam vocabulorum perturbat. Hoc vocabulum *simul* licet etiam ad locum referri possit, tamen potissimùm tempus respicit, & ea plerunque *simul existere*, vel etiam *coexistere* dicimus, quæ eodem tempore existunt. Sic pro diversis temporibus *successionem* adhibemus; ac dicimus *successivè existere*, quæ diversis existunt temporibus. Nullæ autem sunt aliæ voces, quæ existentiam in eodem loco, vel existentiam in diversis locis æquè exprimant, & menti eodem mo-

modo objiciant. Quamobrem ad analogiam perſpiciendam vitandæ ſunt illæ etiam voces ſimul ac *ſucceſſivè*, & iis ſubſtituendæ hæ aliæ *idem tempus* vel *diverſa tempora*, cum quibus *idem locus* ac *diverſa loca* conferri debent.

7. Jam verò conſiderando tempus ſecundum ſe; ut nullum tempus poteſt exiſtere in alio tempore, ſic nullus locus poteſt exiſtere in alio loco. Ut idem tempus conjungitur cum multis locis, ita idem locus conjungitur cum multis temporibus. Deinde conſiderando rerum exiſtentiam in loco & tempore; tempus & locus ita extrinſeca ſunt eſſentiæ rerum, ut res quælibet æquè poſſit exiſtere in uno potius, quam in alio tempore, & in uno potius quam in alio loco; licet ſi exiſtat, debeat neceſſario exiſtere in aliquo tempore, & in aliquo loco. Pariter poteſt eadem res exiſtere in diverſis temporibus, poteſt in diverſis locis; poſſunt binæ res exiſtere eodem tempore in diverſis locis, poſſunt eodem loco in diverſis temporibus. In his analogia eſt manifeſta.

8. Ut in ipsa analogia progrediamur ulterius, consideremus quæ accidant tempori relato ad locum, & inde inquiramus in relationem loci ad tempus. Potest res existere eodem loco in pluribus temporibus. Id nulli difficultatem parit. Existit Deus idem, & simplicissimus in omnibus omnino temporibus. Quod autem ad materiam pertinet, licet ita possit esse constituta Natura, ut nullum materiæ punctum omnino quiescat unquam; adhuc tamen (*a*) quiescere repugnare materiæ, nemo fortasse affirmabit; licet per eam idem materiæ locus cum multis temporibus

(a) *In eadem sententia sum etiam nunc, ut censeam, quietem per Divinam Omnipotentiam haberi posse; vel saltem oppositum nobis non constare. Hinc pro ejusmodi etiam extensione per Divinam Omnipotentiam habenda vim habet analogia, sed uti monui, utranque & quietem, & ejusmodi extensionem positivis argumentis a natura excludi posse arbitror.*

bus necessario conjungi debeat. Nemo ex eo, quod materiæ punctum inveniat alicubi in uno tempore, & pariter materiæ punctum ibidem in alio, arguit duo esse materiæ puncta: nemo identitatem vel distinctionem repetit a distinctione vel identitate temporum, cum quibus punctum conjungitur. Eadem prorsus ratione posse rem existere eodem tempore in diversis locis, & id ex ratione entis non repugnare patet ex eo, quod idem Deus & simplicissimus existat in omnibus omnino locis. Cum autem de materia sermo est; censetur plerunque idem materiæ punctum non posse existere in pluribus locis eodem tempore: & sunt, qui ad identitatem, vel distinctionem puncti materiæ pertinere censeant, quod eodem tempore sit in eodem loco, vel in diversis. At cum & locus & tempus sint æquè eidem materiæ extrinseca, & alterum ex iis nihil ad identitatem, & distinctionem pertinebit, ac repugnabit? Cur non potius distinctio, & identitas ab ipsa metaphysica rei entitate desumitur independenter a loco, ut desumitur independenter a tempore? Cur ipsa rerum natura eodem prorsus modo se indifferenter non habeat ad locum, ut ad tempus? Ex ratione entis utrunque eodem modo se habere cernimus in ente simplicissimo, quod est Deus: utrunque eodem modo se habere censent in anima ii omnes, qui eam affirmant, dum existit, esse eodem tempore præsentem loco cuidam continuo, ac proinde esse eodem tempore in pluribus locis eum locum continuum constituentibus eodem prorsus pacto, quo eadem, dum quiescit, est in eodem loco præsens tempori continuo, ac proinde pluribus temporibus id tempus continuum constituentibus. Hæc omnino rationi entis non repugnant. Unde novimus repugnare rationi materiæ, de qua nullam habemus ideam, nisi acquisitam per sensus? Num ipsi sensus possunt metaphysicam entitatem materiæ exhibere, & aliqua ratione definire illud in ipsa potissimum repugnare, quod in aliis entibus non repugnat; aut illud ipsum ostendere, quæ in diversis videmus locis eodem tempore, non esse unum, atque idem,

ut

ut ſæpe quæ diverſis temporibus videmus eodem loco ſunt idem ?

9. Si autem hujuſmodi analogia admitteretur inter tempus & locum: duo occurrerent . Primo credimus quodvis materiæ punctum poſſe conjungere eundem locum cum temporibus diverſis utcunque inæqualibus: Secundo non poſſe naturaliter idem punctum eſſe in binis temporibus disjunctis, quin ſit etiam in intermedio. Cur non eodem pacto poſſit idem punctum conjungere idem tempus cum locis diverſis utcunque inæqualibus ita tamen, ut non poſſit naturaliter eſſe in binis locis disjunctis, quin ſit etiam in intermedio ?

10. Equidem dum hæc & alia ejuſmodi ex me ipſo exquiro; hæreo anceps animi, & ita hebes, ut quo me vertam non habeam. Hunc certe ex ejuſmodi meditationibus fructum capio non contemnendum ; ut materiæ diviſibilitatem in infinitum, quæ ipſa eâ ſententiâ admiſsâ nulla profecto eſſet, utcunque ſpatium dividi poſſet in infinitum, intelligam demonſtrari omnino non poſſe. Licet eam ipſam ſententiam, puram nimi-

rum hypothesim, quam nulla ratio directè suadeat, nequaquam amplectar.

11. Quamobrem alia est ratio, cur ego divisibilitatem materiæ in infinitum non solum demonstratam non esse censeam, sed potius falsam omnino arbitrer, qua ipsa extensionem quoque materiæ continuam e Natura puto summoveri oportere. Ut eam, quam clarissime possum, exponam, binas hic primum propositiones proferam; rationum deinde momenta, quibus eædem comprobari possint aliquanto fusius explicabo. Earum prima est hujusmodi: *Nullo prorsus argumento evincitur, materiam habere extensionem continuam, & non potius constare e punctis prorsus indivisibilibus a se per aliquod intervallum distantibus; nec ulla ratio, seclusis præjudiciis, suadet extensionem ipsam continuam potius, quam compositionem e punctis indivisibilibus, inextensis, & nullum continuum extensum constituentibus*. Secunda autem: *Sunt argumenta, & satis valida illa quidem, quæ hanc compositionem e punctis indivisibilibus, evincant,*

cant, extensioni ipsi continuæ præferri oportere.

12. Ut primum constet, quod mihi penitus persuasum est, & habetur pro demonstrato; exponam hanc, in quam inclinari me maximè sentio, punctorum indivisibilium sententiam (*a*). Prima materiæ elementa, ex quibus ea primo componitur, & in quæ ultimo resolvi potest, concipio esse puncta ita indivisibilia, ut nec partes habeant, nec spatium extensum occupent; sed singula sint in singulis spatii punctis mathematicis omni & extensione, & dimensione carentibus. Hæc ad quantitatis conti-

(a) *Hic quidem exponitur ut hypothesis, quod satis est ad evincendam illam primam propositionem; sed deinde positivis argumentis evincitur, rem ita se habere; ut adeo hæc non hypothesis arbitraria sit, sed theoria e genuinis principiis deducta, ac comprobata.*

tinuæ compositionem prorsus inepta agnosco ex ipsa sua, & continuæ extensionis notione ita; ut alterum alteri contiguum esse omnino non possit; sed vel inter bina quævis intervallum quoddam semper intersit, vel si ipsum intervallum nullum sit, prorsus congruant, atque compenetrentur. Hinc patet quantum hujusmodi puncta a Zenonisticis illis discrepent, quæ nimirum ponuntur & inextensa, & ita sibi contigua, ut extensionem componant: quæ quidem & geometricis demonstrationibus deprehenduntur prorsus impossibilia, & primo statim aspectu manifesto apparent absurda. Debent enim a binis quibus interjacent contingi non in eodem loco, ne & ipsa se mutuo tangant; ac proinde locus, quem occupant, debebit habere partes, quarum altera alteri ex adjacentibus contigua sit. Sed & a Leibnizianis monadibus discrepant, quas ipsi Leibniziani ita inextensas dicunt, ut tamen ab iis extensam quantitatem continuam componi affirment; quod quî fieri possit, ut non in eadem absurda incidant, in quæ Zenonis pun-

cta,

cta, ipsi viderint (a): ego sane non video.

13. Hæc puncta posse concipi, nemo sane Geometra inficiabitur, qui nimirum mathematica puncta concipit, quibus hæc, quod ad extensionem pertinet, prorsus similia sunt, & in eo discrepant, quod realia sint, quod reali motu prædita esse possint, quod

---

(a) *Qui dicunt monades non compenetrari, quia natura sua impenetrabiles sunt, ii difficultatem nequaquam amovent; nam si & natura sua impenetrabiles sunt, & continuum debent componere, adeoque contiguæ esse, compenetrabuntur simul, & non compenetrabuntur, quod ad absurdum deducit, & ejusmodi entium impossibilitatem evincit. Ex omnimodæ inextensionis, & contiguitatis notione evincitur compenetrari debere, argumento contra Zenonistas instituto per tot sæcula, & cui nunquam satis responsum est. Ex natura, quæ in iis supponitur, ipsa compenetratio excluditur, adeoque ha-*

quod reales habeant proprietates. Ut illa dum moventur motu continuo generant lineam, quæ non componitur ex punctis, sed terminatur a punctis; unde fit, ut nullum habere possint motum omnium minimum, sed quocunque motu utcunque parvo alius adhuc minor est, qui habentur minori tempore, quo argumento jamdiu soluta est difficultas veterum circa motum testudinis, & Achillis; ita idem hisce materiæ punctis continget.

---

habetur contradictio, & absurdum. Ipsa autem impenetrabilitas male omnino probatur a nonnullis ex eo, quod monades duæ si compenetrarentur, essent unica non duæ. Compenetratio est loci conjunctio: ut duo possunt esse eodem momento temporis, nec idcirco sunt unicum ens, sed duo; ita etiam duo poterunt eße in eodem puncto loci, nec esse unicum ens, sed duo. Loci identitas quid ad naturæ, & , ut vocant, essentiæ, identitatem pertineat, nemo sane videbit, si rem altius consideret.

get. Nullum poterunt habere motum, qui minimus sit, & primus, & quo alius minor minori tempore non habeatur. Massa punctorum hujusmodi non potest promoveri per tantum spatii, quantum occupat primum ejus punctum, quia primum punctum non occupat spatium extensum, & capax ullius motus; sed quodvis spatium extensum infinities infinitis punctis locum præbet, ab iis nunquam exhauriendum. Si massa promovetur; jam primum ejus punctum occupabit punctum spatii diversum a priore, inter hoc, & illud prius intercedet linea ab iis binis punctis spatii terminata. Motus ille factus erit tempusculo continuo, quod constat ex linea quadam temporis continua, divisibili in infinitum. In partibus ejus tempusculi distantia puncti spatii, quod occupat illud punctum materiæ, a puncto spatii occupato initio tempusculi erit minor, quam in fine ejusdem. Hæc ex idea communi divisibilitatis spatii, & temporis in infinitum; ubi nulla difficultas haberi potest, quæ non habeat locum in communi sententia de contitinuitate materiæ, & cui refponderi non poffit eodem modo. Certè idem de prima corporis fuperficie dicitur, quæ eft primus corporis limes, etiam admifsâ continuitate materiæ, neceffario indivifibilis; nam aliter non effet limes, & eft ex eodem genere entium, vel modorum, ex quo eft figura. Ceterum temporis, & fpatii couftitutio ad metaphyficam pertinent, & ejufmodi funt, ut ea, nemine interrogante, quid fint, fciamus, interrogante aliquo ferè ignoremus. Sed cum fpatium ipfum imaginarium prorfus effe arbitrer, & non reale, quidquam exiftens fine corpore, & motibus, tanquam fit quædam eorum capacitas actu exiftens extra intellectum; quo fenfu ejus divifibilitatem in infinitum intelligam, inferius indicabo. Interea fiquis ipfa ejufmodi materiæ puncta difficilius concipit ex eo, quod in ideâ rei corporeæ, rei materialis, materiæ, videatur fibi videre extenfionem continuam, figuram, & partes; is paulo diligentius inquirat, velim, in ipfas ideas fuas, earumque originem.

14.

14. Utcunque demus, quod ego omnino non censeo, aliquas esse innatas ideas, & non per sensus acquisitas; illud proculdubio arbitror omnino certum, ideam corporis, materiæ, rei corporeæ, rei materialis, non hausisse ex sensibus. Porro ideæ primæ omnium, quas circa corpora acquisivimus per sensus, fuerunt omnino eæ, quas in nobis tactus excitavit, & easdem omnium frequentissimas hausimus. Multa profecto in ipso materno utero se tactui perpetuo offerebant, ante quam ullam fortasse aut saporum, aut odorum, aut sonorum, aut colorum ideam habere possemus per alios sensus, quarum ipsarum, ubi eas primum habere cæpimus, multo minor sub initium frequentia fuit. Ideę autem, quas per tactum habuimus, ortæ sunt ex phænomenis hujusmodi. Experiebamur palpando, vel temere impingendo resistentiam vel a nostris, vel a maternis membris ortam, quæ cum nullam interruptionem per aliquod sensibile intervallum sensui objiceret, obtulit nobis ideam impenetrabilitatis, & extensionis continuæ:

cum-

cumque deinde cesseret in eadem directione alicubi resistentia, & secundum aliam directionem exerceretur; terminos quantitatis ejusdem concepimus, & figuræ ideam hausimus.

15. Porro oriebantur hæc phænomena a corporibus e materia jam efformatis, non a singulis materiæ particulis, e quibus ipsa corpora componebantur. Considerandum diligenter erat, num extensio ejusmodi esset ipsius corporis, an spatii cujusdam, per quod particulæ corpus efformantes diffunderentur: num eæ ipsæ particulæ iisdem proprietatibus essent præditæ: num resistentia exerceretur in ipso contactu, an in minimis distantiis sub sensus non cadentibus vis aliqua impedimento esset, quæ id ageret, ut resistentia ante ipsum etiam contactum sentiretur: num ejusmodi proprietates essent intrinsecæ ipsi materiæ, ex qua corpora componuntur, & necessariæ; an casu tantum aliquo haberentur, & ab extrinseco aliquo determinante. Hæc & alia sane multa considerare diligentius oportuisset: sed erat id quidem tempus maximè caliginosum,

ſum, & obſcurum, ac reflexionibus minus obviis minimè aptum. Præter organorum debilitatem, occupabat animum rerum novitas, phænomenorum paucitas, & nullus aut certè ſatis tenuis uſus in phænomenis ipſis inter ſe comparandis, & ad certas claſſes revocandis, ex quibus in eorum leges, & cauſas liceret inquirere, & ſyſtema quoddam efformare, quo de rebus extra nos poſitis poſſemus ferre judicium. Nam in hac ipſa phænomenorum inopiâ, in hac efformandi ſyſtematis difficultate, in hoc exiguo reflexionum uſu magis etiam, quam in organorum imbecillitate arbitror ſitam eſſe infantiam.

16. In hac tanta rerum caligine, ea prima ſeſe obtulerunt animo, quæ minus alta indagine, minus intentis reflexionibus indigebant, eaque ipſa ideis toties repetitis altius impreſſa ſunt, & tenacius adhæſerunt, & quendam veluti campum nacta prorſus vacuum, & adhuc immunem, ſuo quodammodo jure quandam veluti poſſeſſionem inierunt. Intervalla, quæ ſub ſenſum nequaquam cadebant pro nullis habita: ea, quorum ideæ ſem-

semper simul conjunctæ excitabantur, habita sunt pro iisdem, vel arctissimo, & necessario nexu inter se conjunctis. Hinc illud effectum est, ut ideam extensionis continuæ, ideam impenetrabilitatis prohibentis ulteriorem motum in ipso tantum contactu corporibus affinxerimus, & ad omnia, quæ ad corpus pertinent, ad materiam, ex qua ipsum constat, temere transtulerimus: quæ ipsa cum primum insedissent animo, cum frequentissimis immo perpetuis phænomenis, & experimentis congruerent, ac iteratis reflexionibus confirmarentur; ita tenaciter sibi invicem adhæserunt, ita firmiter ideæ corporum immixta sunt, & cum ea copulata; ut ea ipsa pro primis corporis, & omnium corporearum rerum, nimirum etiam materiæ corpora componentis, ejusque partium proprietatibus maximè intrinsecis, et ad naturam, atque essentiam eorundem pertinentibus & tum habuerimus, & nunc etiam habeamus, nisi nos præjudiciis ejusmodi liberemus. Extensionem nimirum continuam, impenetrabilitatem ex contactu, compositionem

nem ex partibus, & figuram non solum naturæ corporum, sed etiam corporeæ materiæ, & singulis ejusdem partibus tribuimus tanquam proprietates essentiales: cætera, quæ serius, & post aliquem reflectendi usum deprehendimus, colorem, saporem, odorem, sonum, tanquam accidentales quasdam, & adventitias proprietates consideravimus.

17. At quoniam eo devenimus, ut de præjudiciis ipsis ab infantia nobiscum allatis judicium ferre possimus, eaque iterum ad examen vocare; diligenter hæc ipsa idearum origo est perpendenda, & judicandum de rebus ipsis independenter a præjudiciis: ea, quibus positis eædem illæ impressiones in sensibus factæ fuissent, ac eædem in animo ideæ excitatæ; æquè omnia eodem loco habenda sunt, & sine ullo discrimine respicienda. Hoc pacto si animus constituatur in æquilibrio quodam; videbit sanè nihil esse, cur puncta penitus indivisibilia, & omni prorsus extensione, ac partibus carentia non possit sibi cogitando effingere, atque concipere. Punctorum mathematico-

rum idea, quam nobis in Geometria efformamus, opem feret; eadem autem phænomena, easdem in sensibus impressiones oriri debere ex horum punctorum congerie, si reales quasdam proprietates habeant patebit inferius. Reales interea horum punctorum proprietates, in quibus a mathematicis differunt, jam expono.

18. Nimirum concipio hæc ipsa puncta vel ex natura sua, vel ex libera Supremi Conditoris lege habere in primis vim inertiæ, sive determinationem perseverandi in eodem statu, quiescendi, vel movendi uniformiter in directum, in quo semel posita sunt, nisi quatenus ab aliis viribus determinantur ad mutationem status ipsius. Deinde eadem prædita esse viribus quibusdam, quibus determinentur ad recedendum a se invicem, vel accedendum, quas usitato jam vocabulo appello repulsivas, & attractivas. Hisce vocabulis non designo actionem aliquam physicam, quam punctum exerceat in punctum distans (quamvis actionem ipsam, ac reactionem usitatas nimirum voces, cum opus fuerit nominabo), sed deter-

terminationem illam, undecunque ea proveniet, & sive sita sit in ipsa punctorum eorundem natura, sive in libera quadam Conditoris lege, sive etiam, si Peripateticis libeat, in accidente aliquo absoluto (ea enim hîc non moror), quam determinationem eadem puncta habent, accedendi ad se invicem vel recedendi, & id ipsum ita, ut sive bina puncta ad se mutuo attrahantur, sive repellantur, debeant induci semper mutationes status in utroque contrariæ & æquales, sive produci in utroque celeritates contrariæ, & æquales. Has autem vires concipio in minimis quibusdam distantiis semper repulsivas ita, ut imminutis distantiis ipsis in infinitum, vis repulsiva in infinitum augeatur, distantiis auctis minuatur; donec demum fiat nulla: tum adhuc auctis distantiis vis repulsiva jam agat in sensum oppositum, & evadat attractiva, quæ, auctâ continuo distantiâ, augeatur primo, tum decrescat, ac iterum evanescat, & mutetur in repulsivam crescentem, ac decrescentem per vices; donec evanescat & ipsa, & iterum in attractivam mutetur, excipientibus sese mutuo incrementis, ac decrementis, attractionibus, ac repulsionibus per vices plurimas ad intervalla distantiarum semper majora ita, ut in maximis jam distantiis, & sub nostros sensus cadentibus multo tenuiores sint vires ipsæ, & in majoribus fortasse etiam ad sensum evanescant.

19. Specimen quoddam vis repulsivæ in minoribus distantiis, & attractivæ in majoribus, ac limitis inter utranque, habemus in laminis, vel spiris elasticis, quarum vertices in data quadam distantia a se invicem quiescunt; at iidem plus æquo aut appressi, aut distracti, se in priore casu per repulsionem, in posteriore per attractionem restituunt. Quod ibi ex totius laminæ elaterio fit, idem ego in hisce punctis concipio fieri vel ex eorum natura, vel ex libera Conditoris lege, vel ex accidente quodam, ut libuerit. Nevvtonus qui in minimis distantiis attractionem agnoscit, & quidem in contactu maximam; adhuc tamen hanc ipsam ideam transitus ab attractione ad repulsionem pro diversis distantiis

tiis habuit, & expressit Opticæ quæstione ultimâ paginis decem ante finem, hisce verbis, quæ mihi harum omnium meditationum occasionem præbuerunt. *Quandoquidem metalla in acidis dissoluta parvam solummodo acidi portionem ad se attrahunt, liquet vim eorum attrahentem nonnisi ad parva circum intervalla pertingere. Et sicuti in Algebra ubi quantitates affirmativæ evanescunt, & desinunt, ibi negativæ incipiunt; ita in Mechanicis ubi attractio desinit, ibi vis repellens succedere debet. Talis autem vis aliqua, ut sit, consequi videtur ex reflexionibus, & inflexionibus radiorum lucis: Nam in utroque horum casuum repelluntur radii a corporibus sine immediato contactu corporis reflectentis, vel inflectentis* (quod quidem ipsum Nevvtonus satis evidenter demonstravit.) *Videtur etiam consequi ex emissione luminis: Nam radius simul, ac e lucente corpore per vibrantem partium ipsius motum excussus sit, & e sphæra attractionis ejus evaserit; ingenti admodum velocitate propellitur. Etenim eadem vis, quæ in reflexione ad radium repellen-*

dum valet, possit etiam ad eundem emittendum valere. Porro videtur etiam consequi ex productione aeris, & vaporum: Nam particulæ e corporibus excussæ per calorem, & fermentationem, simul ac e sphæra attractionis corporis sui evaserint, recedunt deinceps, & ab illo, & a se invicem magna cum vi, rursumque accedere fugiunt ita, ut nonnunquam amplius decies centies millies tantum spatii occupare noscantur, quam quantum cum corporis densi formam haberent; quæ tam ingens contractio, & expansio animo sane concipi vix potest, si particulæ aeris fingantur elasticæ, & ramosæ, vel viminum lentorum intra se in circulos intortorum instar esse, vel ulla alia ratione, nisi ita si vim repellentem habent, qua a se mutuo fugiant. Hæc Nevvtonus; quæ adduximus, ut pateret ejusdem generis vires pro mutata distantia variatas ita, ut ex attractivis etiam abeant in repulsivas, & agentes etiam sine ullo medio in distantia aliqua, quas Nevvtonus admisit in particulis corporum solidis, ex quibus ipse, ut inferius ostendam, cor-

po-

pora componi censuit, a nobis tribui punctis illis prorsus indivisibilibus, ex quibus non dissimilem vaporum ortum proferemus inferius.

20. Omnes illæ virium vicissitudines jam repellentium, jam attrahentium optime referri possunt per ordinarias ad curvam quandam regularem hujus naturæ. Sit angulus rectus (*a*), cujus bina latera in infinitum producantur. Alterum sit curvæ asymptotus, ad quam ipsa curva versus partes vertici anguli oppositas in

(a) *Hujusmodi curvam videre est in mea dissertatione de Viribus Vivis, in ea de Lumine, in ea de lege continuitatis, in Synopsi Benvenutiana Physicæ Generalis, ac demum in mea de lege Virium in natura existentium, in qua etiam demonstratur illud, frequentes transitus hinc, & inde ab axe, qui secum ferunt transitus virium ex attractivis in repulsivas, & viceversa, nec ullum afferre saltum, nec simplicitati obesse ipsius curvæ, cujus ibi natura exponitur.*

infinitum accedat, quin ufquam cum ea congruat; ex altera vero parte perpetuo in infinitum recedat. Alterum fit axis, ad quem curva ipfa ita accedat, ut ipfum in aliqua diftantia ab anguli vertice fecet, & abeat ad partes oppofitas; tum vero reflexa axem ipfum iterum fecet, ibique ad diverfas diftantias quamplurimis vicibus curfum hinc, & inde reflectat. Si in hujufmodi curva rectæ abfciffæ in axe a vertice anguli recti exprimant diftantias binorum punctorum; ordinatæ erectæ ufque ad curvam parallelæ afymptoto exprimentvires repulfivas, vel attractivas, prout dirigentur ad eas partes, ad quas afymptotus in infinitum protenditur, vel ad oppofitas.

21. Hæc curva quoniam femper ab afymptoto recedit; habebit in omnibus punctis axis unicam ordinatam; & proinde ejus æquatio irrationalitatibus omnibus liberata continebit unicum valorem ordinatæ gradus imparis, & quafcunque, & quotcunque functiones abfciffæ. Poterit ea effe fimpliciffima, & non ex aliarum arcubus compofita, licet ob tot i-

tus,

tus, ac reditus nobis videatur prima fronte admodum implexa, & irregularis. Et quidem hic maximè cadunt ea, quæ de æquali curvarum omnium simplicitate superiore anno proposui sub finem primæ partis dissertationis de Maris Æstu; ubi illud etiam ostendi, cur potissimum inter omnia loca geometrica linea recta, & post eam circulus, nobis videantur simplicissima. Hinc autem & lex illa virium tantis mutationibus incrementorum, & decrementorum obnoxia, poterit esse simplicissima in se ipsa, & admodum regularis; quanquam hanc quidem simplicitatem nequaquam agnoscet, quicunque geometricorum locorum naturam, atque indolem minus perspectam habuerit.

22. Porro puncta illa, in quibus recedendo ab anguli vertice curva secat axem, voco limites attractionis, & repulsionis. Eorundem limitum bina erunt genera: in altero auctis distantiis transibitur a vi repulsiva ad attractivam; in altero ab attractiva ad repulsivam. In utroque si bina tantum puncta in immenso vacuo collocata distantiam li-

mi-

mitis habeant; eandem retinebunt vi nulla ibidem agente, & statum perturbante. At in secundo genere si vel minimum aut removeatur punctum alterum ab altero, aut alterum alteri admoveatur; acquirent in primo casu vim recedendi a se invicem, in secundo vim accedendi, qua perpetuo aucta, pergent recedere, vel accedere motu accelerato; donec alium proximum limitem prætergressa repulsionem in primo casu mutent in attractionem, vel attractionem in repulsionem in secundo, & motus retardari incipiat, ac fortasse etiam retro reflectatur. Contra vero in primo limitum genere eam distantiam tuebuntur puncta ipsa ita, ut si alterum ab altero distrahatur vel minimum, jam vi attractiva ad se iterum accedant; si vel minimum alterum alteri admoveatur, vi repulsiva recedant. Quamobrem hoc primum limitis genus appello limitem adhæsionis.

23. Si curva illa in ipso hujus generis limite axem secans, sit axi fere perpendicularis, & ab eo longissimè recedat utrinque; validissima erit in

co-

eodem limite adhæsio; nam utcunque
magna velocitas alteri e punctis im-
primatur, qua tendat vel accedere
ad alterum, vel ab eo recedere; sta-
tim ea tota velocitas recedendi ex-
tinguetur vi illa maxima in primo
casu repulsiva, in secundo attractiva,
non permittente accessum, aut reces-
sum a se invicem, nisi minimum, &
fere nullum. Si autem curva ibidem
magis inclinetur ad axem, nec ab eo
multum recedat; attractio, & repul-
sio hinc, & inde a limite erunt sa-
tis exiguæ, ac limes, ut patet, ad-
hęsionis parum firmæ, & exigua
etiam vi poterunt puncta illa ab eo-
dem limite deturbari, & ultra pro-
ximos etiam ~~limites~~ hinc & inde re-
moveri.

24 Poterit autem inter ipsos ad-
hæsionis limites haberi ordo quicun-
que ita, ut remotiores quidam qui-
busdam propioribus vel æquè validi
sint, vel multo validiores, vel mul-
to languidiores pro diverso modo,
quo curva circa axem hinc, & inde
ab eodem recedet, ut & intervalla
inter binos proximos limites, & di-
stantia arcus curvæ ab axe, & ejus-
dem

dem curvatura, ac flexus utcunque, & quocunque ordine variari.

25. Hisce omnibus fusius expositis, illud hic primum ajo; hæc quidem admodum facile concipi. Nondum hic illud quæro, utrum hoc pacto se res habeat, utrum hic agendi modus naturæ, & phænomenis conformis sit. Illud affirmo, horum omnium ideam concipi claram admodum, & distinctam: atque illud etiam præterea, nihil in hisce omnibus contineri, quod repugnet, nihil, quod ullam contradictionem includat.

26. Jam vero ex hujusmodi punctis posse componi minimas materiæ particulas, quæ habeant, & impenetrabilitatem, & extensionem, licet non continuam, & duritiem, & quæ possint componere majores massas nostris corporibus simillimas, iisdem affectionibus præditas, easdem in nobis ideas excitantes, quibus hæc nostra corpora prædita sunt, & quas ipsa excitant; tam mihi videtur evidens, quam quod est evidentissimum. Quoniam enim posuimus ejusmodi puncta distantiis in infinitum imminutis habere vires repulsivas in infinitum auctas;

ctas; evidens est, infinita, atque adeo Divina vi opus esse ad hoc, ut intervallum omne, quod inter ipsa interjacet, evanescat. Ac proinde nonnisi Divina vi idem spatium occupare poterunt, sive compenetrari. Oportebit igitur, ut alia aliud occupent spatii punctum. Quamobrem dispersa erunt per spatium extensum, & si non in unica recta linea, aut in unico plano collocentur (*a*); diffun-

(a) *Hunc casum esse infinities improbabiliorem dispersione in longum latum, & profundum demonstratur facile ex eo, quod in quovis solido infinita sunt superficierum curvarum genera, quarum singulæ in quovis genere substitui possint plano cuivis, in quovis autem plano infinita genera curvarum, quarum singulæ in quovis genere substitui possint rectæ, cuivis in eodem plano existenti. Quamobrem casus possibiles distributionis non rectilineæ infinities infinities sunt plures casibus distributionis rectilineæ; adeoque no-*

fundentur per spatium extensum in longum latum, atque profundum; unde in particulis ex ejusmodi punctis coalescentibus habebitur non illa quidem continua, sed tamen habebitur extensio quædam in longum, latum atque profundum.

27 Si vero bina ejusmodi puncta collocentur in aliquo limite adhæsionis firmissimo; evidens est, ipsa eam distantiam a se invicem conservatura.

---

nobis etiam abstrahentibus animum ab iis, quæ per sensus novimus, infinities infinities improbabilior est distributio rectilinea, quam dispersio in longum, latum, atque profundum. Hinc positive ex ea theoria deducitur extensio quædam interpolata, quæ quidem non est purum nihil, licet spatium intermedium sit nihil, cum constituatur per reales punctorum extendi modos, qui realem constituunt distantiarum relationem, quos exposui pluribus in Dissertatione de Lege continuitatis, & Stayanis supplementis, ubi de spatio, ac tempore.

ra. Quod si tertium ponatur in eadem distantia a singulis eorum, in qua ipsa a se invicem distant, sive in vertice trianguli æquilateri habentis pro basi distantiam priorum duorum, hoc etiam conservabit respectivam positionem eandem. Quocunque enim pacto, quodcunque ex iis tribus locum respectivum mutet, necessario ab altero saltem e reliquis binis recedet, vel ad ipsum accedet; ac proinde vi attractiva, vel repulsiva ad priorem trianguli æquilateri positionem redibunt celerrimè: Idem autem contingit si quartum punctum collocetur in eadem distantia a reliquis tribus; nimirum in vertice pyramidis, sive tetraedri regularis, habentis pro basi illud ipsum triangulum. Hæc pyramis positionem suam, & figuram necessario retinebit, & quacunque directione, & vi impellantur quotcunque ex ejus pyramidis punctis; modo illa vis adhæsionis repulsiva in distantia imminuta, attractiva in distantia aucta sit multo major vi illâ, qua motus ipsis punctis imprimitur; celerrimè, & minimo motu restituentur

tur

tur ipsa puncta in priorem respectivum locum, & ita circa pyramidis angulos oscillabunt, ut ab iis non recedant, nisi quantitate quam libuerit parva. Possent, & aliæ punctorum dispositiones determinari quamplurimæ [a], in quibus positio respectiva vi limitum conservaretur. Sed hìc casum simplicissimum, & intellectu facillimum selegi, in quo durities particulæ e punctis conflatæ quam libuerit magna habeatur.

28. Jam verò hæ ipsæ primæ pyramides, posita etiam eadem communi virium lege pro omnibus punctis, possunt esse plurimum inter se dissimiles. Nam possunt alia puncta ad eas efformandas collocari in aliis adhæsionis limitibus; unde fiet, ut ad diversa intervalla a se invicem distent,

---

[a] *In dissertatione de Lumine, & in illa Synopsi Physicæ generalis exhibentur aliæ, quæ elegantissimas sane geometricas proprietates habent, & soliditati, ac fluiditati explicandæ inserviunt mirum in modum.*

ſtent, & diverſam habeant adhæſionis vim; ac vel major ejuſmodi vis cum minore vel cum majore punctorum intervallo coniungatur. Præterea diſcrimen eſſe poterit in ipſa vi, quam tota pyramis exercebit compoſitam ex viribus punctorum omnium, ut paulo inferius patebit.

29. Singulæ pyramides vires ſuas exercebunt in omnibus diſtantiis ortas ex viribus punctorum omnium ſimul coniunctis, & ad eandem directionem redactis, & poterunt conſiderari, ut puncta quædam, quæ ſuas habeant peculiares virium leges a peculiaribus curvis expoſita. Si e centro pyramidis exeat quæcunque recta, vis quam tota pyramis exercebit in ſingulis ejus punctis exponetur per ordinatas ad quandam curvam, quæ data curva exponente vires ſingulorum punctorum, dabitur; nam datis viribus ſingulorum punctorum pyramidis, & redactis ad eandem directionem, dabitur etiam earum ſumma, quæ erit vis pyramidis per ejuſmodi ordinatam exponenda. Hæc ordinata ad novam curvam in majoribus diſtantiis a pyramide, reſpectu quarum

distantia punctorum a se invicem sit perquam exigua, & proinde discrimen a reductione ortum fere nullum, erit ferè æqualis summæ ordinatarum curvarum omnium ad singula ea puncta pertinentium.

30. Hinc autem illud consequitur notatu dignissimum. Forma hujus curvæ in distantiis aliquanto majoribus a tota pyramide alicubi parum admodum abludet a forma curvæ exponentis legem virium unius ex ejus punctis; at alibi, & potissimum circa frequentes, & satis validos limites ab ea plurimum discrepabit. Nam ubi curva puncti cujuslibet habet fere eandem directionem quam habet axis, ibi ejus ordinata vix quidquam mutatur, mutata non ita parum abscissa; ac proinde ibi ordinatæ pertinentes ad curvas punctorum omnium pyramidem constituentium erunt ferè æquales inter se; etenim abscissæ iis ordinatis respondentes in singulis curvis non different magis, quam pro illa exigua distantia, qua ipsa puncta inter se distant. Quamobrem ibi ordinata ad curvam exprimentem legem totius pyramidis e-

rit

rit fere quadrupla ordinatæ ad curvam pertinentem ad ſingula puncta, & erit poſitiva, vel negativa, prout erat illa. At ubi curva habet directionem inclinatam ad axem in angulo parum diverſo a recto, ibi parum admodum mutata abſciſſa, mutatur plurimum ordinata, & circa ipſa limites ordinata abit ex poſitiva in negativam. Quare ibi in eadem diſtantia a centro pyramidis ordinatæ pertinentes ad curvas ſingulorum punctorum erunt admodum inter ſe diverſæ, & alicubi aliæ poſitivæ, aliæ negativæ. Quamobrem & earum ſumma variabitur in lege admodum diverſa ab ea, in qua ſingulæ variantur; adeoque arcus curvæ erit admodum diverſus ab iis arcubus, a quibus generatur. Satis autem patet, hoc diſcrimen curvæ genitæ debere eſſe maximum ibi, ubi limites fuerint admodum inter ſe proximi arcubus curvæ generantis inter binos limites multum recedentibus hinc & inde ab axe; cum eo caſu debeat arcus curvæ generantis magna ſaltem ſui parte habere directionem fere normalem axi ipſi.

31. Præterea in diversis rectis exeuntibus e centro pyramidis curvæ genitæ, ubi satis differunt a generantibus, different etiam inter se. Nam totum discrimen curvæ genitæ a generantibus oritur ex diversa distantia puncti assumpti in recta, in qua computantur abscissæ curvæ genitæ, a punctis pyramidem constituentibus. Porro hoc distantiarum hujusmodi discrimen diversum erit pro diversa positione, istius puncti assumpti ad pyramidem, sive prout punctum ipsum jacet in aliis, atque aliis rectis exeuntibus e centro pyramidis. Erunt enim rectæ, in quibus omnia puncta assumpta æquè distabunt a tribus ejus pyramidis punctis: erunt aliæ, in quibus æquè distabunt a binis tantum; erunt aliæ, in quibus ab omnibus inæqualiter distabunt. Unde fiet, ut in eadem distantia a centro pyramidis punctum idem positum ex una ejusdem parte validissimè attrahatur, & positum ex alia validissimè repellatur.

32. Discrimen ipsum curvæ genitæ pertinentis ad totam pyramidem a curvis generantibus, quæ pertinent

ad

ad puncta singula, erit admodum diversum pro diversa distantia, in quo primo collocata fuerint puncta ipsa pyramidem efformantia, quæ possunt collocari in primo, vel secundo, vel tertio, vel quovis alio limite adhæsionis: & cæteris paribus, quo major fuerit punctorum distantia inter se, hoc majus erit discrimen curvæ genitæ a curvis generantibus, quia eo majus erit discrimen ordinatarum ad easdem excitatarum ex eodem puncto. Quin immo si distantia punctorum sit exigua respectu curvitatis curvæ generantis in majoribus distantiis, nimirum ejusmodi, ut nullibi tantæ differentiæ abscissarum, quanta est distantia eorundem punctorum inter se, respondeat in majoribus distantiis notabilis differentia ordinatarum; discrimen curvæ genitæ a generantibus nullibi erit notabile, & nullibi habebitur discrimen notabile inter curvas genitas exprimentes vires, quæ habebitur in diversis rectis egressis e centro pyramidis.

33. Limites quoque curvæ genitæ poterunt esse alii multo validiores, alii multo languidiores, quam limi-

tes curvæ generantis pertinentis ad unicum punctum, & inter limites ipsarum curvarum genitarum ingens discrimen esse poterit. Licet autem ordinata curvæ genitæ constet ex summa ordinatarum quatuor curvæ generantis; tamen patet fieri debere, ut eædem ordinatæ curvæ genitæ respondentes aliquibus abscissis sint minores, quam ordinatæ singulæ respondentes aliis abscissis curvæ generantis pertinentis ad unicum punctum. Quare pyramides ipsæ in quibusdam distantiis minus attrahent, aut repellent, quam singula puncta in aliis.

34 Jam vero poterit major pyramis secundi ordinis efformari ex quatuor pyramidibus, vel ex tribus pyramidibus, & puncto, vel ex binis pyramidibus, & binis punctis, vel ex una pyramide, & tribus punctis collocatis in limitibus adhæsionis ad distantiam multo majorem, respectu cujus distantia punctorum pyramidis primi ordinis sit perquam exigua. Si hi limites adhæsionis hujus pyramidis ordinis secundi sint minus firmi, habebit ipsa duritiem paulo minorem: paulo magis recedent ab ejus angulis

hinc

hinc inde pyramidulæ minores, vel puncta, ex quibus constat; sed nunquam ad se invicem ita accedent, ut unius puncta cuiuscunque alterius punctis propiora evadant, quam par est, & statum respectivum perturbent. Ex pyramidulis secundi ordinis ad multo majores distantias dispositis poterunt componi pyramides majores ordinis tertii, adhæsionis, si libet, adhuc minoris, & ita porro; donec ad maximas quasdam deveniatur, ex quibus jam tanta hæc tot corporum congeries perpetuo variabilis componatur. Quin immo fieri potest, ut hæc universa tot fixarum moles, quas cernimus motu respectivo fere immotas, & exiguis mutationibus obnoxias, in similibus sit adhæsionis limitibus, qua ipsa de causa alterius systema ab alterius systemate ad tam immanem distantiam Auctor naturæ supremus disjunxerit.

35. Porro inter curvas exprimentes legem virium pyramidum secundi ordinis multo jam majus discrimen habebitur, sive conferantur curvæ pertinentes ad diversas pyramides, sive curvæ pertinentes ad directio-

ctiones diversas pyramidis ejusdem. Primum patet ex eo, quod & distantia inter puncta sit major, & major punctorum numerus; ac proinde major numerus ordinatarum componentium unicam ordinatam curvæ genitæ, & majus discrimen inter easdem. Secundum patet tum ex eodem capite, tum quia si secunda pyramis componatur ex quatuor pyramidibus primi ordinis diversis, vel ex tribus pyramidibus, & puncto; alia profecto lex orietur ex ea parte, ad quam jacet illud unicum punctum, vel una aliqua determinata pyramis primi ordinis, alia ex ea ad quam quævis alia pyramis prominet, & agmen ducit, alia ex ea, quæ binas, vel tres pyramides æquè distantes habet. Ea vero diversitas multo erit major in pyramidibus superiorum ordinum, quæ multo pluribus modis variari possunt, & hìc locum habent, binæ problematum classes directorum, & inversorum: Datâ curvâ, quæ exprimit legem virium unici puncti, invenire curvas, quæ exprimant in quavis directione data legem virium particulæ compositæ ex dato numero puncto-

cto-

ctorum dato ordine collocatorum: & e contrario: Invenire numerum, & ordinem punctorum, ac legem exprimentem vires puncti cujuslibet ita, ut particula ex iis punctis ita composita datam in datis directionibus habeat virium legem expositam per curvas accedentes ad datas datarum curvarum arcus magis, quam pro quavis data distantia.

36. Primum problematum directorum genus est admodum expeditum. Nam datis positione punctis, datur ordinata ad singulorum curvas, datur reductio ad eandem directionem, datur summa virium omnium reductarum: ac proinde datur ordinata ad curvam quæsitam. Quoniam autem secundum diversas directiones diversæ sunt virium ipsarum leges; non poterit per unicam curvam exprimi vis particulæ, cujuslibet determinatæ; quin immo nec Locus unicus ad superficiem satis erit ad omnes ejusmodi leges exponendas, qui Locus exponere poterit solum leges pertinentes ad omnes directiones in eodem dato plano positas; sive exhibebit tantum vires particulæ exerci-

citas in punctum quodlibet positum in plano dato; sed ejusmodi expressio vires totius Geometriæ excedet, quartam dimensionem, quæ ad id requireretur non habentis, & solum per analyticas formulas poterit obtineri.

37. Secundum genus problematum inversorum saltem ob immanem casuum copiam excedit omnem mentis humanæ vim; & solus ea unico obtutu videt simul omnia supremus Naturæ Conditor, qui eorum solutiones omnes tam varias habuit omnino ob oculos, dum Mundum conderet; si hac potissimum ratione in eodem condendo est usus.

38. Ex hisce, quæ dicta sunt, satis patet, quanta varietas in materiæ particulis haberi possit, licet puncta ea omnia, ex quibus eædem componuntur, sint prorsus homogenea, & iisdem viribus prædita. Quid autem si quædam punctorum classes sint ejusmodi, ut puncta ad eandem classem pertinentia eandem virium legem habeant, puncta vero pertinentia ad diversas habeant diversas leges? quo quidem casu vis mutua, quo bina puncta in se mutuo agunt de-

deberet exponi per summam ordinatarum ad curvas, quæ ad utrumque punctum pertinent, & utriusque vires exponunt. Quid si omnia puncta diversas habeant virium leges & diversas curvas, vel saltem curvas similes, vel inæquales, & aliis, atque aliis parametris descriptas? Quanto majus discrimen habebitur in materiæ particulis, in ordinibus particularum, & earundem structura? Poterunt sanè in omnibus hisce casibus hujusmodi particulæ ita se mutuo in iisem distantiis aliæ attrahere, aliæ repellere, & eædem in aliis repellere in aliis attrahere, & attrahere etiam in iisdem ac repellere pro diversa positione ad se invicem ita, ut effectus motuum oriantur per quam diversi.

39. Mirum autem, quam facile ex hac ipsa particularum constitutione deriventur plurimæ, diversorum corporum proprietates, & discrimina, atque ea fere omnia, quæ ad Physicam Generalem pertinent, cum plurimis eorum, quæ pertinent ad Physicam particularem. In primis habetur discrimen inter corpora elastica, & mollia, inter solida, & flui-

fluida. Si binæ particulæ sitæ sint in ejusmodi limite attractionis, vel repulsionis, prope quem hinc & inde ad maxime exiguas distantias sint plurimi alii limites; ubi vi aliqua externa agente mutaverint eum statum nonnihil delatæ ad alias aut minores, aut majores distantias; resistent quidem vi ipsi, quotiescunque transibunt e regione arcuum curvæ exprimentis repulsionem, si coguntur accedere ad se invicem, & e regione arcuum curvæ exprimentis attractionem, si coguntur recedere a se invicem; sed alios jam limites nactæ, poterunt in iis novis distantiis consistere, & priorem statum nequaquam recuperare. Quod autem binis accidit particulis, si accidat particulis omnibus massam quandam constituentibus; habebitur in eadem massa idem effectus, qui observatur in corpore molli, videlicet ut mutetur figura, ut massa ejusmodi mutationi resistat, sed nullam sensibilem vim exerceat ad recuperandam figuram.

40. Quod si hinc & inde a limite per multo majorem axis tractum perseveret hinc attractiva vis, inde repul-

pulsiva limitibus aliis hinc & inde satis remotis; si massa plus æquo comprimatur, & cogatur mutare figuram, particulis aut ad se invicem accedentibus plus æquo, aut recedentibus plus æquo; ea massa non solum resistet mutationi figuræ, sed perpetuo exercebit vim eandem ad recuperandam figuram, quam exercuit, ne mutaret; qui ipse est effectus elasticitatis perfectæ, ubi si aliæ particulæ limites mutent, aliæ non mutent; elasticitas erit minus perfecta, & vis ad recuperandam figuram erit minor vi ad retinendam in aliqua ratione, quæ pendeat a numero particularum primi, & secundi generis.

41. Sit jam limes aliquis firmissimæ adhæsionis ita tamen, ut limes proximus non sit nimis remotus, & post eum arcus curvæ exponens vim repulsivam recedat longissimè ab axe. Vis, qua particulæ suam distantiam in eo positæ tuebuntur, erit maxima. Adhibitis magnis viribus, nihil eæ particulæ accedent ad se invicem ad sensum aut recedent, adeoque massa nihil ad sensum comprimetur, aut dilatabitur, quod non erit signum nullius,

lius, sed maximæ elasticitatis. At si quædam vis multo major egerit ad disjungendas a se invicem particulas, quæ superet maximam ex attractionibus expressis ab eo arcu curvæ post limitem recedentis ab axe, reliquis etiam multo facilius, & citissime superatis; particulæ ipsæ jam delatæ ad distantiam repulsionis pergent a se invicem jam sponte recedere plurimum, & magnam vim exercebunt ad se dilatandum. An non id ipsum cernimus in aqua, quæ adhibitis satis magnis viribus nec comprimi potest, nec dilatari; at illa multo majore vi, qua particulæ igneæ ad ejus particulas distrahendas agunt, convertitur in vapores maximam elasticitatem prodentes, qui tanta vi, quantam superius in Nevvtoni loco vidimus, nituntur recedere a se invicem in immensum?

42. Si particulæ quædam in omnibus circumquaque directionibus æqualem fere in eadem distantia vim exerceant inter se; poterit facile altera circa alteram converti, licet distantiam mutare non possit, nisi vi aliqua vincatur vis, qua particulæ

mu-

mutata distantia deberent vel se mutuo attrahere, vel se mutuo repellere; ubi illud contingeret, quod in globis levigatis supra Terræ levigatæ globum positis, qui minima vi circumquaque moverentur, sed non possent avelli, nisi vi aliqua eorum gravitas vinceretur. Massa hujusmodi particularum exigua vi agitari poterit particulis ita altera circa alteram convolutis, ut distantiæ plurimæ in ejusmodi agitatione serventur, aliæ mutentur quidem, sed non simul omnes aliquibus successive avulsis, dum aliæ circa alias convertuntur. Habebit tamen tenacitatem ejusmodi massa, & summa virium, qua quævis particula a reliquis sollicitatur, poterit esse attractiva ita, ut sphæricam figuram affectent masculæ ejusmodi exiguæ. Ac ubi evellenda erit ex ejusmodi massa major aliqua gutta; nunquam avelletur tota aliqua superficies magna simul, sed aliis particulis post alias avulsis, & attenuato illo veluti filo, quo adhuc gutta avellenda cum reliqua massa cohæret, habebitur demum avulsio. At ea omnia sunt ea ipsa, quæ in fluidis ob-

ser-

servamus adhæsionem partium cum ipsa fluiditate coniungentibus, & sine ulla etiam pressione molem suam servantibus. Verum si adhæsionis limes sit parum admodum firmus, vel particulæ sunt in distantiis repulsionis, in quibus vi aliqua retineantur, quæ eas comprimit; habebitur adhuc fluidum, & in hoc secundo casu, quantum libuerit elasticum.

43. At si particulæ secundum diversam directionem, diversas vires exerceant, & ubi in ipsis limitibus positæ sint, præterea certum unius particulæ latus altera certo suo latere spectare debeat, eo magis attracta, utralibet ex parte hinc vel inde recesserit; acquirent præterea ejusmodi partes aliud tenacitatis genus, quo fiat, ut positionem ad se invicem servent, sive aliæ circa alias facile converti non possint. Hujusmodi massa figuræ suæ erit tenacissima, & pars ejus major a reliqua avelli non poterit, quin omnes minimæ particulæ in quadam superficie positæ simul fere avellantur; adeoque nisi vis, qua avellendæ sunt, sit par summæ earum virium simul vincendæ. Id ipsum

au-

autem patet solidis corporibus contingere, potissimum iis, quæ figuram facile mutant, seu percussioni cedunt. Poterit autem & aliud haberi soliditatis genus ex firmissimo particularum limite, quo fiat, ut magnæ etiam vires sint impares vincendis viribus, quibus exiguus etiam particularum numerus resistit mutationi distantiæ, necessariæ ad hoc, ut massa in morem fluidi agitari possit. Poterit autem magna aliqua vi, qua particulæ removeantur a distantiis limitum, & mutent etiam positionem, aut motum quendam circa axes proprios accipiant, unde fiat, ut jam vires ex hujusmodi motus velocitate circumquaque circa axem eædem sint in iisdem distantiis, aliis nimirum post alias velocissimè sibi succedentibus, solidum mutari in fluidum, quod ea vi cessante iterum fiat solidum; & id ipsum cernimus, ubi caloris vi solida liquescunt; quod idem & aliis fortasse plurimis rationibus poterit evenire.

44. Ubi autem dirupta fuerit massa solida; particulæ aliæ paulo altius eminebunt, aliæ subsident tum ob exiguum aliquod discrimen adhæsionis,

tum quod vis avellens non eodem prorsus modo singulis particulis avellendis applicata fuerit. Tum vero si iterum massa avulsa adducatur ad eum locum, ex quo avulsa est, illæ particulæ, quæ maximè prominent, devenient ad pristinos limites ante alias, eosque prætergressæ, ac jam in situ repulsionis constitutæ, nec ipsæ ulterius ad se invicem apprimendo accedent, nec illud permittent, ut reliquæ suos pristinos limites recuperent. Quare manebit adhæsio per quam exigua, & facillimè vincenda, atque insensibilis. At si massæ utriusque superficies satis complanentur; fieri apprimendo poterit; ut multæ simul particulæ deveniant ad limites satis firmos, & tenacitatem maximam acquirant massæ ipsæ. Id autem observatur in divulsione corporum solidorum, & tenacitas, seu adhæsio partium, quæ ab aliis, ut a Nevvtono tribuitur vi attractivæ maximæ in contactu, & multitudini contactuum; multo sanè melius repetetur a multitudine hujusmodi firmissimorum limitum sine contactu etiam, & in exigua quadam distantia.

45. At

45. At & illud patebit, quo pacto derivanda sit gravitas generalis. Si nimirum in maximis distantiis, in quibus Planetæ a se invicem distant, omnium punctorum curvæ accedant quam proxime ad arcum Hyperbolæ gradus tertii, in qua ordinatæ sint in ratione reciproca (duplicata distantiarum, & exiguæ sint ordinatæ singulæ, atque attractiones exprimant; oportebit in iisdem distantiis omnes particulæ habeant eandem legem attractionis in ratione reciproca duplicata distantiarum, quod ex numer.30. admodum facile deducitur. Nam ejusmodi curvæ arcus ut Geometris facile patebit, debet habere directionem in iis distantiis parum diversam a directione axis, quem nimirum axem habebit pro asymptoto, & limites ibi nulli erunt. Quare in eo casu, ut supra vidimus, lex virium particulæ orta a summa virium punctorum omnium nihil ad sensum differet a lege virium singulorum. Quamobrem attrahent in iis distantiis se particulæ omnes in ratione reciproca duplicata distantiarum.

46. Atque hic quidem illud notandum potissimum, quod cum hac theoria mirum in modum consentit. Quotiescunque, ea erit in aliquibus distantiis lex virium, ut facta distantiarum mutatione æquali diametris particularum, vis ad sensum non mutetur, sive quod idem est, differentiæ abscissarum æquali distantiæ punctorum particulæ extremorum respondeat differentia ordinatarum, insensibilis respectu ordinatæ totius, toties particulæ habebunt in iisdem distantiis eandem legem ad sensum, quam puncta singula; ac proinde in ordine ad ejusmodi vires in iis distantiis exercitas debebunt omnes esse necessario homogeneæ. At si mutatio distantiæ, seu differentiæ abscissæ æqualis diametro particulæ inducat mutationem sensibilem virium, seu differentiam ordinatæ non exiguam respectu ordinatæ totius; semper particularum lex in iisdem distantiis differet a lege singulorum punctorum, & aliarum particularum leges different a se invicem, ac vires ipsæ secundum alia particularum latera alio modo agent.

agent. Primum illud profecto contingit in gravitate generali, quæ exercetur in distantiis, respectu quarum diametri particularum singularum perquam exiguæ sunt, & quæ mutata tantillum distantia ad sensum non mutantur. Hinc in ordine ad gravitatem generalem debet esse materia omnis necessario homogenea, & gravitas ipsa esse in ratione composita ex ratione directa numeri punctorum seu massæ, & reciproca duplicata distantiarum. Secundum contingit, ubi vires parum admodum mutatis distantiis, mutantur plurimum, ubi frequentes sunt limites, & vires majores, curvarum nimirum recessus ab axe maximi. Hinc vires particularum in se invicem, quæ in Chymicis effectibus, in metallorum, ac plantarum efformatione, in genesi corporum omnium pendente a motibus particularum in distantiis, quæ ad ipsarum particularum diametra exiguam rationem habeant, erunt admodum diversæ a viribus singulorum punctorum & a se invicem, & in eis distantiis debebunt particulæ ipsæ

 in

in ordine ad ejusmodi effectus esse maximè heterogeneæ.

47. Patet etiam si respectu massæ, in quam gravitatur, distantia non sit ita magna, posse legem gravitatis jam aberrare nonnihil a lege reciproca duplicata distantiæ, licet in majoribus distantiis, cum ea ad sensum congruat accuratissimè. Cum enim singularum particularum vires non debeant esse accuratè, sed tantum proximè in ratione reciproca duplicata distantiarum, fieri poterit, ut summa differentiarum conjuncta etiam cum discrimine arcus curvæ nondum in ea distantia satis accedentis ad arcum Hyperbolæ habentis ordinatas in ratione reciproca duplicata distantiarum, id efficiant, ut lex gravitatis inde orta recedat nonnihil a lege reciproca duplicata distantiarum, & recessus ipse non sit prorsus insensibilis. Eo pacto cum generali gravitate conciliari poterit discrimen etiam aliquod, quod forte inveniatur in Lunæ motibus, in præcessione æquinoctiorum, ubi ea problemata satis tuto, & accuratè soluta fuerint, ac multo magis in maris æstu,

& fi-

& figura telluris, ubi vis ad multo minorem distantiam agit.

48. Fieri poterit in hac compositione massarum ex hujusmodi particulis, ut innumeræ massæ ejusdem molis eundem situm occupent absque ulla vera compenetratione. Nam spatium continuum præbet locum massis infinities infinitis. Inde autem fit, ut una massa possit intra aliam irrumpere, & per eam transire sine ulla vera compenetratione; sine ulla mutatione partium utriuslibet respectiva. Cum enim ipsum spatium sit infinities majus quam punctorum summa; casus, in quo puncta aliqua sibi in binarum massarum congressu occurrerent, esset infinities difficilior casu, in quo nullus haberetur punctorum concursus; ac proinde casus prior nequaquam haberi posset; quod ipsum ex alio capite redderet veram corporum compenetrationem impossibilem. Sed & hanc penetrationem quandam physicam impedient vires particularum repulsivæ se ad aliquam etiam distantiam extendentes. At si particulæ fuerint tenuissimæ, ut summa virium evadat exigua, & celeri-

ritas sit magna; multo facilius una massa intra aliam irrumpet, & per eam transibit illæso ad sensum utriusque particularum statu. An non id ipsum observamus in radiis luminis liberè quaquaversum permeantibus, quin alii aliorum motum, aut partium dispositionem perturbent? An non iccirco oportuit tam immensam esse, atque incredibilem radiorum luminis tenuitatem, de qua inferius aliquid, & tam immanem celeritatem?

49. Hæc de natura corporum, & discrimine. Plura alia addi possent, quæ ad singularium phænomenorum explicationem pertinerent; sed hæc abunde sunt pro quodam specimine, & ex his ipsis alia plurima admodum facile deducuntur. At generales motuum leges æquè facile ex iisdem principiis derivantur, & sponte fluunt. Vis inertiæ massarum ex vi inertiæ punctorum manifesto consequitur. Consequitur etiam illud: Quantitatem motus in eandem plagam quancunque, habitis motibus, qui fiunt in plagam oppositam pro negativis, conservari in Mundo semper eandem. Nam motus omnes per vim inertiæ conservantur,

nisi

nisi quatenus aliis viribus immutentur. Vires autem omnes agunt in singula particularum binaria æqualiter in partes oppositas; ac proinde si singula binaria punctorum, cæteris interea manentibus, moverentur sola viribus illis, quibus se invicem vel attrahunt, vel repellunt; motus secundum quancunque directionem producti essent æquales motibus productis secundum oppositam; ac proinde his habitis pro negativis, summa omnium productorum evanesceret, & maneret summa prior. At si idem punctum simul urgeatur pluribus viribus, obsequendo omnibus simul, erit in fine tempusculi in eo puncto loci, in quo esset si habuisset motus singulis illis viribus respondentes alios post alios, descriptis successivè rectis eadem magnitudine, & directione, quam singulæ vires illæ seorsim agentes in eodem puncto requirunt; in quo stat ipsa motuum compositio. Igitur summa motuum qui oriuntur secundum quancunque directionem ex viribus omnibus simul agentibus, erit pariter æqualis summæ motuum secundum directionem

con-

contrariam, quibus elisis post actionem omnium virium manebit eadem quantitas motus secundum eandem directionem quancunque, quæ fuerat ante ejusmodi virium actiones. Quod cum singulis tempusculis contingat; patet debere conservari semper in Mundo eandem motuum summam acceptorum secundum directionem eandem ita, ut motus secundum directionem oppositam habeantur pro negativis, a mutuis particularum actionibus nihil turbatam.

50. Nec hujusmodi conservationem impediunt liberæ vires, quas anima exercet. Nam experientia constat; nos non posse in unam plagam exercere nisum, nisi tantundem in alteram exerceamus. Si mediocris nisus exercendus est; eum cum nostri corporis gravitate libramus, inflectendo corpus retrorsum, si quid ad nos adducimus; antrorsum si quid propellimus. Quod si nisus debeat esse major, quam ut pondus corporis satis ipsum æquilibrare possit, urgemus pedibus solum, vel parietem; unde constat vires etiam liberas animæ produ-

ducere in punctis materiæ motus semper contrarios, & æquales.

51. Sed & illud consequitur: statum centri gravitatis communis punctorum quotcunque, & quorumcunque non perturbari ab actionibus mutuis eorundem in se invicem, sed manere eundem, qui fuisset iis viribus non agentibus. Nam ex notione ipsa centri gravitatis communis illud patet, accepto plano quovis quod jaceat ultra omnia puncta, distantiam centri gravitatis ab eodem plano ductam in numerum punctorum æquari summæ distantiarum omnium punctorum ab eodem. Quare accessus centri communis gravitatis ad id planum ductus in numerum punctorum æquatur summæ accessuum punctorum omnium demptis omnibus recessibus; nimirum motus centri communis gravitatis secundum quancunque directionem ductus in eundem illum numerum æquatur summæ motuum omnium punctorum secundum directionem eandem. Ac proinde cum hæc summa motuum ex actionibus mutuis non mutetur, sed perseveret eadem, quæ fuisset, si eædem actiones nullæ fuis-

fuissent; nec motus centri gravitatis communis secundum eandem directionem quamcunque ductus in eum numerum mutabitur; ac proinde motus ipse manebit prorsus idem, qui prius in quacunque directione consideratus, qui motus si fuisset nullus sine mutuis actionibus, debebit pariter esse nullus cum iis. Quare status centri communis gravitatis non perturbabitur ab actionibus mutuis.

52. Hinc autem facile inferetur centrum commune gravitatis quotcunque punctorum, quocunque ordine dispositorum in quotcunque massas utcunque densas, & quibuscunque motibus agitatorum, & quibuscunque mutuis actionibus sollicitatorum, seclusis actionibus externis, debere semper perseverare in eodem statu quietis, vel motus uniformis in directum, in quo semel fuit. Nam ejus status non turbabitur ab actionibus mutuis, sed erit idem prorsus, qui esset si eædem nullæ haberentur. At eo casu puncta omnia vi inertiæ pergerent moveri in directum uniformiter, vel quiescerent. Si omnia quiescerent, quiesceret profecto & centrum gravita-

vitatis commune, ut patet: si vero moverentur aliqua aut omnia, & concipiatur planum quodcunque positum ultra omnia puncta; accessus & recessus singulorum punctorum ad id planum diversis temporibus facti essent ut ipsa tempora, quod facile eruitur ex singulorum motu uniformi. Quare & summa omnium accessuum, ac recessuum, & differentia utriusque summæ erunt in ratione temporum; Ac proinde etiam accessus centri gravitatis communis ad idem planum, qui ductus in numerum punctorum æquatur summæ accessuum demptis recessibus, erit in ratione temporum. Jam vero illud facile demonstratur, si punctum aliquod moveatur vel difformiter, vel in curva linea, debere accessus ipsius ad aliquod planum non esse in ratione temporum; & facilius directè geometrica demonstratione colligitur ( ), si punctum quoddam ita moveatur ut accessus ad tria plana quæcunque sint in ratione temporum, ejus motum debere esse rectilineum, & uniformem. Erit igitur rectilineus & uniformis motus centri communis gravitatis seclusis actioni-

bus

bus mutuis. Quare erit uniformis, & rectilineus etiam iis agentibus; ubi satis patet includi etiam casum, in quo velocitas motus sit nulla, sive centrum commune quiescat, in casu, in quo summa accessuum punctorum omnium ad quodlibet e tribus planis, demptis recessibus evanesceret, summa accessuum summæ recessuum æquali. Atque hæc est satis ut arbitror expedita, & generalis demonstratio corollarii quarti legum primi libri Principiorum Nevvtoni.

53. Inferetur pariter principium actionis, & reactionis æqualium. Nimirum quotiescunque binæ massæ in se agent utcunque; erunt binæ summæ actionum contrariæ, & æquales, & celeritas centri gravitatis unius acquisita secundum quancunque directionem ad celeritatem centri gravitatis alterius acquisitam secundum oppositam in ratione reciproca numeri punctorum easdem massas componentium, sive in ratione reciproca massarum ipsarum. Nam singula puncta primæ massæ tantum movebuntur secundum quamcunque directionem ob actionem singulorum punctorum

se-

secundæ, quantum eadem puncta secundæ movebuntur ob actionem primæ, quod prorsus ut num. 46, verum erit, tam si considerentur singulæ vires seorsim agentes in bina quævis puncta, quam si habeatur ratio motus in singulis punctis compositi a motu requisito ab actionibus omnibus omnium punctorum alterius massæ. Hinc summa omnium motuum secundum directionem quancunque genitorum in una massa, erit æqualis summæ omnium genitorum in altera secundum oppositam. Quare & motus centri gravitatis primæ massæ secundum quancunque directionem genitus ab actionibus punctorum massæ secundæ ductus in numerum punctorum massæ primæ æquabitur motui centri gravitatis massæ secundæ secundum directionem oppositam, genito ab actionibus punctorum massæ primæ ducto in numerum punctorum massæ secundæ. Erit igitur primi centri motus ad motum secundi, nimirum illius celeritas ad celeritatem hujus, ut numerus punctorum secundæ massæ ad numerum punctorum primæ, sive ut ipsa secunda massa ad primam. Nec

has

has celeritates centrorum gravitatis impedient quidquam actiones, quas particulæ ejusdem massæ exercebunt interea in se invicem.

54. Ex hoc autem principio leges collisionis corporum in mutuo congressu perquam facile deducuntur, quod & Hugenius, & Vallisius præstiterunt, quas & ego in eadem illa dissertatione de Viribus Vivis methodo admodum expedita inde deduxi. Quin & illud mihi omnino persuasum est, ex iisdem principiis facile demonstrari, nullam esse in Natura virium vivarum necessitatem, nullum earum vestigium, phænomenis omnibus pendentibus a solis punctorum motibus, & motibus ipsis ab actionibus illarum virium attractivarum, ac repulsivarum producentibus in singulis punctis velocitates proportionales sibi, & tempori, per quod agunt.

55. Ex hisce omnibus manifesto colligitur, posse ex punctis prorsus indivisibilibus, &, si libet, prorsus homogeneis sine ulla reali quantitate continua componi particulas materiæ mobiles, duras, & status respectivi, seu figuræ tenacissimas, impene-

netrabiles, extensas in longum latum, & profundum præditas viribus admodum diversis, quibus in se mutuo agant, simillimas particulis materiæ ab aliis receptis, ex quibus particulis componi possint massæ nostris corporibus similes, & simillimis prorsus proprietatibus præditæ ita, ut admodum facile ex earum constitutione deducantur, quæcunque pertinent ad Physicam generalem, & multa ex iis, quæ pertinent ad particularem, quibus addi possent quamplurimi ex effectibus Chymicis expositi per vires admodum similes a Nevvtono ultima quæstione Opticæ, unde huc transferri possent, & transcribi integræ paginæ, quæ æque ad rem facerent. Quamobrem illud manifesto colligitur fieri posse, ut eo ipso pacto hæc nostra corpora componantur.

56. Nec huic corporum compositioni ex punctis indivisibilibus quidquam oberunt argumenta Geometrica, quæ spatii divisibilitatem in infinitum demonstrant. Nam inter ejusmodi puncta spatium semper interjacebit aliquod, & divisibilitas, incommensurabilitas, atque alia ejusmodi

in punctorum intervallis habebunt locum, quæ continuam quantitatem habere concipimus, non vero in hisce punctis, quæ solos intervallorum terminos, ac sola puncta mathematica spatii occupabunt.

57. Nec vero illud opponi poterit: omnem hoc pacto Geometriam de medio sublatum iri, sublata vera, & reali continua quantitate. Nam & illud reponi potest manere extensionem continuam spatii, circa quam unam Geometria exerceatur, quomodocunque natura spatii in Metaphysica exponenda sit, quod est omnibus commune: & illud potius, punctorum motus continuos referre lineas continuas, quarum deinde motus suppeditent ideam superficierum; & harum motus ideam solidi, geometricis speculationibus aptissima.

58. At nec illud oberit, quod oculis videamur videre, & attrectare manibus corporum superficies continuas. Nimis vulgare est id prejudicium, & Philosopho prorsus indignum. Satis jam constat texturam corporum ita quaquaversus interruptam esse, ut in minoribus crassitu-

di-

dinibus lamellarum, ex quibus eadem componuntur, lux quaquaversus libere permeet. Minima autem intervalla sub sensus nostros nequaquam cadunt, quę iccirco nulla esse, quod nulla videantur, affirmare omnino non possumus, nisi plus ęquo vulgaribus pręjudiciis indulgeamus.

59. Nec illud majorem vim habet, quod in ipsa corporum idea videatur inclusa idea extensionis continuę. Unde ejusmodi idea ortum duxerit, superius satis declaravi. Non eam nobis Natura ingeneravit, sed nosmetipsi eam ex ipsa infantia continua sensuum nostrorum applicatione, & animi reflexione minus cautâ paulatim efformavimus: nec ipsa quantitatis continuæ corporum idea alium ortum habuit; nisi corporum observationem sensibili intervallorum interruptione carentium. Cum constet easdem prorsus impressiones in nostris sensibus debere fieri, sive sensorio imprimatur motus a particulis continua extensione præditis, & ipsum contingentibus, ac impenetrabilitatis effectum in contactu ipso prodentibus, sive a particulis constan-

tibus ex punctis indivisibilibus delatis ad limitem aliquem adhęsionis firmissimæ, vi cujus continuari motus non possit, nisi particula altera loco cedat; evidens profecto est, ideam illam non ab ipsa natura corporum pendere, nec eam nobis repręsentare, sed e prejudiciis ortum ducere inconsulto conceptis, & recta ratiocinandi meth do corrigendis.

60. Sed nec illud demum vim ullam habet; quod nimirum nulla videatur apparere ratio, quâ ejusmodi vires in distantia particularum exerceri possint, nec ulla earum causa physica, & mechanica; quod a Cartesianis potissimum objici solet, nullam motus communicationem agnoscentibus, nisi quæ fiat per impulsionem. Nam in primis illud peto: ubi particula solida, & continua in aliam solidam, & continuam incurrit, qua ratione, quam ob causam communicatur motus illi particulæ? Dicent sane impenetrabilitatem in causa esse, quæ impediat motum particulæ incurrentis, altera non summota. At impenetrabilitas ipsa in quo consistit? Quæ ejus causa est? Nihil

sanè

ſanè reponi poterit, niſi eam eſſe naturam corporum, vel liberam Dei legem, vel quidpiam, quod eodem demum recidat. Niſi enim demum vel ad rerum naturas, vel ad liberam Conditoris legem recurratur; aut in aſſignandis cauſarum cauſis, & rationum rationibus in infinitum procederetur, aut ille committeretur, quem circulum vitioſum vocant. Natura igitur corporum, vel libera Conditoris lex id requirit, ut corpora eundem locum non occupent, ſed, ubi ad contactum venerint, alterum alteri loco cedat. At id ipſum æquè pro hiſce viribus attractivis, & repulſivis reſponderi poterit æquo jure. Natura punctorum, vel libera Dei lex id requirit, ut puncta ipſa ad ſe invicem accedant, vel a ſe invicem recedant, prout fuerint in diverſis diſtantiis, juxta legem expoſitam ab ordinatis ad datam curvam in ſe ipſa ſimpliciſſimam. Nhil eſt ſane in ipſa rerum natura, quod ſuadeat, illum agendi modum, huic alteri præferri oportere, nec aut natura corporum, aut libera Conditoris lex oſtendi poteſt determinata ad praescribendum potius illud primum, quam hoc secundum.

61. Sed alia est responsio adhuc multo validior. Ostendit Nevvtonus in loco, quem supra adduximus, validissimis argumentis haberi in pluribus casibus motuum genesim per vires attrahentes, vel repellentes agentes etiam sine contactu, & in distantia particularum a se invicem; quod quidem, qui omnes luminis proprietates in ejus Optica diligenter consideraverit, agnoscet in particulis ipsius luminis evidentissime. Id ipsum pluribus aliis exemplis satis facile comprobatur. Ut cetera omittam, consideretur ingens ille particularum motus, qui oritur in corporibus expositis foco speculi ustorii. Omnis ille motus nequaquam oritur ab impactu luminis in eam substantiam, quae ita agitatur, sed a viribus, quibus illae particulae in se invicem agunt, quae vires se produnt particulis ipsis levissima radiorum actione ex aequilibrio quodam, & virium limite deturbatis, mutata nonnihil earum positione ad se invicem, atque distantia. Id manifesto colligi-

tur

tur ex eo, quod centrum gravitatis massæ agitatæ nequaquam promovetur secundum eam directionem, secundum quam radii incurrunt, saltem ad sensum; sed tota massa perseverat in eodem loco, dum tantus sit particularum intestinus motus. Porro ex actione & reactione æqualibus illud demonstratur, quod & hic paulo supra vidimus, statum centri gravitatis communis non mutari in eo tantum casu in quo particulæ agunt viribus mutuis in se invicem: at si agens extrinsecum agat, mutari ita, ut celeritas centri gravitatis corporis incurrentis ab eo amissa sit ad celeritatem acquisitam a centro gravitatis ejus, in quod incurrit in ratione reciproca massarum eorundem corporum.

62. Constat igitur vires hujusmodi in natura esse; quæ sine impulsu agant, & statum corporum mutent. Ipsi, qui vel maximè affirmant unicum modum communicandi motus, naturæ, & rationi conformem esse eum, qui fit per impulsionem in contactu, ostendant, velim, vel unicum casum, in quo constare omnino pos-

sit ita revera motum communicari. Nullum profecto invenient; quod & ipsi, si præjudicia paullisper seponant, omnino agnoscent. Nam nec ex natura corporum id poterunt demonstrare, cum ea solum per sensus innotescant, nec ex phænomenis derivare; quæ prorsus eodem modo apparent nobis, sive ad contactum deveniatur, sive vis quædam repellens in minimis distantiis agat. Ex eo autem quod ad duo opposita indifferenter se habet, & ab utrolibet æquè provenire potest, alterum determinatè inferre, hominis est rectam ratiocinandi methodum, & prima ipsa Logicæ etiam naturalis principia penitus ignorantis. At ego paulo inferius satis recta, ni fallor, & satis firma ratiocinatione illud evincam, non solum aliquando, sed etiam semper communicationem motuum fieri sine impulsu, sine contactu per vires ejus generis, quas hic exposui, agentes etiam in aliqua distantia corporum. Sed me ad secundam propositionem meam paulatim delatum video, quam comprobandam jam aggredior.

63.

63. Interea tamen quæcunque huc usque dicta sunt, satis evincunt, ni fallor, primam illam propositionem, qua affirmaveram: *Nullo prorsus argumento evinci, materiam habere extensionem continuam, & non potius constare e punctis prorsus indivisibilibus a se per aliquod intervallum distantibus; nec ullam rationem seclusis præjudiciis suadere extensionem ipsam continuam potius, quam compositionem e punctis prorsus indivisibilibus, inextensis, & nullum extensum continuum constituentibus*. Sit hæc quam proposuimus corporum compositio pura hypothesis; eum sane habebit usum, ut evincat, extensionem continuam materiæ, quam huc usque passim omnes Philosophi habuerunt pro certissima, & censuerunt esse proprietatem ab ipsa essentia, & natura corporum requisitam, atque ipsis ingenitam, æquè puram hypothesim esse, & ex præpropero tantum præjudicio genitam, atque in animis nostris efformatam.

64. At quid si ea, quam huc usque tanquam hypothesim pure arbitrariam pertractavimus *sua habeat ar-*

argumenta, & satis valida, quæ hanc compositionem e punctis indivisibilibus evincant extensioni ipsi continuæ præferri omnino oportere? Ea erat altera ex meis propositionibus, in qua exponenda, & confirmanda, ne dissertatio excrescat plus æquo, me quantum licebit expediam.

65. Præcipuum argumentum, quod mihi hanc ipsam materiæ constitutionem ferè omnino persuasit, est illud, quod me in eadem dissertatione de Viribus Vivis ad huic affinem, & cum hac ipsa necessario connexam adduxit sententiam; nimirum omnem motuum communicationem fieri sine eo contactu corporum, qui omne penitus intervallum excludat, quem ibidem mathematicum contactum appellavi; ac nulla unquam corpora, nullas corporum partes se mutuo contingere contactu hoc mathematico, quod intervallum omne prorsus excludat.

66. Argumenti vis omnis petita est a principio, & a multis accepto, & per inductionem, quantum licet, amplissimam confirmato: In Natura nihil fieri per saltum, sed quæcun-

que

que aut crescendo, aut decrescendo ab una magnitudine ad aliam deveniunt, per omnes intermedias necessario transire (*a*). Hæc autem duo mihi videor sine ullo erroris periculo affirmare posse tanquam omnino certa: Amplissimam esse inductionem illam, qua id principium colligitur, quod ubicunque ejus veritatem experiri licet, ubique verum deprehenditur,

(a) *Quod pertinet ad primam e sequentibus propositionibus, nimirum nihil fieri per saltum in Natura, uberius persecutus sum, uti supra innui in dissertatione de Lege Continuitatis, ubi id principium non ex sola tantummodo inductione, sed etiam ex metaphysicis, & meo quidem judicio firmissimis argumentis deduxi. De ipso autem inductionis principio accuratius aliquanto ego in Stayanis supplementis integro articulo, ubi habentur multa, per quæ ad plures hoc in genere difficultates meæ theoriæ objectas abunde satisfit.*

tur, quin ullum poſſit exemplum proferri, in quo deficiat: tum admiſſo hoc principio ita demonſtrari ſententiam hanc meam contactum omnem mathematicum corporum penitus excludentem, ut nihil præterea ad evidentiſſimæ demonſtrationis vim requiratur.

67. Atque ut ab illo priore exordiar; patet profecto in omni motu nunquam a puncto ad punctum diſtans deveniri poſſe niſi motu ad ſenſum ſaltem continuo per intermedia transeatur, ut & ab uno tempore ad aliud diſtans devenimus ſine ſaltu. Continuitatem, quam in materiæ extenſione nequaquam admitto, admitto in motu puncti continuo translati per lineam quandam tam loci, quam temporis. Ea certe cum experimentis, quantum obſervare licet, conſentit, & nihil eſt quod oppoſitum ſuadeat, vel in oppoſiti ſuſpicionem inducat. Hinc ea omnia, quorum magnitudo augetur locali motu, ab una magnitudine ad aliam tranſeunt per intermedias ſine ſaltu. Hujuſmodi ſunt inter cætera ſanè innumera plantæ omnes, quæ ex. gr. ab unius palmi

al-

altitudine ad altitudinem palmorum 10. nequaquam deveniunt; quin intermedias omnes saltem ad sensum habuerint. Idem in Geometria in locorum geometricorum functionibus quibuscunque contingit.

68 Hinc autem etiam in velocitatis productione in Mechanica consequitur illud: nullum mobile ab uno aliquo velocitatis gradu transire ad quietem vel ad majorem velocitatem, nisi per omnes intermedias velocitates transeundo. Et ea est ipsa ratio, qua plerique jam Mechanici e Natura tollunt corpora, quæ dicuntur dura, quæ nimirum figuram ne minimum quidem mutare possint: quorum bina æqualia si sibi mutuo directè occurrerent æqualibus oppositis velocitatibus, velocitates ipsas eodem illo momento temporis, quo se contingerent, deberent totas amittere, & per saltum ad quietem reduci: ac substituunt duris corporibus elastica vel mollia, in quibus dum partes ex impressione introcedunt, velocitas ipsorum corporum mutetur per omnes intermedios gradus paullatim.

69. At ejusmodi substitutio difficultatem nequaquam evitat. Primæ illæ, si quæ sunt, partes prorsus solidæ, & prorsus continuæ, vel primæ illæ superficies, vel prima illa puncta in quibus contactus fit, ex quo contactu impenetrabilitatis actio incipit, debent omnino eodem momento temporis totam velocitatem amittere, vel si alteri quid velocitatis reliquum sit, debet alterum retro regredi; cum utrunque simul sine compenetratione partium corporis progredi porro omnino non possit. Habebitur igitur saltus ab una aliqua finita celeritate earum partium, vel superficierum, vel punctorum ad quietem sine transitu per intermedias, quod ea lege naturæ supposita est absurdum. Id autem in omni collisione corporum eveniret. Semper binæ illæ velocitates punctorum se primo contingentium utcunque inæquales momento temporis in ipso contactu reduci omnino deberent ad eandem velocitatem magna sui parte amissa, vel etiam in contrariam versa; quod & consideranti satis patebit, & vero etiam ex impe-

ne-

netrabilitatis lege demonstrari facile potest. Et vero si congressus corporum etiam sit obliquus, facile demonstratur in ipso primo contactu debere mutari per saltum tam velocitatem, quam directionem motus vel alterius puncti contingentis, vel potius utriusque.

70. Non igitur illa bina corpora ad contactum deveniunt cum iisdem velocitatibus, quas ante contactum habuerant. Sed primæ eorum particulæ ita paulatim velocitates suas ante contactum immutant, ut earum differentia omnis vel ante contactum, vel saltem in ipso contactu penitus evanescat. Ea causa, quæcunque demum illa sit, quæ ejusmodi velocitatum mutationem parit, dicetur vis repulsiva, quæ nimirum in utraque particula producet velocitates contrarias ex lege actionis, & reactionis æqualium, quibus velocitas respectiva accedendi ad se invicem perpetuo minuatur.

71. At velocitatem hanc respectivam ante contactum debere extingui totam, & vim repulsivam in infini-

finitum augeri imminuta distantia sic demonstratur. In casu captu facillimo binorum corporum æqualium sibi invicem occurrentium cum velocitatibus oppositis æqualibus ponamus totam utriusque datam quandam velocitatem extingui in ipso contactu. Si in se mutuo impellantur cum velocitate adhuc majore; oportebit ad contactum deveniant antequam totas velocitates amittant. Vis enim illa repulsiva, quæ in primo casu omnem velocitatem extinxerat usque ad ipsum contactum; minorem jam effectum pariet in corporibus velocius motis, ob temporis brevitatem majorem. Residuæ igitur velocitates in ipso contactu extinguentur per saltum. Ne id contingat, oportebit in priore casu velocitatem illam extinctam fuisse ante contactum, ut nunc hæc tota in ulteriore accessu extingui possit per gradus. Cumque idem sit discursus pro quavis data velocitate utcunque magna, cum qua ad se invicem accedant; oportebit vis repulsiva sit ejusmodi, ut cuicunque datæ velocitati ante contactum extintinguendæ par ſit; ac proinde ut imminutis in infinitum diſtantiis augeatur in infinitum.

72. Jam verò in majoribus diſtantiis deprehendimus per experimenta attractionem mutuam, quam ea omnia argumenta probant, quæ probant Nevvtonianam gravitatem generalem. Igitur eſt quædam diſtantia, in quâ a vi repulſiva tranſitur ad attractivam, & ibi quidem erit unus ex iis, quos ſupra dixi limites adhæſionis. Qui verò tam multos, & tam varios particularum motus ſive accedendi ad ſe invicem, ſive recedendi, qui ſe in Chymicis effectibus potiſſimum produnt, altius perpenderit; agnoſcet ſanè & plures ejuſmodi tranſitus a viribus repulſivis ad attractivas, vel viceverſa, ſive plures limites reſpondentes pluribus interſectionibus curvæ exprimentis vires ipſas cum axe exprimente diſtantias. At vel ex iis tantum, quæ diximus, patet, nos a naturæ phænomenis, & legibus vulgo receptis legitimâ ratiocinatione deduci ad ideam attractionis, & repulſionis exercitæ in ſpatio vacuo ſine ullo inter-

medio corpore, ad ideam repulsionis crescentis in infinitum, ubi distantiæ in infinitum decrescunt, & attractionis in majoribus distantiis, ac proinde ad ideam transitus ab una ad aliam pro diversa distantia, nimirum ad ideam limitum; ac proinde ad omnem illam ideam virium, quas supra tanquam puram hypothesim contemplabamur.

73. Verùm præterea devenimus etiam ad exclusionem omnem contactus perfecti, quem supra mathematicum contactum nominavi. Nam ne a consueto loquendi more recedam, dico contactum physicum eam partium corporis viciniam, ejusmodi ut distantia sub sensus non cadat, & vis repulsiva sit major, quam ut ulla humana vi vinci possit; cui quidem nimirum uni per sensus cognito nomen contactus impositum est ab hominibus linguarum institutoribus, haud illis quidem Philosophis, vel saltem tum cum primum ejusmodi voces instituerent, nequaquam philosophantibus. Et hunc ipsum contactum physicum formidaremus in baculo (nam & illud per jocum objici so-

let ab iis, qui baculo ipso utendum ajunt, & ejus ope capiendum experimentum, ut innotescat, an verus haberi possit contactus corporum.) Eo enim accedente ad cutem, & jam ultra validos quosdam adhæsionis limites transgresso, ubi repulsiva vis agat satis magna, communicari deberet motus cuti, & reliquis fibris, ex quo iidem prorsus in iis orirentur motus, qui oriuntur in communi sententia ex contactu, & impenetrabilitate, iidem motus propagari ad cerebrum, eædem ideæ excitari in anima, atque idem sentiri dolor. Cæterum si in hoc physico contactu sic exposito nullus adesset motus; timorem omnem prorsus abjicerem: nam contactum illum mathematicum, si hæc sententia vera sit, formidare non possum.

74. Porro ex iis, quæ dicta sunt, liquet, adhæsionem hanc inter particulas, e quibus jam alia corpora coalescunt, jam alia; non posse in alio consistere, nisi in ejusmodi limite attractionis, & repulsionis nimirum sine contactu. Hinc autem insistendo eidem analogiæ, credendum

est potiùs, & adhæsionem illam, qua ex particulis minoribus majores coalescunt, ejusdem rationis esse; atque per omnes particularum ordines procedendo, nullum aliud esse adhæsionis genus; ac proinde nullas esse materiæ partes, quæ se contingant, adeoque nullum continuum physicum; sed materiæ particulas primi ordinis constare ex punctis prorsus indivisibilibus, & collocatis in limitibus adhæsionis tenacissimis. Nam si particulæ aliquæ essent planè solidæ, & adhuc earum partes adhærerent tenacissimè, hæ utique non haberent vim repulsivam illam crescentem in infinitum, dum decrescunt distantiæ, quam, si semel separarentur, deberent statim acquirere, ne, dum iterum in se mutuo incurrerent, haberetur saltus.

75. Hoc demum pacto ad totam devenitur eam Mundi compositionem non jam hypothesim fictitiam, & arbitrariam, sed recta ratiocinatione collectam ex Naturæ phænomenis, & principiis amplissima inductione deductis. Hæc nimirum est analysis, qua ad eam synthesim devenitur, quam

ana-

analysim in illa ipsa dissertatione praemisi, ubi & eandem propugnavi, & ejusdem applicationem ad Physicae partes nonnullas produxi: atque hoc ipsum tollendae quantitatis continuae consilium, ejusque utilitates paucis indicavi.

76. Atque hoc quidem pacto mirum quam simplex, quam sibi ubique constans evadit Natura, quam clara, atque distincta Universi compages haec, atque structura. Ab unico nimirum principio, eoque admodum simplici, admodum analogo iis, quae in Natura cernimus, & extensio corporum, & impenetrabilitas, & durities partium minimarum, ex qua pendet Mundi perennitas, & earundem vires tam variae, ac nexus minus arcti, ex quibus pendet haec tanta tot corporum vicissitudo, ea omnia, quae ad Physicam Generalem pertinet, discrimen inter corpora elastica, & mollia, inter fluida, & solida, gravitas generalis, communicandorum motuum leges, Mechanica omnis, & alia fere innumera aequè feliciter derivantur. Haec autem simplicitas, & analogia Naturae

 sibi

sibi constantis quantam addat huic jam non arbitrariæ hypothesi, sed satis confirmatæ sententiæ vim, atque robur, nemo non videt.

77. At quanto in lucro illud etiam ponendum est, quod hæc ipsa sententia nos expedit a difficultatibus omnibus, quæ circa continui compositionem excitatæ sunt; quæ quidem tamdiu summorum etiam virorum tantopere torserunt ingenia? Ex continua quantitate, divisibilitatem in infinitum quantitatis ipsius evidenter consequi nemo sane, nisi in Geometria satis hospes ille quidem, ac peregrinus, non videt. At si ex quantitatis continuæ divisibilitate ad realem materiæ divisibilitate faciamus gradum, multa quidem superesunt aut absurda, aut certè humanæ menti prorsus impervia. Equidem scio multa ipsi objecta esse ab hominibus Geometriæ, & calculatoriæ artis imperitissimis & futilia, & absurda. At sunt quædam in quibus hæremus adhuc; inter quæ illud mea quidem sententia potissimum, quod licet dicamus, divisiones omnes non nisi alias post alias fieri posse, & pro-

in-

inde ultimam nullam esse, & partes actu a se invicem separatas, ac sibi mutuo succedentes esse semper numero finitas; adhuc tamen cum distinctio partium quoad se, ut ajunt, a divisione actuali non pendeat; illud profecto videtur evidens, partes a se invicem distinctas, & se longo ordine excipientes actu ibi esse numero infinitas; qua in re quî fieri possit, ut nullæ ex iis, quarum aliæ ab aliis actu sejunctæ sunt natura sua, sint ordinis postremi, nulla ultima, & extremo limiti proxima, nemo sane, nisi qui sibi ipsi vim inferat, satis intelligat. Si vero aliquæ extremæ sint, vel etiam tantum infinitesimæ, sed in se determinatæ ita, ut earum sibi invicem succedentium series quædam habeatur inter binos terminos numerum omnem finitum excedens; rem statim ad absurdum deduci arbitror methodo, quam in dissertatione de natura, & usu infinitorum, & infinitè parvorum jam olim adhibui (a), in

[a] *Eadem methodus, & demonstratio habetur etiam in dissertatione de Lege Continuitatis.*

in qua & infinitum absolutum in extensione repugnare omnino aut demonstravi simplicissima & expeditissima demonstratione, aut mihi certe demonstrare sum visus.

78 At hæc punctorum indivisibilium theoria nos ab hisce omnibus difficultatibus penitus eximit, ac omnem removet actualis infiniti necessitatem. Intervallum inter bina quælibet puncta dividi poterit in infinitum hoc pacto, quod nimirum inter ea interseri poterunt quotlibuerit alia puncta, quæ tamen semper una cum suis intervallis erunt numero finita, & aliis absque ullo termino interserendis locum relinquent. Hoc pacto numerum intervallorum, ac punctorum finitum semper habebimus, augendum quidem, quantum libuerit, ita tamen, ut nullum actualis finiti limitem unquam excedat, & Infinitum sive in extensione, sive in numero in se nullum erit, sed in nostra mente tantummodo, quæ abstrahendo a limite magnitudinum, ipsa sibi ideam Infiniti, seu potius Indefiniti confinget. Et ipsa hæc Indefiniti idea hoc modo conficta, claris-

rissima illa quidem & distinctissima, abunde erit pro recentissimis etiam methodis omnibus Infinitorum; quod ajo, haud difficulter demonstrari posse. Cum contra Infinito actuali admisso, plurima sese ubique objiciant, plurima deducantur ita omnem humanæ mentis rationem excedentia, ut vel prorsus absurda sint, vel absurdis mirum in modum affinia, cujus rei specimen aliquod brevi, ut spero, exhibebo [a]. Spatii autem inanis partes reales actu nullæ erunt, sed in sola illa possibilitate interserendorum punctorum consistent.

79. Quæ huc usque exposui, præcipua sunt ex argumentis meo quidem judicio satis validis, quibus evincitur, hanc materiæ compositionem e punctis indivisibilibus extensioni continuæ præferri oportere. At sunt

---

[a] *Exhibui & in dissertatione de lege continuitatis, & uberius in dissertatione de continuitate locorum geometricorum adnexa meis conicarum sectionum elementis Elementorum tomo tertio.*

sunt & alia quædam, quæ sententiam ipsam non parum confirment. Illud in primis, quod aliis quidem nullius momenti videbitur, apud me autem vim habet suam nec ita exiguam. Si partes corporum primæ sint continuæ, & inter eas intersit vacuum, habetur saltus quidam infinitus; nimirum post extensionem continuam realem, quæ infinitæ densitati æquivalet, statim transitur per infinitum saltum ad extensionem realem nullam, sive ad spatium vacuum, nimirum ad densitatem nullam sive raritatem infinitam. Hujusmodi saltus non habetur, si puncta prorsus indivisibilia adhibeantur, in quibus cum nullum continuum sit, nullum per saltum abrumpitur.

80. Accedit quod in communi sententia de extensione continua particularum corporis nullus habetur limes dati corporis rarefaciendi, cum possit eadem massa diffundi per spatium utcunque magnum in eo casu, & quidem ita, ut pori singuli sint utcunque parvi, ut passim demonstratur a Physicis. At condensationis est quidam necessarius finis, ultra quem

pro-

progredi non liceat; cum nimirum particulæ omnes ad contactum devenerint: cumque ſpatia utcunque magna occupari poſſint a data maſſa; ſpatia utcunque parva non poſſunt eandem continere; ſed certa magnitudo eſt, infra quam molem ejusdem maſſæ minuere nequaquam licet. At contra in hac punctorum indiviſibilium ſententia moles corporis & augeri poteſt, & minui in quacunque ratione data, ſervatâ ratione eadem inter diſtantias punctorum ſingulorum. Quin immo ſi manentibus ordinatis curvæ exprimentis vires, mutentur abſciſſæ in quavis ratione data; mutatis in eadem ratione data diſtantiis punctorum conſtituentium quancunque maſſam poſitam in æquilibrio, maſſa ipſa adhuc in æquilibrio manebit.

81. Eſt & illud præterea: licet Carteſiani nullum motum cenſeant generari, vel immutari, niſi per impulſionem; tamen Nevvtoniani ſatis validis rationibus, ut ſupra vidimus, & paullo etiam inferius innuam, evincunt, exiſtere quasdam in Natura vires activas, quibus corporum parti-

culæ in se invicem agant (*a*) etiam in aliqua distantia sine contactu, & im-

[a] *Porro ea non erit necessario actio physica, quam materia in distantem materiam exerceat, ut rejici debeat ex principio non admittendæ actionis in distans. Poterit esse actio tantummodo determinativa ita, ut binæ particulæ materiæ habeant determinationem accedendi ad se invicem, vel recedendi a se invicem, & singulæ in se agant ita, ut illa altera determinet tantummodo directionem, & magnitudinem ejus actionis, quam altera in se exercet. Poterit etiam esse actio tantummodo occasionalis. Ut nimirum præsentia, & contactus unius corporis advenientis cum una quadam velocitate ad corpus aliud est per Cartesianos aliosque, qui occasionalium causarum theoriam sequuntur occasio, qua posita, Deus motum in illo altero corpore progignit; ita quædam determinata distantia potest itidem esse ejus-*

impulſu. At iidem impulſum quoque admittunt particularum corporis in corporum colliſione, & contactum particularum. Multo profecto ſimplicior, & magis ſibi conſtans evadit agendi modus a Natura adhibitus in mea ſententia, in qua non alibi alio, ſed ubique eodem modo communicatur motus, & actiones virium ſunt ſemper ſibi ipſis ſimiles, & conformes.

82. Atque hic quidem, quoniam Nevvtonianæ ſententiæ mentio injecta eſt, libet univerſam Naturæ œconomiam ab eo indicatam poſtrema quæſtione Opticæ in ipſo fine immortalis ejus operis, paucis indicare, & hanc meam ſententiam cum eadem, ut initio promiſi, comparare. Summa ejus doctrinæ hæc eſt. In primis exemplo Attractionis, Gravitatis, Vir-

---

ejuſmodi occaſio producendi acceſſum, & alia quædam receſſum; neque enim difficilius eſt determinatam quandam diſtantiam aſſumere pro occaſione, quam diſtantiam nullam.

Virtutis Magneticæ, & Electricæ, probat alias etiam adhuc esse posse vires attrahentes, virtutes, seu potentias, quibus exiguæ corporum particulæ per interpositum intervallum agant mutuo in se ipsæ ad producenda pleraque phænomena Naturæ, quæ tam angustis finibus contineantur, ut usque adhuc omnem observationem fugerint, dum Attractionis, Gravitatis, Virtutisque Magneticæ, & Electricæ, quæ se extendunt ad satis magna intervalla, etiam sub vulgi sensum, notitiamque ceciderunt. Has vires existere probat fusè per 12. paginas exemplis effectuum chymicorum, quorum ingentem copiam refert, & explicat per hujusmodi vires.

83. Tum ex adhæsione corporum deducit *particulas ipsorum attrahere se invicem vi aliqua, quæ in ipso contactu perquam sit magna, parvis interjectis intervallis chymicos illos effectus supra memoratos obtineat, ad spatia autem a particulis aliquanto remotiora (quod quidem sensu percipi possit) non omnino pertineat*. Deinde docet duritiem pro universæ ma-

te-

teriæ simplicis proprietate haberi posse: Duritiem particularum simplicium multo majorem debere esse, quam corporum ex iis efformatorum, quia particulæ corpus efformantes se invicem nonnisi in perpaucis punctis possint contingere, dum partes ipsarum particularum simplicium, occultos meatus in se nullos habentium se inter se contingant in totis superficiebus suis sine ullis meatibus aut intervallis interjectis, quæ earum adhærentiam minus firmam reddere possint, ortam nimirum ex attractione in contactu multo majore, quam in minimis etiam intervallis.

84. Hisce particulis ita constitutis exponit seriem, qua particulæ majores diversorum ordinum minus firmæ oriantur a particulis firmioribus ordinum inferiorum, ait enim *Jam quidem fieri potest, ut materiæ particulæ exiguissimæ attractionibus fortissimis inter se cohæreant, constituantque particulas majusculas, quarum vis illa attrahens debilior sit, harumque particularum majuscularum permultæ inter se itidem cohærentes particulas majores constituant, quarum*

rum vis attrahens adhuc sit debilior, & sic deinceps continuata serie, donec ad maximas tandem deventum sit particularum illarum, e quibus operationes chymicæ, & colores corporum naturalium pendent, quæque inter se cohærentes corpus durum constituant magnitudine sub sensum cadente. Quorum denique corporum si quod sit compactum, flectatque se & cum prematur introcedat sine ullo partium suarum sublapsu, jam id corpus durum est, & elasticum, revertens ad figuram suam vi ea, quæ ex mutua partium suarum attractione oritur. Si partes ejus inter se sublabuntur, jam corpus id molle est, & mallei ictibus cedens. Si partes facillimè labantur & magnitudine sint ea, qua facile calore agitari queant, calorque satis magnus sit ad eas agitandas; (licet multo fortasse minor, quam ad id opus est ne aqua congeletur) jam corpus illud fluidum est: Et si adhærescendo aptum sit, appellatur humidum. Guttæ autem corporis cujusque fluidi, ut figuram globosam induere conentur, facit mutua partium suarum attractio, eodem modo, quo Terræ, Mariaque in *in rotunditatem undique conglobantur partium suarum attractione mutua, quæ est gravitas.*

85. His autem hoc pacto per attractionem explicatis, habet illa, quæ supra exposui num. 14. de attractione ad parvas distantias pertinente, quæ distantiis auctis in repulsionem abeat comprobatam inflexionibus, & reflexionibus lucis, emissione luminis, productione aeris, & vaporum, quibus addit muscas in aqua inambulantes, nec tamen pedes suos madefacientes, & vitra telescopiorum, pulveres siccos, marmora perpolita, quæ licet ad se invicem appressa usque ad contactum fortissimè adhæreant, ægrè tamen tam arctè comprimi, tamque aptè conjungi queant, ut cohærescant.

86. Tum sic pergit. *Atque hæc quidem omnia si ita sint; jam natura universa valde erit simplex, & consimilis sui: perficiens nimirum magnos omnes corporum cælestium motus attractione gravitatis, quæ est mutua inter corpora illa omnia, & minores fere omnes particularum suarum motus alia aliqua vi attrahente & repellente,*

te, quæ est inter particulas illas mutua. Hinc illud probat vim inertiæ nec esse satis ad producendum, nec ad conservandum motum, sed alia olim ad producendum principia, alia nunc ad conservandum requiri, Natura semper in eam partem potius vergente, ut pereat motus, quam ut nascatur, ac impenetrabilitate illud tantum efficiente, ut motus sistatur, vorticibus motum suum perpetuo minuentibus, & citius pereuntibus, si ex materia tenaci constent, ac si tenacitas nulla sit, adhuc mutuo partium incursu de motu suo perpetuo aliquid deperdentibus. *Quoniam igitur, inquit, varii illi motus, qui in Mundo conspiciuntur, perpetuo decrescunt universi; necesse est prorsus, quo ii conservari, & recrescere possint, ut ad actuosa aliqua principia recurramus; qualia utique sunt* Gravitatis causa, *qua Planetæ, & Cometæ motus suos in perpetuis orbibus conservant, corporaque omnia motum magnum sibi acquirunt cadendo,* & fermentationis causa, *qua cor & sanguis animalium motu, & calore perpetuo confoventur, partes interiores*

res

res terræ perpetuo calefiunt, corpora permulta ardent, & lucent, montes ignem concipiunt, cavernæ Telluris ictibus subitis disjiciuntur, & Sol ipse perpetuum vehementer candet, & luce sua omnia calefacit, ac fovet. Nam admodum paullum motus in Mundo invenimus, præterquamquod vel ex his Principiis actuosis, vel ex imperio Voluntatis manifesto oritur.

87. Hic autem quasi in unam summam, quæ dixerat, sic colligit. *Atque his quidem omnibus bene perspectis, & consideratis illud mihi videtur simillimum veri, utique Deum Optimum Maximum in principio rerum materiam ita creasse, ut primigeniæ ejus particulæ, e quibus deinceps oritura esset corporea omnis natura, solidæ essent, firmæ, duræ, impenetrabiles, inertes, & mobiles; iis magnitudinibus, & figuris; iisque insuper proprietatibus, eoque numero, & quantitate pro ratione spatii, in quo futurum erat, ut moverentur, quo possent ad eos fines, ad quos creatæ fuerant, optimè deduci; quæ porro particulæ primigeniæ, quippe planè solidæ, longè, longèque duriores sint,*

quam ulla corpora ex iisdem deinceps cum occultis interjectis meatibus composita, immo tam perfectè duræ, ut nec deteri possint unquam, nec comminui. His particulis suam duritiem conservantibus posse *per omnia sæcula ex iis composita esse corpora ejusdem semper naturæ, & texturæ*; iis detritis debere mutari naturam.

88 *Porro*, inquit, *videntur mihi hæ particulæ primigeniæ non modo in se* vim inertiæ *habere, motusque leges passivas illas, quæ ex vi ista necessario oriuntur; verum etiam motum perpetuo accipere a certis* principiis actuosis, *qualia nimirum sunt Gravitas, & Causa Fermentationis, & cohærentiæ corporum. Atque hæc quidem Principia considero non ut occultas qualitates, quæ ex specificis rerum formis oriri fingantur, sed ut universales naturæ leges, quibus res ipsæ sunt formatæ. Nam Principia quidem talia revera existere ostendunt Phænomena Naturæ; licet ipsorum causæ quæ sint, nondum fuerit explicatum. Affirmare singulas rerum species, specificis præditas esse Qualitatibus occultis, per quas eæ vim certam*

tam in agendo habeant: hoc utique est nihil dicere. At ex phænomenis naturæ duo, vel tria derivare generalia motus principia, & deinde explicare, quemadmodum proprietates, & actiones rerum corporearum omnium ex principiis istis consequantur; id vero magnus esset factus in Philosophia progressus, etiamsi Principiorum istorum Causæ nondum essent cognitæ. Quare motus Principia supradicta proponere non dubito, cum per Naturam universam illa latissimè pateant. Jam quidem ope Principiorum istorum res corporeæ universæ videntur compositæ fuisse ex duris solidisque particulis supradictis variè inter se in prima rerum fabricatione sociatis, & conjunctis, nutu & consilio Agentis intelligentis. Decuit enim eum, qui res omnes creavit, easdem disponere quoque, & in ordinem collocare. Quæ si vera rerum origo fuit, jam indignum erit Philosopho alias Mundi condendi rationes exquirere, vel comminisci, quemadmodum e Chao per meras leges Naturæ Mundus universus oriri potuerit, quamvis formatus cum *sit, possit is jam per istas leges per multa sæcula perdurare.*

89. Ex hisce omnibus, quæ produxi abunde patet, Newtonii mens, de Principiis corporum, & universa Naturæ œconomia: ut & illud, in quo ego cum eo consentiam, in quo discrepem, quo ejus incæpta provexerim. Ipse in primis ponit primigenias materiæ particulas ea partium suarum adhæsione firmas, ut nulla naturæ vi disrumpi possint, & immutari, easdem impenetrabiles, inertes, mobiles, agitatas variis viribus a quibus motum accipiant, quibus in se invicem agant etiam posito aliquo intervallo, quæ mutatis distantiis mutentur, & ex attractivis etiam in repulsivas abeant, ac proinde alicubi sint etiam in limite attractionis, & repulsionis. Porro primam harum dispositionem, & numerum pendere unicè ab arbitrio entis intelligentis, Naturam pro arbitrio suo condentis, qui alios quotlibuerit Mundos dissimillimos inter se possit condere, si velit. Ab his primigeniis particulis inter se conjunctis, & vacuos

cuos meatus relinquentibus oriri seriem particularum majorum, quarum alii ordines nascantur ex aliis, & quo majores sunt, eo minorem habeant partium adhæsionem, & firmitatem. Hasce majores particulas viribus, quæ oriuntur ex conjuncta primigeniarum particularum actione, efformare corpora, quæ sub sensum cadant, & ab illis actuosis principiis, ex quibus hæ vires pendeant, produci adhæsionem corporum, discrimen inter corporum diversas species, effectus omnes chymicos, atque universas corporum omnium mutationes. In his omnibus cum eo planè consentio.

90. At ipse facit primas particulas solidas, plenas, duras, suis figuris præditas. Ego primas particulas efformo ex punctis prorsus indivisibilibus, quæ puncta mihi pro ipsis particulis primigeniis possunt esse, quæ quidem multo evidentius patet, mutari, & deteri non posse. Sed & primi ordinis particulæ ab ipsis punctis efformatæ ejusmodi habent suarum partium adhæsionem, ut nulla vi Naturæ possint de statu suo respe-

ctivo removeri. Primigeniarum particularum partes, ait, adhærere contactu continuo per totam aliquam superficiem, reliquarum partium partes adhærere contactu facto in aliquibus punctis: vim autem in minimis distantiis esse semper attrahentem, & in contactu maximam. Ego nullum admitto contactum particularum efformantium majores particulas; ac proinde, nec ullum contactum continuum partium, quæ particulam primigeniam constituant, & in minimis distantiis repulsionem pono, quæ imminutis ipsis distantiis in infinitum, pariter in infinitum augeatur; ac proinde adhæsioni ex contactu, substituo adhæsionem ex limite inter attractionem, & repulsionem, quæ adhæsio possit esse ubi libuerit firma, atque inconcussa, dummodo curva ea vires exprimens, ubi axem secat, ab eo longissime utrinque recedat in angulo fere recto. Ratio, cur ab eo in his discrepem est hæc. Ex principio, quod nihil fiat per saltum, excludo contactum unius corporis cum alio, & unius particulæ cum alia, & ostendo vires repulsivas in-

in-

infinitum augeri distantiis in infinitum imminutis. Hinc cum adhuc in distantiis majoribus constet haberi attractionem saltem eam, quæ est gravitatis generalis, adeoque debeat haberi limes, in quo auctis distantiis transitur a repulsione ad attractionem, quem limitem ostendi esse limitem adhæsionis ita, ut particulæ in eo positæ distantiam, quam semel acceperunt, tueri debeant; in hujusmodi limite ponenda fuit adhæsio particularum componentium corpora. Hujus analogia, & naturæ simplicitas extendit hanc ideam adhæsionis, ad adhæsiones omnes, quibus e particulis minoribus major coalescit. Eadem exclusit aliud adhæsionis genus, quo partes particulæ primigeniæ cujuscunque, inter se cohærerent, si continua, & solida esset ipsa particula primigenia, quæ partes in minimis distantiis jam se non repellerent, sed attraherent. Hæc analogia perduxit me ad puncta indivisibilia. Exclusio continui realis, deductio omnium primariarum proprietatum materiæ, & totius Physicæ Generalis ab unico principio, exclusio

plu-

plurium aliorum saltuum, & simplicitas modi agendi Naturæ sibi semper conformis confirmavit sententiam. Contemplatio originis idearum, quas circa corpora per sensus acquisivimus, removit potissimam, & unicam difficultatem, quæ fieri posse videbatur, contra punctorum horum naturam: nam actio virium in distantiâ corporum mihi cum Nevvtono communis est, & a me præterea aliis adhuc rationibus probata. Demum apud ipsum unicus apparet limes, ubi ab attractione ad repulsionem transitur; quanquam ex ejus doctrina videtur erui, & alter ex quo iterum a repulsione ad attractionem transeatur; nam particulæ vaporum quæ se fugiunt per repulsionem, adhuc generalem attractionem gravitatis retinent, qua fit, ut in maximis distantiis constitutæ jam non se fugiant, sed conatum exerceant iterum ad se invicem accedendi. Ego plures admitto limites. Eos requirit compositio partium majorum ex minoribus: & vero motus adeo perturbati particularum, qui in effectibus chymicis, & in fermentatione quacunque

se

ſe produnt, ſuadent potius multiplicem attractionum, & repulſionum ſeriem, ſibi invicem ſuccedentium. Eandem ſuadet natura mollium corporum & in majori, & in minori denſitate ſuam figuram conſervantium. Difficultatem amovet conſideratio curvæ exprimentis legem virium, quæ poteſt eſſe ſimpliciſſima, & axem ſecare in quotcunque punctis, & ad quaſcunque diſtantias.

91. Hæc de diſcrimine; jam ut appareat, quo ego progreſſus ſim: Ipſe in primis ſoliditatem, impenetrabilitatem, extenſionem, inertiam, mobilitatem primigeniarum particularum conſideravit tanquam primarias proprietates, quarum ulterior ratio reddi non poſſit, & quæ ad ſimplicius principium nequeant revocari. Earum ratio in mea ſententia petitur ex unico principio per analogiam Naturæ deducto. Vires, quibus particulæ in ſe invicem agant, ab aliis diverſis principiis debet repetere, quorum tria Cauſam gravitatis, Fermentationis, & Adhæſionis, ſingulas ut alias ab aliis, & ab uno principio non pendentes, proponit,

per

per quas aliqui effectus explicentur ita, ut aliis explicandis relinquatur locus advocandi in subsidium principia alia. Mihi ex eodem illo principio, ex quo primariæ illæ proprietates proveniunt, proveniunt etiam Adhæsio per limites illos, gravitas per accessum curvæ in maximis distantiis ad arcum Hyperbolæ gradus tertii; ex quo etiam redditur ratio, cur in eâ distantiâ deprehendatur sola gravitas, & ea in omnibus materiæ partibus, utcunque inter se in ordine ad alias vires dissimillimis, debeat esse uniformis; Fermentationis causa, ex frequentibus attractionum, & repulsionum limitibus non difficulter repeti potest. Ille ubi majores particulas e minoribus efformavit, refert diversa corporum genera, elasticorum, mollium, fluidorum, solidorum, ut vidimus num. 79. At elasticitatem repetit ab attractione partium. Sed ea multo sæpius fit per repulsionem. Si corpus incurrat in ingentem eboris massam complanatam, introcedunt eboris partes, & per repulsionem potius eodem redeunt, quo ubi redierint, repulsio cessat, nec massa dis-

sipa-

sipatur. Melius igitur repetitur a limite adhæsionis & repulsionis satis firmo. Mollitiem explicat dicendo ea esse corpora mollia, quorum partes sublabuntur. At quî fiat, ut sublapsui resistant, & tamen non redeant ad priorem figuram, non exponit. Id per limitum frequentiam optime explicatur. Fluiditatem repetit ab agitatione partium facta per calorem; At quid agitatio per calorem facta conferat ad fluiditatem, non ita patet ibi, ut in mea sententia, ubi soliditas provenit potissimum a diversitate virium secundum diversa latera, quibus fit, ut particulæ non possint aliæ circa alias commodè moveri, quæ tamen si celeri agitatione circa se rotentur, exercebunt circumquaque vires easdem. Illud sanè in mea sententia est manifestum, ea omnia ex eodem principio consequi. Demum si adhæsio corporum fiat per contactum partium; nemo sane intelliget, quî fiat, ut cum serie contactuum continua, tam liberè radii permeent per substantias solidissimas homogeneas, & propter solam homogeneitatem dia-

pha-

phanas, quod in mea sententia est adeo manifestum.

92. Multa addi possent, sed hæc abunde sunt. Patebit in iis, in quibus ab eo dissentio, me jure optimo dissentire. Si qui vero progressus in Naturæ investigatione a me facti videbuntur, eos me ipsi potissimum debere profiteor, cujus vestigia dum maximè sectarer, quo possem ulterius progredi, nonnihil ab ipso ejus itinere declinavi.

93. Quoniam autem etiam ipse minimas particulas primigenias ponit prorsus duras, & nulla Naturæ vi divisibiles, illud etiam ex ejus theoria patebit, quod & ex mea consequitur, nullam ex phænomenis colligi unquam posse materiæ divisibilitatem, quæ infinitæ divisibilitati utcunque suffragetur. Semper enim ejusmodi erit actualis materiæ constitutio, ut ultra certos limites nulla Naturæ vi possit divisio produci, ac proinde ut finitam tantum divisibilitatem ostendere possint phænomena. Divisibilitatem quidem ingentem, & quæ omnem fere humanum captum excedat, libens agnosco. Pendet ea

a puna punctorum numero, qui in spatio utcunque parvo potest esse utcunque magnus. Ex plurimis phænomenis physici passim deducunt divisionem materiæ tam immanem, ut non incredibilis tantum minus peritis appareat, sed etiam prorsus absurda. Nescio tamen, an quisquam eo progressus sit, quo ego superiore anno in dissertatione de luminis tenuitate edita in Romano, litteratorum Diario, ubi illud demonstravi, (rem sane dictu incredibilem! *Licet Sol singulis horæ semiquadrantibus impleat nova semper luce spatium decies, millies, millies, millies mille vicibus majus nostro Telluris globo, adhuc tamen unicum digitum sphæricum Solaris materiæ, quæ quidem hac nostra Terrestri est quadruplo circiter minus densa, continere multo plus materiæ, quam contineat lux omnis quam idem Sol emitteret pluribus millenis seculorum millibus, quam sint minutissimæ arenulæ pares immensæ terrestri superficiei circumquaque obtegendæ*. Nimirum ostendi: *unum digitum sphæricum Solaris materiæ redactum ad eam tenuitatem, quam habet hic apud*

nos

nos lumen solare, occupaturum plures digitos sphaericos, quam exprimat unitas cum cyphris 74. Quæ quidem tenuitas materiæ licet immensa sit, & fere omnem humanum captum excedat; adhuc tamen & eodem argumento, quo ibi sum usus, facile potest adhuc augeri plurimum; & in immensum augebitur in majoribus distantiis, in quibus densitas perpetuo decrescit in ratione reciproca duplicata distantiarum. Fixas quæ a nobis tam immenso intervallo distant, ut distantia Terræ a Sole respectu distantiæ ipsarum sit quoddam veluti punctum, adhuc commode cernimus per noctem eodem momento temporis, quo oculorum aciem iis obvertimus, & id ubicunque simus. Quare earum lumen ita dividitur per immensam sphæram circumquaque, ut numerus particularum luminis, quæ a se invicem separatæ sunt, vim omnem imaginationis excedat.

94. At vero quid ista licet tanta, & tam immanis divisibilitas, quid alia quæcunque, quæ ex phænomenis utcunque colligi potest, cum infinita divisibilitate commune habet, ut

ut hanc ex illa non dicam certa ratiocinatione colligere liceat, ſed vel leviſſimè quidem conjectari? Quidquid hactenus præſtitum eſt, nondum in maſſa toti Terræ æquali evincit numerum particularum, quem exprimat unitas cum centum cyphris, nec unquam id præſtabitur, ut ad unitatem cum mille cyphris deveniamus, cujus haberi magnitudinem haud ſcio, an ulla humana mens ſatis poſſit meditando complecti. At quid is numerus, ſi cum eo comparetur, qui totidem cyphris conſtet, quot iſte unitatibus? Quid hic ipſe cum alio, qui tot conſtet cyphris, quot unitates habet ea ſecundi hujuſce potentia, quam ipſe exponit? Quid horum uterque cum aliis ſubinde, atque aliis in aliqua maximè divergenti ſerie ex hiſce ipſis ortum ducentibus, & ultra omnem mentis humanæ aciem, atque obtutum longiſſimè poſitis, ac in obſcuriſſima quadam immenſitate latentibus? Quid demum hi ipſi omnes, & reliqui, quos non tantum non aſſequimur, non longe proſpicimus, non leviſſima ſuſpicione conjectamur, ſed hoc ipſum, ignorari eos a nobis, ignoramus, cum Infinito commune habent? Prorsus nihil. Ea est Infiniti magnitudo, ea vis, atque ratio; ut nihil prorsus, quod videri, sentiri, deprehendi, quod vel attingi cogitando, vel attentari etiam ullo modo possit in Naturæ phænomenis, nos ad ipsum recta ratiocinatione colligendum perducat. Sit maxima, sit incredibilis, sit omni humano captu longè superior materiæ divisibilitas, & actualis divisio, quam ego etiam libens admitto; adhuc tamen nullum inde ne tenuissimum quidem pro infinita materiæ divisibilitate argumentum, si suis singula momentis libremus, & recta utamur ratiocinandi methodo, desumi poterit. Quam quidem ego argumentis supra expositis vi maxima adactus e Natura summovendam potius censeo, ac penitus eliminandam.

95. Sed me quidam scribendi ardor abreptum quodammodo multo longius provexit, quam haberem in animo. Contrahenda sunt demum vela, & dissertationi longe sane plus æquo protractæ imponendus modus.

SULLA DIVISIBILITÀ DELLA MATERIA

E

SUI PRINCIPI DEI CORPI

Dissertazione

già composta nel 1748 e ora

pubblicata per la prima volta

da Ruggiero Giuseppe
Boscovich
della Compagnia di Gesù

La composizione di questa dissertazione risale all'anno 1748, quando mi venne chiesto cosa ne pensassi della divisibilità all'infinito; proprio essa mi ha fornito l'occasione per illustrare ed estendere la mia teoria di fisica generale, che avevo presentato nel 1745 nella dissertazione De viribus vivis*. Realizzai ciò in quello stesso anno nella dissertazione* De lumine*, che poi pubblicai. Della medesima teoria trattai in seguito nella dissertazione* De continuitatis lege*, pubblicata nel 1754, ove illustrai il principale fondamento della teoria stessa, cioè l'esclusione del salto, nonché nella dissertazione* De lege virium in natura existentium *(1755), in cui esibii i caratteri e dimostrai le proprietà di una curva esprimente quelle forze che ritengo esistano in natura. Ciò che, per questa mia teoria, attiene allo spazio e al tempo, lo esposi nei* Supplementa *alla filosofia di Stay due anni or sono, dedicati appunto allo spazio e al tempo.*[1] *In realtà il medesimo tema lo trattò in modo più fecondo, esponendone per intero la teoria, padre Carlo Benvenuti, dottissimo membro della nostra Società, nella sua* Synopsis physicae generalis*, stampata anch'essa nel 1754, al quale per altro avevo detto molte cose, in particolare su come estendere l'utilizzo della teoria.*

Essendomi stato chiesto, acconsento che questa dissertazione venga qui stampata così com'è stata redatta, senza che sia stata mai nemmeno copiata da quello stesso scritto autografo. Ci sono certe cose che rispecchiano quanto allora pensavo, da cui però in seguito mi discostai, cambiando idea; esse, comunque, non sono affatto – o assai poco – attinenti a questa teoria: le accennerò in brevi note qui aggiunte. Infatti, occupazioni più importanti non mi permettono di affrontare variazioni più ampie in questo testo; e sarà bene che possa risultare chiaro in quale ordine mi saranno venute in mente le cose pertinenti alla mia teoria, se essa, per caso, avrà trovato consensi.

Ci sono già parecchie cose pubblicate a stampa contro questa teoria; alcune di esse sono state confutate nelle dissertazioni che ho menzionato; altre sono state da me trascurate, lasciando ai lettori la libertà di giudicare, se mai qualcuno avrà voluto soppesare le cose; infatti, nutro un orrore viscerale per le dispute letterarie, e a tutti gli interessi umani antepongo di gran lunga la quiete dell'animo. Il poco tempo libero

---

***Nota generale alla traduzione.* Nel testo, i passi fra parentesi quadre [ ] corrispondono a quelli posti fra quadre da Boscovich, presumibilmente per segnalare le aggiunte al manoscritto originale del 1748 nell'edizione a stampa del 1757; le parentesi graffe { } indicano integrazioni effettuate dai curatori. Le note in corsivo indicate da lettere sono di Boscovich. Quelle indicate da numeri arabi sono dei curatori.**

[1] Il riferimento è ai Supplementi VI e VII al primo volume del poema "newtoniano" di Benedetto Stay, *Philosophiae recentioris […] Versibus traditae Libri X*, cum adnotationibus, et Supplementis P. Rogerii Josephi Boscovich, Tomus I, Romae, Palearini, 1755; il titolo dei supplementi è, rispettivamente, rispettivamente «De Spatio, ac Tempore» e «De Spatio, & Tempore, ut a nobis cognoscuntur».

che mi rimane dalle altre mie ineluttabili occupazioni, ritengo venga meglio impiegato nel chiarire ciò che, a mio parere, si può chiarire con animo tranquillo, così come per criticare gli scritti di coloro che mi criticano; specialmente quando mi sembra di scorgere una certa volontà di criticarmi o quando ritengo che quelle cose possano apparire di per sé abbastanza chiare a dei giudici equi. Credo poi vi siano due metodi del genere, diametralmente opposti, per attaccare ciò che ho dedotto dal principio di continuità: coll'uno, che consiste nell'escludere il salto nei punti primi di corpi dotati di velocità differenti che stanno per entrare in contatto, si sarà ammessa una compenetrazione fra piccolissime particelle di materia, dopo la quale comincerebbe ad agire la forza repulsiva; stando all'altro modo, poi, due punti, anche quando saranno giunti a contatto con velocità opposte, sebbene non mutino di posto, continueranno tuttavia a muoversi, intendendo col termine moto *la prosecuzione di forze che perseverano nell'agire l'una sull'altra e diminuiscono gradualmente, anziché intendere il moto locale, il quale – sebbene lo spazio vuoto sia puramente immaginario – non è tuttavia puro nulla, in quanto attraverso di esso si modificano relazioni di distanze fra punti non soltanto immaginarie, bensì reali, nonché l'avanzare e il tornare. Ma questi accenni sono più che sufficienti; esporrò ora la dissertazione.*

Dissertazione sulla divisibilità della materia e i principi dei corpi

1. Che tutti i corpi che cadono sotto i nostri sensi siano costituiti di una materia infinitamente divisibile, in modo che non vi siano parti ultime che siano le più piccole di tutte, viene ormai considerato dalla maggior parte dei fisici odierni tanto certo da ritenerlo dimostrabile per via geometrica. E la stessa dimostrazione dell'estensione continua della materia è costruita in modo che, a loro parere, non c'è spazio per dubitarne. Da qui, i fisici mostrano poi diffusamente come possa accadere che una piccola particella qualunque di materia riempia del tutto uno spazio grande a piacere, in modo che in esso non rimanga alcun vuoto che oltrepassi in lunghezza una lineetta piccola a piacere. Queste cose che già da tempo meditavo, studiandone e ristudiandone alcune riprese dall'opinione condivisa dei filosofi, mi si presentarono alla mente a proposito della stessa costituzione della materia e di quei primi principi dei corpi, certo abbastanza estranei, ma in virtù dei quali ritengo appaia assai evidente come possa accadere che tutte le principali proprietà e peculiarità dei corpi e l'intera fisica generale si possano derivare da materia – se si vuole – completamente omogenea e da un unico principio sufficientemente simile a quelli da noi scelti; inoltre, non mancano argomenti, anche abbastanza validi, in base ai quali è pure possibile definire, in particolare, per quale ragione e da quali principi sia composta la materia stessa, e come da tanta materia provenga questa compagine così varia di numerosissimi corpi.

2. Molte delle cose che dirò sono state in parte da me esposte due anni fa, in parte accennate nella dissertazione *De Viribus vivis*, pubblicata la prima volta a Roma nel 1745, poi ristampata negli *Atti dell'Accademia di Bologna* (terza parte, tomo secondo); ovviamente vi erano enunciate in modo meno ripartito e secondo l'ordine in cui, per la prima volta, si erano affacciate alla mente. Le stesse cose, aggiungendone molte altre e con un metodo di gran lunga diverso, riproporrò qui, spiegandole in maniera assai più lucida, sia per enunciare sia per corroborare un'idea: in realtà, dopo avere soltanto accennato a figure geometriche, ove sarà necessario e formatele con la sola immaginazione, proseguirò l'argomentazione a parole, a beneficio di coloro che sono indispettiti dall'incessante consultazione di figure geometriche.

3. Ma a questo punto vorrei vivamente dare al lettore i seguenti avvertimenti. Anzitutto, di quelle cose in cui per caso s'imbatte proprio all'inizio, non si faccia un'idea da certi pregiudizi, ma giudichi tutta la questione soltanto allorché avrà esaminato attentamente i fondamenti che proporrò e, fattosi coraggio e rigettati tutti i pregiudizi, li abbia soppesati. In quanto esporrò c'è indubbiamente molto in comune con le cose cui Newton alluse – più che spiegarle – alla fine dell'*Optice*; la prima volta che m'imbattei in esse, mi si impressero così profondamente nella mente che, per moltissimi anni, mi stimolarono a continue riflessioni, sino a condurmi alla costituzione della natura che qui presento. Le mie considerazioni divergono massimamente e per molti aspetti da quei principi dei corpi che egli ha abbracciato in quell'opera; per certi asltri aspetti, però, concordano, sicché si riconosceranno facilmente le tracce più elevate, uguali dall'una e dall'altra parte, delle meditazioni, nonché la derivazione e l'origine delle une dalle altre. In alcune sarò d'accordo con lui, in altre discorderò; quanto più in là sarò progredito nelle proprietà primarie della materia, che devono venire ricondotte a un unico principio, e nel dimostrare questo stesso principio con ragionamento schietto, benché il lettore raffinato possa scoprirlo da sé senza difficoltà, dirò tuttavia brevemente dove avrò manifestato il mio pensiero e confermato la mia concezione. Poi[a], tengo moltissimo a dichiarareche che la mia intera concezione viene da me proposta in modo da non darvi assolutamente un'adesione più forte di quella che si addica a un giudice equo, ma con una tale disposizione d'animo per cui, se mai vi fosse qualcosa di contrario a essa – sia che lo abbia scoperto da me, sia che lo abbia inteso come obiezione altrui –, che io ritenessi di peso maggiore rispetto a ciò che proporrò, rinuncerò volentieri a tale concezione.

---

[a] *Mi trovo ora nella disposizione d'animo per cui, come si conviene, se m'imbattessi in qualcosa di maggior peso contro una teoria del genere, sarei disposto a rinunciarvi per primo; ma sinceramente confesso di non aver ancora incontrato, dopo dodici anni, niente del genere, né da parte mia né da parte di altri che abbiano contestato la mia idea. Perciò, si dà il caso che io abbia ormai cominciato ad aderirvi assai più fermamente, soprattutto perché mi sono accorto che non poche altre cose concordano con essa.*

4. Anzitutto, non soltanto ritengo che la stessa divisibilità all'infinito della materia, sebbene sia data per dimostrata da molti tra i fisici più eminenti, non sia stata finora dimostrata, ma sono incline piuttosto a giudicarla completamente falsa anziché vera. Al contrario di tanti, che non conoscono affatto la geometria (o la conoscono meno di quanto sarebbe opportuno), io non sono uno che non ammetta la divisibilità all'infinito di una quantità continua e non sappia che essa viene derivata in modo evidente, mediante dimostrazioni geometriche, dalla natura della quantità continua. Né condivido la concezione espressa da alcuni fra i peripatetici anche moderni, i quali sostenevano che le particelle ultime dei corpi fossero di natura tale che, sebbene prive di parti da cui fossero composte e in cui fossero suddivisibili, tuttavia avessero un'estensione e si diffondessero in uno spazio continuo, esteso in lunghezza, larghezza e in profondità. Sostenevano poi che una stessa particella si trovasse tutta quanta in tutti i punti di quello spazio in un modo analogo al seguente: sebbene non vi sia punto dello spazio immenso in cui Dio non sia presente in persona, tuttavia egli non è costituito da parti né viene diviso in parti, essendo invece presente ovunque come perfettamente uguale a se stesso. Altri supponevano che queste particelle dei corpi conservassero ciascuna la propria grandezza e la difendessero sempre, sebbene abbiano dato grandezze diverse a particelle diverse, in modo che un numero qualsiasi di altre particelle di taglia più piccola nella stessa ragione possano occupare lo stesso spazio occupato da una di loro e sostituirla in quel luogo. Altri ancora, invece, assumevano che la taglia delle particelle fosse così mutevole che una stessa particella potesse sia estendersi in uno spazio più ampio sia contrarsi in uno più stretto, facendo per altro risalire a ciò, una volta escluso il vuoto, la differenza di densità dei corpi.

5. Se abbracciassi la concezione di questi peripatetici, richiamandola a nuova vita, verrei certamente preso a fischiate dai filosofi della nostra epoca. Ma se per caso chiedessi loro con quali ragioni dopotutto dimostrerebbero la falsità di tale concezione, non so se avrebbero qualcos'altro da opporre, se non una certa idea che avvertiamo nell'animo, e che riteniamo appropriata al corpo e alla materia; tuttavia, io sono ragionevolmente convinto (e tra poco farò vedere in maniera assai vivida che le cose stanno così) che essa trae origine da un mero pregiudizio e da impressioni ricevute nell'infanzia e scolpitesi con maggior forza nella mente. E mentre cerco da me[(b)] perché quella concezione, ad accogliere la quale non mi sento portato, non può essere

---

[(b)] *In seguito mi sono anche venuti in mente degli argomenti contro una concezione del genere, a buon diritto ricercati sulla scorta del principio d'induzione, che ho proposto altrove (anche nella dissertazione* De continuitatis lege*); e ho pure esposto in maniera assai più accurata l'analogia massima fra luogo e tempo nei* Supplementa *a Stay* {nell'originale: «*in Stayanis elementis*», ma deve trattarsi di una svista per «*in Stayanis Supplementis*», più volte citati nel testo}, *essendo anche completamente esclusa dalla natura la quiete, che corrisponderebbe a questa estensione per così dire virtuale. Cioè, ho dimostrato che in natura un punto materiale non può associare un medesimo punto locale con più istanti temporali, e a maggior ragione con la loro serie continua. Ciò esclude sia* vera, in verità non trovo niente cui, una volta deposti completamente tutti i pregiudizi, possa riconoscere una qualche validità. Anzi, mi viene in mente anche questo: una stessa particella materiale può, secondo le leggi della natura, essere proprio la stessa nel medesimo luogo in infiniti punti di tempo continuo, e non per questo – giacché si trova in più istanti distinti fra loro, e anche disgiunti per interposizione di altri [in quegli istanti, cioè, che sono le prime e le ultime parti di quel medesimo tempo continuo in cui essa permane] – dev'essere in un istante una cosa, in un altro un'altra. Che cosa impedisce che, fatte parimenti salve le leggi di natura, una stessa particella, per l'identica ragione, possa esistere nel medesimo istante in infiniti punti di uno spazio continuo, senza che differenza di luogo e distanza [fra i luoghi, cioè, che sono le parti estreme di quel medesimo luogo continuo, in cui essa sia presente] significhino o richiedano una qualche distinzione fra le parti? Come un unico luogo congiunge una medesima particella materiale con molti istanti, ma costituenti un unico tempo continuo, perché un unico tempo non la può congiungere con molti luoghi, che analogamente costituiscono un unico luogo continuo? Come una stessa particella può, in un tempo continuo, composto da più tempuscoli in successione fra loro, essere in un luogo, e in un altro tempo continuo essere in un altro luogo, e ciascuno di quei luoghi in quei singoli tempi si mantenga il medesimo [infatti può rimanere in un luogo per un'ora, in un altro per un giorno, in un altro ancora per un mese], perché non dovrebbe esserci una misura costante di quel tempo continuo, in cui essa si trovi in qualsiasi luogo congiunto con quel tempo, oppure perché a ogni suo luogo non dovrebbe corrispondere necessariamente una sua determinata misura di tempo? Perché, analogamente, non potrebbe una stessa particella trovarsi, in un dato istante, in un luogo continuo, composto da più spazietti contigui, e in un altro istante in un altro luogo continuo, senza che debba esserci una certa misura costante di quel luogo continuo, in cui essa si trovi in tempi qualunque, congiunti con quel luogo, oppure senza che a ciascun suo istante debba corrispondere necessariamente una sua determinata misura di luogo?

6. Vi sono analogie fra luogo e tempo, vedere le quali è reso difficile da un certo uso delle parole. La parola *simul*, ovvero «simultaneo», sebbene possa anche venire riferita al luogo, tuttavia concerne soprattutto il tempo, e per lo più diciamo *simul existere* (cioè «esistere simultaneamente») o anche *coexistere* (ossia «coesistere») di quelle cose che esistono nello stesso tempo. Così, in riferimento a tempi diversi utilizziamo *successio* («successione») e diciamo *successive existere*, cioè «esistere in successione», di quelle cose che esistono in tempi diversi. Del resto, non ci sono altre parole che esprimano adeguatamente l'esistenza in uno stesso luogo o l'esistenza in luoghi diversi e che in tal modo li presentino alla mente. Per questa ragione, al fine di cogliere

---

il ritorno allo stesso luogo, sia – e ancor più – la quiete, e toglie ogni validità all'argomento se si tratti del tipo di estensione che debba aver luogo in natura, che – a vantaggio dell'estensione di tali particelle semplici – avevo qui desunto da un'analogia con la quiete.

l'analogia bisogna evitare espressioni come «simultaneo» e «in successione», sostituendovi queste altre: *stesso tempo* o *tempi diversi*, alle quali si devono accompagnare *stesso luogo* e *luoghi diversi*.

7. Ma consideriamo ora il tempo in se stesso: come nessun tempo può esistere in un altro tempo, così nessun luogo può esistere in un altro luogo. Come uno stesso tempo è congiunto con molti luoghi, così uno stesso luogo è congiunto con molti tempi. Consideriamo, quindi, l'esistenza nel luogo e nel tempo: il tempo e il luogo sono così estrinsechi all'essenza delle cose, che una cosa qualsiasi può ugualmente esistere nell'uno o nell'altro tempo e nell'uno o nell'altro luogo, benché, se esiste, debba necessariamente esistere in un certo tempo e in un certo luogo. Analogamente, una stessa cosa può esistere in tempi diversi e può esistere in luoghi diversi; due cose possono esistere nello stesso tempo in luoghi diversi e nel medesimo luogo in tempi diversi. In queste cose l'analogia è evidente.

8 Per procedere ulteriormente in quest'analogia, consideriamo le cose che accadono in un tempo riferito a un luogo, e poi cerchiamo la relazione fra il luogo e il tempo. Una cosa può esistere nello stesso luogo in più tempi. Ciò non crea alcuna difficoltà. Dio esiste sempre uguale a se stesso e assolutamente semplice in tutti i singoli tempi. Quanto alla materia, sebbene la natura possa essere costituita in modo che nessun punto materiale sia mai completamente in quiete, tuttavia[(c)] presumibilmente nessuno sosterrà che la quiete sia inconciliabile con la materia, sebbene mediante la quiete uno stesso luogo materiale debba necessariamente congiungersi con una molteplicità di tempi. Dall'aver trovato da qualche parte in un tempo un punto materiale, e analogamente un punto materiale ancora lì in un altro tempo, nessuno ricava che ci sono due punti materiali: nessuno reclama un'identità o una distinzione dalla distinzione o dall'identità dei tempi coi quali un punto è congiunto. Che esattamente per la stessa ragione una cosa possa esistere allo stesso tempo in luoghi differenti, e che non vi sia contraddizione *ex ratione entis*, è evidente dal fatto che Dio, sempre uguale a se stesso e semplicissimo, esiste in tutti i luoghi nessuno escluso. Quando, però, si parla della materia, generalmente si sostiene che un medesimo punto materiale non possa esistere in più posti nello stesso tempo; e ci sono coloro secondo i quali attiene all'identità o alla distinzione di un punto materiale il fatto di essere in uno stesso tempo nel medesimo luogo o in luoghi diversi. Ma poiché sia il luogo sia il tempo sono in ugual modo estrinseci alla materia, uno dei due non avrà forse nulla a che fare coll'identià e la distinzione, e vi contrasterà? Perché la distinzione e l'identità non piuttosto desunte dalla stessa entità metafisica della cosa indipendentemente dal luogo, come vengono

---

[(c)] *Sono ancora della medesima opinione: ritengo cioè che possa esserci quiete per onnipotenza divina, o che almeno non ci risulta il contrario. Quindi l'analogia vale anche in riferimento a una tale estensione, che deve darsi per onnipotenza divina; però, come ho avvertito, sono del parere che tanto la quiete quanto un'estensione siffatta possano venire escluse dalla natura con argomenti positivi.*

desunte indipendentemente dal tempo? Perché, proprio allo stesso modo, la natura delle cose medesima non si dà indifferentemente rispetto al luogo come rispetto al tempo? Che *ex ratione entis* l'una e l'altra cosa stiano nel medesimo modo, lo si coglie in un ente semplicissimo quale è Dio; che nell'anima l'una e l'altra cosa stiano nel medesimo modo, lo ritengono tutti coloro che affermano che essa, per tutta la sua esistenza, dev'essere presente nello stesso tempo in un certo luogo continuo (perciò essere nello stesso tempo in più luoghi costituenti quel luogo continuo), proprio come essa, mentre è in quiete, è presente nello stesso luogo in un tempo continuo (perciò in più tempi costituenti quel tempo continuo). Questo non è affatto in contraddizione con la *ratio entis*. Da dove abbiamo appreso che ciò contraddica la *ratio materiae*, della quale non abbiamo alcuna idea, se non acquisita tramite i sensi? Forse che i sensi stessi possono esibire un'entità metafisica della materia e, per una qualche ragione, stabilire che in essa vi sia qualcosa di contradditorio che non c'è in altri enti? Oppure che possano mostrare che proprio ciò che vediamo in luoghi diversi nello stesso tempo non è la stessa identica cosa, come spesso sono lo stesso le cose che vediamo in tempi diversi in un medesimo luogo?

9. Se si ammettesse tale analogia fra tempo e luogo, si presenterebbero due aspetti della questione: anzitutto, noi crediamo che qualsiasi punto materiale possa unire lo stesso luogo con tempi diversi comunque disuguali; in secondo luogo crediamo che uno stesso punto non possa naturalmente essere in due tempi disgiunti senza essere anche nel tempo intermedio. Perché uno stesso punto non potrebbe analogamente congiungere uno stesso tempo con luoghi diversi comunque disuguali in modo che, tuttavia, non possa naturalmente essere in due luoghi disgiunti senza essere anche nello spazio intermedio?

10. Quanto a me, mentre indago da me stesso su queste e altre cose simili, rimango perplesso, e così impacciato da non sapere da che parte voltarmi. Mi rendo certamente conto che questo frutto delle mie riflessioni non è da disprezzare: cioè che io sia giunto a comprendere che è impossibile dimostrare la divisibilità della materia all'infinito, la quale posso convintamente affermare che, una volta ammessa quella concezione, neppure vi sarebbe, per quanto si possa dividere lo spazio all'infinito. Tuttavia, in nessun modo abbraccerò tale concezione, di fatto una pura ipotesi che non è sostenuta da alcuna ragione diretta.

11. Per questo motivo, vi è un'altra ragione per cui io non solo non ritengo dimostrata la divisibilità della materia all'infinito, ma la giudicherei del tutto erronea, e per questa stessa ragione ritengo sia necessario bandire dalla natura anche l'estensione continua della materia. Per esporre tale ragione nel modo più chiaro possibile, anticiperò anzitutto queste due proposizioni; poi spiegherò assai più diffusamente i motivi di tali ragioni, che potranno servire a comprovarle. La prima proposizione è questa: *Non c'è alcun argomento in grado di dimostrare che la materia abbia estensione continua, e che non sia piuttosto costituita da punti indivisibili, distanziati fra loro da un certo intervallo; né c'è ragione, messi da parte i pregiudizi, che induca a considerare tale*

estensione continua anziché un composto di punti indivisibili e inestesi, che non costituiscono alcun continuo esteso. Ed ecco la seconda proposizione: *Vi sono argomenti, per altro abbastanza solidi, con cui si dimostra che tale composto di punti indivisibili si deve necessariamente preferire all'estensione continua.*

12. Affinché risulti anzitutto chiaro ciò di cui mi sono profondamente convinto e che è dato per dimostrato, esporrò quest'idea dei punti indivisibili, a sostenere la quale mi sento massimamente incline[(d)]. Concepisco gli elementi primi della materia, da cui essa è composta da principio e in cui da ultimo si può risolvere, come punti indivisibili tali da non avere parti né occupare uno spazio esteso, ma da essere ciascuno in un singolo punto matematico dello spazio, privo di qualsiasi estensione e dimensione. Che per loro sia del tutto impossibile comporre una quantità continua, lo riconosco dalla stessa nozione di quantità continua nonché da quella di estensione continua, cosicché non possano assolutamente essere contigui gli uni agli altri, ma fra ogni coppia di elementi o vi sia sempre un certo intervallo o – se tale intervallo è nullo – coincidano e si compenetrino. Da ciò si vede quanto punti di tal fatta siano diversi da quelli di Zenone, i quali vengono considerati sia inestesi sia contigui fra loro, sì da comporre l'estensione; da un lato ciò è riconosciuto del tutto impossibile mediante dimostrazioni geometriche, dall'altro appare manifestamente assurdo già di primo acchito. Infatti, ogni punto del genere deve essere toccato da entrambi i punti fra cui giace, ma non nel medesimo luogo, affinché quei due punti non si tocchino a vicenda; perciò, il luogo che occupano dovrà avere parti, ed esse siano parti adiacenti, contigue l'una all'altra. Ma si differenziano anche dalle monadi di Leibniz, che i leibniziani stessi ritengono inestese, cosicché affermano, tuttavia, che compongono una quantità continua estesa; come ciò sia possibile in modo da non cadere negli assurdi in cui cadono i punti di Zenone, l'avranno capito costoro[(e)]; io certo non lo capisco.

[(d)] *Qui si espone come ipotesi ciò che è sufficiente a dimostrare quella prima proposizione; ma poi, con argomenti positivi, si ricava che le cose stanno così, cosicché questa non è un'ipotesi arbitraria, ma dedotta da principi autentici e giustificata.*

[(e)] *Coloro che dicono che le monadi non si compenetrano essendo per loro natura impenetrabili non eliminano affatto la difficoltà; infatti, se sono impenetrabili per loro natura e devono comporre un continuo, e devono persino essere contigue, si compenetreranno e allo stesso tempo non si compenetreranno, il che porta ad assurdo e prova l'impossibilità di enti di quel genere. In base all'argomento opposto per secoli a Zenone e al quale non è mai stata data una risposta soddisfacente, dall'inestensione (di qualsiasi tipo essa sia) e alla nozione di contiguità si dimostra che le monadi si devono compenetrare. Dalla natura che per ipotesi è insita nelle monadi, tale compenetrazione è esclusa, e si ha pure contraddizione e assurdo. D'altra parte, alcuni dimostrano malamente tale impenetrabilità per il fatto che, se due monadi di compenetrano, sono una sola anziché due. La compenetrazione è congiunzione di luogo: come possono esservi due cose nello stesso istante di tempo senza per questo essere un unico ente, bensì due; così possono esservi due cose nello stesso punto nello spazio senza perciò essere un unico ente, bensì due. Che cosa*

13. Che questi punti si possano concepire, certo non lo negherà alcun geometra, che appunto concepisce i punti matematici. A essi questi punti sono del tutto uguali per quanto riguarda l'estensione; se ne distinguono perché sono reali, perché possono essere dotati di moto reale e perché hanno proprietà reali. Come gli uni, muovendosi di moto continuo, generano una linea che non è composta da punti, bensì delimitata da punti – onde viene che non possono avere un moto più piccolo di tutti, ma per qualunque moto piccolo a piacere ce n'è uno ancora più piccolo che avverrebbe in minor tempo, col quale argomento è già da tempo risolta la difficoltà degli antichi sul moto della tartaruga e di Achille –, così lo stesso accade per questi punti materiali. Non potranno avere alcun moto che sia il più piccolo di tutti, e sia il primo, tale che non via sia un moto ancora più piccolo e in minor tempo. Una massa di punti siffatti non può essere fatta avanzare per tanto spazio quanto ne occupa il suo primo punto, giacché il primo punto non occupa uno spazio esteso e adatto a contenere un qualche moto; ma uno spazio esteso qualunque fornisce infinitamente posto a infiniti punti, ed essi non possono esaurirlo. Se la massa viene fatta avanzare, allora il primo assoluto dei suoi punti occuperà un punto di spazio diverso dal primo successivo, e fra questo e quello intercorrerà una linea delimitata da quei due punti di spazio. Quel moto sarà stato compiuto in un tempuscolo continuo, costituito da una certa linea continua di tempo, infinitamente divisibile. Fra le parti di quel tempuscolo, la distanza fra il punto di spazio occupato da quel punto materiale e il punto di spazio occupato all'inizio del tempuscolo sarà minore di quella alla fine del medesimo. Tutto ciò possiamo trarre dall'idea comune della divisibilità infinita di spazio e tempo, dove non può esservi alcuna difficoltà che non trovi posto nell'opinione comune della continuità della materia, e alla quale non si possa rispondere allo stesso modo. Certamente, la stessa cosa si dice della superficie prima di un corpo, la quale è il primo limite del corpo, necessariamente indivisibile, anche ammessa la continuità della materia – altrimenti, infatti, non sarebbe un limite –, ed è dello stesso genere degli enti o dei modi cui appartiene la figura. Del resto, la costituzione del tempo e dello spazio appartengono alla metafisica, e sono tali che, se nessuno ce lo chiede, sappiamo cosa sono; e se qualcuno lo chiede, lo ignoriamo del tutto. Ma mentre sono propenso a ritenere che questo stesso spazio sia completamente immaginario, non reale, cioè qualcosa che esiste senza corpo e moti, così come una certa loro capacità di contenere cose sia esistente in atto fuori dell'intelletto, accennerò in seguito in qual senso io intenda la sua divisibilità all'infinito. Frattanto, se qualcuno trova più difficoltà a concepira quei punti di tale materia perché nell'idea di cosa corporea, di cosa materiale, di materia, gli sembra di cogliere un'estensione continua, una figura e delle parti, vorrei che costui esaminasse un po' più accuratamente le sue stesse idee e la loro origine.

---

abbia a che fare l'identità di luogo con l'identità di natura e – come dicono – di essenza, nessuno lo capirà davvero, se esaminerà più a fondo la questione.

14. A seconda che concediamo – cosa che non credo affatto – che ci siano idee innate e non acquisite attraverso i sensi, io senza dubbio riterrei cosa assolutamente certa che le idee di corpo, materia, cosa corporea e cosa materiale non sarebbero state attinte dai sensi. Inoltre, le idee prime acquisite circa i corpi attraverso i sensi sono state proprio quelle che in noi ha eccitato il tatto, e sono state attinte più frequentemente di tutte. Certo molte cose, nello stesso ventre materno, si offrivano di continuo al tatto, prima che, attraverso gli altri sensi, potessimo mai avere una qualche idea di sapori, odori, suoni, colori; e inizialmente, quando per la prima si sono affacciate tali idee, la loro frequenza era assai minore. Invece, le idee che abbiamo avuto attraverso il tatto sono emerse da fenomeni di questo genere. Sperimentavamo tastando o battendo a caso una resistenza originata dalle nostre membra o da quelle materne; essa, non opponendo ai sensi alcuna interruzione per un qualche intervallo di cui ci si potesse accorgere, ci ha offerto l'idea di impenetrabilità e di estensione continua. Poi, cessando la resistenza in quella direzione, e venendo esercitata altrove e in un'altra direzione, abbiamo concepito i limiti di tale quantità, e ricavato l'idea di figura.

15. Questi fenomeni sorgevano da corpi già formati di materia, non da singole particelle materiali che componevano quei corpi. Bisognava considerare attentamente se un'estensione del genere appartenesse a quel corpo o a un certo spazio, attraverso il quale si diffondevano le particelle formanti il corpo: se quelle particelle fossero dotate delle stesse proprietà; se una resistenza venisse esercitata al contatto o se, a distanze minime, tali da non cadere sotto i sensi, una qualche forza fosse d'impedimento, la quale agisse come una resistenza anche prima che il contatto fosse avvertito; se proprietà siffatte fossero intrinseche e necessarie alla materia di cui sono composti i corpi o se si presentassero soltanto in alcuni casi, determinate da una qualche condizione esterna. Sarebbe stato opportuno considerare attentamente queste e certamente molte altre cose; ma era un tempo estremamente confuso e oscuro, e quasi del tutto inadatto a riflessioni non immediate. Oltre alla debolezza degli organi, occupava la mente la novità delle cose, la scarsa quantità di fenomeni, e la totale incapacità (o una capacità certo assai limitata) di mettere a confronto quei fenomeni, riconducendoli a certe categorie dalle quali fosse possibile indagare le loro leggi e le loro cause, e formare un sistema, in virtù del quale potessimo trarre un giudizio sulle cose poste fuori di noi. Ora, proprio in questa povertà di fenomeni, in questa difficoltà nel formare un sistema, in questo scarso uso della riflessione ancor più che nell'insufficienza degli organi, penso consista l'infanzia.

16. In questa nebbia così fitta che avvolgeva le cose, alla mente si sono presentate per prime quelle che avevano bisogno di un'indagine meno profonda, di riflessioni meno accurate; cose che sono state impresse più profondamente da idee ripetute più e più volte, che hanno aderito più tenacemente e, avendo trovato per così dire campo libero e ancora puro, ne hanno preso possesso quasi per un loro diritto. Intervalli che non cadevano assolutamente sotto i sensi venivano considerati nulli; cose le cui idee venivano sempre suscitate contemporaneamente congiunte erano tenute per la stessa, identica cosa, o congiunte fra loro da un nesso strettissimo e necessario. L'effetto di ciò è

stato che abbiamo attribuito l'idea di estensione continua e l'idea d'impenetrabilità che impedisce un moto ulteriore soltanto al contatto fra corpi, e che abbiamo trasferito alla leggera a tutte le cose che riguardano il corpo, alla materia dalla quale esso è costituito, proprio quelle cose che, essendosi impresse per prime nella mente, si accorderebbero con i fenomeni più frequenti, anzi permanenti, e con gli esperimenti, e sarebbero confermate da riflessioni rinnovate. Esse hanno aderito così tenacemente l'una all'altra, si sono mescolate e associate così saldamente all'idea dei corpi, che, a meno di liberarci da pregiudizi di tal fatta, continueremmo a ritenere tali quelle che allora avevamo considerato come le prime proprietà massimamente intrinseche del corpo e di tutte le cose corporee (cioè anche della materia componente i corpi e delle sue parti) e concernenti la loro natura ed essenza. Infatti, abbiamo attribuito come proprietà essenziali l'estensione continua, l'impenetrabilità per contatto, la composizione in parti e la figura non solo alla natura dei corpi, ma anche alla materia corporea e a ciascuna delle sue parti; le altre proprietà, che abbiamo scoperto in seguito, dopo qualche esercizio di riflessione – cioè il colore, il sapore, l'odore, il suono – le abbiamo considerate come proprietà accidentali e avventizie.

17. Ma poiché siamo giunti al punto di poter formulare un giudizio sui pregiudizi portati con noi sin dall'infanzia e poterli prendere nuovamente in esame, si dovrà soppesare scrupolosamente l'origine delle idee, giudicando tali cose a prescindere dai pregiudizi; le cose poste le quali si sarebbero formate nei sensi le stesse impressioni, e suscitate nella mente le stesse idee, sono da ritenersi tutte parimenti nel medesimo luogo e da considerare senza alcuna distinzione. A questa condizione, se la mente venisse a trovarsi in un certo equilibrio, vedrà certamente che non c'è alcuna difficoltà nel rappresentare e concepire col pensiero punti completamente indivisibili e del tutto privi di estensione e di parti. Verrà in nostro soccorso l'idea dei punti matematici, che ci siamo formati in geometria: più oltre apparirà chiaro che gli stessi fenomeni, le stesse impressioni sensoriali devono aver origine dall'insieme di tali punti, se essi posseggono proprietà reali. Esporrò ora le proprietà reali di questi punti, che li distinguono dai punti matematici.

18. Secondo la mia concezione, questi punti sono anzitutto dotati, per loro natura o per libera legge del Creatore Supremo, di forza d'inerzia, che è la propensione o determinazione a perseverare nel medesimo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme nel quale siano stati posti una volta, a meno che altre forze non li inducano a mutare tale stato. Inoltre, i punti materiali sono dotati di certe forze, che li determinano ad allontanarsi o ad avvicinarsi fra loro e che chiamo con il consueto termine di repulsive e attrattive. Con tali espressioni non indico una qualche azione fisica che un punto eserciti su un altro punto a distanza (per quanto all'occorrenza chiamerò termini consueti anche azione e reazione), ma proprio quella propensione o determinazione {ad avvicinarsi o allontanarsi}, da qualunque parte essa provenga: risieda nella natura stessa di tali punti, in una libera legge del Creatore, o anche, come vogliono i peripatetici, in un qualche accidente assoluto (qui, infatti, non mi curo di queste cose). I punti possiedono la stessa propensione ad avvicinarsi o ad allontanarsi reciprocamente, in

modo tale che sia che due punti si attraggano a vicenda sia che si respingano, in entrambi devono sempre essere indotti mutamenti di stato contrari e uguali, cioè in entrambi devono prodursi velocità contrarie e uguali. Inoltre, concepisco queste forze come sempre repulsive a distanze minime, cosicché, riducendo all'infinito tali distanze, la forza repulsiva si accresca all'infinito, mentre aumentandole essa diminuisca e infine si annulli. A quel punto, aumentate ancora le distanze, la forza repulsiva agisca in senso opposto e divenga attrattiva; ed essa, aumentando di continuo la distanza, dapprima cresca, poi diminuisca e si annulli di nuovo, mutandosi alternativamente in repulsiva crescente e decrescente, finché anch'essa svanisca e si muti nuovamente in attrattiva, in un reciproco succedersi di incrementi e decrementi, di attrazioni e repulsioni, attraverso moltissime inversioni a intervalli sempre maggiori, sicché alle massime distanze colte dai nostri sensi quelle forze siano assai più deboli, sino forse a diventare impercettibili a distanze ancora maggiori.

19. Un esempio di forza repulsiva a brevi distanze e attrattiva a distanze maggiori e del limite interposto lo abbiamo nelle lamine o nelle spire elastiche, le estremità delle quali, se collocate a una data distanza, sono in quiete; se invece le si avvicina o le si allontana più del dovuto, esse tornano alla posizione precedente, nel primo caso per repulsione, nel secondo per attrazione. Secondo la mia concezione, ciò che qui avviene a causa del distendersi dell'intera lamina avviene anche fra questi punti o per loro stessa natura o per la libera legge del Creatore oppure per accidente, come piacerà. Newton, che alle minime distanze ammette l'attrazione, massima al contatto, tuttavia aveva questa stessa idea di un passaggio da attrazione a repulsione in base alle diverse distanze, e l'ha esposta nell'ultima Quaestio dell'*Optice*, a dieci pagine dalla fine, con queste parole, che mi hanno fornito l'occasione per tutte queste meditazioni: «Poiché i metalli sciolti negli acidi attirano soltanto una piccola quantità di acido, la loro forza di attrazione non arriva che a piccole distanze da essi. E come nell'algebra le quantità negative cominciano dove le quantità positive svaniscono e si annullano, così in meccanica dove cessa l'attrazione deve subentrare la forza di repulsione. Che vi sia una tale forza sembra conseguire dalle riflessioni e dalle inflessioni dei raggi luminosi: infatti, in entrambi questi casi i raggi sono respinti dai corpi senza contatto immediato con il corpo riflettente o inflettente.» (Ciò che è stato dimostrato in maniera sufficientemente evidente da Newton stesso.) «Sembra anche che ciò consegua dalla emissione della luce: essendo il raggio lanciato a enorme velocità, non appena viene espulso dal corpo luminoso a causa del moto vibratorio delle parti del corpo, e non appena oltrepassa la sua sfera di attrazione. Infatti, quella stessa forza che nella riflessione è sufficiente a respingerlo, potrebbe pure bastare a emetterlo. E sembra che ciò consegua anche dalla produzione dell'aria e del vapore. Le particelle, scacciate dai corpi per effetto del calore o della fermentazione, non appena si trovano oltre la sfera di attrazione del corpo, si allontanano da questo e anche le une dalle altre con grande forza, tenendosi a distanza, cosicché spesso occupano uno spazio di un milione di volte maggiore di quello che occupavano quando avevano la forma di un corpo denso. Una così grande contrazione ed espansione sembra incomprensibile se le particelle

d'aria s'immaginano elastiche e ramificate, o simili a rami flessibili avvolti a cerchio su se stessi**,** oppure se le si spiega mediante una qualunque altra ragione, se non così: che siano cioè dotate della forza di repulsione, in virtù della quale si allontanano le une dalle altre»[2]. Ecco quanto sostiene Newton; abbiamo citato questi passi affinché sia chiaro che forze di uno stesso genere, che mutano al variare della distanza, in modo da passare da attrattive a repulsive, e agiscono a distanza senza alcun mezzo (forze ammesse da Newton nelle particelle solide dei corpi, che, come mostrerò in seguito, egli considerava costituenti i corpi stessi), sono da noi attribuite a quei punti assolutamente indivisibili, da cui analogamente – come diremo poi – hanno origine i vapori.

20. Tutto questo alternarsi di forze ora repulsive ora attrattive si può riferire ottimamente, mediante ordinate[3], a una curva regolare di questa natura. Si abbia un angolo retto[(f)], i cui due lati siano prolungati all'infinito. L'uno sia l'asintoto di una curva, e tale curva vi si avvicini all'infinito dalla parte opposta al vertice dell'angolo, senza giungere a contatto; dall'altra parte, invece, si allontani ininterrottamente all'infinito. L'altro lato sia un asse a cui la curva si avvicini in modo da intersecarlo a una certa distanza dal vertice dell'angolo e passi dalla parte opposta; poi, però, si pieghi a intersecare nuovamente l'asse, e da lì, a distanze diverse, pieghi il percorso più e più volte da una parte e dall'altra. Se in una curva del genere le ascisse di retta sull'asse, dal vertice dell'angolo retto, esprimono le distanze di due punti, le ordinate innalzate fino a toccare la curva, parallele all'asintoto, esprimeranno forze repulsive o attrattive, secondo che siano rivolte verso la parte in cui l'asintoto si protende all'infinito oppure da quella opposta.

21. Poiché questa curva si allontana sempre dall'asintoto, avrà un'unica ordinata per ogni punto dell'asse; perciò la sua equazione, liberata da tutti i termini irrazionali, conterrà

---

[2] I. Newton, *Optice: Sive De Reflexionibus, Refractionibus, Inflexionibus & Coloribus Lucis. Libri Tres*, Londinii: Impensis Sam. Smith & Benj. Walford, Regiæ Societatis Typograph. ad Insignia Principis in Cœmeterio D. Pauli, 1706, Quaestio 23, pp. 338-339. Per questo e gli altri passi dall'*Optice* qui citati si veda per raffronto anche il testo inglese, *Opticks: Or, A treatise of the Reflections, Refractions, Inflexions and Colours of Light. Also Two treatises of the Species and Magnitude of Curvilinear Figures*, London: Printed for William Innys at the West-End of St. Paul's, 1730, Query 31. Le traduzioni sono state condotte dal testo latino, che è quello che Boscovich conosceva e utilizzava. Vedi in proposito l'Introduzione a questo volume, **p. 34**.

[3] Nel testo «*ordinarias*», ma dev'essere «*ordinatas*».

[(f)] *Tale curva si può vedere nelle mie dissertazioni* De viribus vivis, De Lumine, De continuitatis lege, *nella* Synopsis physicae generalis *di Benvenuti, e infine nella mia dissertazione* De lege virium in natura existentium, *dove viene anche dimostrato che i frequenti passaggi da una parte all'altra dell'asse, che comportano il trasformarsi delle forze da attrattive in repulsive e viceversa, non producono nessun salto né contrastano la semplicità di quella curva, la cui natura viene lì descritta.*

un unico valore dell'ordinata di grado dispari, e funzioni dell'ascissa qualunque e quanto numerose si voglia. Essa potrà essere semplicissima, e non composta da altri archi, sebbene di primo acchito ci appaia assai intricata e irregolare a causa dei molti va e vieni. Qui si presentano massimamente opportune le considerazioni circa l'uguale semplicità di tutte le curve che ho avanzato l'anno scorso alla fine della prima parte della dissertazione *De maris aestu*, dove ho anche mostrato perché in particolare la linea retta e in secondo luogo il cerchio ci appaiono i più semplici fra tutti i luoghi geometrici. Dunque, anche quella legge delle forze, soggetta a così tante variazioni di incrementi e decrementi, potrà essere in se stessa semplicissima e assai regolare; sebbene certamente questa semplicità non verrà affatto riconosciuta da chi avrà considerato con scarsa attenzione la natura e il carattere dei luoghi geometrici.

22. Inoltre, chiamo limiti di attrazione e di repulsione i punti in cui, allontanandosi dall'angolo al vertice, la curva interseca l'asse. Di quei limiti ci saranno due generi: nell'uno all'aumentare delle distanze si passerà da forza repulsiva ad attrattiva; nell'altro, da forza attrattiva a repulsiva. In entrambi i generi, se solo due punti, collocati nel vuoto immenso, fossero alla distanza di un limite, la conserveranno, non agendo lì alcuna forza che perturbi il loro stato. Ma nel secondo genere, se un punto venisse allontanato dall'altro o avvicinato all'altro anche di pochissimo, entrambi i punti acquisteranno nel primo caso una forza di allontanamento reciproco, nel secondo caso una forza di avvicinamento. Se poi questa cresce ininterrottamente, essi continueranno ad allontanarsi o ad avvicinarsi di moto accelerato, finché, oltrepassato il limite successivo, nel primo caso mutano la repulsione in attrazione, nel secondo caso l'attrazione in repulsione, e il moto comincia a rallentare, ed eventualmente viene invertito. Al contrario, nel primo genere di limiti i punti conserveranno la distanza, cosicché, se uno viene allontanato dall'altro anche di pochissimo, essi tornano ad avvicinarsi per forza attrattiva; se uno viene avvicinato all'altro anche di pochissimo, si allontanano per forza repulsiva. Per questo motivo chiamiamo limite di adesione questo primo genere.

23. Se la curva, intersecando l'asse in un limite di questo genere, fosse quasi perpendicolare a esso e si allontanasse moltissimo da entrambe le parti, in questo stesso limite l'adesione sarà fortissima; infatti, per quanto grande sia la velocità impressa a uno dei due punti, con la quale tenda ad avvicinarsi all'altro o ad allontanarsene, tutta quella velocità di spostamento verrà estinta immediatamente da quella forza grandissima, repulsiva nel primo caso e attrattiva nel secondo, che non permette un avvicinamento o un allontanamento reciproco, se non minimo o pressoché nullo. Se invece in quello stesso punto la curva fosse più inclinata verso l'asse, senza scostarvisi molto, da una parte e dall'altra del limite attrazione e repulsione saranno assai piccole, e –come è evidente – il limite sarà caratterizzato da un'adesione poco stabile. Anche con una forza piccola, quei punti potranno venire cacciati da quel limite e mossi di qua e di là anche oltre i limiti successivi.

24. Inoltre, fra i limiti di adesione potrà esserci un ordine qualunque, in modo che certi limiti più lontani siano, rispetto a certi altri più vicini, ugualmente forti o molto più forti o molto più deboli, secondo il diverso modo in cui la curva, sviluppandosi attorno all'asse, si allontani di qua e di là da esso; e in modo che gli intervalli fra due limiti successivi, la distanza di un arco di curva dall'asse, la sua curvatura e le sue pieghe varino in qualunque modo e in qualunque ordine.

25. Esposto tutto ciò in modo più esteso, affermo anzitutto questo: si tratta di cose assai facili da concepire. Qui non cerco ancora se le cose stiano così o se questo modo di agire sia conforme alla natura e ai fenomeni. Ciò che affermo è che, di tutte queste cose si concepisce un'idea assai chiara e distinta; e affermo pure che in tutte queste cose non c'è nulla di contraddittorio, nulla che comprenda una qualche contraddizione.

26. Ora, che da punti di tal fatta possano essere composte le particelle più piccole della materia, che possiedano sia impenetrabilità sia estensione (sebbene non continua) sia durezza e possano comporre masse più grandi del tutto simili ai nostri corpi, dotate delle stesse affezioni, capaci di destare in noi le medesime idee delle quali sono forniti i nostri corpi e che essi stessi suscitano: ciò mi sembra tanto evidente quanto la cosa più lampante. Poiché, infatti, abbiamo supposto che punti del genere, a distanze infinitamente ridotte, avessero forze repulsive che aumentano all'infinito, una forza infinita e divina è evidentemente necessaria affinché svanisca tutto quanto l'intervallo posto fra quei punti. Di conseguenza, soltanto per una forza Divina essi potranno occupare lo stesso spazio, cioè compenetrarsi. Dunque, punti diversi occupano necessariamente un diverso punto di spazio. Per questo motivo, saranno dispersi su uno spazio esteso e, se non giaceranno su una sola retta o su un unico piano[(g)], risulteranno diffusi su uno spazio esteso in lunghezza, larghezza e profondità; di qui, in particelle che si

---

[(g)] *Che questo caso sia infinitamente meno probabile di una dispersione in lunghezza, larghezza e profondità si dimostra facilmente dal fatto che in qualsiasi solido ci sono infiniti tipi di superfici curve, ciascuna delle quali per qualsiasi tipo può essere sostituita da un piano qualunque, e su qualsiasi piano ci sono infiniti tipi di curve, ciascuna delle quali per qualsiasi tipo può essere sostituita da una retta qualunque, esistente nel medesimo piano. Per questo motivo, i casi possibili di distribuzione non rettilinea sono infinitamente di più dei casi di distribuzione rettilinea, sicché per noi, anche astraendo la mente da ciò che abbiamo conosciuto attraverso i sensi, una distribuzione rettilinea è ancora infinitamente meno probabile di una dispersione in lunghezza, larghezza e profondità. Perciò da quella teoria si deduce positivamente che vi è un'estensione interpolata, che certo non è un puro nulla, sebbene lo spazio intermedio sia nulla, essendo costituita per mezzo di modi reali di esistenza [*«extendi» nell'originale, ma dev'essere «existendi»*] di punti, che a loro volta costituiscono una relazione reale fra distanze, come ho spiegato più dettagliatamente nella dissertazione* De continuitatis lege *e nei* Supplementa *all'opera di Stay, dove tratto di spazio e di tempo.*

formano da punti siffatti non vi sarà estensione continua; e tuttavia vi sarà un'estensione in lunghezza, larghezza e profondità.

27. Se, invece, due punti siffatti fossero collocati su qualche limite di adesione particolarmente forte, è evidente che conserveranno tale distanza. Infatti, se un terzo punto venisse collocato, rispetto a ciascuno di loro, alla stessa distanza a cui essi si trovano l'uno rispetto all'altro, cioè al vertice di un triangolo equilatero che abbia come base la distanza dei primi due punti, anche questo punto conserverà la stessa posizione relativa. In qualunque modo uno qualsiasi di questi tre punti muti il proprio posto relativo, necessariamente si allontanerà almeno da uno degli altri due o vi si avvicinerà; di conseguenza, per forza attrattiva o repulsiva torneranno velocissimamente alla precedente disposizione a triangolo equilatero. Lo stesso avverrà collocando un quarto punto a una distanza uguale a quella che separa gli altri tre, cioè al vertice di una piramide, o piuttosto un tetraedro regolare avente per base quel medesimo triangolo. Questa piramide manterrà necessariamente la propria posizione, e la propria forma, e in qualunque direzione e con qualunque forza venga spinto un numero qualsiasi dei punti di quella piramide, purché quella forza di adesione, repulsiva al diminuire della distanza, attrattiva al crescere, sia molto maggiore della forza con cui si imprime il moto a quei punti, essi vengono riportati velocissimamente e con moto minimo al posto che occupavano in precedenza. Oscilleranno attorno agli angoli della piramide in modo da non allontanarsi se non di una quantità piccola a piacere. Si potrebbero determinare moltissime[(h)] altre disposizioni di punti nei quali, per la forza dei limiti, la posizione relativa si conserva. Ma qui ho scelto un caso estremamente semplice e facilissimo da capire, in cui sia grande quanto si voglia la durezza di una particella composta da punti.

28. Ora, appunto queste piramidi prime – anche supposta una stessa legge delle forze, comune a tutti i punti – possono essere assai differenti fra loro. Infatti, per formarle, punti diversi possono essere collocati in limiti di adesione diversi, sicché si avrà che distino fra loro secondo intervalli diversi e che abbiano una diversa forza di adesione; e anche che tale maggior forza sia associata a un minore o a un maggiore intervallo fra i punti. Inoltre, potrà esserci una differenza nella forza esercitata dall'intera piramide, risultante dalle forze di tutti i punti, come sarà chiaro più sotto.

29. Le singole piramidi eserciteranno a tutte le distanze le loro forze, prodotte dalle forze di tutti i punti messe assieme e riportate a una stessa direzione, e potranno essere considerate come punti caratterizzati da loro proprie leggi delle forze, rappresentate da curve apposite. Qualora nel centro di una piramide abbia origine una qualunque retta, la forza che tutta la piramide eserciterà su ciascuno dei suoi punti sarà rappresentata

---

[(h)] *Nella dissertazione* de Lumine *e nella* Synopsis physicae generalis *ne vengono mostrate altre, che hanno proprietà geometriche certamente assai eleganti e assolvono in modo mirabile allo scopo di spiegare la solidità e la fluidità.*

mediante le ordinate a una certa curva che sarà data quando sarà data la curva che rappresenti singolarmente le forze dei punti. Infatti, date le forze dei singoli punti della piramide, e ricondotte queste a una stessa direzione, sarà data anche la loro somma, che sarà la forza della piramide rappresentata mediante un'ordinata siffatta. Questa ordinata alla nuova curva, alle maggiori distanze dalla piramide, rispetto alle quali la distanza fra i punti sia piccolissima (sicché è pressoché nullo il divario causato dall'aver ricondotto le forze dei singoli punti alla stessa direzione), sarà all'incirca uguale alla somma delle ordinate di tutte le curve relative a ciascuno di quei punti.

30. Da ciò consegue un fatto notevolissimo. La forma di questa curva, a distanze alquanto maggiori dall'intera piramide, in qualche luogo discorda molto poco dalla forma di una curva che rappresenti la legge di uno solo di quei punti; invece, in altri luoghi (soprattutto dove i limiti siano a poca distanza gli uni dagli altri e sufficientemente forti) il divario sarà notevolissimo. Infatti, dove la curva di un punto qualsiasi ha quasi la stessa direzione dell'asse, la sua ordinata varia appena, anche se l'ascissa non varia di così poco; di conseguenza, lì le ordinate pertinenti le curve di tutti i punti che costituiscono la piramide saranno quasi uguali fra loro, perché le ascisse corrispondenti a quelle ordinate nelle singole curve differiranno al più di quella piccola distanza che separa quei punti. Per questo motivo, l'ordinata riferita a una curva che esprima la legge per l'intera piramide sarà quasi quadrupla dell'ordinata relativa a una curva attinente ai singoli punti, e sarà positiva o negativa a seconda che lo era quella. Quando, invece, rispetto all'asse la curva ha una direzione inclinata di un angolo poco diverso da un retto, con una minima variazione dell'ascissa l'ordinata varia moltissimo e, attorno a quei limiti, l'ordinata passa da positiva a negativa. Perciò, lì, alla stessa distanza dal centro della piramide, ordinate pertinenti alle curve dei singoli punti differiranno moltissimo, e in qualche posto alcune ordinate saranno positive, altre negative. Per questa ragione anche la loro somma varierà secondo una legge assai diversa da quella secondo cui variano singolarmente; sicché un arco di curva sarà assai diverso dagli archi da cui viene generato. Ed è abbastanza chiaro che questo divario della curva generata dev'essere massimo laddove i limiti saranno molto vicini gli uni agli altri, allontanandosi gli archi di una curva generatrice, compresi fra coppie di limiti, da una parte e dall'altra dell'asse. In tal caso, l'arco di una curva generatrice deve avere, almeno per gran parte della sua traiettoria, una direzione quasi normale all'asse stesso.

31. Inoltre, per rette diverse aventi origine nel centro della piramide, se le curve generate differiscono abbastanza da quelle generatrici, differiranno anche fra loro. Infatti, l'intero divario fra la curva generata e le generatrici scaturisce dalla diversa distanza di un punto preso sulla retta in base a cui si calcolano le ascisse della curva generata dai punti costituenti la piramide. Inoltre, questo divario fra distanze del genere sarà diverso per posizioni diverse di tale punto, preso in relazione alla piramide, cioè a seconda che il punto giaccia ora su questa ora su quella retta avente origine nel centro della piramide. Vi saranno, infatti, rette in cui tutti i punti presi avranno uguale distanza da tre punti di quella piramide; in altre essi avranno uguale distanza da due

punti soltanto; in altre ancora avranno distanze diverse da tutti i punti. Perciò si avrà che alla medesima distanza dal centro della piramide lo stesso punto, se posto da una parte verrà attratto fortissimamente, se posto dall'altra verrà fortissimamente respinto.

32. Il divario tra la curva generata pertinente l'intera piramide e le curve generatrici pertinenti i singoli punti sarà assai differente a seconda della diversa distanza in cui anzitutto saranno stati collocati i punti che formano la piramide, i quali possono essere collocati nel primo, nel secondo, nel terzo, o in qualsiasi altro limite di adesione; e, a parità di condizioni, quanto maggiore sarà stata la distanza dei punti gli uni dagli altri, tanto maggiore sarà il divario fra la curva generata e le curve generatrici, perché tanto maggiore sarà il divario fra le ordinate rispetto alle curve, innalzate da uno stesso punto. E anzi, se la distanza fra i punti fosse piccola rispetto alla curvatura della curva generatrice alle maggiori distanze (cioè in modo che da nessuna parte, se la differenza fra le ascisse è pari alla distanza fra gli stessi punti vi sia, alle maggiori distanze, una differenza apprezzabile tra le ordinate), in nessuna posizione si potrà apprezzare un divario fra la curva generata e le generatrici, e non vi sarà da nessuna parte un divario apprezzabile fra le curve generate che esprimono le forze che si hanno in rette diverse aventi origine nel centro della piramide.

33. Anche fra i limiti della curva generata potranno essercene alcuni molto più forti, altri molto più deboli, dei limiti della curva generatrice pertinente un unico punto, e fra i limiti di tali curve generate potrà esservi un divario notevolissimo. Del resto, sebbene l'ordinata di una curva generata risulti dalla somma di quattro ordinate della curva generatrice, tuttavia – come è evidente – deve accadere che le stesse ordinate della curva generata, corrispondenti ad alcune ascisse, siano minori delle singole ordinate corrispondenti ad altre ascisse della curva generatrice pertinente un unico punto. Perciò, a certe distanze tali piramidi attraggono o respingono meno che i singoli punti ad altre distanze.

34. Ora, una piramide più grande, di secondo ordine, potrà essere formata da quattro piramidi, o da tre piramidi e un punto, o da due piramidi e due punti, oppure da una piramide e tre punti collocati su limiti di adesione a distanza molto maggiore, rispetto alla quale la distanza fra i punti della piramide del primo ordine sia piccolissima. Se tali limiti di adesione della piramide del secondo ordine fossero meno stabili, essa avrà durezza leggermente inferiore: le piramidule più piccole o i punti che la compongono si allontaneranno da una parte e dall'altra dei suoi angoli; ma non si avvicineranno mai fra loro tanto da far sì che i punti dell'una risultino più vicini del dovuto ai punti dell'altra e perturbino lo stato rispettivo. Piramidule del secondo ordine, disposte su distanze molto più grandi, potranno comporre piramidi maggiori, del terzo ordine, con adesione, se si vuole, ancora minore, e così via, fino ad arrivare alle piramidi massime di cui è composta questa gran congerie incessantemente variabile dei corpi. Può anzi accadere che tutta questa massa di così tanti vivandieri al seguito, che scorgiamo in moto relativo pressoché immobili e soggetti a mutamenti di poco conto, si

trovi in limiti di adesione simili, motivo per cui il supremo Autore della natura avrà separato i sistemi l'uno dall'altro, ponendoli a così immane distanza.

35. Inoltre, curve che esprimono la legge delle forze per piramidi del secondo ordine divergeranno maggiormente, sia che si confrontino curve pertinenti piramidi diverse, sia che si confrontino curve pertinenti direzioni diverse di una medesima piramide. La prima cosa è evidente dal fatto che al crescere della distanza fra i punti cresce anche il loro numero; di conseguenza cresce sia il numero delle ordinate che compongono l'unica ordinata della curva generata sia il loro divario. La seconda cosa è evidente sia dal medesimo principio sia perché, se una piramide seconda è composta da quattro diverse piramidi del primo ordine o da tre piramidi e un punto, una legge sorgerà certo dalla parte in cui si trova quel punto o una qualche piramide determinata del primo ordine; un'altra dalla parte in cui si dispiega e comanda una qualsiasi altra piramide; un'altra ancora dalla parte che ha due o tre piramidi equidistanti. Ma tale diversità sarà assai maggiore in piramidi di ordini superiori, che possono venire variate in molti più modi; qui si presentano due classi di problemi: quelli diretti e quelli inversi. {Ecco il problema diretto:} Data una curva esprimente la legge delle forze per un unico punto, trovare le curve che rappresentino, in qualsiasi direzione data, la legge delle forze per una particella composta da un dato numero di punti collocati in un dato ordine; e al contrario: trovare il numero e l'ordine dei punti nonché la legge che esprime le forze di un punto qualsiasi, in modo che una particella così composta da quei punti abbia una data legge delle forze in direzioni date, e che tale legge sia rappresentata mediante curve che si avvicinano più che per qualsiasi distanza assegnata ad archi dati di curve date.

36. Il primo genere di problemi, quello dei problemi diretti, è assai semplice. Infatti, dati i punti limitatamente alla posizione, è data l'ordinata alle curve di ciascun punto, è data la riconduzione a una medesima direzione, è data la somma di tutte le forze così ricondotte; di conseguenza, è data l'ordinata per la curva richiesta. Ma poiché le leggi di quelle forze sono diverse a seconda delle differenti direzioni, la forza di una qualsiasi particella determinata non potrà essere espressa mediante un'unica curva. Anzi, il solo luogo geometrico rispetto a una superficie non basterà a rappresentare tutte le leggi di quel genere; tale luogo potrà esprimere solo leggi relative a tutte le direzioni situate su uno stesso piano, cioè mostrerà soltanto le forze di una particella, esercitate su un punto qualsiasi posto su un piano dato. Ma un'espressione del genere va oltre le forze dell'intera Geometria, la quale non ha una quarta dimensione, che sarebbe a ciò necessaria e che si potrà ottenere solo mediante formule analitiche.

37. I problemi del secondo genere, quelli inversi, almeno per la straordinaria quantità dei casi, trascende le forze della mente umana; solo il supremo Creatore della natura li vede tutti simultaneamente in un'unica occhiata, che, mentre creava il mondo, ebbe completamente sotto gli occhi l'intera varietà delle loro soluzioni posto che in quella creazione abbia fatto uso proprio di questo metodo.

38. Da quanto detto è sufficientemente chiaro quanta varietà possa esserci nelle particelle materiali, sebbene tutti i punti da cui esse sono composte siano assolutamente omogenei e dotati delle medesime forze. Ma che accadrebbe se certe classi di punti fossero tali che punti appartenenti a una medesima classe avessero una stessa legge delle forze, mentre punti appartenenti a classi diverse avessero leggi diverse? In tal caso la forza reciproca con cui due punti interagiscono dovrebbe essere rappresentata mediante la somma delle ordinate alle curve pertinenti l'uno e l'altro punto, le quali rappresentano le forze dell'uno e dell'altro. Che accadrebbe se tutti i punti avessero leggi e curve diverse, o almeno curve simili ma disuguali e determinate da parametri sempre diversi? Quanto maggiore sarà il divario fra le particelle materiali, fra gli ordini delle particelle e nella loro struttura? Certamente in tutti questi casi particelle del genere potranno, alle stesse[4] distanze, alcune attrarsi e altre respingersi fra loro; potranno respingersi ad alcune distanze e attrarsi ad altre; infine, alle stesse distanze, potranno attrarsi e respingersi vicendevolmente, a seconda della diversa posizione, sicché si avrà come effetto l'insorgere di moti alquanto diversi.

39. È sorprendente, inoltre, quanto sia facile derivare, da questa stessa costituzione delle particelle, un gran numero di proprietà e caratteri distintivi di svariati corpi, e quasi tutte quelle pertinenti la fisica generale insieme con moltissime di quelle pertinenti la fisica particolare. Anzitutto c'è la distinzione fra corpi elastici e molli, fra solidi e fluidi. Se due particelle sono collocate in un limite di attrazione o di repulsione tale che, in prossimità di esso, a distanze estremamente piccole da ambo le parti vi siano moltissimi altri limiti e si ipotizzi che, per l'azione di una forza esterna, avranno mutato un poco quello stato, spostandosi a distanze minori o maggiori, tali particelle certamente resisteranno a quella forza tutte le volte che passeranno {il limite} provenendo dalla regione in cui gli archi di curva esprimono repulsione, se saranno costrette ad avvicinarsi reciprocamente, e provenendo dalla regione in cui gli archi di curva esprimono attrazione, se saranno costrette ad allontanarsi; ma, raggiunti poi altri limiti, potranno rimanere a quelle nuove distanze, senza recuperare in alcun modo lo stato precedente. Se ciò che accade a due particelle accadesse a tutte le particelle componenti una certa massa, in essa si avrà lo stesso effetto che si osserva in un corpo molle, cioè si vedrà che al mutare della forma la massa resiste a tale variazione, ma non esercita alcuna forza percepibile per recuperarla.

40. Se infatti, per un tratto molto maggiore dell'asse, da una parte e dall'altra di un limite una forza – attrattiva da una parte, repulsiva dall'altra – continuasse ad agire su altri limiti sufficientemente lontani da entrambe le parti; se la massa si comprimerà più del dovuto e sarà costretta a cambiare forma, con le particelle che si avvicinano o si allontanano fra loro più del dovuto; tale massa non solo resisterà al cambiamento di forma, ma, per recuperarla, eserciterà incessantemente la stessa forza che ha esercitato per non cambiarla. Questo è appunto l'effetto dell'elasticità perfetta; in essa, se alcune particelle mutano i limiti e altre non li mutano, l'elasticità risulterà meno perfetta, e la

---

[4] Nel testo orignale «*iisem*», ma è certamente «*iisdem*».

forza per recuperare la forma rispetto a quella per mantenerla sarà minore in una certa proporzione, che dipende dal numero di particelle del primo e del secondo genere.

41. Si abbia ora un qualche limite di adesione fortissimo, tale che, tuttavia, il limite successivo non sia troppo lontano e dopo di esso l'arco di curva esprimente la forza repulsiva si allontani moltissimo dall'asse. La forza con cui le particelle tenderanno a conservare la distanza a cui sono collocate sarà massima. Se si applicano forze di grande intensità, quelle particelle non si avvicineranno né si allontaneranno reciprocamente di alcuna misura sensibile, sicché la massa non si comprimerà né si dilaterà di alcuna misura sensibile: ciò non sarà segno di elasticità nulla, bensì di elasticità massima. Ma se, per separare le particelle le une dalle altre, avrà agito una forza molto maggiore, capace di superare la massima attrazione fra quelle espresse dall'arco di curva che, dopo il limite, si allontana dall'asse, avendo superato anche le altre assai più facilmente e rapidamente, quelle particelle, ora spostate alla distanza della repulsione, continueranno spontaneamente ad allontanarsi moltissimo l'una dall'altra, ed eserciteranno grande forza per distanziarsi. Non si vede forse accadere la stessa cosa nell'acqua, che, pur applicando forze sufficientemente grandi, non si può comprimere né dilatare? E con quella forza assai maggiore, con cui le particelle ignee agiscono per separare le particelle d'acqua, essa non viene forse convertita in vapori che generano la massima elasticità, i quali sono spinti ad allontanarsi gli uni dagli altri a distanze immense con tanta forza quanta abbiamo visto sopra con Newton?

42. Se certe particelle esercitassero fra loro forza pressoché uguale in tutte le direzioni circostanti, potranno facilmente venir fatte ruotare l'una attorno all'altra, benché la distanza non possa cambiare, a meno che la forza non sia vinta da un'altra forza, in virtù di cui le particelle, avendo mutata la distanza, dovrebbero attrarsi o respingersi a vicenda; lo stesso accadrebbe con delle sfere levigate collocate sopra la superficie levigata della Terra, le quali verrebbero fatte girare da una forza minima, ma non potrebbero essere sollevate a meno che una qualche forza vinca la loro gravità. Una massa formata da particelle del genere potrà essere messa in moto da una piccola forza, ruotando le particelle l'una attorno all'altra in modo che in tale movimento la maggior parte delle distanze si conservino e alcune certamente mutino, ma non tutte contemporaneamente, allontanandosi in successione alcune particelle, mentre altre vengono fatte ruotare le une attorno alle altre. Tuttavia, una massa del genere avrà tenacità, e la somma delle forze con la quale una particella qualsiasi viene eccitata dalle altre potrà essere attrattiva, in modo che piccole masse di questo tipo tenderanno ad assumere forma sferica. E se da una massa del genere dovrà essere estratta qualche goccia di taglia maggiore, una superficie grande non si separerà mai tutta insieme, ma la separazione si avrà infine quando le particelle si saranno separate le une dopo le altre e si sarà indebolito quel filo (per così dire) per mezzo del quale la goccia che deve staccarsi aderisce ancora al resto della massa. Ma tutte queste cose le osserviamo nei fluidi, che coniugano l'adesione fra le parti con la fluidità stessa e conservano il proprio volume anche senza pressione alcuna. In realtà, se il limite di adesione fosse

molto poco stabile – ovvero le particelle si trovano a distanze di repulsione, trattenutevi da una qualche forza che le comprime – si avrà ancora un fluido, e in questo secondo caso esso sarà elastico quanto si voglia.

43. Se, invece, le particelle esercitano forze diverse in direzioni diverse, anche quando fossero collocate sugli stessi limiti, e inoltre un certo lato di una particella si trova rivolto verso un certo lato di un'altra, che risulterà tanto più attratta, l'una parte o l'altra si sarà spostata di qua o di là; tali parti acquisteranno poi un altro tipo di tenacità, per cui accade che conservano le loro posizioni reciproche, cioè non possono facilmente esser fatte girare le une attorno alle altre. Una massa del genere sarà estremamente tenace e manterrà la propria forma, né dal resto se ne potrà separare una porzione maggiore senza che tutte le più piccole particelle, poste su una certa superficie, non si separino quasi contemporaneamente, perciò a meno che la forza con cui bisogna separarle sia in grado di vincere la somma di quelle forze messe insieme. Appunto questo, com'è evidente, accade nei corpi solidi, soprattutto in quelli che cambiano facilmente forma, ossia cedono se battuti. Ma potrà anche aversi un altro tipo di solidità in virtù di un limite delle particelle assai stabile, per cui accade che forze anche grandi siano inferiori alle forze da vincere, con cui un numero anche piccolo di particelle resiste al cambiamento della distanza necessaria affinché una massa possa venire agitata come se fosse un fluido. Inoltre, con una qualche forza di grande intensità, che sposti le particelle dalle distanze dei limiti, facendo sì che mutino pure posizione o acquistino un moto attorno ai propri assi (per la qual ragione avviene che ora le forze, per la velocità di tale moto attorno all'asse, sono le stesse alle stesse distanze, cioè si succedono repentinamente le une alle altre), un solido potrà essere mutato in un fluido, che, al cessare di quella forza, torni nuovamente solido. Proprio ciò si osserva quando, con la forza del calore, i solidi si liquefanno; e ciò potrà forse avvenire in moltissimi altri modi.

44. Inoltre, quando una massa solida sarà stata[5] frantumata, alcune particelle salteranno un poco più in alto, altre si poseranno in basso, sia per una qualche piccola differenza di adesione sia perché la forza separatrice non sarà stata applicata proprio allo stesso modo alle singole particelle che dovevano essere separare. Ma allora, se la massa che è stata separata viene nuovamente portata al luogo da cui è stata separata, le particelle che saltano di più arriveranno ai limiti precedenti prima delle altre, avendole superate, e ora, fermatesi in una posizione di repulsione, non si avvicineranno ulteriormente, comprimendosi l'un l'altra, né permetteranno che le altre recuperino i limiti in cui si trovavano prima. Per questa ragione, l'adesione rimarrà estremamente piccola, assai facile da vincere e inavvertibile. Ma se le superfici dell'una e dell'altra massa venissero rese sufficientemente piane, potrà accadere che, comprimendole, molte particelle arrivino simultaneamente a limiti abbastanza stabili e quelle masse acquistino tenacità massima. Ciò si osserva nella separazione dei corpi solidi, e la tenacità, ossia l'adesione fra le parti, che altri (come Newton) attribuiscono a una forza attrattiva, massima

[5] Nell'originale «*furit*», ma è certamente «*fuerit*».

al contatto, e a un gran numero di contatti, si può indubbiamente riportare con miglior successo a un gran numero di limiti particolarmente stabili di questo genere, per altro senza contatto e a piccola distanza.

45. Ma sarà anche chiaro in che modo bisogna derivare la gravità universale. Infatti, se alle massime distanze a cui si trovano fra loro i pianeti le curve di tutti i punti si approssimano quanto più possibile a un arco d'iperbole di terzo grado, in cui le ordinate siano inversamente proporzionali al quadrato delle distanze, e le singole ordinate siano piccole ed esprimano attrazioni, occorrerà che, alle stesse distanze, tutte le particelle abbiano la stessa legge di attrazione, inversamente proporzionale al quadrato delle distanze, il che si ricava in maniera assai facile dal n. 30. Infatti, un arco di tale curva – come apparirà chiaro ai geometri – a quelle distanze deve avere una direzione poco diversa dalla direzione dell'asse; esso avrà appunto quell'asse come asintoto, e lì non vi saranno limiti. Per tale motivo, in questo caso (come abbiamo visto sopra), non vi sarà alcuna differenza sensibile fra una legge delle forze per una particella, che viene dalla somma delle forze di tutti i punti, e una legge delle forze per le singole particelle. Perciò, a quelle distanze, tutte le particelle si attireranno secondo l'inverso del quadrato delle distanze.

46. Sopra ogni altra cosa è qui da notare il fatto che tutto ciò si accorda meravigliosamente con questa teoria. Ogni volta che, a certe distanze, la legge delle forze sarà tale che, modificando le distanze in misura pari ai diametri delle particelle, la forza non muti sensibilmente – cioè (il che è lo stesso) a una differenza fra le ascisse pari alla distanza fra i punti estremi di una particella corrisponda una differenza fra le ordinate inavvertibile rispetto all'ordinata dell'intera particella –, altrettante particelle avranno alle stesse distanze la stessa legge, per i nostri sensi, che hanno i singoli punti; di conseguenza, rispetto a forze del genere esercitate a quelle distanze, le particelle dovranno essere tutte necessariamente omogenee. Ma qualora il cambiamento della distanza, cioè della differenza di ascissa pari al diametro di una particella, induca una variazione sensibile delle forze, cioè una differenza di ordinata non piccola rispetto all'ordinata dell'intera particella, a quelle stesse distanze la legge per le particelle differirà sempre dalla legge per i singoli punti, e le leggi per altre particelle differiranno fra loro, e le forze stesse agiranno in altro modo secondo altri lati delle particelle. Un primo aspetto riguarda indubbiamente la gravità universale, che si esercita a distanze rispetto alle quali i diametri delle singole particelle sono quanto mai piccoli, e che, modificando appena la distanza, non muta[6] sensibilmente. Perciò, rispetto alla gravità universale tutta la materia dev'essere necessariamente omogenea, e la gravità stessa dev'essere in proporzione composta: direttamente proporzionale al numero dei punti, cioè alla massa, e inversamente proporzionale al quadrato delle distanze. Un secondo aspetto riguarda il caso in cui le forze, modificando pochissimo le distanze, mutano moltissimo: in tal caso i limiti sono frequenti e le forze più grandi, cioè l'allontanamento

[6] Nell'originale «*mutantur*», ma dev'essere più verosimilmente «*mutatur*».

delle curve dall'asse è massimo. Perciò, le forze che le particelle esercitano reciprocamente – quelle che hanno luogo negli effetti chimici, nella formazione dei metalli e delle piante, nella genesi di tutti i corpi derivante dai moti di particelle a distanze il cui rapporto rispetto ai diametri di quelle particelle sia piccolo – saranno assai diverse dalle forze dei singoli punti e fra loro; e a quelle distanze tali particelle, rispetto a effetti di tal fatta, dovranno essere massimamente eterogenee.

47. È pure evidente che, se la distanza di un corpo non è così grande rispetto alla massa attorno a cui gravita, la legge di gravità può scostarsi leggermente dalla legge dell'inverso del quadrato della distanza, sebbene a distanze maggiori essa vi corrisponda in maniera pressoché esatta per i nostri sensi. Infatti, poiché le forze delle singole particelle non devono essere esattamente, bensì solo approssimativamente proporzionali all'inverso del quadrato delle distanze, potrà accadere che la somma delle differenze (unita anche al divergere di un arco di curva che, a quella distanza, non si approssima ancora a sufficienza all'arco d'iperbole le cui ordinate sono inversamente proporzionali al quadrato delle distanze) faccia sì che la legge di gravità da lì emersa si discosti un poco dalla legge dell'inverso del quadrato delle distanze, e che quello scostamento sia del tutto impercettibile. In tal modo si potrà conciliare con la gravità universale anche qualche anomalia che eventualmente si trovi nei moti della luna, nella precessione degli equinozi (quando quei problemi saranno stati risolti in modo abbastanza sicuro e preciso), e assai più significativa nelle maree e nella forma della Terra, dove la forza agisce a distanza assai minore.

48. In questa composizione di masse da particelle del genere potrà accadere che innumerevoli masse dello stesso volume occupino il medesimo posto, senza alcuna vera compenetrazione. Infatti, uno spazio continuo offre posto a un numero infinitamente infinito di masse. Si ha allora che una massa può piombare dentro un'altra e passarvi attraverso senza alcuna vera compenetrazione, senza alcun cambiamento relativo delle parti dell'una o dell'altra. Infatti, poiché tale spazio è infinitamente più grande della somma dei punti, il caso in cui, incontrandosi due masse, alcuni punti si urtassero, sarebbe infinitamente più improbabile del caso in cui non vi fosse alcun incontro fra punti; perciò, il primo caso non può mai darsi. E ciò stesso, per un altro principio, renderebbe impossibile una vera compenetrazione tra i corpi. Ma anche questa sorta di penetrazione fisica verrà impedita dalle forze repulsive fra le particelle, che comunque si estendono a una qualche distanza. Se, invece, le particelle fossero particolarmente sottili, tanto che la somma delle forze diventa assai piccola, mentre la velocità è grande, assai più facilmente una massa piomberà dentro un'altra e l'attraverserà, lasciando praticamente intatto lo stato delle particelle di entrambe. Ma non si osserva appunto questo nei raggi di luce che viaggiano liberamente in ogni direzione, senza che gli uni perturbino il moto o la disposizione delle parti degli altri? E non è forse questo il motivo per cui si è resa necessaria una così immensa e straordinaria tenuità dei raggi di luce, di cui diremo qualcosa più in basso, e una velocità tanto smisurata?

49. Quanto detto riguarda la natura e la distinzione fra i corpi. Si potrebbero aggiungere molte altre cose, che riguarderebbero la spiegazione di fenomeni particolari; tuttavia, ciò basta come esempio, e da qui è facilissimo dedurre moltissime altre cose. Ma in modo altrettanto facile da questi stessi principi vengono derivate e in accordo con essi promanano le leggi generali dei moti. La forza d'inerzia delle masse segue evidentemente dalla forza d'inerzia dei punti. E segue anche questo: data una direzione qualunque, la quantità di moto in quella direzione, considerando come negativi i moti che avvengo in quella opposta, si conserva sempre uguale nell'universo. Infatti, tutti i moti si conservano per la forza d'inerzia, finché non vengono modificati da altre forze. Inoltre, tutte le forze, fra singole coppie di particelle, agiscono ugualmente su parti opposte; perciò, se singole coppie di punti, restando le altre in quiete, si muovessero da sole per quelle forze con cui si attraggono o si respingono reciprocamente, i moti prodotti secondo una qualunque direzione sarebbero uguali ai moti prodotti secondo quella opposta; di conseguenza, considerati questi come negativi, la somma di tutti i moti prodotti svanirebbe, e rimarrebbe la somma precedente. Se, però, uno stesso punto venisse sollecitato simultaneamente da più forze, simultaneamente obbedendo a tutte, alla fine di un tempuscolo esso si troverà in quel punto di spazio in cui si troverebbe se avesse avuto singolarmente moti corrispondenti a quelle forze, gli uni dopo gli altri, descritti in successione da rette della stessa grandezza e direzione richieste dalle singole forze agenti separatamente su quel medesimo punto: in ciò consiste questa composizione dei moti. Pertanto, la somma dei moti che hanno origine, secondo una qualunque direzione, da tutte le forze agenti simultaneamente, allo stesso modo sarà uguale alla somma dei moti secondo la direzione opposta, eliminati i quali, dopo l'azione di tutte le forze, rimarrà – secondo la stessa direzione a piacere – la medesima quantità di moto che c'era stata prima delle azioni di tali forze. Poiché ciò riguarda singoli tempuscoli, è evidente che, nell'universo, la somma dei moti – presi secondo una stessa direzione, in modo che i moti nella direzione opposta possano essere considerati negativi – debba sempre conservarsi uguale, senza venire minimamente perturbata dalle azioni reciproche delle particelle.

50. Neppure le forze libere che l'anima esercita impediscono una conservazione del genere. Infatti, dall'esperienza risulta che noi non possiamo fare uno sforzo in una direzione senza farlo in egual misura nell'altra. Se lo sforzo da fare è modesto, lo bilanciamo con la gravità del nostro corpo: piegando il corpo all'indietro, se trasciniamo qualcosa verso di noi; piegandolo in avanti, se la spingiamo. Giacché, se uno sforzo dovesse essere maggiore di quanto il peso del corpo possa equilibrare a sufficienza, spingiamo con i piedi il suolo o una parete. Da ciò risulta che anche le forze libere dell'anima producono, sui punti materiali, moti sempre contrari e uguali.

51. Ma segue anche questo: lo stato del centro di gravità comune a quanti e quali punti si vogliano non è perturbato dalle loro interazioni reciproche, ma si mantiene tale e quale sarebbe stato se quelle forze non avessero agito. Infatti, dalla nozione stessa di centro di gravità comune è evidente che, preso un piano qualsiasi che giaccia oltre tutti i punti, la distanza del centro di gravità da quel piano, moltiplicata per il numero dei

punti, è uguale alla somma delle distanze di tutti i punti da quello stesso piano. Perciò, un avvicinamento del centro comune di gravità a tale piano, moltiplicato per il numero dei punti, è uguale alla somma degli avvicinamenti di tutti i punti, sottratti tutti gli allontanamenti; cioè, il moto del centro comune di gravità secondo una direzione qualunque, moltiplicato per lo stesso numero di punti, è uguale alla somma dei moti di tutti i punti secondo quella medesima direzione. Di conseguenza, poiché tale somma dei moti non cambia in virtù delle azioni reciproche, ma si conserva tale e quale sarebbe stata se le stesse azioni fossero state nulle, non cambierà neppure il moto del centro comune di gravità secondo una stessa direzione qualunque, moltiplicato per quel numero; dunque, quel moto rimarrà assolutamente uguale a quello che prima era stato considerato in una direzione qualunque; e se tale moto fosse stato nullo in assenza di azioni reciproche, dovrà ugualmente essere nullo in loro presenza. Per tale ragione lo stato del centro comune di gravità non verrà perturbato da azioni reciproche.

52. Da qui si deduce facilmente che il centro comune di gravità di un numero a piacere di punti, disposti in qualunque ordine in quante masse si vogliano di qualunque densità, mossi da moti qualunque e sollecitati da azioni reciproche qualsiasi, escluse azioni dall'esterno, dovrà sempre perseverare nel medesimo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme in cui si sia trovato una volta. Pertanto, il suo stato non verrà perturbato da azioni reciproche, ma sarà tale e quale sarebbe se esse non vi fossero affatto. In tal caso, però, tutti i punti continuerebbero a muoversi di moto rettilineo uniforme o rimarrebbero in quiete per forza d'inerzia. Se fossero tutti in quiete, sarebbe indubbiamente in quiete anche il centro comune di gravità, com'è evidente; se, invece, alcuni o tutti i punti si muovessero e si immaginasse un piano qualunque, posto oltre tutti i punti, gli avvicinamenti e gli allontanamenti dei singoli punti a quel piano, effettuati in tempi diversi, sarebbero proporzionali a quei tempi; il che si ricava facilmente dal moto uniforme di ciascun punto. Perciò, anche la somma di tutti gli avvicinamenti e quella degli allontanamenti, nonché la differenza tra le due somme, saranno proporzionali ai tempi. Di conseguenza, anche l'avvicinamento del centro comune di gravità a quel piano – che, moltiplicato per il numero dei punti, è uguale alla somma degli accostamenti, sottratti gli allontanamenti – sarà proporzionale ai tempi. Ora, si dimostra facilmente che, se un qualche punto si muovesse di moto non uniforme o curvilineo, il suo avvicinamento a un qualche piano non sarà proporzionale ai tempi; e si ottiene più facilmente, per dimostrazione geometrica diretta[7], che, se un punto si muove in modo che gli avvicinamenti a tre piani qualunque siano proporzionali ai tempi, il suo moto dev'essere rettilineo e uniforme. Sarà dunque rettilineo e uniforme il moto del centro comune di gravità, escluse le azioni reciproche. Perciò, sarà rettilineo e uniforme anche nel caso in cui agissero; ed è qui evidente che anche il caso in cui la velocità del moto sia nulla – cioè il caso in cui il centro comune di gravità sia in quiete – è compreso nel caso in cui svanisce la somma degli avvicinamenti di tutti

[7] Due parentesi vuote nell'originale, probabilmente per un refuso.

i punti a uno qualsiasi dei tre piani, sottratti gli allontanamenti, essendo uguali la somma degli avvicinamenti e quella degli allontanamenti. Questa è, a mio giudizio, una dimostrazione abbastanza comoda e generale del quarto corollario alle leggi, nel primo libro dei *Principia* di Newton[8].

53. Analogamente viene introdotto il principio di uguale azione e reazione. Infatti, per quante volte e in qualsiasi modo due masse agiscano l'una verso l'altra, le somme delle loro azioni saranno uguali e contrarie, e la velocità del centro di gravità dell'una, acquisita secondo una qualunque direzione, sta alla velocità del centro di gravità dell'altra, acquisita secondo la direzione opposta, in rapporto inverso al numero dei punti che compongono le rispettive masse, cioè in rapporto inverso alle masse stesse. Infatti, i singoli punti della prima massa si muoveranno secondo una direzione qualunque per l'azione dei singoli punti della seconda, tanto quanto i punti della seconda si muoveranno sotto l'azione di quelli della prima; ciò – proprio come al n. 46 – varrà tanto se si considerassero forze singole, agenti separatamente fra due punti qualsiasi, quanto se in ciascun punto si prendesse il rapporto dei moti composti dal moto cui tendono tutte le azioni di tutti i punti dell'altra massa. Perciò, la somma di tutti i moti generati in una massa secondo una direzione qualunque sarà uguale alla somma di tutti i moti generati nell'altra massa secondo la direzione opposta. Per tale ragione, anche il moto del centro di gravità della prima massa, generato dalle azioni dei punti della seconda massa, secondo una direzione qualunque, moltiplicato per il numero dei punti della prima massa, sarà uguale al moto del centro di gravità della seconda massa, generato in direzione opposta dalle azioni dei punti della prima massa, moltiplicato per il numero dei punti della seconda massa. Pertanto, il moto del primo centro sta al moto del secondo – cioè la velocità dell'uno sta alla velocità dell'altro – come il numero dei punti della seconda massa sta al numero dei punti della prima, ossia come la seconda massa sta alla prima. E neppure le azioni che le particelle di una stessa massa eserciteranno l'una sull'altra impediranno queste velocità dei centri di gravità.

54. Da questo principio si deducono assai facilmente le leggi dell'urto fra corpi, quando essi s'incontrano (ciò che è stato mostrato da Huygens e Wallis), leggi che io nella dissertazione *De Viribus Vivis* ho poi dedotto con un metodo assai rapido. Anzi, sono assolutamente convinto che da quegli stessi principi sia facile dimostrare che in natura non c'è alcuna necessità di forze vive, non ve n'è traccia alcuna, dipendendo tutti i fenomeni dai soli moti dei punti e dipendendo tali moti dalle azioni di quelle forze

---

[8] Riportiamo qui il corollario menzionato da Boscovich: «Il centro comune di gravità di due o più corpi non muta il proprio stato di moto o di quiete per azioni recirpoche fra i corpi; perciò, il centro comune di gravità di tutti in corpi agenti gli uni sugli altri (escluse azioni e impedimenti esterni) o è in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme». (I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, editio tertia aucta & emendata, Londini, apud Guil. & Joh. Innys, Regiæ Societatis typographos, 1726, «Corollarium IV», p. 19.)

attrattive e repulsive che producono, nei singoli punti, velocità proporzionali a loro e al tempo in cui esse agiscono.

55. Da tutto ciò si ricava evidentemente che da punti assolutamente indivisibili e, se si vuole, assolutamente omogenei, senza alcuna quantità continua reale, possono essere composte particelle materiali mobili, dure, ed estremamente tenaci quanto al loro stato rispettivo, cioè quanto alla forma, impenetrabili, estese in lunghezza, larghezza e profondità, dotate di forze assai diverse, con le quali agiscono reciprocamente, assai simili a particelle materiali ammesse da altri; da tali particelle possono essere composte masse analoghe ai nostri corpi e dotate di proprietà molto simili, tali che è immediato dedurre dalla loro costituzione tutto ciò che riguarda la fisica generale e molte di ciò che attiene alla fisica particolare, cui si potrebbero aggiungere moltissimi degli effetti chimici spiegati da Newton, sulla scorta di forze assai simili, nell'ultima questione dell'*Optice*, dalla quale si potrebbero qui riportare trascritte intere pagine, che parimenti sarebbero adatte alla questione. Per tale motivo, evidentemente, si conclude che può darsi che questi nostri corpi siano composti proprio in tal modo.

56. Né le argomentazioni geometriche, che dimostrano la divisibilità all'infinito dello spazio, costituiranno minimamente un ostacolo per questa composizione dei corpi. Infatti, fra punti del genere giacerà sempre un qualche spazio, e la divisibilità, l'incommensurabilità e simili varranno per gli intervalli fra i punti, che immaginiamo caratterizzati da una quantità continua; non invece per questi punti, che occuperanno solo i termini degli intervalli e solo punti matematici di spazio.

57. Né si potrà opporre che in tal modo la geometria verrà tolta di mezzo perché è stata abolita una quantità continua vera e reale. Infatti, possiamo anche ammettere che rimanga l'estensione continua dello spazio, attorno la quale soltanto si eserciti la Geometria, comunque si presenti, in metafisica, la natura dello spazio. Ciò è condiviso da tutti; e soprattutto è condiviso che i moti continui dei punti riportano a linee continue, i cui moti forniscono poi l'idea di superficie, dai cui moti proviene l'idea di solido – cose adattissime alle speculazioni geometriche.

58. Ma non costituirà neppure un ostacolo il fatto che ci sembra di vedere con gli occhi e di toccare con le mani superfici continue dei corpi. Troppo ordinario è questo pregiudizio, e indegno di un filosofo. Risulta ormai evidente che la struttura dei corpi è discreta in tutte le direzioni, cosicché, nelle lamine di minor spessore che li costituiscono, la luce passi liberamente in ogni direzione. Inoltre, gli intervalli più piccoli non cadono in alcun modo sotto i nostri sensi; ma non possiamo certamente affermare per questo che le cose che non si vedono non ci sono, a meno di consentire più del lecito a diffusi pregiudizi.

59. Né è più forte l'argomento che nell'idea stessa di corpo sia inclusa l'idea di estensione continua. Da dove quest'ultima abbia tratto origine è stato chiarito a sufficienza più sopra. Non è stata la natura a generarla in noi, ma noi stessi ce la siamo formata

dall'infanzia per continua applicazione dei sensi e attraverso una meno cauta riflessione della mente. Quanto all'idea di quantità continua dei corpi, essa si è originata soltanto dall'osservazione di corpi privi di separazione percepibile fra gli intervalli. Poiché risulta evidente che nei nostri sensi devono aver luogo impressioni del tutto uguali sia che particelle dotate di estensione continua, che colpiscono l'apparato sensoriale, gli imprimano un moto, producendo come effetto, in tale contatto, l'impenetrabilità, sia che tale moto venga impresso da particelle costituite da punti indivisibili, portate a un qualche limite di fortissima adesione, in forza del quale il moto non può continuare, a meno che un'altra particella lasci il proprio posto. È certamente evidente che quell'idea {di estensione continua} non dipende dalla natura stessa dei corpi né ce ne fornisce un'immagine; bensì prende origine da pregiudizi avventati, che devono venire corretti con un giusto modo di ragionare.

60. Infine, non ha alcuna validità l'argomento che, a quanto pare, non sembra esservi proprio ragione perché forze del genere possano esercitarsi a distanza fra le particelle, né queste avrebbero alcuna causa fisica e meccanica. Soprattutto i cartesiani sono soliti porre quest'obiezione, non riconoscendo nessun'altra trasmissione del moto all'infuori di quella che avviene per urto. Ora, per prima cosa chiedo questo: quando una particella solida e continua ne incontra un'altra solida e continua, in che modo, per quale causa, si trasmette il moto a quella particella? {I cartesiani} diranno certamente che si tratta dell'impenetrabilità, che impedirebbe il moto della particella urtante, essendo la seconda particella immobile. Ma l'impenetrabilità stessa in che cosa consiste? Quale ne è la causa? Bisognerà ammettere che è la natura dei corpi o la libera legge di Dio o qualcosa che, alla fine, abbia lo stesso risultato. Se, infatti, non si fa ricorso, da ultimo, alla natura stessa delle cose o alla libera legge del creatore, si procederebbe all'infinito attribuendo cause delle cause e ragioni delle ragioni, oppure si compirebbe ciò che si chiama un circolo vizioso. Pertanto, è la natura dei corpi o la libera legge del creatore a richiedere che i corpi non occupino lo stesso posto, ma, entrando in contatto, l'uno ceda il posto all'altro. Però, si potrà rispondere ugualmente proponendo, con pari diritto, queste forze attrattive e repulsive. La natura dei punti o la libera legge di Dio richiedono che quei punti si avvicinino l'uno all'altro o si allontanino l'uno dall'altro, a seconda delle divere distanze a cui si siano trovati, in accordo con la legge espressa dalle ordinate a una curva data, in se stessa semplicissima. Non c'è ragionevolmente alcunché, nella natura delle cose, che convinca che l'un modo di agire debba essere preferito all'altro, né la natura dei corpi o la libera legge del creatore possono esibire una disposizione a prescrivere il primo anziché il secondo modo.

61. Ma c'è una risposta ancor più efficace. Nel passo che abbiamo addotto sopra, Newton mostra, con argomenti assai solidi, che in non pochi casi si ha generazione di moti mediante forze attrattive o repulsive, che inoltre agiscono senza contatto e a distanza fra le particelle. Chi avrà considerato attentamente tutte le proprietà della luce nella sua *Optice* riconoscerà ciò in modo evidentissimo nelle particelle di quella luce. Lo stesso provano in maniera assai facile molti altri esempi. Per tacere del resto, si consideri il notevolissimo moto particellare che si origina nei corpi esposti al fuoco di

uno specchio ustorio. Quell'intero moto non è affatto prodotto dall'impatto della luce su quella sostanza che viene così agitata, bensì dalle forze con cui quelle particelle interagiscono, le quali si trasmettono a quelle particelle che, per un'azione debolissima dei raggi, vengono scacciate da un certo equilibrio e dal limite delle forze, essendo mutata leggermente la loro posizione e la loro distanza reciproche. Ciò si ricava evidentemente dal fatto che il centro di gravità di una massa che viene agitata non viene assolutamente messa in moto nella direzione secondo cui arrivano i raggi, almeno stando ai nostri sensi; invece, l'intera massa rimane nello stesso posto finché dura quel moto interno delle particelle. Inoltre, dall'uguaglianza di azione e reazionesi dimostra ciò che abbiamo visto poco sopra, cioè che lo stato del centro comune di gravità non viene mutato solo nel caso in cui le particelle interagiscono con forze reciproche; se, invece, agisse un agente estraneo, esso viene modificato in modo che la velocità del centro di gravità del corpo urtante, da esso perduta, rispetto alla velocità acquisita dal centro di gravità di quello urtato, sia inversamente proporzionale alle masse di quegli stessi corpi.

62. Si ha, dunque, che in natura esistono forze di questo genere, che agiscono senza urto e modificano lo stato dei corpi. Quanto a coloro che affermano nella maniera più forte che l'unico modo di trasmettere un moto, conforme a natura e ragione, è quello che avviene per urto al contatto, vorrei che mostrassero anche un solo caso in cui possa essere assolutamente evidente che un moto venga trasmesso realmente così. Senza dubbio non troveranno nulla; sicché anch'essi, se per breve tempo mettessero da parte i pregiudizi, non tarderanno a riconoscerlo. Infatti, non lo potranno dimostrare in base alla natura dei corpi, poiché tali cose si palesano solo attraverso i sensi, né dai fenomeni potranno derivare ciò che ci appare in tutto e per tutto allo stesso modo, sia che si giunga a contatto, sia che una forza repulsiva agisca alle minime distanze. Ed è tipico di chi ignora del tutto il metodo del corretto ragionamento e i principi di base persino della logica naturale inferire determinatamente, da ciò che è indifferente rispetto a due opposti e che può provenire ugualmente da entrambe, l'una o l'altra opzione. Io, però, fra poco, con ragionamento corretto – mi pare – e ben solido, proverò che la trasmissione dei moti avviene non solo talvolta, ma sempre, senza urto, senza contatto, mediante forze del tipo qui illustrato; forze agenti, inoltre, a una certa distanza fra i corpi. Ma mi vedo trascinato, a poco a poco, alla mia seconda proposizione, che ora mi accingo a giustificare.

63. Intanto, tuttavia, tutto ciò che è stato detto fin qui basta a provare, se non m'inganno, quella prima proposizione in cui avevo affermato: *Non c'è alcun argomento in grado di dimostrare che la materia abbia estensione continua, e che non sia piuttosto costituita da punti indivisibili, distanziati fra loro da un certo intervallo; né c'è ragione, messi da parte i pregiudizi, che induca a considerare tale estensione continua anziché una composizione di punti indivisibili e inestesi, che non costituiscono alcun continuo esteso*. Sia la composizione dei corpi da noi proposta una pura ipotesi; ci toccherà certamente di dimostrare che l'estensione continua della materia – che finora quasi tutti i filosofi hanno ritenuto cosa certissima, considerandola una proprietà richiesta

dall'essenza stessa e dalla natura dei corpi, e a essi congenita – sia, del pari, una pura ipotesi, sorta unicamente da un pregiudizio troppo affrettato e formatasi nelle nostre menti.

64. Ma che accadrà se quella che finora abbiamo trattato come un'ipotesi puramente arbitraria, *disponesse di argomentazioni sufficientemente robuste, che provassero che bisogna assolutamente preferire questa composizione di punti indivisibili rispetto all'estensione continua*? Questa era la mia seconda proposizione; mi accingo a spiegarla e rafforzarla, per quanto mi è possibile, purché la dissertazione non aumenti più del dovuto.

65. Il principale argomento che mi ha convinto quasi completamente di questa costituzione della materia è quello che, nella dissertazione *De viribus vivis*, mi ha condotto alla seguente idea, affine a quella presentata qui e con essa necessariamente connessa: ogni trasmissione di moti avviene senza che i corpi entrino in un contatto, che in quell'opera ho chiamato matematico, tale da escludere totalmente ogni intervallo; inoltre, in nessun caso i corpi o le loro parti si toccano l'un l'altra con questo contatto matematico, tale da escludere totalmente ogni intervallo.

66. La forza dell'argomento proviene tutta da un principio, da molti accolto e corroborato per induzione la più ampia possibile: in natura nulla avviene per salto, ma tutte le cose che, crescendo o diminuendo, passano da una grandezza all'altra, devono necessariamente transitare attraverso tutte le grandezze intermedie[(i)]. Inoltre, senza pericolo di errore, mi pare di poter affermare con assoluta certezza queste due cose: è un'induzione amplissima quella da cui si ricava tale principio, giacché ovunque è possibile sperimentarne la verità, lì si scopre il vero, senza che si possa produrre alcun esempio in cui esso venga a mancare: allora, ammesso questo principio, viene dimostrata la mia concezione, che esclude interamente ogni contatto matematico fra i corpi, cosicché alla forza di una dimostrazione evidentissima non si richieda nient'altro.

67. E per cominciare dall'argomento precedente, è certo evidente che in qualsiasi moto non si può mai arrivare da un punto a un punto distante, se non si passa, con moto continuo (almeno per i sensi), per i punti intermedi, così da giungere senza salto anche da un istante a un altro, posto a distanza. Ammetto che vi sia continuità (che non ammetto in alcun modo per l'estensione della materia) nel moto continuo di un punto

---

[(i)] *Di ciò che riguarda la prima delle proposizioni seguenti, cioè che niente in natura avviene per salto, mi sono occupato più dettagliatamente – come ho accennato sopra – nella dissertazione* De continuitatis lege*, dove ho ricavato quel principio non soltanto per induzione, ma anche da argomenti metafisici, a mio giudizio solidissimi. Inoltre, di quel principio d'induzione tratto in maniera assai più accurata in un intero articolo nei* Supplementa *a Stay, dove ci sono parecchie cose attraverso le quali si soddisfa abbondantemente a non poche difficoltà che, in un principio di questo tipo, vengono obiettate alla mia teoria.*

trasferito lungo una certa linea tanto in rapporto al luogo quanto in rapporto al tempo. Essa è certamente in accordo con gli esperimenti, per quanto è possibile osservare, e non c'è nulla che convinca o che faccia sospettare del contrario. Perciò, tutte le cose la cui grandezza aumenta per moto locale passano da una quantità all'altra attraverso le quantità intermedie, senza salto. Sono senz'altro innumerevoli le cose di questo genere: tutte le piante, che, per esempio non arrivano in alcun modo dall'altezza di un palmo all'altezza di dieci palmi senza che vi saranno state tutte le altezze intermediem (almeno per i sensi). La stessa cosa capita, in geometria, con qualunque funzione dei luoghi geometrici.

68. Da qui, anche nella produzione di velocità, in meccanica, consegue che nessun mobile passa da un qualche grado di velocità alla quiete o a una velocità maggiore, se non passando per tutte le velocità intermedie. Ed è proprio questa la ragione per cui ormai la maggior parte degli studiosi di meccanica elimina dalla natura i corpi cosiddetti detti duri, i quali, cioè, non possono minimamente mutare la propria forma; se due corpi uguali siffatti si scontrassero sulla retta che li congiunge con velocità uguali e opposte, nello stesso istante in cui si toccano essi dovrebbero perdere interamente le loro velocità ed essere portati in stato di quiete con un salto. Costoro sostituiscono ai corpi duri quelli elastici oppure quelli molli, nei quali, mentre le parti si introflettono per compressione, la velocità muterebbe a poco a poco attraverso tutti i gradi intermedi.

69. Però, una sostituzione del genere non evita in alcun modo la difficoltà. Le prime parti assolutamente solide e continue, se ce ne sono, o le prime superfici, o i primi punti in cui avviene il contatto, dal quale ha inizio l'azione dell'impenetrabilità, devono perdere per intero la velocità proprio nello stesso istante, oppure, se all'uno rimane una qualche velocità residua, l'altro deve retrocedere, giacché l'uno e l'altro insieme non possono avanzare oltre senza compenetrazione delle parti di ciascun corpo. Si avrà, dunque, per quelle parti o superfici o punti, un salto da una qualche velocità finita alla quiete senza passare per le velocità intermedie, il che, ammessa quella legge di natura, è assurdo. Per altro, ciò avverrebbe in ogni urto fra corpi. Quelle due velocità comunque disuguali dei punti che si toccano per primi dovrebbero sempre ridursi del tutto e istantaneamente, nello stesso contatto, alla medesima velocità, perdendone una gran parte o anche volgendola nel verso opposto. Ciò risulterà sufficientemente chiaro a chi vi riflette, ed è certo facilmente dimostrabile anche sulla base della legge d'impenetrabilità. Invece, qualora i corpi si urtino trasversalmente, è facile dimostrare che, in quel primo contatto, devono mutare per salto tanto la velocità quanto la direzione del moto di uno dei due punti urtanti oppure di entrambi.

70. Pertanto, i due corpi non giungono al contatto con le stesse velocità che avevano avuto prima che questo avvenisse. Invece, le loro prime particelle mutano a poco a poco le proprie velocità precedenti al contatto, in modo che tutta la loro differenza, o prima del contatto o almeno al contatto stesso, si annulli completamente. La causa – qualunque infine essa sia –, che genera siffatta mutazione delle velocità, si chiama forza

repulsiva: essa, infatti, produce velocità contrarie nell'una e nell'altra particella, per la legge di azione e reazione uguali, per le quali la velocità relativa di avvicinamento reciproco diminuisce continuamente.

71. Ma che questa velocità relativa prima del contatto debba venire estinta totalmente, e che una forza repulsiva aumenti all'infinito al ridursi della distanza, si dimostra nel modo seguente: nel caso, di facilissima comprensione, di due corpi uguali che vanno incontro l'uno all'altro con velocità uguali e opposte, supponiamo che la velocità data di entrambi si estingua interamente al contatto. Se si urtano fra loro con velocità ancora maggiore, dovranno giungere al contatto prima di aver perso tutta le velocità. Infatti, la forza repulsiva che, nel primo caso, aveva estinto interamente la velocità fino a quel contatto, genererà ora un effetto minore nei corpi mossi più velocemente, giacché il tempo è diminuito. Pertanto, le velocità residue in tale contatto si estingueranno per salto. Affinché ciò non avvenga occorrerà che, nel caso precedente, quella velocità sia stata estinta prima del contatto, perché ora possa venire estinta tutta gradualmente nell'ulteriore avvicinamento. Poiché lo stesso discorso varrebbe per qualsiasi velocità grande a piacere, con cui i corpi si avvicinano fra loro, la forza repulsiva dovrà essere tale da poter estinguere prima del contatto qualunque velocità data; e, di conseguenza, tale da aumentare all'infinito quando le distanze sono infinitamente piccole.

72. Ora, a distanze maggiori scopriamo, mediante esperimenti, quell'attrazione reciproca che è comprovata da tutti gli argomenti che provano la gravità universale newtoniana. Pertanto, c'è una certa distanza alla quale da una forza repulsiva si passa a una attrattiva, e qui vi sarà certamente uno di quelli che sopra ho chiamato limiti di adesione. Chi, però, avrà esaminato con più profondità questa grande quantità e varietà dei moti delle particelle, sia di avvicinamento sia di allontanamento reciproco, che si producono soprattutto negli effetti chimici, riconoscerà senz'altro anche i molteplici passaggi da forze repulsive ad attrattive o viceversa, cioè i molteplici limiti che corrispondono alle tante intersezioni della curva esprimente quelle stesse forze, mentre l'asse esprime le distanze. Ma soltanto dalle cose che abbiamo detto appare chiaro che noi, con ragionamento incontestato, siamo stati siamo condotti, dai fenomeni della natura e da leggi comunemente accolte, all'idea di attrazione e repulsione esercitate in uno spazio vuoto senza alcun corpo intermedio; all'idea di una repulsione che aumenta all'infinito, quando le distanze diminuiscono infinitamente, e di un'attrazione a distanze maggiori, perciò all'idea di un passaggio dall'una all'altra a seconda della diversa distanza, cioè all'idea dei limiti; di conseguenza, a tutta quell'idea delle forze che sopra consideravamo come pura ipotesi.

73. Ma siamo inoltre giunti persino alla totale esclusione di quel contatto perfetto che sopra ho chiamato contatto matematico. Infatti, per non allontanarmi dal modo di parlare consueto, chiamo contatto fisico quella vicinanza fra parti di un corpo, tale che la distanza non cada sotto i sensi e che la forza repulsiva sia maggiore di qualsiasi forza possa essere vinta dall'essere umano; appunto soltanto a questo, conosciuto attraverso

i sensi, hanno dato il nome di contatto i fondatori delle lingue senza essere filosofi, o almeno quando, per la prima volta, senza fare minimamente filosofia, hanno stabilito tali termini. E temeremo questo contatto fisico nel bastone (infatti, proprio questo sono soliti offrire coloro i quali, celiando, dichiarano di voler utilizzare quel bastone e per fare un esperimento, al fine di chiarire se possa esservi vero contatto fra i corpi). Infatti, avvicinandosi questo alla pelle, dopo avere ormai oltrepassato dei forti limiti di adesione, dove agisca una forza repulsiva sufficientemente grande, a questa e alle altre fibre dovrebbe essere trasmesso un moto. Da ciò trarrebbero origine, in esse, appunto quegli stessi moti che, nella concezione comune, sorgono dal contatto e dall'impenetrabilità. Tali moti dovrebbero propagarsi al cervello, e quelle stesse idee venire eccitate nell'anima e il dolore medesimo venir percepito. Del resto, se, in questo contatto fisico, spiegato in questi termini, non vi fosse alcun moto, abbandonerei completamente ogni paura: infatti, non posso temere quel contatto matematico, se questa concezione è vera.

74. Inoltre, da quanto è stato detto è evidente che questa adesione fra le particelle, di cui sono costituiti ora questi ora quei corpi, non può consistere in altro che in un siffatto limite di attrazione e repulsione, appunto senza contatto. Dunque, sulla base della stessa analogia, è piuttosto da credere che anche quell'adesione per cui le particelle più grandi si formano da quelle più piccole risponda allo stesso meccanismo; e che, procedendo attraverso tutti gli ordini di particelle, non vi sia alcun altro genere di adesione; che, di conseguenza, non vi siano parti di materia che si toccano, dunque nessun continuo fisico; invece, che le particelle di materia del primo ordine siano costituite da punti indivisibili, collocati su limiti di adesione estremamente tenaci. Ora, se alcune particelle fossero chiaramente solide, e per di più le loro parti aderissero assai tenacemente, queste non avrebbero comunque, al diminuire delle distanze, quella forza repulsiva che cresce all'infinito, la quale, una volta che venissero separate, dovrebbero acquisire immediatamente, affinché, quando si urtassero nuovamente fra loro, non vi sia un salto.

75. In tal modo, infine, si giunge all'intera composizione del mondo, non già ipotesi fittizia e arbitraria, bensì dedotta con retto ragionamento dai fenomeni della natura e da principi ricavati da un'amplissima induzione. Questa è appunto l'analisi con la quale si giunge a tale sintesi; quest'analisi ho annunciato e sostenuto in quella stessa dissertazione, e ne ho presentato l'applicazione ad alcune parti della fisica. Ho manifestato brevemente questo proposito, indicandone i vantaggi: l'eliminazione della quantità continua.

76. In tal modo è pure straordinario, quanto la natura riesca semplice, quanto stabile ovunque, quanto riesca chiara e distinta questa compagine e struttura dell'Universo. Infatti, da un unico principio, e perciò alquanto semplice, assai simile a quelli che osserviamo in natura, vengono derivati in modo ugualmente felice l'estensione dei corpi, l'impenetrabilità, la durezza delle parti più piccole (dalla quale dipende la perpetuità del mondo) e la grande varietà delle loro forze nonché i legami meno stretti (dai quali

dipende questo alternarsi così grande fra un numero così alto di corpi), tutte ciò che attiene alla fisica generale, la distinzione fra corpi elastici e molli, fra fluidi e solidi, la gravità universale, le leggi di trasmissione dei moti, tutta la meccanica, e altre cose, innumerevoli o quasi. Non c'è nessuno che non veda quanta forza e solidità aggiunga tale semplicità e analogia di una natura stabile a quella che ormai non è più un'ipotesi arbitraria, bensì una concezione sufficientemente corroborata.

77. Ma quanto avremo guadagnato dal fatto che questa concezione ci libera da tutte le difficoltà che vengono sollevate intorno alla composizione di un continuo – difficoltà che così a lungo e in tal misura hanno tormentato persino i migliori ingegni? Certo non v'è nessuno che non veda che da una quantità continua consegue manifestamente la divisibilità all'infinito della quantità stessa, a meno che egli non sia per lo più straniero alla geometria e incapace di orientarvisi. Ma se dalla divisibilità di una quantità continua passiamo alla divisibilità[9] reale della materia, emergeranno molteplici assurdità o almeno cose del tutto inaccessibili a mente umana. Per quanto mi riguarda, so bene che le obiezioni sollevate da puri incompetenti in geometria e tecnica del calcolo sono tanto futili quanto assurde. Ce ne sono, però, alcune di fronte alle quali ancora ci arrestiamo imbarazzati; a mio parere, fra queste vi è in particolare la seguente: sebbene diciamo che tutte le divisioni si possono fare soltanto le une dopo le altre, e che di conseguenza non vi è un'ultima divisione, e che le parti, separate in atto e consecutive, sono sempre in numero finito; purtuttavia (benché la distinzione in parti, come dicono, non dipenda, in sé, dalla divisione in atto), è evidente che qui le parti, distinte le une dalle altre e succedendosi le une con le altre come in una lunga schiera, sono in numero attualmente infinito. Come in tale circostanza sia possibile che nessuna di tali parti, che per loro stessa natura sono separate le une dalle altre, sia quella estrema nella successione, che nessuna sia l'ultima, prossima al limite finale, non lo capisce alcuno, se non facendo violenza a se stesso. Se invece vi fossero parti estreme o anche soltanto infinitesime, ma in sé delimitate, in modo da avere una successione di parti consecutive, comprese fra due termini, che superi qualsiasi numero finito, in tal caso credo che la questione si ridurrebbe immediatamente ad assurdo secondo il metodo che ho già applicato una volta nella dissertazione *De natura, et usu infinitorum, et infinite parvorum*, ove, mediante dimostrazione assai semplice e spedita, ho dimostrato (o almeno mi pare di aver dimostrato) che l'infinito assoluto nell'estensione è del tutto contraddittorio.

78. Ma questa teoria dei punti indivisibili elimina completamente tutte queste difficoltà ed esclude qualsiasi necessità di un infinito attuale. L'intervallo fra due punti qualunque potrà essere diviso all'infinito alla seguente condizione: che fra di essi si potranno inserire quanti altri punti si vogliano, i quali, tuttavia, se presi insieme con i loro intervalli saranno sempre in numero finito e lasceranno il posto per inserirne altri illimitatamente. A questa condizione avremo sempre un numero finito di intervalli e di

---

[9] Nell'originale «*divisibilitate*», ma è certo un refuso per «*divisibilitatem*».

punti, che si potrà ovviamente accrescere a piacere, in modo tale, però, da non superare mai il limite di un finito attuale, e non vi sarà alcun infinito in sé – sia esso in estensione o in numero –, ma solo per la nostra mente, la quale, astraendo dal limite delle grandezze, plasmerà l'idea di infinito o piuttosto di indefinito. Tale idea di indefinito che, plasmata in tal modo, è assai chiara e distinta, sarà più che sufficiente anche per tutti i più recenti metodi degli infiniti; il che, affermo, si può dimostrare senza difficoltà. Al contrario, infatti, se ammettiamo l'infinito attuale, ovunque si contrappongono, ovunque vengono dedotte moltissime cose che vanno al di là di qualsiasi ragione della mente umana, cosicché o sono completamente assurde o straordinariamente simili ad assurdità – e spero di darne un esempio fra poco[l]. Inoltre, non vi saranno parti reali in atto di uno spazio vuoto, bensì esse consisteranno solo in quella possibilità di inserire punti.

79. Quelli che ho esposto fin qui sono i principali fra gli argomenti a mio giudizio sufficientemente validi, da cui discende che bisogna preferire questa composizione della materia per punti indivisibili all'estensione continua. Ma ce ne sono anche altri che rafforzano parecchio tale concezione. Anzitutto, ciò che ad altri apparirà di nessuna importanza, ma che secondo me ha non poca forza: se le parti prime dei corpi fossero continue, e fra di esse vi fosse il vuoto, si avrebbe un salto infinito; infatti, dopo un'estensione continua reale, che equivale a densità infinita, si passa all'improvviso, per salto infinito, a estensione reale nulla, ovvero allo spazio vuoto, cioè una densità nulla, che è rarefazione infinita. Un salto del genere non vi sarebbe se si adottassero punti indivisibili, per i quali, non essendovi alcun continuo, non si interrompe alcunché per salto.

80. Si aggiunga che, per la concezione comune sull'estensione continua delle particelle di un corpo, non c'è alcun limite alla rarefazione di un dato corpo, potendo, in tal caso, una medesima massa diffondersi per uno spazio comunque grande, e per di più in maniera tale che i singoli pori siano piccoli a piacere, come i fisici talvolta fanno vedere. Per la condensazione, invece, è necessario un termine oltre il quale non sia consentito progredire: quando, cioè, tutte le particelle saranno venute a contatto, dato che spazi grandi a piacere possono venire occupati da una determinata massa, mentre spazi piccoli a piacere non la possono contenere, essendovi una taglia sotto la quale il volume di tale massa non può diminuire. Al contrario, secondo questa concezione dei punti indivisibili il volume di un corpo può essere accresciuto e diminuito in qualunque rapporto dato, conservando lo stesso rapporto fra le distanze dei singoli punti. Anzi se, mantenendo le ordinate della curva esprimente le forze, le ascisse cambiano in un qualsiasi rapporto dato, e le distanze fra i punti costituenti una massa qualunque

[l] *Ho mostrato ciò anche nella dissertazione* De continuitatis lege *e, più diffusamente, in quella* De transformatione locorum geometricorum, *aggiunta ai miei elementi delle sezioni coniche, in* Elementorum universae matheseos tomus III.

collocata in equilibrio cambiano nel medesimo rapporto dato, la massa stessa rimarrà ancora in equilibrio.

81. Inoltre: sebbene i cartesiani ritengano che nessun moto venga generato o modificato se non per impulso, tuttavia i newtoniani, con ragioni essenzialmente valide, come abbiamo visto sopra e come accennerò fra poco, dimostrano che in natura esistono forze attive, in virtù delle quali le particelle dei corpi agirebbero fra loro[(m)], per altro a distanza, senza contatto o impulso. Nella collisione fra corpi ammettono, invece, tale impulso delle particelle del corpo e il contatto fra esse. Certo assai più semplice e più coerente risulta il modo di agire che, stando alla mia concezione, la natura ha adottato: secondo essa il moto non si comunica qui in una maniera, altrove in un'altra, bensì ovunque allo stesso modo, e le azioni delle forze sono sempre dello stesso genere.

82. E giacché abbiamo menzionato qui l'idea di Newton, ci fa piacere ora accennare all'economia universale della natura, da lui chiamata in causa nell'ultima questione dell'*Optice*, proprio alla fine della sua opera immortale e, come ho promesso all'inizio, confrontare con questa la mia concezione. L'essenza della sua dottrina è la seguente. Anzitutto, sull'esempio dell'attrazione, della gravità, della virtù magnetica ed elettrica, dimostra che possono esservi altre forze attrattive, altre virtù o potenze, in cui piccole particelle dei corpi agiscono reciprocamente attraverso l'intervallo spaziale che le separa, per produrre moltissimi fenomeni naturali, che sono forse contenuti entro confini così stretti che sinora sono sfuggiti a ogni osservazione; mentre i fenomeni dell'attrazione, della gravità e della virtù magnetica ed elettrica, che si dispiegano su intervalli sufficientemente vasti, sono caduti anche sotto i sensi e la cognizione delle persone. Newton dà ampia prova dell'esistenza di tali forze per dodici pagine, adducendo come esempi gli effetti chimici, riferiti in gran copia, e spiegandoli mediante forze di questo genere.

[(m)] *D'altra parte, non si tratterà necessariamente di un'azione fisica che la materia eserciti sulla materia distante, cosicché essa debba essere rigettata in base al principio che l'azione a distanza è inammissibile. Potrà essere un'azione soltanto determinativa, tale che due particelle materiali abbiano una determinazione o disposizione ad avvicinarsi o ad allontanarsi fra loro, e ciascuna di esse agisca sull'altra in modo che l'una determini solo la direzione e l'intensità dell'azione che l'altra esercita su di lei. Potrà anche trattarsi di un'azione soltanto occasionale. Come, cioè, la presenza e il contatto di un corpo che raggiunga con una certa velocità un altro corpo sono – per i cartesiani e per altri seguaci della teoria delle cause occasionali – un'occasione data la quale Dio ha generato il moto nell'altro corpo, così una distanza determinata può parimenti costituire un'occasione del genere per produrre un avvicinamento, e un'altra distanza può essere l'occasione per un allontanamento; pertanto, assumere come occasione una distanza determinata non è più difficile di assumere una distanza nulla.*

83. Inoltre, dall'adesione dei corpi egli deduce che «le loro particelle si attraggono l'un l'altra per effetto di una certa forza, che è straordinariamente intensa al contatto immediato, che a piccole distanze produce gli effetti chimici ricordati sopra e che tuttavia, a distanze alquanto maggiori dalla particella, non giunge a produrre effetti percepibili dai sensi»[10]. Newton sostiene poi che la durezza può aversi in relazione alla proprietà di tutta quanta la materia semplice; che la durezza delle particelle semplici dev'essere molto maggiore di quella dei corpi da esse formati, poiché le particelle che formano un corpo possono toccarsi solamente in pochissimi punti, mentre le parti di quelle particelle semplici, che non contengono in sé alcun passaggio nascosto, si toccano fra loro in tutti i punti delle loro superfici, senza che vi sia interposto alcun passaggio o intervallo che possa rendere meno stabile la loro aderenza, essendo questa originata, infatti, da un'attrazione al contatto assai maggiore di quella presente persino negli interstizi i più piccoli.

84. Data questa costituzione di tali particelle, ne presenta la successione: particelle più grandi, dei diversi ordini, meno stabili, vengano originate da particelle più stabili, appartenenti a ordini inferiori. Dice, infatti: «Ora, piccolissime particelle di materia possono essere unite da attrazioni fortissime e costituire particelle più grandi, la cui forza attrattiva sia più debole, e molte di esse possono unirsi e formare particelle ancora più grandi, la cui forza attrattiva sia ancora più debole, e così di seguito in continua successione, finché la progressione termini nelle particelle più grosse, da cui dipendono le operazioni chimiche e i colori dei corpi naturali e che, unendosi, formano corpi la cui grandezza cade sotto i nostri sensi. Se il corpo è compatto, e se si flette quando viene sottoposto a pressione o si ritira verso l'interno senza perdere alcuna delle sue parti, allora è duro ed elastico, e torna alla propria forma per quella forza che ha origine dall'attrazione reciproca delle sue parti. Se invece le parti di tale corpo scivolano l'una sull'altra, esso è molle e malleabile. Se le parti scivolano via molto facilmente e sono di taglia idonea a essere agitata col calore e il calore è abbastanza intenso da agitarle – per quanto probabilmente assai meno intenso di quello che occorre perché l'acqua non congeli –, il corpo è fluido; e se è atto ad aderire si dice umido. Le gocce di qualsiasi corpo fluido assumono una figura sferica per la mutua attrazione delle parti allo stesso modo in cui Terra e mare si uniscono formando un globo per la reciproca attrazione delle parti di tale figura, attrazione che è la gravità»[11].

85. Spiegate così, per mezzo dell'attrazione, queste cose, tratta quanto io ho esposto sopra (n. 14) circa l'attrazione alle piccole distanze, la quale, all'accrescersi delle distanze, diviene repulsione, come provano le rifrazioni e le riflessioni della luce, l'emissione luminosa, la produzione di gas e di vapori; a queste cose lui aggiunge le mosche che camminano sull'acqua senza bagnarsi le zampe, nonché i vetri dei telescopi, le polveri secche, i marmi levigati, i quali, sebbene aderiscano fortissimamente se accostati fino

[10] Newton, *Optice*, cit., p. 335.
[11] I. Newton, *Optice*, cit., pp. 337-338.

a toccarsi, tuttavia difficilmente possono venir serrati così stretti e congiunti in maniera tanto precisa da attaccarsi.

86. Prosegue poi: «Perciò, se tutte queste cose sono davvero così, l'intera natura sarà assai semplice e analoga a sé: producendo evidentemente tutti i grandi moti dei corpi celesti per mezzo dell'attrazione gravitazionale, che è reciproca fra tutti i corpi; e quasi tutti i moti minori delle sue particelle per mezzo di una qualche altra forza attrattiva e repulsiva, che è reciproca fra le particelle»[12]. A partire da qui, egli prova che la forza d'inerzia non è sufficiente a produrre né a conservare il moto, ma sono necessari altri principi per produrlo e prima ancora per conservarlo, inclinando la natura sempre dalla parte del perire dei moti più che da quella del loro nascere, e operando l'impenetrabilità quel tanto che basta affinché il moto si arresti, mentre i vortici diminuiscono sempre di più il loro moto e scompaiono alquanto rapidamente (siano essi formati da materia tenace o per nulla tenace), sicché perdono ininterrottamente un po' del loro moto per l'urto reciproco delle parti. «Considerando perciò», dice, «che la varietà dei moti che troviamo nel mondo diminuisce di continuo, è necessario conservarla e accrescerla facendo ricorso ad alcuni principi attivi, quali la *causa della gravità*, per mezzo della quale pianeti e comete conservano i loro moti in orbite ininterrotte e tutti i corpi in caduta libera acquistano un grande moto; e la *causa della fermentazione*, in virtù di cui il cuore e il sangue degli animali vengono mantenuti in un movimento e in un calore continui, le parti interne della Terra ininterrottamente riscaldate, moltissimi corpi ardono ed emettono luce, le cavità della Terra vengono lacerate da esplosioni e il Sole arde e rifulge per sempre con forza mirabile e con la sua luce riscalda e alimenta ogni cosa. Infatti abbiamo trovato nel mondo pochissimi moti che siano sorti da qualcosa di diverso da questi principi attivi o da un esplicito comando della volontà»[13].

87. E qui, come per dare una visione d'insieme, così riassume ciò che aveva detto: «Considerate tutte queste cose, mi sembra probabile che in principio Dio Ottimo Massimo abbia creato la materia in modo tale che le sue particelle primigenie, da cui poi ha tratto origine ogni natura corporea, fossero solide, compatte, dure, impenetrabili, inerti e mobili; dotate di date dimensioni e figure; di date proprietà, numero e quantità rispetto allo spazio, affinché tendessero nella miglior maniera possibile al fine per il quale furono create. Queste particelle primigenie, inoltre, essendo solide, sono di gran lunga più dure di qualsiasi corpo poroso sia composto da loro; sono anzi così perfettamente dure da non potersi mai consumare o infrangere». Poiché tali particelle conservano la loro durezza, «possono comporre corpi che rimarranno per sempre della stessa natura e struttura»[14]; se essi si ridurranno in frammenti, dovrà modificarsi la natura.

[12] I. Newton, *Optice*, cit., pp. 340-341.
[13] I. Newton, *Optice*, cit., p. 343.
[14] I. Newton, *Optice*, cit., pp. 343-344.

88. «Inoltre», continua, «mi sembra che queste particelle primigenie abbiano in sé non soltanto una *forza d'inerzia* accompagnata da quelle leggi passive del moto che da tale forza necessariamente sorgono, ma anche che esse siano ininterrottamente mosse da certi *principi attivi*, quali del resto sono la causa della Gravità e la causa della Fermentazione e della coesione dei corpi. Io considero questi principi non come qualità occulte che si immaginano sorgere dalle forme specifiche delle cose, bensì come leggi universali della natura, dalle quali le stesse cose sono formate. Infatti l'esistenza di questi principi ci si manifesta attraverso i fenomeni naturali, quantunque non se ne siano ancora scoperte le cause[15]. Affermare che le singole specie delle cose sono dotate di una specifica qualità occulta, e per mezzo delle quali essa agisce e produce fenomeni palesi, equivale a non dire nulla. Ma derivare dai fenomeni naturali due o tre principi generali del moto, e poi spiegare come le proprietà e le azioni di tutte le cose corporee derivino da questi stessi principi, sarebbe un grandissimo passo in avanti nella filosofia, anche se le cause di questi principi non fossero ancora conosciute. Perciò non esito a proporre i principi del moto sopra menzionati, poiché coprono in assai ampia misura la natura intera. Ora, per opera di questi principi, tutte le cose materiali sembrano essere state composte delle suddette particelle dure e solide, variamente associate e congiunte alla prima creazione dalla volontà di un Agente dotato di intelligenza. Infatti, spettò a colui che le creò disporle in ordine. E se fu questa la vera origine delle cose, sarà indegno di un filosofo cercare di trovare una qualunque altra ragione della creazione del mondo o pretendere che il mondo intero sia potuto nascere dal caos per effetto di semplici leggi di natura; sebbene, una volta creato, possa durare per molti secoli in virtù di tali leggi»[16].

89. Da tutte queste cose che ho esposto risulta chiaro in misura più che sufficiente il pensiero di Newton circa i principi dei corpi e l'economia universale della natura; così come è anche chiaro ciò in cui sono d'accordo con lui e ciò in cui mi distinguo, e dove avrò portato avanti le cose da lui iniziate. Egli, anzitutto, ritiene che le particelle primigenie della materia siano stabili per l'adesione delle loro parti, in modo che non

[15] Si ricordi che Boscovich utilizza l'edizione latina dell'*Opticks*, priva delle aggiunte inserite nelle successive edizioni inglesi. Per completezza, riportiamo qui, nell'originale, l'aggiunta inserita a questo punto fin dalla seconda edizione inglese (1717): «For these are manifest Qualities, and their Causes only are occult. And the Aristotelians gave the Name of occult Qualities not to manifest Qualities, but to such Qualities only as they supposed to lie hid in Bodies, and to be the unknown Causes of manifest Effects: Such as would be the Causes of Gravity, and of magnetick and electrick Attractions, and of Fermentations, if we should suppose that these Forces or Actions arose from Qualities unknown to us, and uncapable of being discovered and made manifest. Such occult Qualities put a stop to the Improvement of natural Philosophy, and therefore of late Years have been rejected». I. Newton, *Opticks: Or, A treatise of the Reflections, Refractions, Inflexions and Colours of Light. Also Two treatises of the Species and Magnitude of Curvilinear Figures*, London: Printed for William Innys at the West-End of St. Paul's, 1730, Query 31, p. 401.

[16] I. Newton, *Optice*, cit., pp. 344-345.

possano venire spezzate e modificate da nessuna forza della natura; esse sono poi impenetrabili, inerti, mobili, eccitate da varie forze, dalle quali ricevono un moto, mediante le quali agiscono fra loro anche posto un qualche intervallo, e che cambiano al variare delle distanze e da attrattive divengano repulsive, sicché in qualche posto si trovano in un limite di attrazione, in qualcun altro di repulsione. Inoltre, la disposizione iniziale e il numero di queste disposizioni dipendano unicamente dalla volontà di un ente intelligente, il quale crea la natura secondo la sua volontà e, se volesse, potrebbe creare quanti altri mondi vorrebbe e quanto più diversi fra loro. Da queste particelle primigenie congiunte fra loro, ma separate da intervalli vuoti, prenderebbe origine una serie di particelle più grandi, dando vita via via ad altri ordini di particelle; e quanto più queste sono grandi, tanto minore adesione e stabilità avrebbero le parti. Per le forze che hanno origine dall'azione congiunta delle particelle primigenie, queste particelle più grandi formerebbero poi i corpi che cadono sotto i sensi, e da quei principi attivi dai quali tali forze dipendono si produrrebbero l'adesione fra corpi, la distinzione fra le diverse specie di corpi, tutti gli effetti chimici, nonché l'intera messe di trasformazioni cui sono soggetti tutti i corpi. In tutto ciò concordo pienamente con Newton.

90. Ma per lui le particelle prime sono solide, piene, dure, e dotate di una loro forma. Io, invece, concepisco le particelle prime come formate da punti assolutamente indivisibili, i quali per me possono stare al posto di quelle stesse particelle primigenie che – come appare in modo assai più evidente – non possono mutare né logorarsi. Però, anche le particelle del primo ordine, formate da quei punti, possiedono una tale adesione fra le loro parti tale che nessuna forza della natura può spostarle dalle loro posizioni relative. Secondo lui, le parti di particelle primigenie aderiscono per contatto continuo su tutta una superficie, le altre parti aderiscono per un contatto che avviene in alcuni punti; inoltre, alle distanze minime ci sarebbe sempre una forza attrattiva, che è massima al contatto. Io, invece, non ammetto alcun contatto fra le particelle che formano particelle più grandi; e, di conseguenza, nemmeno ammetto alcun contatto continuo fra parti che costituiscono una particella prima; e alle distanze minime pongo una repulsione tale che, riducendo le distanze all'infinito, cresce analogamente all'infinito. Perciò, all'adesione per contatto sostituisco un'adesione dovuta al limite fra attrazione e repulsione: essa potrà essere salda e stabile quanto si vuole, purché la curva che esprime le forze, laddove interseca l'asse, si allontani da esso da entrambe le parti con un angolo quasi retto. La ragione per cui in ciò sono in disaccordo con lui è la seguente. Per il principio che nulla avviene per salto, escludo il contatto di un corpo con un altro e di una particella con un'altra, e mostro che le forze repulsive si accrescono all'infinito a distanze infinitamente piccole. Poiché, inoltre, a distanze maggiori vi è attrazione – almeno quella che attiene alla gravità universale –, deve pure esservi un limite ove, aumentate le distanze, si passa da repulsione ad attrazione; e, come ho mostrato, si tratta di un limite di adesione tale che le particelle poste su di esso devono mantenere la distanza che hanno assunto la prima volta; in questo tipo di

limite bisognava collocare l'adesione fra le particelle che compongono i corpi. L'analogia con ciò e la semplicità della natura estende tale idea di adesione a tutte le adesioni in cui da particelle più piccole se ne forma una più grande. La medesima analogia ha portato all'esclusione di un altro genere di adesione, ove le parti di una particella prima qualunque aderiscono fra loro, se quella particella prima è continua e solida; tali parti, alle minime distanze, ora non si respingerebbero, bensì si attrarrebbero. È stata quest'analogia a condurmi all'idea dei punti indivisibili. L'esclusione di un continuo reale, la deduzione di tutte le proprietà primarie della materia e dell'intera fisica generale da un unico principio, l'esclusione di moltissimi altri salti e la semplicità nel modo di agire della natura, sempre simile a se stessa, ha rafforzato quella concezione. La riflessione sull'origine delle idee che, tramite i sensi, ci facciamo dei corpi, ha rimosso la principale e unica difficoltà che sembrava potesse esservi contro la natura di questi punti: infatti con Newton ho in comune l'idea che le forze agiscano a distanza fra i corpi, che ho altresì provato adducendo ulteriori ragioni. Infine, stando a lui si dà un unico limite in cui si passa da attrazione a repulsione, benché dalla sua dottrina sembra emergerne un altro per il quale si passa nuovamente da repulsione ad attrazione. Infatti, le particelle dei vapori, che si allontanano le une dalle altre per repulsione, mantengono ancora l'attrazione universale di gravità, sicché, collocate alle massime distanze, non si allontanano più, bensì tendono di nuovo ad avvicinarsi fra loro. Io ammetto una pluralità di limiti. Li richiede la composizione di parti più grandi mediante parti più piccole; e persino i moti perturbati delle particelle, che si manifestano negli effetti chimici e in qualunque fermentazione, suggeriscono piuttosto una sequenza di molteplici attrazioni e repulsioni che si succedono l'un l'altra. Quest'idea è pure suggerita dalla natura dei corpi molli che, aumentatane o diminuitane la densità, conservano la loro forma. La difficoltà è tolta considerando[17] la curva che esprime la legge delle forze, la quale può essere semplicissima e intersecare l'asse in quanti punti si voglia e a distanze qualunque.

91. Queste le divergenze, affinché ora appaia chiaro quanto io sia progredito. Lui ha preso in considerazione anzitutto la solidità, l'impenetrabilità, l'estensione, l'inerzia, la mobilità delle particelle prime come proprietà elementari delle quali non si possa rendere ulteriormente ragione, e che è impossibile ricondurre a un principio più semplice. Nella mia concezione, la ragione di quelle proprietà è richiesta da un unico principio dedotto mediante analogia della natura. Le forze con cui le particelle agiscono l'una sull'altra, egli le deve ricondurre a svariati altri principi; ne presenta tre isolati, in quanto indipendenti gli uni dagli altri e da un principio unico: la causa della gravità, della fermentazione, della coesione. Attraverso questi verrebbero spiegati alcuni effetti, in modo che vi sia ancora spazio per chiamare in soccorso altri principi capaci di spiegare altri effetti ancora. Quanto a me, da quel medesimo principio da cui traggono origine le proprietà primarie provengono pure l'adesione (grazie ai limiti di cui si è parlato) e la gravità (perché alle grandissime distanze la curva approssima l'arco

[17] Nell'originale «*considetatio*», ma è certamente un refuso per «*consideratio*».

di un'iperbole di terzo grado; ciò spiega pure perché, a quella distanza, si osservi solo la gravità, e perché essa, in tutte le parti della materia, comunque diverse in relazione alle altre forze, debba essere uniforme); e non è difficile ricondurre la causa della fermentazione ai numerosi limiti di attrazione e repulsione. Dove enuncia la formazione delle particelle più grandi da quelle più piccole, egli riporta diversi tipi di corpi: elastici, molli, fluidi, solidi, come abbiamo visto al n. 79. Quanto all'elasticità, la riconduce all'attrazione fra le parti; ma essa, molto più spesso, si ha per repulsione. Se un corpo urta contro una notevole massa livellata di avorio, alcune parti dell'avorio s'introflettono, e tornano per repulsione a quello stesso punto, in cui, quando vi saranno ritornate, la repulsione cessa e la massa non va in frantumi. Sicché è meglio ricondurre l'elasticità a un limite abbastanza stabile di adesione e repulsione. La mollezza è spiegata definendo molli quei corpi le cui parti scivolano all'indentro; non illustra però come mai accada che le parti resistano allo scivolamento, senza tuttavia tornare alla forma precedente. Ciò si spiega benissimo attraverso l'esistenza di più limiti. La fluidità è ricondotta all'eccitazione delle parti, provocata dal calore; ma in che modo l'eccitazione provocata dal calore contribuisca alla fluidità, non è così chiaro come nella mia concezione, in cui la solidità proviene soprattutto dalla diversità delle forze secondo i diversi lati, per cui avviene che le particelle non possono muoversi comodamente le une attorno alle altre, tuttavia se, per una rapida eccitazione, ruotassero attorno a se stesse, eserciterebbero tutt'intorno le medesime forze. Nella mia concezione è certo manifesto che tutte quelle cose conseguono da un medesimo principio. Infine, se l'adesione fra i corpi avviene per contatto delle parti, certo nessuno capirà come, con una serie continua di contatti, i raggi solari s'insinuino così liberamente attraverso sostanze omogenee solidissime, e trasparenti per la sola omogeneità, il che nella mia concezione è persino ovvio.

92. Si potrebbe aggiungere molto altro; ma quanto detto è sufficiente. Sarà chiaro che in ciò in cui dissento da lui, dissento a buon diritto. Ma se parrà a qualcuno che ho compiuto dei progressi nell'indagine sulla natura, riconosco che li devo soprattutto a colui le cui orme ho seguito massimamente finché, per poter progredire ulteriormente, mi sono leggermente allontanato dal suo percorso.

93. Poiché pure lui ritiene che le particelle prime più piccole siano dure e indivisibili da qualsiasi forza naturale, anche dalla sua teoria risulterà evidente ciò che segue dalla mia: dai fenomeni non si può mai dedurre una divisibilità della materia che in qualche modo ne suffraghi la divisibilità infinita. Infatti, l'effettiva costituzione della materia sarà sempre tale che, oltre certi limiti, nessuna forza naturale possa produrre divisione; di conseguenza, che i fenomeni possono esibire soltanto una divisibilità finita. Una divisibilità grandissima, al di là di ogni capacità di comprensione umana, la riconosco di buon grado. Essa dipende dal numero dei punti, che in uno spazio piccolo a piacere può essere grande a piacere. Da moltissimi fenomeni i fisici deducono qua e là una divisione della materia così smisurata, da apparire, ai meno esperti, non soltanto incredibile ma addirittura assurda. Non so, tuttavia, se qualcuno si sia spinto là dove io sono giunto nella *Dissertazione della tenuità della Luce solare*, pubblicata l'anno

scorso nel *Giornale dei Letterati* di Roma, dove ho dimostrato – cosa certo incredibile a dirsi! – che «quantunque il sole ad ogni mezzo quarto d'ora riempia sempre di nuova luce uno spazio dieci millioni di millioni di volte più grande del nostro globo Terraqueo: ad ogni modo un dito solo sferico di materia Solare contiene incomparabilmente più di materia di quello ne contenga tutta la luce, che il Sole istesso manderebbe finora in più millioni di secoli, di quello sieno i piccoli granellini di minutissima arena, bastanti a ricuoprire tutta per ogni verso la superficie smisurata del medesimo nostro globo Terraqueo»[18]. E appunto ho mostrato che «un dito solo sferico di materia solare ridotto alla medesima tenuità {che ha qui presso di noi la luce solare}, empirebbe più dita sferiche di quello, esprima {l'unità seguita da 74 zeri}»[19]. Per quanto questa tenuità della materia sia immensa e quasi superi ogni umana comprensione, tuttavia, con il medesimo argomento lì addotto, essa può facilmente venire ancora aumentata di molto; e aumenterà immensamente a distanze maggiori, alle quali la densità diminuisce ininterrottamente in modo inversamente proporzionale al quadrato delle distanze. Le stelle fisse, separate da noi da una distanza così immensa che rispetto a questa la distanza della Terra dal Sole è per così dire un punto, le distinguiamo con facilità di notte, nell'istante in cui volgiamo loro lo sguardo, ovunque ci troviamo. Perciò, la loro luce si distribuisce su un'immensa sfera tutt'intorno, cosicché il numero delle particelle di luce, che sono[20] separate l'una dall'altra, supera ogni forza d'immaginazione.

94. E tuttavia, che cos'hanno in comune questa divisibilità, per quanto grande e smisurata, e qualsiasi altra che si possa comunque dedurre dai fenomeni, con la divisibilità infinita, affinché sia lecito non dirò ricavare questa da quella con ragionamento certo, ma almeno fare delle congetture in modo del tutto piano? Qualunque risultato si sia finora raggiunto, non supera ancora, in una massa uguale alla Terra intera, un numero di particelle che sia pari all'unità seguita da cento zeri, né mai vi sarà garanzia di giungere all'unità con mille zeri, la cui grandezza non so neppure se possa essere concepita da mente umana mediante riflessione. Ma che dire di tale numero, se esso venisse confrontato con uno che contiene tanti zeri quante sono le unità che compongono il primo? Che dire se quest'ultimo venisse confrontato con un altro numero, che contenga tanti zeri quante sono le unità che compongono la potenza di questo secondo numero, che esso mette a esponente? Che dire poi, se questi due numeri venissero

---

[18] R.G. Boscovich, *Dissertazione della tenuità della Luce solare*, «Giornale de' Letterati», Roma, gennaio 1747, Articolo II, n. 5, pp. 29-30.
[19] R.G. Boscovich, *Dissertazione della tenuità della Luce solare*, «Giornale de' Letterati», Roma, febbraio 1747, Articolo III, n. 13, p. 33. In parentesi graffe due piccole modificazioni introdotte da Boscovich nel citare il proprio testo. Ecco la versione originale: «Un dito solo sferico di materia solare ridotto alla medesima tenuità, empirebbe più dita sferiche di quello, esprima il numero 24. con zeri 73». L'argomentazione prosegue in maniera simile a quella avanzata qui: «Quantità veramente si prodigiosa, che dalla mente umana non si comprende se non a stento».
[20] Nell'originale «*sunr*», ma è certamente un refuso per «*sunt*».

confrontati via via con altri che, in una qualche serie massimamente divergente, traggono origine da loro, superando di gran lunga qualsiasi capacità intellettiva e immaginativa della mente umana, e nascosti in un'oscurissima, profonda immensità? Che cos'hanno in comune con l'infinito tutti questi numeri e tutti i rimanenti, che non solo non raggiungiamo, non scorgiamo che da lontano, immaginiamo con non poca diffidenza, ma circa i quali ignoriamo persino questo: che sono da noi ignorati? Assolutamente nulla. Tale è la grandezza dell'infinito, tale la sua forza e ragione, che niente ci conduce a coglierlo con ragionamento corretto: niente che in qualche modo, nei fenomeni naturali, possa essere visto, udito, preso, che possa essere sia toccato sia tentato con il pensiero. Quanto alla divisibilità e all'effettiva divisione della materia: sia essa grandissima, sia persino inaudita, sia di gran lunga al di sopra della comprensione umana; anch'io l'ammetto volentieri. Tuttavia non potremo ricavare neppure un debolissimo argomento – se soppesiamo l'importanza di ciascuno e impieghiamo un corretto metodo di ragionamento – a favore dell'infinita divisibilità della materia. Pertanto io, spinto con la massima forza dagli argomenti sopra esposti, ritengo che essa sia da bandire ed eliminare completamente dalla natura.

95. Ma ecco che, rapito dall'ardore di scrivere, in qualche modo mi sono lasciato trasportare assai più lontano di quanto avrei voluto. Bisogna infine ammainare le vele e terminare una dissertazione protrattasi certamente più del dovuto.

INDICE DEI NOMI

Il seguente indice si riferisce unicamente ai nomi citati nel testo di Boscovich e il numero accanto a ogni nome è riferito al paragrafo in cui compare. Le lettere in corsivo indicano che il nome è citato nella corrispondente nota di Boscovich.

INDICE DELLE OPERE CITATE

Il numero dopo le parentesi quadre indica il paragrafo del testo di Boscovich in cui l'opera è citata direttamente o indirettamente. Le lettere in corsivo indicano che l'opera è citata nella corrispondente nota di Boscovich.

BENVENUTI, CARLO
Synopsis Physicae Generalis [De Rubeis, Roma 1754], [Premessa], *f*, *h*.

BOSCOVICH, RUGGIERO GIUSEPPE
De viribus vivis dissertatio [Komarek, Roma 1745], [Premessa], 2, *f*, 54, 65.

Dissertazione della tenuità della Luce solare [«Giornale de' Letterati», Roma, gennaio 1747, Articoli II-III], 93.

Dissertationis de lumine, pars prima [De Rubeis, Roma 1748]; *pars secunda*, [Komarek, Roma 1748], [Premessa], *f*, *h*.

De transformatione locorum geometricorum, ubi de continuitatis lege, ac de quibusdam Infiniti mysteriis [in *Elementorum universae matheseos tomus III. Continens sectionum conicarum elementa*, Salomoni, Roma 1754, pp. 297-468], *l*.

De continuitatis lege et ejus consectariis pertinentibus ad prima materiae elementa eorumque vires [Salomoni, Roma 1754], [Premessa], *f*, *b*, *g*, *i*, *l*.

De lege virium in natura existentium [Salomoni, Roma 1755], [Premessa], *f*.

Supplementa a *Philosophiae recentioris a Benedicto Stay versibus traditae libri X*, vedi STAY, BENEDETTO.

Dissertatio de maris aestu [Komarek, Roma 1747], 21.

NEWTON, ISAAC
Philosophiae Naturalis Principia Mathematica [Londra 1687], 52.

Optice: sive de Reflexionibus, Refractionibus, Inflexionibus & Coloribus Lucis libri tres [Londra 1706], 3, 19, 55, 61.

STAY, BENEDETTO

Philosophiae recentioris a Benedicto Stay versibus traditae libri X, cum adnotationibus, et supplementis P. Rogerii Josephi Boscovich, Tomus I [Roma 1755], *b*, *g*, *i*.

DE

CONTINUITATIS LEGE

ET EJUS CONSECTARIIS

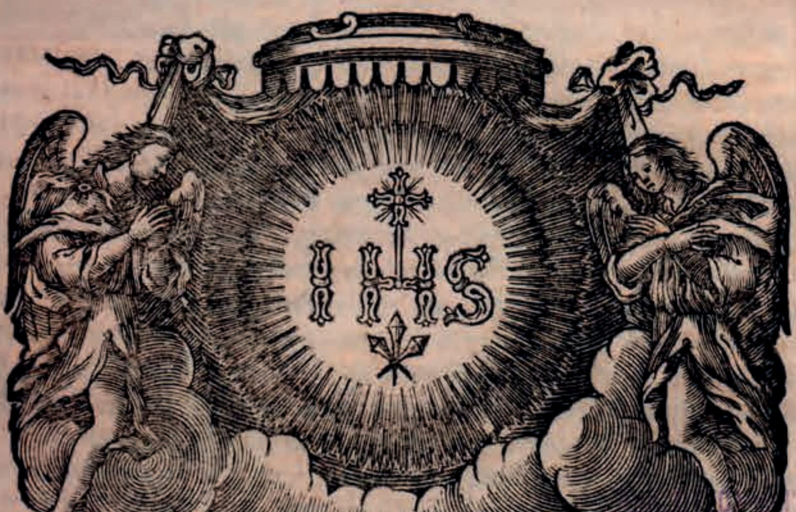
PERTINENTIBUS

AD PRIMA MATERIÆ ELEMENTA
EORUMQUE VIRES

DISSERTATIO

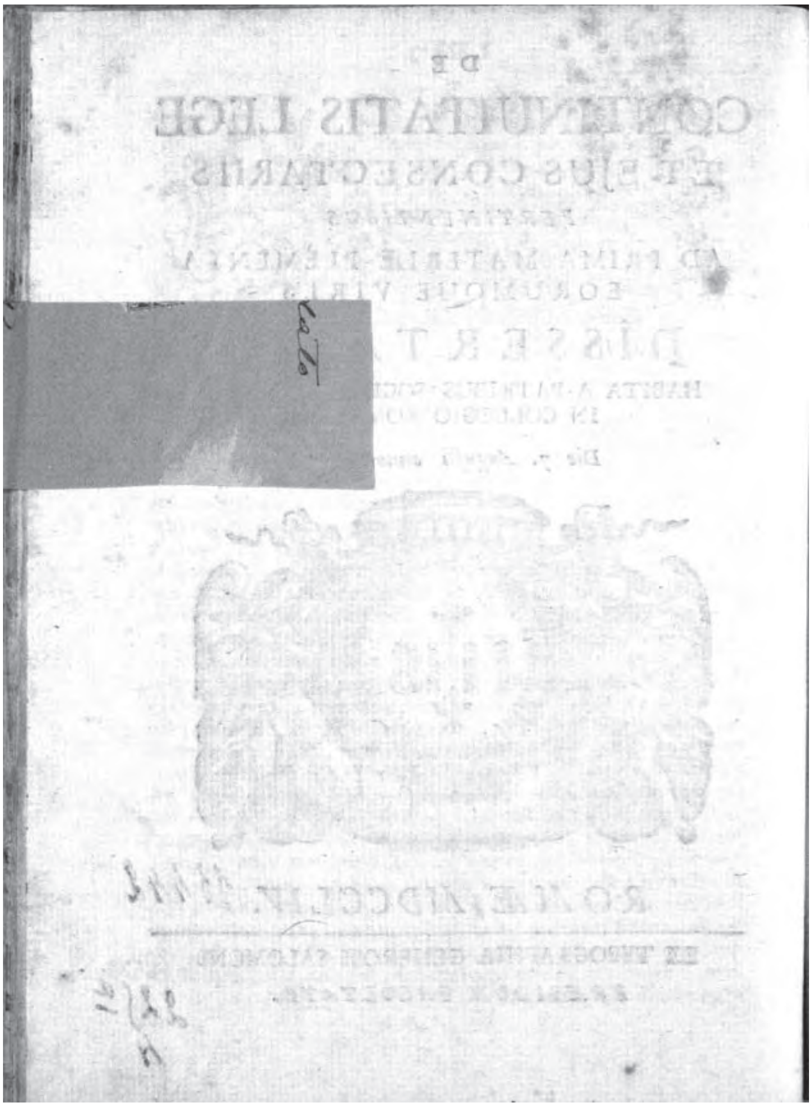
HABITA A PATRIBUS SOCIETATIS JESU
IN COLLEGIO ROMANO

Die 7. Augusti anno 1754.



ROMÆ MDCCLIV.

EX TYPOGRAPHIA GENEROSI SALOMONI
PRÆSIDUM FACULTATE.



1. JAM ab anno 1745. in diſſertatione de Viribus Vivis hoc ipſo in loco publice propoſita, & propugnata, tum in Commentariis Acad. Bononienſis iterum impreſſa tomo 2. propoſuimus theoriam noſtram virium quarumdam, quibus omnia materiæ puncta ſint prædita, & ex quibus tam materiæ ipſius conſtitutio, quam generales omnes, ac præcipuæ quævis e particularibus corporum proprietatibus ſponte fluant, & ut mera quædam conſectaria neceſſario deducantur. Eamdem anno 1748. in ſecunda parte diſſertationis de Lumine hìc itidem propoſita multo uberius expoſuimus, & conſectaria præcipua Geometriæ ope deduximus demonſtrationes perſecuti, quarum ope tum alia multa, tum præcipua ſoliditatis in primis, & fermentationis principia innoteſcerent.

2. Porro theoriam ipſam nos quidem non ad arbitrium, ut hypotheſim quamdam, confinximus, ut quibuſdam ex eorum genere, qui parte tantum perlecta de re tota judicare ſolent, eſt viſum; ſed poſitivis argumentis demonſtrare conati ſumus, & quidem ejuſmodi, ut evidenter patere poſſet, non illud a nobis eſſe præſtitum, quod ſæpe in præceptis animo opinionibus fieri ſolet, ut argumenta ipſa undecunque conquiſita ſint ad ſententiam ſynthetico ritu comprobandam utcumque, ſed accurate expoſitam eſſe analyſim eam omnem, quæ nos e ſimpliciſſimis naturæ principiis ad ipſam illam theoriam neceſſario, & ſpontaneo concluſionum nexu perduxerit. Qua in re illud ingenue fateri poſſumus, id nobis omnino nec opinantibus contigiſſe, nec ad theoriam ipſam, cujus uberrimos ſane fructus & tum quidem percepimus, & percipimus in dies, ipſorum nos fructuum amor, quos tum omnino ignorabamus, ſed naturæ indoles, & vis argumentationis pertraxit.

3. Præcipuum universæ analyseos nostræ fundamentum situm est in celeberrimo illo, quod Philosophi jam passim *Continuitatis principium* appellant, quod quidem jam ab anno 1687. Leibnitius, quamquam nondum hoc usus nomine, protulit, ac contra Cartesianas motus leges adhibuit in iis, quas Baylius nominavit *Nouvelles de la Rep. des lettres*, tum Leibnitiani alii complures illustrarunt, quorum argumenta collegit in Physicis Institutionibus Matrona doctissima *De Chatellet*. Porro tum quidem ex iis, quæ ad ipsum principium vel explicandum, vel comprobandum, vel vindicandum pertinent, vix quidquam persecuti sumus, quanquam habentur sane multa, & per se ipsa scitu dignissima, & non ad ejus principii tantummodo confirmationem, verum etiam ad alias veritates complures deducendas, & præcludendum erroribus multis aditum utilissima, ac necessaria, quorum aliqua vel in privatis epistolis, vel in publicis lectionibus identidem, ubi sese occasio præbuit, exhibuimus, ac eorum multa, quæ ad Geometricorum Locorum continuitatem pertinent in iis, quæ hoc ipso anno edidimus Sectionum Conicarum, elementis persecuti sumus, fusiore dissertatione ad calcem adjecta.

4. Id igitur argumentum in hac solemni exercitatione aliquanto ordinatius pertractandum suscipimus, speramusque, explicatis difficultatibus iis omnibus, quæ contra principium ipsum & a pluribus primæ etiam notæ scriptoribus, & a doctissimis viris vel proposita jam olim sunt, vel proponuntur in dies, ipsam illam theoriam nostram, quæ sensim propalari magis jam incipit, ab aliis impugnata, ab aliis in publicis etiam Academiis proposita, & propugnata, ex hac nova præcipui fundamenti sui propugnatione adepturam aliquanto plus auctoritatis, & roboris.

5. Quoniam vero sunt, qui ipsum Continuitatis principium ita impugnant, ut id quidem contradictionem involvere, atque illud, quod maxime excludere nititur, necessario involvere arbitrentur, quemadmodum de summo nostri ævi & Mathematico, & Philosopho Maupertuisio videbimus paulo infra, primo quidem genuinam ejus principii explicationem ita exhibebimus, ut, ea rite percepta, nihil in ipso deprehendi possit, quod vel sibi ipsi, vel rectæ rationi non congruat, unde ipsius possibilitas profluet, qua constituta progrediemur ulterius, & ejus in natura existentiam evincere conabimur.

6. Ut autem ipsius principii Continuitatis notio evadat magis perspicua, continuæ quantitatis naturam persequemur primo loco, & eam Geometriæ ope illustrabimus, tum ad ipsum Continuitatis principium explicandum faciemus gradum. Continuæ quantitatis natura in eo sita est, ipso Aristotele teste, quem Leibnitius laudat in schediasmate memorato num.3., quod eorum partes se excipientes

imm-

immediate communem habeant terminum; ubi ipſe Ariſtoteles Continuitate affirmat deſtitui numeros, eam autem agnoſcit in linea, ſuperficie, corpore, ac in ſpatio, quod appellat locum, & tempore. En ejus locum in *Categoriis cap.6. de quanto* ex editione Pariſienſi anni 1619. *Diſcretum eſt, ut numerus .... Continuum eſt, ut linea, ſuperficies, corpus, & præterea locus, ac tempus. Nam partium numeri nullus eſt communis terminus, quo eæ partes conjungantur .... At vero linea eſt continua; quia communem terminum ſumere licet, quo partes ejus conjunguntur, nempe punctum. Et ſuperficiei quoque communem terminum accipere licet lineam, quoniam plani partes communi quopiam termino conjunguntur. Itidemque in corpore potes accipere communem terminum lineam, vel ſuperficiem, qua corporis partes conjungantur. Ejuſmodi eſt etiam tempus, & locus. Nam præſens tempus conjungitur cum præterito, & cum futuro. Rurſus locus in continuis eſt, quia locum aliquem continent partes corporis, quæ communi aliquo termino copulantur. Igitur etiam loci partes, quas continent ſingulæ corporis partes, communi aliquo termino copulantur.* Hæc Ariſtoteles, quæ nos paulo fuſius, & accuratius perſequemur.

7. Concipiatur in fig.1.linea ABCD, quæ ſit interrupta in B, C. Ibi continuitas læditur, quia B finis partis AB præcedentis, diſtat a C principio partis CD, quæ ipſam AB immediate conſequitur. Contra vero linea AEB eſt continua, quia idem punctum E eſt limes communis partis AE, & partis EB.

8. In quavis continua quantitate diſtingui debet id, quod eſt terminus, ſeu limes, ab eo, cujus eſt terminus. Illud primum in ea ratione, in qua eſt terminus, debet eſſe indiviſibile, hoc ſecundum debet eſſe diviſibile in infinitum. Lineæ terminus eſt punctum, ſuperficiei terminus eſt linea, ſolidi termini eſt ſuperficies. Linea ſecundum longitudinem eſt diviſibilis in infinitum, punctum vero indiviſibile: ſuperficies eſt diviſibilis ſecundum & longitudinem, & latitudinem linea autem, quæ ipſam terminat, ſecundum latitudinem indiviſibilis eſt, licet ſecundum longitudinem, ſecundum quam cum ipſa ſuperficie protenditur, diviſibilis ſit, ac idem in ſuperficie accidit reſpectu ſolidi, quæ craſſitudine, qua ipſum terminat, omnino caret.

9. Porro terminum, ſeu limitem eſſe indiviſibilem in ea ratione, qua limes eſt, evidenter conſequitur ex ipſa termini, ſeu limitis notione. Si enim is diviſibilis eſſet, & partes haberet, jam non totus ad limitem pertineret, ſed interior pars pertineret ad id, cujus pars exterior eſſet limes. Qui diſcurſus cum in ipſa parte exteriore redeat, manifeſto conſequitur, id, quod eſt limes, indiviſibile eſſe, ac proinde punctum debet eſſe penitus indiviſibile, linea indiviſibilis ſe-

lis ſecundum latitudinem, ſuperficies ſecundum craſſitudinem, ſive profunditatem.

10. Ex ipſa termini natura conſequitur etiam illud, terminum termino contiguum eſſe non poſſe. Nam ſemper haberi debet, illud continuum ipſis interjacens, cujus ii ipſi termini ſunt. Neque alter poteſt eſſe finis præcedentis, & alter principium ſequentis, cum ex natura continui (num.6.) communis eſſe debeat eorum terminus. Idem autem conficitur adhuc evidentius ex ipſius termini indiviſibilitate. Indiviſibilia enim vel a ſe invicem diſtant, vel, diſtantia ſublata, in unicum coaleſcunt. Nam quæ extenſione omnino carent, vel ſe non contingunt, vel ſe contingunt ſecundum ſe tota. Diſtant in primo caſu; compenetrantur, & in unicum coaleſcunt in ſecundo. Sibi ipſi vim inferat oportet, qui punctum puncto contiguum concipiat, & tamen extra ipſum poſitum, nec compenetratum. Concipiet globulos quoſdam extenſos, qui globuli ex una parte ſe contingant, ex alia a ſe invicem recedant, ubi partes ejuſdem puncti admittet, & indiviſibilitatis, ac inextenſionis ideam deſtruet. Eſt id ſane vetuſtiſſimum argumentum, quo ſemper Zenonis ſententia continuum extenſum componentis ex punctis penitus inextenſis confutata eſt, cujus ſolutionem aptam nemo huc uſque exhibere potuit, nemo profecto exhibebit in poſterum, cum abſolutiſſimæ demonſtrationis, atque evidentiæ vim habeat.

11. Multa autem horum obſcuriſſima videntur iis, qui in ſuarum idearum originem altius non penetrarunt, nec ab iis, quas per ſenſus hauſerunt, ſatis norunt alias per reflexionem efformare rectæ rationi, & rerum naturæ magis conformes. Non indiviſibilia tantummodo, & inextenſa, verum etiam diviſibiles magnitudines numero infinitæ noſtros ſenſus effugiunt, qui, ubi ad quoſdam imminutæ magnitudinis limites deventum eſt, nos omnino deſtituunt. Hinc a prima infantia, tam per viſum, quam per tactum, diviſibilium, & extenſarum quantitatum perceptiones hauſimus innumerabiles, quibus ita paullatim aſſuevimus, ut quotieſcumque puncti cujuſpiam ideam excitare volumus in noſtris mentibus, globuli cujuſdam extenſi in longum, latum, & profundum excitemus ideam, quem globulum alteri globulo adjungimus, & longiſſimum etiam ipſorum ordinem globulorum conſideramus. Accedat ſenſuum perceptioni reflexio. Conſideretur illud, finitam extenſionem quamcumque debere habere ſuum finem, nec id, quod partes habeat, poſſe interioribus ſui partibus finem eſſe, & patebit illico finem revera haberi, ac partibus, & extenſione carere, nec poſſe inextenſum ab inextenſo contingi, quin ſimul coeant.

12. Ve-

(VII.)

12. Verum ut ipſi imaginationis imbecillitati indulgeatur, oſtendemus, quo pacto ii etiam, qui communem amplectuntur ſententiam de continua extenſione materiæ (nam nos materiam ipſam, ut infra patebit, componimus ex punctis prorſus indiviſibilibus, & inextenſis, a ſe invicem aliquo ſemper vacuo penitus intervallo disjunctis) cogantur omnino agnoſcere puncta penitus indiviſibilia, & inextenſa, lineas latitudine, ſuperficies & latitudine, & longitudine deſtitutas, ubi illam adhibebimus imaginem, qua in primo tomo noſtrorum Elementorum, in ipſo nimirum Geometriæ veſtibulo uſi olim ſumus, cum in hanc noſtram theoriam nondum incidiſſemus, ad oſtendendum ſuperficies, lineas, puncta in ipſa realij continua extenſione eſſe aliquid, non a noſtra mente confictum, ſed in iis ipſis revera exiſtens, & ad ipſam continuam extenſionem inſeparabiliter pertinens.

13. Sit tabula ABDC continua, & affabre perpolita, cujus dimidium EFDB concipiatur coloris nigri, alterum autem dimidium AEFC coloris albi. Profecto oculis ipſis ſubjicietur limes EF inter partem albam, & nigram, de quo veriſſimè affirmabitur habere tantam longitudinem, quanta eſt longitudo tabulæ, ſed latitudine carere prorſus. Utcumque enim parum declines hinc, vel inde a limite, vel in albo colore eris, vel in nigro. En ideam lineæ habentis longitudinem, & latitudine carentis. Quod ſi tabula concipiatur craſſior, & diaphana, ut e criſtallo, ac per totam craſſitudinem ejus dimidium nigri, alterum vero dimidium albi coloris ſit, oculis ipſis introſpicienti apparebit limes inter album, & nigrum tractum in longitudinem, & latitudinem protentus, quanta eſt tabulæ longitudo, & craſſitudo; ſed craſſitudine carens. Quod ſi quatuor diverſis coloribus tinctæ intelligantur quatuor partes AEIG, GIFC, FIHD, HIEB; binæ habebuntur lineæ GH, EF ita ſe interſecantes in unico puncto I, ut id ipſum punctum nullam omnino extenſionem habeat, nullas partes. Quamobrem & puncti idea habebitur.

14. Novimus ſane colores diverſos expoſcere diverſum particularum textum, nec poſſe continuam tabulam hujus potius, quam alterius coloris eſſe. Idcirco diximus *intelligatur* ejuſmodi tabula iis imbuta coloribus. At id ideæ limitis, & ejus indiviſibilitatis efformandæ nihil obeſt, & facile a ſenſibili colorum imagine ad ſectionem ſimplicem tabulæ mentis acies transferetur. Secetur igitur ejuſmodi continua tabula tranſverſim per EF: tum partes ſectione divulſæ iterum admoveantur ad ſe invicem uſque ad contactum. Oculis quidem non apparebit limes inter partem dexteram, & ſiniſtram; erit tamen, & alicubi ab altera ad alteram tranſitus fiet. Extendetur is limes per totam tabulæ craſſitudinem in longum, & latum, & ſuperficiem bina ſolida dirimentem exhibebit. In ipſa ſuperficie extima ſectio longitu-

dinem

dinem habebit EF, & partem alteram ſuperficiei ab altera dirimet; ac lineam reddet. Nova autem ſectio GH, ubi priori occurret in I, punctum præbebit indiviſibile, & inextenſum.

15. Jam vero hìc facile admodum intelligi poterit illud, ſuperficiem ſuperficiei ſecundum craſſitudinem, lineam lineæ ſecundum latitudinem, punctum puncto ſecundum longitudinem immediatè adhærere non poſſe, ſed vel congruere debere, vel diſtare. Facta enim illa ſectione per EF, evidentiſſimum eſt, novam ſectionem fieri non poſſe, quæ vel cum illa priore non congruat, vel inter ſe, & illam priorem aliquid tabulæ non intercipiat. Si partes tabulæ ſe contingant, evidentiſſimum eſt, novam ſectionem fieri non poſſe priori contiguam, ſine ulla intermedia tabulæ particula. Atque id ipſum profluit manifeſto ex eo, quod ſectio illa ſit limes communis utrique parti tabulæ, & prorſus indiviſibilis in ea ratione, in qua eſt limes.

16. Conſequitur ex his, in ſententia communi de continua materiæ extenſione ſuperficiem, lineam, punctum non eſſe aliquid mente noſtra confictum, ſed revera exiſtere debere in ipſa illa reali extenſione materiæ, cujus extenſionis erunt affectiones quædam: erunt termini, inſeparabiles ab iis, quorum affectiones ſunt, ut nimirum non poſſit ſuperficies per ſe ſolam exiſtere tanquam velum quoddam craſſitudine carens, linea ut quædam virgula & longitudine, & latitudine deſtituta, punctum ut granulum quoddam ab omni extenſione immune; ſit tamen ſuperficies ſolidi per ſe exiſtentis limes realis, linea realis ſuperficiei limes, punctum realis limes lineæ, ac proinde primam Euclidis definitionem, & omnes Geometrarum demonſtrationes in ea communis realis continuæ extenſionis ſententia vim habere ſuam.

17. Nos quidem, qui continuam materiæ extenſionem nequaquam admittimus, puncta realia indiviſibilia agnoſcimus per ſe exiſtentia ſine ulla linea, & ſine ſuperficie ulla, aut ſolido reali; ac proinde in materia nullam ſuperficiem, nullam lineam, nullum admittimus ſolidum: adhuc tamen lineam continuam admittimus in motu, quem continuum eſſe debere patebit infra, ac extenſionem continuam in longum, latum, & profundum in ſpatio, quo noſtra continentur puncta, & per quod excurrunt, admittimus omnino, quod quidem ejuſmodi trinam dimenſionem habere manifeſtiſſimum eſt ex ipſis motibus, quaquaverſum directis. Verum quid de ipſo ſpatio ſentiamus, & in quo per nos ejus continuitas ſita ſit, aperiemus inferius. At ejuſmodi trina extenſione ſemel in eo admiſſa, manifeſto conſequitur, in ipſo itidem debere admitti ſuperficies carentes craſſitudine, lineas latitudine, puncta dimenſione quacumque deſtituta, quibus admiſsis, manet itidem omnis Geometricarum demonſtrationum vis

in iis

in iis omnibus, quæ pertinent ad ipſam ſpatii extenſionem continuam.

18. Hiſce expoſitis, quæ pertinent ad indiviſibilitatem terminorum, ſeu limitum, progrediendum ad eorum, quæ ipſis limitibus continentur, diviſibilitatem in infinitum. In primis id, quod binis indiviſibilibus terminis continetur, debet dividi poſſe, & partes habere. Si enim id indiviſibile eſſet, & partibus careret, non poſſet limiti utrilibet contiguum eſſe (num. 10.), ſed cum eo compenetrari deberet, ac prorſus congruere. Congruerent igitur bini ipſi limites etiam inter ſe, nec bini eſſent a ſe diſtantes, ſed in unicum coaleſcerent. Facta autem diviſione, jam inter novum limitem, & utrumque e prioribus iterum interjacere debebit diviſibile aliquid, & eodem argumento redeunte, diviſio continuari poterit in infinitum. Sic quævis linea binis punctis interjecta dividi poterit in infinitum eo ipſo, quod ſemel in binas partes dividi poſſit. Facta enim ejuſmodi diviſione in binas partes communi puncto terminatas, ipſæ iterum partes hinc novo puncto, inde altero e præcedentibus terminabuntur, adeoque iterum debebunt diviſibiles eſſe; qui diſcurſus recurrit ſemper ſine ullo fine.

19. Et hoc quidem pacto continui extenſi diviſibilitas in infinitum, ex ipſa extenſionis continuæ natura, & terminorum indiviſibilitate conficitur. Eadem in Geometria innumeris ſane argumentis ita evincitur, ut nullus dubitationi locus ſuperſit. Illam incommenſurabilium quantitatum relatio nullis ſubjecta numeris, illam anguli contactus a majorum circulorum arcubus perpetuo ſecti, illam aſymptotica curvarum crura indefinite producta oculis fere ipſis objiciunt. Quid illud, quod generaliter ſolvitur in Elementis ipſis problema, datam rectam in datum partium numerum ſecare, a data recta imperatam partem abſcindere, datis binis rectis quibuſcumque tertiam continue proportionalem invenire, quorum problematum priora duo ipſam lineæ cujuſvis diviſibilitatem exhibent in infinitum, tertium vero illud oſtendit, magnitudinem quamcumque ita ultra quoſcumque determinatos limites imminui poſſe, ut poteſt ultra limites quoſcumque determinatos augeri? Si enim e binis datis maneat ſecunda, ac prima augeatur utcumque, tertia continuè proportionalis minuetur quantum libuerit.

20. Et quidem ipſa ejus problematis ſolutio fontem aperit ejus præjudicii, quo in ipſa diviſibilitate in infinitum, ac imminutione magnitudinis ultra quoſcumque limites concipienda laboramus. Aſſuevimus enim ab ipſa infantia contemplationi magnitudinum illarum, quæ ad noſtri corporis magnitudinem haud ita magnam proportionem h berent. Vidimus in ejuſmodi magnitudinibus numerum partium, quæ noſtris ſenſibus percipi poſſent non ita magnum contineri.

Facile nobis perſuaſimus, diviſione continua citò deveniri debere ad magnitudines, quæ noſtros ſenſus effugiant. Et vero, quæ ſub noſtros ſenſus non cadunt, habere vulgo ſolemus pro nullis, qui præcipuus eſt præjudiciorum communium fons, numquam ſatis præcluſus, atque obſtructus, vel ſi reflexione aliqua ideas per ſenſus acquiſitas corrigimus, plerumque parum infra ipſum ſenſuum limitem deſcendimus, ac velut oppreſſi deficimus. Pauci acriore mentis acie, atque animi audentiore vi ſeſe altius attollunt, & præjudiciis omnibus ſepoſitis, ſolam rationem, ſolam rerum naturam conſiderant. Proderit autem mentis imbecillitatem imaginibus quibuſdam identidem corroborare, quæ ut oculis teleſcopia ſolent remotiſſimos Aſtrorum globos admovere, ita menti ipſi abſtruſiſſimas, & obductiſſimas veritates, veluti ex fundo quodam erutas, præſentes quodammodo ſiſtant, & contemplandas proponant.

21. Ac primo quidem ut amoveatur difficultas illa, quam experimur in concipienda tanta partium multitudine in quacumque perquam exigua quantitate, concipiamus hominem aliquem magnitudinis ita immanis, ut totidem vicibus nos ſuperet, quot vicibus univerſus Telluris globus ſuperat illam exiguam quantitatem. Ille homo eandem habebit difficultatem in concipienda multitudine partium Telluris totius, quam nos in ea concipienda in illa quantitate perquam exigua. Magnum, & parvum reſpectiva ſunt, & liceret hominum feriem eadem lege majorum augere in immenſum ſupra nos, vel imminuere infra nos, ac quæ aliis eſſent ad ſenſum prorſus indiviſibilia, aliis contra immenſam viderentur extenſionem; & partium numerum continere.

22. Verum ut & poſitivum argumentum diviſibilitatis in infinitum communi captui accomodemus, concipiantur in communi ſententia materiæ habentis extenſionem continuam binæ regulæ craſſæ quantum libuerit, ſed ex altera ſaltem parte rectiſſimæ, ac ſatis longæ, ut palmorum 100. ſingulæ. Id in ea ſententia omnino fieri poteſt, nam ſi quid a rectitudine aberrat hiatu quodam, ſuppleri poterit implendo, ſi quid exuberet, poterit demi. Ex natura rectitudinis evidentiſſimæ ſunt binæ hujuſmodi propoſitiones. 1. *Si binæ eæ regulæ ſe contingunt in fine, ac in vertice diſtant, diſtant itidem in medio.* Nam evidentiſſimum eſt, ſi per 50. palmos prorſus congruant, non poſſe alteram ab altera deinde recedere, niſi altera, vel utraque a rectitudine deflectat. 2. *In eodem caſu diſtant in medio a ſe invicem minus, quam in vertice.* Nam ſi per 50. palmos prorſus nihil ad ſe invicem accedunt, ne poſt alios quidem 50. acceſſuras quidquam, evidentiſſimum ſane eſt, nec ullum unquam invenimus, cui cum hæ veritates primo proponerentur, non eas ſibi evidentiſſimas eſſe profiteretur.

23. Iis

23. Iis autem positis concipiantur primo die ita collocatæ ejusmodi regulæ, ut se in fundo contingant, & in vertice distent dato quovis intervallo, ut uno digito. Per primam propositionem distabunt etiam in medio, & per secundam in medio minus, quam in vertice. Secundo die poterunt collocari a Deo ita, ut in vertice distent, quantum primo die distabant in medio. Eo die dempta erit digiti pars. Nam pridie minus distabant in medio, quam in vertice, adeoque secundo die in vertice minus distant, quam primo. Eo autem secundo die cum in vertice distent, distabunt pariter in medio, ac in medio quidem minus, quam in vertice. Quare tertio die collocari poterunt ita, ut in vertice distent, quantum secundo distabant in medio, & eodem argumento conficitur, eodem tertio die alteram ex illo digito particulam demptam esse. Porro idem præstari poterit quarto die, & sequentibus omnibus sine ullo fine. Nullus enim advenire poterit dies, in quo eamdem operationem non liceat persequi. Nam si dicatur adventurum tandem aliquem diem, in quo progredi non liceat, fatendum erit, pridie ejus diei adhuc idem illud præstitum fuisse, adeoque ipso pridie regulas in vertice fuisse apertas. Quamobrem apertæ fuerunt etiam in medio, & proinde postridie collocari poterunt ita, ut in vertice apertæ sint, & ea collocatione facta, postridie etiam in medio distare debent. Quotidie igitur auferri poterunt novæ semper partes illius ipsius digiti, atque id sine ullo fine, adeoque ille digitus, & quodvis aliud intervallum, pro quo semper idem argumentum redit, dividi semper potest ulterius in infinitum.

24. Hoc quidem argumentum innititur totum principio Geometrico: *binæ rectæ non habent segmentum commune*, & illi theorematí itidem Geometrico: *in triangulis similibus latera homologa sunt proportionalia*. Nam binæ regulæ cum binis intervallis continent bina triangula isoscelia similia, & proinde intervallum in medio, quod vi ejus principii semper erit aliquod, debet esse dimidium intervalli in vertice. Verum pro iis, qui Geometricis demonstrationibus vel minus assueverunt, vel fidem abrogandam censent, vim habet quandam ex crasso illo 50. palmorum intervallo, per quod regulæ rectæ congruere non possunt, quin totæ congruant, & ex defectu distantiæ in medio a distantia in vertice assumpto indefinite, nulla triangulorum, & proportionum ratione habita. Vis autem omnis in eo sita est, quod assumpto intervallo quovis, inveniri potest intervallum ipso minus, quod ubi semel demonstratum sit, progressus in infinitum necessario consequitur, ut supra in bissectione pariter accidit. Patet autem, qui ejus argumenti vim velit infringere, ipsum omnino negare debere possiibiles regulas prorsus rectilineas, vel rectitudinis

 ideam,

ideam, quam habemus clariſſimam, confundere, atque corrumpere: quæ effugia quam miſera ſint, nemo non videt.

25. In noſtra ſententia de extenſione non continua materiæ idem argumentum vim habere eamdem poteſt, ſi concipiantur collocata tria puncta in directum, quorum medium diſtet a ſummo, & imo palmis 100, tum in vertice in diſtantia itidem palmorum 100 ab imo, & in diſtantia unius digiti a ſummo concipiatur collocatum quartum punctum, tum inter hoc, & imum illud in medio in directum punctum quintum, inter quod, & ſecundum illud medium priorum trium habebitur neceſſario ex natura rectitudinis intervallum aliquod, & minus intervallo quarti illius a ſummo, unde eâdem progreſſione eadem habebitur diviſibilitas in infinitum. Sed ea & ex ipſa continuæ extenſionis natura, & ex innumeris Geometricis demonſtrationibus, & ex hoc ipſo argumento ſuperius allato, & ad communem captum accommodato magis, ita eſt evidens, & manifeſta, ut in dubium a ſano homine revocari omnino non poſſit.

26. Illud tantummodo ante, quam progrediamur, hic notandum omnino eſt, omnia hujuſmodi argumenta evincere diviſibilitatem in infinitum intervalli, ſeu ſpatii extenſi continui, non vero materiæ. Nam in primis ſunt nonnulli, qui cenſent indiviſibilem, & ſimpliciſſimam materiæ particulam extendi in longum, latum, & profundum, ſive extendi per ſpatium diviſibile ita, ut id occupet ſpatium, quod decem, vel centum ejuſmodi ſimplices particulæ, ſed minus extenſæ, occupare poſſent, quam Peripateticorum nonnulli appellarunt extenſionem, & diviſibilitatem virtualem, quin immo nonnulli ex iis ipſam eandem particulam putarunt jam plus occupare ſpatii, jam minus, quæ iidem dixerunt *puncta inflata*. Ejuſmodi autem extenſionis genus explicabant exemplo animæ rationalis, quam ſimplicem, & prorſus indiviſibilem admittebant extenſam per totum corpus, vel per certam corporis partem utique diviſibilem, & Divinæ immenſitatis exemplo, quæ in omnibus ſpatii punctis utcumque a ſe remotis ſemper eſt præſens. Ea quidem ſententia nobis nunquam arridere poterit, cum analogiæ Naturæ, & inductioni deſumptæ ab iis, quæ videmus omnino contraria ſit, cum nimirum quidquid materiæ cernimus in diverſa ſitum ſpatii parte, quantum obſervatione colligere licet, diſtinctum videamus, ac ſeparabile a ſe invicem. Adhuc tamen in ea ſententia, quæ quidem nullis metaphyſicis, vel geometricis argumentis evidenter falſa demonſtrari poteſt, ſuper unica indiviſibili particula omne figurarum, & ſectionum genus concipi poteſt, ſine ullis realibus ejuſdem partibus, in qua eadem dividi poſſit.

27. Deinde in noſtra etiam ſententia materiæ conſtantis punctis prorſus indiviſibilibus, & inextenſis, ac a ſe invicem ſemper disjunctis inter-

intervallo quopiam, poteſt maſſa quædam conſtare punctis tantummodo mille, quæ ſolum in mille partes ita ſecari poterit, ut earum quælibet aliquid materiæ contineat, aucto vero partium numero, ſecabuntur jam vacua intervalla, & partes reliquæ debebunt omnino carere materia, cujus puncta, vel intra mille particulas erunt ſpatii ab illa mole comprehenſi, vel in limitibus inter contiguas particulas.

28. Demonſtrata limitum indiviſibitate, & diviſibilitate eorum, quæ iis limitibus terminantur, deducenda ſunt quædam, quæ ad naturam continui cujuſvis, & legis continuitatis ipſius probe intelligendam, ac ad evitandos errores quamplurimos, in quos non vulgus tantummodo labitur, verum etiam doctiſſimi ſæpe, ac primæ notæ Auctores a præjudiciis ſeducti ita alte inſidentibus animo, ut necopinanter inter argumentandum ſenſim irrepant, & ſe furtim inſinuent. Dicemus autem de punctis, & linea, ac quæcumque de iis dicuntur, applicari debent ceteris omnibus terminis, & terminatis continuis quantitatibns, ut lineis, & ſuperficiei, ſuperficiebus, & ſolido.

29. In primis evidenter conſequitur ex iis, quæ demonſtrata ſunt, puncta non eſſe partes lineæ, ſed terminos ita, ut linea non e punctis, ſed e lineolis componatur, & in lineolas reſolvatur. Nam diviſione in infinitum continuata, ſemper lineæ cujuſpiam partes ſunt aliæ lineæ binis ſingulæ extremis punctis terminatæ. Linea nimirum deſcribitur ductu, vel excurſu continuo puncti, non additione, & repetitione ejuſdem adnexi.

30. Deinde evidenter itidem colligitur, nullam eſſe dati cujuſpiam intervalli partem omnium minimam, cum cujuſvis lineæ pars ſit itidem linea, & quævis linea in infinitum itidem diviſibilis ſit. Quamobrem nomen partis in extenſione continua neceſſario in ſe includit partium plurium conjunctionem, adeoque nulla eſt pars, quæ tota ita ſit prima, vel ultima dati intervalli, ut in ipſa non contineatur aliquid, quod aliud ante ſe habeat in initio, & poſt ſe in fine. Ipſum partis nomen vagum eſt, & indeterminatum. Si determinetur numerus partium æqualium determinati intervalli, determinabitur ſingularum magnitudo: ſi determinetur magnitudo, determinabitur numerus, & in utroque caſu aliqua erit prima, & ſecunda, aliqua ultima, & penultima. Sed nec magnitudine, nec numero definito, nomen partis aliquid indeterminatum ſignificat; nec interroganti, quot partes ſint in dato intervallo, determinate reſponderi poteſt, niſi determinetur earum magnitudo, qua determinata numerus etiam determinatur; poteſt autem reſponderi indeterminata quadam reſponſione, numerum partium eſſe finitum in infinitum. Nimirum determinata quavis magnitudine partium eſſe finitum, ſed quoniam ea in infinitum minui poteſt, poſſe itidem augeri numerum ipſum in infinitum

ita,

ita, ut ordinum numerus nullus ſit, & particularum in quovis ordine numerus ſit ſemper finitus. Ea reſponſio in ſententia communi continuæ extentionis materiæ majorem aliquam difficultatem habet; in noſtra, in qua intervallum, ſeu ſpatium, ut infra videbimus, nihil continet reale actu exiſtens, & diviſibilitas nihil eſt aliud, niſi, ut ita dicamus, *interſeribilitas punctorum realium*, habet omnino nullam.

31. Demum, quod maxime notandum eſt, in quovis intervallo determinato habetur ſemper primum punctum, & ultimum, ſed nullum eſt ſecundum, aut penultimum. Cum enim inter bina puncta ſemper (num. 10.) linea interjacere debeat, & ipſa linea (num. 18.) ſit itidem diviſibilis, evidentiſſime conſtat, nullum eſſe punctum ita alteri puncto proximum, ut alia propriora non adſint, adeoque nullum ſecundum, nullum penultimum. Quod ſi quis de ipſis punctis quærat, quot ſint in dato intervallo in ſententia communi continuæ extenſionis materiæ, dicendum eſt ea numerum omnem excedere, ſeu eſſe numero infinita. Nam ante quam per actualem diviſionem partes ſeparentur, ipſæ omnino a ſe invicem diſtinctæ ſunt, & una non eſt alia, adeoque & terminum ſuum habent, qui ibi exiſtit. Quare tot puncta exiſtunt actu in ejuſmodi linea, quot diviſiones fieri poſſunt, cumque numerus diviſionum, quæ fieri poſſunt, quovis finito major haberi poſſit, numerus punctorum actu exiſtentium habetur itidem quovis finito major, adeoque eſt infinitus. At in noſtra ſententia, in qua numerus punctorum ſpatii eſt ſola poſſibilitas punctorum realium interſerendorum, reſpondetur itidem, ut in partibus, eorum numerum eſſe finitum in infinitum: nimirum punctorum actu exiſtentium numerum ſemper in ſe determinatum fore, & finitum, ſed eum ipſum ſemper augeri poſſe ſine ullo fine: non autem poſſe ſimul exiſtere ea omnia, quæ ſeorſum conſiderata poſſunt exiſtere ſeorſum, ne Divina ipſa Omnipotentia exhauriatur, de quo iterum infra.

32. Conſequitur ex præcedenti & illud, nulli lineæ poſſe auferri poſtremum, aut primum punctum tantummodo, ſed vel infinita numero puncta auferri ſimul, ablata lineolæ parte, vel relinqui debere, etiam illud poſtremum. Nam ablato ultimo, vel primo puncto, linea adhuc remaneret terminata, adeoque terminum haberet, & proinde ultimum, vel primum punctum, quod proinde ante ultimi illius, vel primi ablationem fuiſſet penultimum, vel ſecundum, quod, ut vidimus, eſt impoſſibile. Idem in quavis alia continua ſerie quantitatum obtinebit, ut ſuperiora omnia. Nimirum ultimus terminus tantummodo, vel primus deeſſe non poterit, exiſtentibus omnibus reliquis, ut linea ultima finitæ ſuperficiei, ſuperficies finiti ſolidi, & ita porro, cujus in lege continuitatis ſtabilienda uſus iterum occurret inferius.

33 In-

33. Inter ea autem, quæ continua ſunt, tempus quoque numerari debet, ut ex ipſo etiam Ariſtotele vidimus. Tempus enim continuo fluit, & ſine ullo intermedio hiatu partes ipſius ſibi continuo ſuccedunt aliæ aliis. Hinc in ipſo tempore diſtinguendum erit, ut in linea, tempus continuum, ut hora, a termino, vel limite dirimente bina continua tempora, quod appellabimus momentum. Illud reſpondebit lineæ, hoc puncto. Momentum erit indiviſibile, ut punctum, tempus continuum erit diviſibile in infinitum, ut linea. In tempore continuo, ut in linea, nulla erit particula utcumque parva, qua minor haberi non poſſit, nullum temporis intervallum ita erit magnum, ut majus aliquod haberi non poſsit. In temporis continui menſura aliqua determinata, nulla erit particula, quæ tota ſit prima, vel ultima. Habebitur ſemper in quovis intervallo finito temporis momentum primum, & ultimum, non habebitur ſecundum, & penultimum, ſed binis momentis quibuſcumque, utcumque proximis, quod maxime notandum eſt, interjacebit tempus continuum, in quo alia momenta erunt utrilibet ex extremis propiora, ut de punctis in linea diximus. Ut fluxu puncti continuo non repetitione, & multiplicatione generatur linea, ita duratione rei continua, quæ ſingulis momentis exiſtit, tempore continuo durat, generatur tempus.

34. In iis omnibus ſpatium, & tempus omnino ſibi reſpondent, nec aliud eſt diſcrimen inter ipſa, niſi quod ſpatium, & lineas habet dimenſionis unius, & ſuperficies binarum, & ſolida trium, ac proinde in lineis, & longitudinem, & poſitionem, ſive directionem mutare poteſt, tempus vero unicam tantummodo dimenſionem habet, & ſola diuturnitate variatur, nullo directionum diſcrimine, ſoli lineæ analogum.

35. Ex lineæ, & temporis continuarum quantitatum relatione, oritur motus continuus, & celeritas, quæ poteſt conſiderari tam in ipſo actuali motu, quam in determinatione, quam habet mobile ad motum, quarum primam in diſſertatione de Viribus Vivis appellavimus ſatis apto Scholaſticorum vocabulo *velocitatem in actu ſecundo*, ſecundam *velocitatem in actu primo*. Motus continuus eſt is, in quo punctum mobile ita locum perpetuo mutat, ut ſingulis momentis temporis reſpondeant ſingula ſemper alia, atque alia ſpatii puncta. Si punctum mobile conjungat idem ſpatii punctum cum finito aliquo momentorum numero a ſe invicem per intervalla quædam diſtantium, habebitur regreſſus puncti mobilis ad idem punctum ſpatii; ſi conjungatur idem punctum ſpatii cum ſerie continua momentorum omnium finito aliquo tempore continuo contentorum, habebitur quies. Contra ſi conjungatur idem momentum temporis cum finito numero punctorum ſpatii a ſe invicem finito aliquo intervallo diſtantium, habe-

habebitur illa, quæ dicitur replicatio: ſi conjungatur idem momentum temporis cum ſerie continua punctorum ſpatii contenta in finito quopiam intervallo continuo, habebitur illa, quam diximus (num. 26.) virtualem extenſionem appellari. Hæc virtualis extenſio puncti materiæ quieti, replicatio regreſſui ejuſdem puncti materiæ ad idem ſpatii punctum reſpondet. Quod ſi plura conſiderentur materiæ puncta, tres alii caſus habebuntur; ſi nimirum conjungant idem momentum temporis cum diverſis punctis ſpatii, in quo ſita eſt disjunctorum coexiſtentia: ſi conjungant idem punctum ſpatii cum diverſis momentis temporis, quod fieret in ſucceſsivo appulſu punctorum materiæ ad eundem locum: ſi conjungant idem punctum ſpatii cum eodem momento temporis, in quo ſita eſt compenetratio. Hi ſeptem caſus exhibent omnes combinationes fluentes ex conjunctione temporis, & ſpatii, quorum omnes per Divinam Omnipotentiam poſsibiles eſſe, unicam autem disjunctorum coexiſtentiam illam naturaliter eſſe poſsibilem oſtendemus inferius, ubi ipſam noſtram theoriam ex lege Continuitatis deduxerimus.

36. Ut ſingulis momentis temporis pro puncto mobili quovis reſpondent ſingula lineæ puncta, ita ſingulis partibus temporis continui reſpondent ſingulæ partes lineæ, & viceverſa, qui motus dicitur æquabilis, vel uniformis, ſi æqualibus temporis partibus, æquales ſpatii partes reſpondeant, inæqualis, & difformis, ſi inæquales. Celeritas autem in actu ſecundo eſt illa relatio ſpatii ad tempus in motu æquabili, quæ reſultat conſiderando ſpatium directe, & tempus reciproce; ut nimirum eo ſit major ea celeritas, quo majus ſpatium eidem reſpondet tempori, vel minus tempus eidem ſpatio, adeoque ejus menſura eſt ſpatium diviſum per tempus, quæ menſura non niſi in motu æquabili, in quo celeritas perpetuo durat eadem, habetur accurate, ut etiam in eo ſolo motu accurata habetur idea celeritatis in actu ſecundo. Celeritas autem in actu primo eſt determinatio ad hanc ipſam celeritatem in actu ſecundo, ſive ad percurrendum certum ſpatium certo ſequenti continuo tempore, niſi quid obſit. Ea ſola convenit ſingulis momentis temporis, non velocitas in actu ſecundo, cum nullus momento competat motus, qui tempus continuum ſecum trahit. Quare ipſam intelligere debent Mechanici, ubi celeritatem ſingulis momentis debitam ducunt in tempus ad habendam ſpatii menſuram in motu etiam difformi.

37. Si linea componeretur e punctis, tempus vero continuum e momentis, quorum alia aliis immediate ſuccederent, omnes motus continui deberent eſſe æque veloces; ſingulis nimirum momentis, ſingula reſponderent puncta. Velocitas diverſa haberi non poſſet, niſi ſi vel idem ſpatii punctum conjungeretur ab altero mobili puncto cum

pluri-

pluribus momentis, quod affirmarunt ii, qui discrimen velocitatum per morulas explicabant, vel idem momenti punctum conjungeretur cum pluribus punctis spatii, quod affirmarunt nonnulli ex iis, qui virtualem illam punctorum extensionem propugnabant. At semel intellecta Continuitatis natura, nulla est difficultas in concipienda celeritatum differentia, & quæ in contrarium afferuntur mera sophismata sunt, quæ facile dissolvuntur, si consideretur cuivis tempusculo utcumque parvo respondere suum spatiolum, cuivis contra spatiolo suum tempusculum in quovis motu, nec ullum esse tempusculum, aut spatiolum omnium minimum, nullum secundum, & penultimum momentum, aut punctum.

38. Nimirum in motu continuo magis celeri eidem tempori respondet majus spatium, vel eidem spatio minus tempus. Si consideretur semper in utroque mobili idem tempus, & id tempus dividatur in particulas quotcumque, utcumque exiguas; primum vero mobile moveatur decuplo celerius, quam secundum, cuicumque particulæ utcumque parvæ temporis continui habebitur in primo spatium decuplo majus, quam in secundo. Si spatium semper commune consideretur, & id ipsum dividatur in particulas quotcumque utcumque exiguas, cuicumque particulæ utcumque parvæ spatii continui habebitur in primo tempus decuplo minus, quam in secundo. In eo nihil absurdi continetur. Utcumque parvum sit spatiolum, quod determinato tempusculo percurrit secundum mobile, semper habentur spatiola illo minora, & minora in infinitum, & unum ex iis, nimirum quod decuplo est minus, percurritur a primo mobili eodem illo tempusculo. Utcumque parvum sit tempusculum, quo primum mobile percurrit determinatum spatiolum, semper habentur tempuscula illo minora, ac minora in infinitum, & unum ex iis, nimirum quod decuplo est minus, percurritur a primo mobili. Cum nullum sit spatiolum, quo minus non habeatur, adeoque quod totum sit primum, nullum sit tempusculum, quo minus non adsit aliud, adeoque quod totum sit primum, nullo existente secundo intervalli puncto, nullo secundo momento temporis, difficultas omnis penitus evanescit. Utrumque mobile habet initium motus in quodam determinato puncto spatii, & momento temporis, ut & finem, in quibus momentis non habetur pars motus, quantitatis nimirum continuæ, sed indivisibilis limes. Motus requirit & spatium, & tempus continuum, quæ divisibilia sunt in infinitum, & motus ipsius divisibilitatem inducunt in infinitum. Numerus partium & spatii, & temporis, & motus pendet a singularum partium magnitudine, quæ si non determinetur, etiam ille numerus indeterminatus manet, ut & relatio partium ad partes. Divisionis lege constituta, relatio statim con-

sequi-

ſequitur inter partes. Eidem autem parti temporis continui major, vel minor utcumque in infinitum reſpondere poteſt pars continui ſpatii; unde conſequitur & celeritatem augeri in infinitum poſſe, vel minui, abſque ulla aut morula, aut extenſione virtuali, nimirum abſque conjunctione ejuſdem momenti temporis cum pluribus punctis ſpatii, vel ejuſdem puncti ſpatii cum pluribus momentis temporis.

39. Porro licebit hæc omnia ipſis quodammodo intueri oculis, ope Geometriæ in continua linearam relatione. Per quodvis punctum D in fig.3. rectæ AB ducatur recta indefinita MN in quovis dato angulo; in qua capiantur ad eamdem partem bina ſegmenta DE, DF in quavis data ratione, ut pro ſuperiore caſu ſubdecupla, ducanturque ex quovis itidem puncto dato C ipſius AB binæ rectæ CG, CH per puncta F, E.

40. Referat jam DC tempus quoddam, DF ſpatium a primo mobili percurſum, DE ſpatium percurſum a ſecundo. Utcumque imminuto tempore CD, ratio inter ſpatia eodem illo tempore deſcripta erit illa eadem DF ad DE, ſive ut 10 ad 1, nec ullum erit tempuſculum CD ita exiguum, ullum momentum D ita proximum momento C, ut pro utroque mobili, jam aliqua ſpatia continua non habeantur, quæ ſint in illa eadem ratione. Quod ſi quæratur, quo tempore primum mobile velocius percurret ſpatium æquale ſpatio DE percurſo a ſecundo mobili tempore CD, ſatis erit ducere rectam ex E parallelam AB, donec occurrat rectæ CG in L, tum rectam LQ parallelam MN, occurrentem CA, CH in Q, K, & C, Q erit tempus illud quæſitum, quo primum mobile habebit motum QL æqualem motui ED. Illo vero minori tempore ipſum ſecundum mobile adhuc minorem motum habebit, nimirum QK. Nulla eſt FD ita parva, ut ei aliqua ED decuplo minor non reſpondeat, nulla CD ita parva, ut ei aliqua CQ non reſpondeat, quæ erit itidem decuplo minor, quam ipſa, cum ſit CQ ad CD, ut QL, vel DE ad DF, ſive ut 1 ad 10. Ratio conſtans ſpatiorum DE, DF rationem exhibet conſtantem motuum eidem tempori debitorum, ratio itidem conſtans CQ, CD exhibet rationem conſtantem temporum eidem ſpatio debitorum. Quovis ſpatio utcumque parvo deſcripto a primo mobili reſpondet ſpatiolum decuplo minus deſcriptum a ſecundo: cuivis tempuſculo utcumque parvo impenſo a primo mobili reſpondet aliud tempuſculum decuplo minus impenſum a ſecundo mobili. Ubicumque fuerit punctum D, modo non congruat cum C, reſpondebunt ipſi binæ DE, DF, quarum prior erit decuplo minor poſteriore, ac inter ipſum, & C, erit punctum Q decuplo minus diſtans ab ipſo C, per quod altera M'N' tranſeat, in qua itidem habeantur ſua ſegmenta QK, QL in ratione ſubdecupla.

41. Ac

41. Ac ope figuræ ejuſdem facile etiam diſſolvitur præcipua difficultas, quam contra motum continuum Veteres objiciebant, petita a motu Achillis, & teſtudinis, quorum prior ſit decies poſteriore velocior, quod argumentum, progreſſionum geometricarum ſummis inventis, Noſter Gregorius a S. Vincentio feliciſſime expedivit. Exponemus primo quidem utut notiſſimam difficultatem, tum eam e ſola continuæ quantitatis natura diſſolvemus, ac demum Geometria in ſubſidium vocata, oculis ipſis eamdem ſubjiciemus ſolutionem, quæ omnia quamvis, quod ad ſummum rei pertinet, notiſſima, adhuc tamen hic prætermittenda non duximus, ut haberetur quidquid ad Continuitatis naturam intelligendam, & amovendam impoſſibilitatis ſuſpicionem requiritur.

42. Sic igitur ratiocinantur. Diſtet initio motus per unum milliare Achilles a teſtudine. Dum is conficit illud milliare, teſtudo conficiet paſſus 100; dum is 100 illos paſſus, teſtudo alios 10; dum is eos decem, teſtudo conficiet unum, dum is unum, teſtudo decimam paſſus partem, & ita porro in infinitum. Nunquam igitur, & nuſquam Achilles aſſequi teſtudinem poterit, quod ex alia parte eſt abſurdum. Nam ſi Achilles quodam dato tempore unum milliare percurrat, teſtudine percurrente eodem tempore decimam milliaris partem, accedet ad ipſam per novem decimas milliaris partes; adeoque cum æqualibus temporibus debeat ad ipſam æqualiter accedere ob utriuſque motum æquabilem, ſi fiet ut 9 ad 1, ita illud tempus ad aliud, habebitur tempus illud, quo debet evaneſcere omnis illorum diſtantia, eritque, ut 9 ad 1, ita illud milliare illo tempore percurſum ab Achille, ad ſpatium, quod ab Achille præterea percurrendum erit ad aſſequendam teſtudinem. Falſum igitur eſt *nunquam*, & *nuſquam* ipſos coire poſſe, cum adjecta illi tempori, & illi milliari nona ſui parte, deveniatur ad illud momentum, & punctum, in quo concurſus haberi debet. Porro hujus difficultatis apparens vis tota ſita eſt in ambigua ſignificatione illius *nuſquam*, vel *nunquam*.

43. Nam in primis ex illa intervalli finiti diviſibilitate in infinitum evidenter eruitur, poſſe ſeriem quamdam quantitatum minorum, ac minorum continuari in infinitum, quin certam quamdam, & finitam quantitatem omnis ea quantitatum ſumma tranſcendat. Quoniam enim digitus quipiam dividi poteſt bifariam, tum ejus dimidia pars bifariam, & ita porro in infinitum; patet poſſe aſſumi dimidium digiti, tum dimidium reſidui dimidii, ac iterum dimidium alterius reſidui, & ita porro in infinitum, quibus tamen omnibus aſſumptis, nunquam ille digitus tranſcurretur, cujus particula ſemper remanere ponitur, dimidio tantum rurſum aſſumpto.

 44. In-

44. Inde autem manifesto consequitur, posse totam illam seriem passuum 1000, 100, 10, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ &c., & ipsi respondentem seriem temporum ab Achille, & testudine inpensam in infinitum continuari, quin tamen omnis earum quantitatum summa finitum quoddam spatium, & tempus transcurrat. Tum vero si illud *nunquam*, & *nusquam* significet momentum, vel punctum quodvis intra eam finitam spatii, vel temporis mensuram contentum, verissimum erit *nunquam*, & *nusquam* Achillem ad testudinem devenire. At si indeterminate significet momentum quodvis, vel punctum utcumque assumptum in toto tempore, vel spatio, quod quidem in usu communi omnino significat, falsissima erit propositio. Assequetur enim Achilles testitudinem in ultimo momento, & puncto illius spatii, & temporis, quo ita illa series in infinitum continuata concluditur, ut ab eo præcise exhauriatur.

45. Nec difficile est ejusmodi finitam temporis, vel spatii mensuram definire. Cum enim quivis præcedens terminus ad consequentem eandem habeat rationem, eandem habebit & omnium præcedentium summa ad summam omnium sequentium, adeoque differentia primi a secundo erit ad primum, ut differentia summæ omnium præcedentium ab omnium consequentium summa erit ad summam præcedentium omnium, sive ad totam seriem. Porro summa omnium præcedentium continet omnes seriei terminos, cum in quovis finito terminorum numero in præcedentibus desit postremus terminus tantummodo, qui serie in infinitum continuata in infinitum minuitur, ac, ea tota simul considerata, evanescit; summa autem omnium consequentium continet omnes præter primum, adeoque differentia prioris summæ a secunda est solus primus terminus. Habetur igitur notissimum illud theorema *est differentia primi termini a secundo ad primum, ut primus ad illam finitam mensuram, qua tota series continetur ita, ut eam exhauriat*. In casu nostro erit ut 9 ad 1, ita unum milliare, vel tempus ab Achille impensum in percurrendo uno milliari ad illam spatii, vel temporis mensuram, in cujus postremo puncto, vel momento coibit cum testudine Achilles, nimirum ubi effluxerit id tempus, quo Achilles unum milliare conficit, & præterea ejus temporis pars nona, Achilles ipse absolvet milliare 1, & nonam milliaris partem, testudo nonam partem milliaris tantummodo, cujus illud unum milliare cum parte nona est decuplum, adeoque simul convenient, quæ est illa eadem superior determinatio facta in argumento contrario num.42.

46. Quod si solutionem eandem libeat oculis ipsis subjicere, satis est in fig.3. ducere itidem ex K rectam KO parallelam AB, donec occur-

occurrat rectæ CG in O, tum per O rectam M''N'' ipsi MN parallelam, ac iterum ex P ducta recta ipsi AB parallela concipere eandem constructionem continuatam in infinitum: ducta vero per C recta *mn* itidem parallela rectæ MN, assumere ejus segmenta C*f*, C*l*, C*o* &c. C*e*, C*k*, C*p* &c. æqualia segmentis DF, QL, RO &c. DE, QK, RP &c. ubi patet puncta *l*, *o* &c. debere congruere cum punctis *e*, *k* &c.

47. Si jam recta AB exprimat tempus, cujus punctum D sit momentum temporis, quo motus incipit, ac sit FE unius milliaris, & ratio FD ad ED eadem ac prius 10 ad 1, concipiaturque recta MN motu continuo delata versus C ita, ut interea per eam excurrant bina mobilia, quorum alterum sit semper in ejus intersectione cum recta CG, alterum in ejus intersectione cum CH, ea bina mobilia referent ipsos illos motus Achillis, atque testudinis. Nam primo quidem patet, tempore DC primum illud mobile debere percurrere in recta MN totum spatium FD, sive *f*C in recta *mn*, & secundum mobile spatium ED in illa, *e*C in hac, adeoque fore ipsorum velocitates, ut 10 ad 1, distantiam vero initio motus fore FE, sive *fe* unius milliaris, quemadmodum in Achille, & testudine supponitur. Deinde patet, ea mobilia concurrere momento C delata recta MN ad *mn*, elapso tempore quodam finito DC, & emenso a primo mobili spatio finito FD vel *f*C, a secundo ED, vel *ed*.

48. Deinde ut illud ipsum tempus, atque illa spatia definiantur, & oculis ipsis subjiciatur tota series terminorum in ratione subdecupla decrescentium in infinitum, erit in primis CD ad CQ, ut DF ad QL, sive ad DE, nimirum ut 10 ad 1. Quare & antecedentium differentia DQ erit ad secundum antecedens CQ, ut consequentium differentia EF, ad secundum consequens ED, nimirum ut 9 ad 1. Est igitur spatium ED a testudine percursum, & percursum ab Achille ultra suum primum milliare pars nona ipsius primi milliaris, & totum tempus CQ ab utroque impensum post illud, quo Achilles unum milliare confecit pars nona illius ipsius, quo confectum est milliare ipsum. Quodsi considerentur præterea binæ series linearum DQ, RQ &c, & FE, LK, OP &c., vel *fe*, *lk*, *op* &c., invenietur, eas esse continuo in ratione FD ad DE, adeoque in casu præsenti decrescere in ratione subdecupla. Nam est CD ad CQ ut DF ad QL, sive DE, nimirum (per notissimum Geometriæ lemma, quo rectæ FP, LQ parallelæ a recta CH transeunte per concursum rectarum FL, DQ secantur in eadem ratione in E, K) ut LQ ad KQ, sive RO, adeoque ut CQ ad CR. Quamobrem sunt in ratione continua 10 ad 1, tam rectæ CD, CQ, CR &c., quam DF, QL, RO &c., quæ iis proportionales sunt, & proinde in eadem ratione continua erunt tam illarum differentiæ DQ, QR &c., quam harum differentiæ FE, LK, OP &c.

49. Por-

49. Porro patet, illam constructionem continuari posse in infinitum citra punctum C, nec unquam, aut usquam ipsum punctum C præteriri, adeoque totam illam tempusculorum, & spatiolorum seriem in infinitum continuatam, tempus finitum DC, & finitum spatium FD nequaquam prætergredi. Facile autem illud etiam demonstratur, ipsa tempora, & spatia CD, FD ab illis seriebus exhauriri, si ipsæ simul totæ concipiantur, cum facile demonstretur ex ipsa progressionum decrescentium natura, & demonstrari soleat in Elementis, earum terminos ita in infinitum imminui, ut infra quamcumque magnitudinem, utcumque ad libitum determinatam descendant. Quamobrem si concipiatur quævis utcumque parva particula temporis CD, vel spatii C*f*, infra eam aliquando descendent termini progressionum CD, CQ, CR &c., & C*e*, C*f*, C*k* &c.; ac proinde nulla erit utcumque exigua earum mensurarum pars, quam intactam relinquant progressiones illæ DQ, QR &c., & FE, LK, OP &c., vel *fe*, *ek*, *kp* &c., quæ idcirco ipsas, si totæ simul considerentur, exhauriunt.

50. En igitur rei totius summam. Quo tempore Achilles est in F, vel *f*, testudo est in E, vel *e*. Tempore continuo DE Achilles percurrit milliare FE, sive *fe*, testudo decimam milliaris partem LK, sive *ek*. Momento ejus temporis ultimo Achilles est in L, vel *l*, sive *e*, testudo in K, vel *k*. Secundo tempore, quod est subdecuplum primi, Achilles percurrit spatium LK, sive *lk*, vel *ek*, testudo spatium OP, vel *op*, sive *kp*. In ultimo momento ejus tempusculi Achilles est in O, vel *o*, sive *k*, testudo in P, vel *p*; & ita porro per seriem tempusculorum decrescentium in ratione subdecupla semper in ultimo momento cujusvis ex iis tempusculis Achilles est in eo puncto spatii, in quo puncto spatii testudo erat in primo momento ejusdem tempusculi, ac tempusculo proxime sequenti percurrit Achilles illud spatiolum, quod testudo percurrit tempusculo proxime præcedenti. Utraque series spatiolorum, & tempusculorum continuari potest in infinitum, & semper spatiolo Achillis descripto quodam tempusculo respondebit spatiolum testudinis eodem tempusculo descriptum, & spatioli Achillis subdecuplum, quod secum trahet novum quoddam tempusculum pro Achille posterius priore, & ejus subdecuplum.

51. Terminorum hoc modo consideratorum nullus erit finis, si nomine finis concipiatur ultimus terminus considerationis factæ eo ordine; erit autem finis, si nomine finis intelligatur tempus, vel spatium, quod tota series simul considerata exhaurit quidem, sed non prætergreditur. Nam tota tempusculorum ejusmodi series continebitur tempore finito CD, quod si tota simul consideretur, exhauriet, tota spatiolorum series continebitur spatio finito DF, vel C*f*, quod, si tota simul consideretur, exhauriet. Achilles in nullo momento assum-

ſumpto intra tempus finitum CD, in nullo puncto aſſumpto intra ſpatium finitum FD, vel *f*C aſſequetur teſtudinem; at cum ea conveniet in momento, & puncto C, adeoque verum erit, eos nunquam, & nuſquam convenire, ſi illud *nunqam*, & *nuſquam* accipiatur pro momentis, & punctis omnibus aſſumptis intra finitum quoddam tempus CD, & finitum ſpatium DF, C*f*, non vero ſi indefinite accipiatur pro puncto, vel momento quovis utcumque aſſumpto, ut includat ipſum etiam illud momentum, vel punctum C.

52. Atque hoc pacto rite cognita continuitatis natura, omnis illa tanta apparens difficultas evaneſcit. Habeatur ſemper præ oculis illud, cuivis *momento temporis* reſpondere, *eſſe in aliquo puncto* ſpatii, cuivis *tempori continuo*, *percurrere aliquod ſpatium continuum*, nimirum lineam, nullum autem eſſe momentum, aut punctum, quod immediate conſequatur aliud momentum, aut punctum, ſed inter bina quævis momenta, aut puncta intercedere ſemper tempus aliquod continuum, aut lineam continuam, in quibus habeantur momenta, & puncta quot libuerit minus remota ab utrolibet ex extremis, quam ipſa inter ſe remota ſint: nullum eſſe proinde tempuſculum, aut ſpatiolum adeo exiguum, ut alia ipſo minora non habeantur, adeoque nullum tempuſculum, aut ſpatiolum eſſe ita primum, ut in eo ipſo partes non adſint, quarum aliæ priores ſint aliis. His rite conſideratis, & habitis ſemper ob oculos, omnes, quæ circa continuitatem habentur, difficultates evaneſcent, & hæc ipſa erit inferius præcipua clavis, qua difficultatem contra legem continuitatis a Maupertuiſio propoſitam contra Bernoullium aperiemus, diſſolvemuſque.

53. Interea ad ipſam continuitatis naturam melius perſpiciendam, & ad ea, quæ de lege continuitatis dicturi ſumus, proderit plurimum conſiderare aliquanto diligentius ductum unius generis quantitatis continuæ, nimirum lineæ, quæ conſideratio univerſam ſecum ſublimiorem Geometriam trahit; ſed utiliora quædam percurremus per ſumma capita. In primis in Geometria ſunt infinita linearum continuarum genera, quæ etiam locos geometricos appellant, quæ ſingula ſuam in ſe admodum ſimplicem, licet plerumque nobis compoſitam plurimum, & implexam, naturam habent, & naturam illam, ac proprietates generales quaſdam ex ea fluentes ita habent ubique communes, ut nullus ne exiguus quidem ſit arcus, qui illis proprietatibus non gaudeat.

54. Jam vero in quavis ex iis lineis continuis habetur ſemper ejuſmodi continuatio ejuſdem ductus, ut nuſquam arcus abrumpatur, nuſquam deſinat, & in quodam puncto ſiſtat. Id inductione ampliſſima curvarum omnium, quarum naturam Geometræ norunt, abunde patet; verum ex ipſa continuitatis natura neceſſario fluit, & generaliter

raliter

raliter facile deducitur. Punctum enim quodcumque debet esse terminus inter binas partes lineæ, se immediate excipientes, ut in tempore momentum quodlibet est terminus inter tempus præcedens, ac subsequens. Linea spatii in eo differt a linea reali materiæ (si linea ipsa realis materiæ continua est ulla, quæ in theoria nostra nulla omnino est) quod in linea reali punctum quidem intermedium quodcumque est communis limes inter lineæ partem, & aliam partem, at punctum primum, & ultimum est terminus lineæ realis ex una parte, & vacui spatii, vel nihili ex altera; verum in linea spatii nusquam habetur punctum, in quo linea ipsa interrumpatur, & quod ante se lineam non habeat, & lineam itidem post se. Id nimirum ipsa puncti Geometrici natura exposcit, ut binas semper contiguas lineas connectat inter se, & conjungat, vel disjungat, & separet, utrumque enim officium simul præstat, prorsus ut in tempore momentum quodvis & ante se tempus habet aliquod, & post se, ac semper præteritum aliquod a futuro immediate consequenti dirimit, ac disjungit.

55. Inde autem facile intelligitur, cur quævis linea continua vel in orbem circumvoluta redeat in se ipsam, vel crure quodam infinito recedat ultra quoscumque limites in infinitum nusquam ita abrupta, ut ulterius non pergat. Quinimmo & illud necessario accidit, ut si ejus aliquod crus abeat in infinitum ex parte aliqua, semper & aliud aliquod ex parte eadem, vel altera itidem sine ullo fine abeat in infinitum, ne & ipsum alicubi abrumpatur. Mira autem omnino est indoles tam linearum redeuntium in orbem, quam abeuntium crure quopiam in infinitum, & immensus sane hic sese aperit campus, per quem liceret excurrere, atque evagari, non dissertatiuncula tam arctis constricta limitibus, sed immani vastorum mole voluminum nunquam satis peragrandus. Sed cohibendus omnino est impetus, & primi tantummodo fines prætereundi.

56. In primis omnes lineæ redeuntes in orbem, nusquam initium habent, nusquam finem, sed infinito quarundam veluti spirarum numero redeunt in se ipsas. Id in circulo, qui unus earum omnium nostræ humanæ menti simplicissimus est, ac maximè perspicuus, Geometris est notissimum, & ea est unica ratio, cur arcus circularis trisectio obtineri per Euclideam Geometriam omnino non possit. Ut enim in nostris etiam Sectionum Conicarum elementis nuperrimis exposuimus elementorum nostrorum tomo tertio a num.278. si proponatur secandus in tres partes æquales arcus quidam circuli AB, in fig. 4. prima fronte videtur propositus arcus unus trisecandus, sunt autem numero infiniti. Cum nimirum circulus infinitis veluti spiris in se ipsum redeat, ac circumflectatur, punctum illud A, vel B commune est infinito spirarum numero, & arcus numero infiniti incipiunt ab A, &

de-

deſinunt in B, atque ii utravis directione tam AEB, quam AFB, qui omnes eadem prorſus natura gaudent, ut nimirum omnia eorum puncta eandem a centro diſtantiam habeant, ac eaſdem proprietates generales habent, ex: gr: ut æquales eorum partes æqualibus chordis æqualiter ad ſe invicem inclinatis ſubtendantur. Sunt autem ii arcus cum priore directione AEB, AEBFAEB, AEBFAEBFAEB, & ita porro; poſteriore autem AFB, AFBEAFB, AFBEAFBEAFB; & ita porro. Sit primus arcus AEB graduum 60, erit AFB graduum 300: inter A, & B continebuntur arcus omnes, qui exprimuntur numero graduum compoſito ex 60, vel 300 & continua additione numeri 360; arcus nimirum 60, 420, 780, 1140 &c., & 300, 660, 1020, 1380 &c.

57. Iam vero ob naturam, & proprietates omnibus communes fieri omnino non poteſt, ut adhibito loco Geometrico quocumque, ſive quavis Geometrica conſtructione eruta ex ſola natura, & proprietatibus arcus incipientis in A, ac deſinentis in B, inveniatur pars tertia unius ex iis arcubus, quin eâdem conſtructione inveniatur ſimul pars tertia reliquorum omnium, quos diximus eſſe numero infinitos. Hinc problema illud, quod unicam videbatur ſolutionem habere jam videtur requirere numero infinitas. Sed commode accidit illud, ut omnes illæ infinitæ numero ſolutiones reducantur ad tres tantummodo, ſive ad inventionem trium punctorum tantummodo. Si enim AD gr.20 ſit pars tertia arcus AEB gr:60, addita DD' gr.120 parte tertia totius peripheriæ gr: 360, erit AD' gr: 140 pars tertia arcus AEBFAEB gr:420 compoſiti ex AEB, & una peripheria: addito vero iterum arcu D'D'' gr:120 parte tertia totius peripheriæ, habebitur arcus ADB'DFD'' gr: 260 pars tertia arcus AEBFAEBFAEB gr: 780 compoſiti ex AEB, & binis peripheriis; cumque ſit etiam D''D pars circuli tertia, erit arcus AEBFAD compoſitus ex arcu AD, & una circumferentia pars tertia arcus incipientis in A, & deſinentis in B poſt tres circuitus integros, ac pariter arcus AEBFAEBD' erit pars tertia arcus incipientis in A, & deſinentis in B poſt quatuor circuitus; atque ita porro in infinitum, cum additis toti arcui triſecando novis integris peripheriis, accedant tertiæ parti novi trientes peripheriæ ipſius, patet, omnes arcus incipientes in A, & poſt quemvis numerum integrorum gyrorum deſinentes in B ordine AEB triſecari in aliquo ex iis tribus punctis D, D', D''; ut etiam e contrario cum AD ſit triens arcus AED, & DD'' totius peripheriæ, erit AD'' triens arcus AFB, & eodem prorſus argumento AFD' triens arcus addentis ipſi AFB integrum circuitum arcus compoſiti ex AFB, AFBED & binis peripheriis, atque ita porro arcus itidem omnes exeuntes ex A, & per F deſinentes in B poſt quemcumque ſpirarum numerum ſi triſecari

debeant, ſemper trientis abſciſſio habebitur in uno ex illis iiſdem punctis D″, D′, D. Quamobrem omnes illæ infinitæ numero ſolutiones reducuntur ad inventionem horum trium punctorum tantummodo.

58. Porro ad id requiritur locus geometricus, qui eundem illum circulum ſecet in illis ipſis tribus punctis, vel bina geometrica loca, quæ ſe invicem ſecare poſſint in punctis tribus: quod cum binæ rectæ lineæ inter ſe, vel recta cum circulo præſtare non poſſint (illarum enim interſectio unica eſſe poteſt, harum duplex tantummodo) poſſint autem binæ Conicæ Sectiones, vel Conica Sectio, aut etiam quævis ſublimior curva cum circulo, arcus circularis triſectio nunquam obtineri generaliter poterit per Euclideam Geometriam, quæ ſolas adhibet rectas lineas, & circulum, poterit autem per Conicas Sectiones, vel etiam ſublimiores curvas quaſcunque, & ſi per analyſim algebraicam tentetur ſolutio, ſemper neceſſario obveniet æquatio gradus tertii habens tres radices omnes reales, quæ exhibeant omnia illa tria puncta radicibus ſuis ipſis: quod ſi, ſatis conſiderata continuitatis natura, & circuli nuſquam incipientis, nuſquam deſinentis infinita circumvolutione in ſe ipſum, habitum eſſet ab oculos, non ita diu tam multi incaſſum in ejus problematis ſolutione quærenda inſudaſſent methodis ad eam aſſequendam ineptis.

59. Et quidem, quod de circulo diximus, in omnibus curvis, quæ in ſe ipſas utcumque redeunt in orbem, locum habet ubique, quarum curvarum infinita numero genera ſunt, quæ omnia perſequi omnino non licet. Infinita itidem ſunt linearum genera, quæ cruribus quibuſpiam in infinitum recedunt ſine ullo limite. Omnium noſtræ quidem humanæ menti ſimpliciſſima eſt linea recta, quæ cum utrinque natura ſua protendatur in infinitum, nuſquam enim ita deſinit, ut continuari non poſſit, habet bina quædam veluti crura infinita. Bina itidem crura habet Parabola; at Hyperbola habet quatuor, ut Geometris notiſſimum eſt, in quibus contemplandis, ut natura continuitis innoteſcat immorabimur nonnihil: multo autem plura, quæ huc ſpectant pertractavimus in fuſiore Diſſertatione adjecta memoratis Sectionum Conicarum elementis noſtris, ubi de locorum Geometricorum transformatione agentes, multa, quæ ad continuitatis Geometricæ naturam pertinent, perſecuti ſumus diligentiſſimè.

60. In primis ſit in fig: 5 recta quædam AB, quæ concipiatur utrinque producta quantum produci poteſt. Deſumpto intra ipſam quovis puncto H, & extra puncto C, per hoc tranſeat recta quædam GF pariter producta quantum produci poteſt, quæ ſi non congruat cum recta DCE illi parallela, eam ſecabit alicubi in P. Concipiamus jam rectam illam GE primo quidem congruere cum CG, tum perpetuo converti circa C verſus A, Punctum P erit primo quidem in H, tum excur-

excurret motu continuo per totam rectam HA ita, ut nullum sit ejus punctum utcumque remotum ab H, ad quod non appellat antequam congruat cum recta ED parallela ipsi BA. Momento temporis, quo cum ea congruet recta GF, illa intersectio P nusquam jam erit, sed in quodam Infiniti veluti pelago, atque barathro demersa, & obruta delitescet. At quovis e sequentibus momentis, abeunte GF in G'F', jam illa intersectio P' regredietur ex infinito ex parte B ita, ut nullum sit ejus infiniti cruris HB punctum, per quod non transeat, quo crure toto peragrato iterum deveniet ad H. Videre est ibi mirum quendam rectæ infinitæ nexum in se redeuntis quodammodo per infinitum ita, ut bina ejus crura HB, HA in illa infinita distantia opposita copulentur quodammodo, & conjungantur, ut nimirum Infinitum ipsum sit quoddam veluti punctum commune bina illa crura connectens ex parte HB, HA, quemadmodum punctum H connectit eadem, & est communis eorum terminus ex parte BH, AH. Si enim concipiatur motus continuus intersectionis P conjunctus cum motu continuo rectæ GF, posito ∞ pro characteristica Infiniti, apparebit ipsum fieri per H A ∞ B H, atque id ita, ut quovis momento temporis sit illa intersectio in aliquo puncto ejus infiniti veluti circuli, a cujus cure HA ad crus HB transeat per communem terminum ∞, & continuato lineæ gyrantis motu in singulis ejus conversionibus, integram circuitionem ejusmodi bis absolvat, recta vero ipsa utrinque in infinitum producta reducatur quodammodo ad quendam infinitum veluti circulum in se perpetuis, & infinitis orbibus redeuntem.

61. Hanc rectæ cum infinito quodam circulo æquipollentiam videre est etiam in fig.6, ubi si in ipsa AB assumatur punctum C per quod recta GF perpetuo gyret, ac occurrat semper alicubi in P rectæ QHR perpendiculari ad AB, centro autem P, radio PH concipiatur semper circulus HMIN, & considerentur omnes mutationes, quæ accident arcui MHN in eo continuo motu, facile apparebit, accedente recta GF ad positionem rectæ ECD parallelæ ipsi QR, punctum P recedere ab H, augeri circulum, ac arcum MHN accedere perpetuo ad rectam AHB, quam transgrediatur motu continuo, & abeat ad partes oppositas in M'HN', dum, ipsâ GF positionem ED transgressâ, punctum P, superato infinito ∞, abeat jam ad partes Q. In eo transitu manifestum est, arcum illum per ipsam rectam transire in ipso appulsu rectæ GF ad FD, & puncti P ad infinitum ∞; nam reliquis omnibus momentis temporis respondent semper alii ejus peripheriæ status hinc, vel inde ab ipsa recta AHB, qui status omne spatium illud utralibet ex parte positum ita in illo motu continuo perradunt, ac veluti everrunt, ut nullum ejusdem spatii sit punctum, ad quod in aliqua positione puncti P hinc, vel inde existentis in rectis HQ,

HR arcus ille circuli non appellat. Quare pro momento illo unico, in quo recta GF congruit cum ED, & punctum P cum Infinito ∞, relinquitur ille status unicus peripheriæ MHN congruentis cum recta infinita AHB, quem proinde statum eo momento temporis habere debet arcus ipse, quo circuli ipsius centrum P, & extremum diametri I nusquam jam est, circulus ipse evasit infinitus, curvatura omnis evanuit, & recta peripheriæ infinitæ successit.

62. Quod si recta CP concipiatur occurrere peripheriæ circuli in *c*, ut circuli HMINH arcus continui incipientes in H, & desinentes in *c* sunt bini arcus H*c*, & HMI*c*, directionibus oppositis, quin immo juxta num. 56. infiniti directione utraque, ita etiam in recta infinita H A ∞ B H segmenta, quæ sunt quidam veluti arcus incipientes in H, & desinentes in C, sunt bina utraque directione; nimirum HC, & H A ∞ B C, immo etiam infinita, hoc est, H C B ∞ A H C, H C B ∞ A H C B ∞ A H C &c. & H A ∞ B C-H A ∞ B C, H A ∞ B C H A ∞ B C H A ∞ B C &c., quæ consideratio mirum sane quem usum in eadem illa nostra dissertatione habeat in exponenda analogia quadam, quam ad se invicem habent Ellipsis, & Hyperbola, ubi ipsam analogiam turbare maxime viderentur.

63. Nec vero minus elegans simul, ac mysteriosa est arcuum tam Parabolicorum, quam Hyperbolicorum continuatio quædam, & nexus in illa infinita distantia. Sit DVE (fig. 7.) axis, AVB tangens Parabolæ MVN, quæ concipiatur producta quantum licet. Demonstratur in omnibus Sectionum Conicarum elementis, crura VM, VN & a se invicem, & ab axe, & a tangente in infinitum recedere. Nam per quodvis punctum Q tangentis, vel punctum axis R utcumque remotum ab V ducatur recta tangenti, vel axi perpendicularis, debet alicubi illa alteri, hæc utrique cruri hinc, & inde occurrere. Ducta autem quavis FG per V hinc, vel inde ab axe, qui neutri cruri occurrit iterum, demonstratur, eam alteri cruri debere alicubi iterum occurrere in P, nisi sit ipsa tangens, in qua puncta P, V coeunt. Concipiatur igitur recta GVP motu continuo circumvoluta, & defigatur acies in motum continuum puncti P. Ea digressa a positione tangentis BA, punctum P discedet ab V, & peragrabit totum crus VM, in quo semper erit alicubi, utcumque parum distet FG ab axe ED, nec ullum est punctum ipsius cruris VM utcumque semotum ab V, ad quod aliquando non appellat. Eo momento unico, quo ea recta cum axe congruet, punctum P infinito obrutum nusquam erit, sed abeunte FG in F'G' ad partem oppositam, illud ipsum punctum regredietur ex infinito per omnia puncta P' cruris infiniti NP'V, donec abeunte F'G' in BA, redeat ad V. Continuo motu illius rectæ circa V, continuus erit etiam motus puncti P per omnem Parabolam ita, ut in singulis inte-

integris converſionibus ejus rectæ bis eam percurrat totam ab altero crure ad alterum tranſiens in appulſu ejus rectæ ad tangentem momento temporis per V, ubi ea connecti patet communi termino V, ac in appulſu ipſius rectæ ad axem momento itidem temporis per Infinitum; ubi idcirco connectuntur quodammodo bina illa crura in illis oppoſitis infinitis diſtantiis ab axe, tanquam ſi plaga ſiniſtra, ut vidimus in recta linea, cum dextra connecteretur quodammodo; & punctum P per rectam RP in infinitum recedens ex parte oppoſita I' ex infinito regrederetur, ac ipſa etiam Parabola in illa infinita diſtantia quodammodo veluti in ſe ipſam rediret communi termino copulata in infinito.

64. Et quidem in Parabola conica ex eadem axis parte VE, ex qua crus VM in infinitum receſſerat, crus NV ex infinito regreditur, & ſi conſiderentur generaliter eæ curvæ, quarum ordinata PR eſt in quavis ratione directa potentiæ cujuſvis integræ, vel fractæ abſciſſæ VR, quas curvas cum iis, in quibus ea eſt in quavis ratione reciproca ejuſdem abſciſſæ, diligenter perſecuti ſumus in eadem illa diſſertatione; determinata directione, & continuitate geometrica eorum arcuum, occurrent ſublimiores Parabolæ, in quibus crus VN regreditur ex parte oppoſita, vel ut in fig.8. in angulo AVD jacente ad latus tangentis, quo caſu in V habetur cuſpis, quam ibi appellavimus primi generis, & ut communiter etiam Geometræ appellant, punctum regreſſus, vel ut in fig.9 in angulo DVB ad verticem oppoſito, quo caſu habetur flexus contrarius in V, ad quos tres caſus omnem Parabolarum ſublimiorum reduci familiam ibidem demonſtravimus.

65. Ac Parabolæ quidem omnes, in quibus ordinata eſt in aliqua ratione directa abſciſſæ, bina tantummodo habent crura infinita: at Hyperbolæ, in quibus ratio ejuſmodi eſt reciproca, habent ſingulæ quatuor, quorum bini ſunt rami binorum crurum ſinguli, ac eorum alter reſpectu alterius videtur quidem prorſus disjunctus; & tamen bini illi rami in ſingulis ope quaternorum crurum ita inter ſe ſe connectuntur in infinita diſtantia, ut unicam quandam lineam continuam conſtituant in ipſo infinito plerumque ad partes oppoſitas conjunctam, ut punctum motu continuo poſſit per eas excurrere, poſt receſſum in infinitum in uno crure, regrediens ex infinito in altero, inter quæ crura, & Parabolica illa hoc intercedit diſcriminis, quod illa & ab axe, & a quavis alia recta perpetuo in infinitum recedant, horum ſingula rectam habeant quamdam, ad quam accedant ultra quoſcumque limites, quin cum ea coeant in puncto ullo utcumque remoto, quæ recta idcirco aſymptotus appellatur. Rem in communi Conica Hyperbola contemplari licebit.

66. Re-

(XXX.)

66. Refert figura 10 binos Hyperbolæ ramos, MVN, M'V'N', constantes quatuor cruribus asymptoticis, VM, VN, V'N', VM' infinitis, quorum asymptoti sint binæ rectæ infinitæ ACB, DCE. Si in altero ramo sumatur punctum V ad arbitrium, & per ipsum transeat tangens QVR, tum recta alia quævis GVF, hæc semper ipsi Hyperbolæ occurret in unico alio puncto P, præter binas rectas F2 G2, & F5 G5 binis asymptotis parallelas, quod in communibus Conicarum Sectionum Elementis demonstrari solet, vel ex iis admodum facile deducitur. Quare si concipiamus rectam ipsam digressam a positione tangentis QR motu continuo converti circa V versus F1 G1, & defigatur mentis acies in motum continuum puncti P, apparebit, punctum ipsum P1 percurrere totum crus infinitum VM, donec F5 G5 abiens in F2 G2 fiat parallela asymptoto BA, quo temporis momento ipsum punctum P in Infinito delitescens nusquam jam erit; & continuato motu per F3 G3, regredietur ex Infinito per P3, ac describet totum crus M'V' rami oppositi, tum per crus V'N' in P4 motu continuo rectæ F4 G4 recedet in infinitum ad partes N', donec ea recta in F5 G5 evadat parallela asymptoto DE, quo momento temporis iterum delitescet ipsum illud punctum P in Infinito: at quovis momento sequentis temporis translata recta in F6 G6 redibit ex infinito in P6 per infinitum crus NV, ac recidente recta ipsa cum tangente QR post absolutam dimidiam conversionem, regredietur ad V, unde fuerat digressum, integra Hyperbola percursa.

67. Patet ex hoc motu continuo utrumque Hyperbolæ ramum constituere unicam curvam geometricam continuam VMM'V'N'NV bis in Infinitum recedentem, bis quodammodo ex parte opposita ex Infinito reducem, cruribus illis infinitis in Infinito ipso, licet ad partes oppositas communi quodam termino bis connexis, quemadmodum in distantia finita in communi unico puncto conjunguntur in V, & V'. Atque hic quidem contemplari etiam licet elegantissimam analogiam Hyperbolæ cum Parabola, & Ellipsi, quam in toties memorata dissertatione tertio nostrorum elementorum tomo adjecta paullo aliter persecuti sumus. Sit in fig. 11 Ellipsis OVO'V', in qua puncta V'V' sint bini vertices axis transversi, vel diametri cujuspiam ipsi proximæ OO' axis conjugati, vel conjugatæ diametri, ac QVR sit tangens ipsius Ellipseos, FV'G sit recta quævis alia ita, ut F2 G2, & F5 G5 transeant illa per O, hæc per O', & quatuor reliquæ, secent singulæ singulos e quatuor arcubus VO, OV', VO', O'V, in P1, P3, P4, P6. Si jam illa recta FVG digressa a positione tangentis QVR convertatur circa V motu continuo, ponantur autem hinc & inde ab O binæ litteræ M',M', & ab O' binæ N,N', punctum P motu itidem continuo percurret totam Ellipsim eodem prorsus ordine, quo Hyperbolam

lam totam percurrebat. Bini Hyperbolæ rami MVN, N'V'M' reſpondent binis ſemiellipſibus MVN, N'V'M', & quatuor arcubus hujus VM, M'V', V'N', NV, reſpondent quatuor illius crura VM, M'V', V'N', NV. Illi arcus connectuntur in binis punctis V, V', & in binis aliis itidem punctis O, O', hæc crura connectuntur in binis itidem punctis V, V', & in binis Infiniti veluti punctis ∞, ∞', quorum illud eſt in A, & B, hoc in E, & D: in quibus illi nexus eo delati per omnes finitarum diſtantiarum magnitudines deliteſcunt. Unicus eſt continuus orbis Ellipſis rediens in ſe ipſam VMOM'V'N'O'NV, unicus eſt continuus geometricus orbis Hyperbola rediens in ſe ipſam per V M ∞ M' V' N' ∞' N V, neuter abrumpitur neuter terminum habet, qui binis hinc, & inde ab eo jacentibus lineis non ſit communis.

68. Et quidem contemplari jam hic licet continuum etiam tranſitum Ellipſeos ad Hyperbolam per Parabolam, & earum nexum quendam admirabilem ſane, in quo & ille tranſitus momentaneus per immenſum Parabolæ hiatum ex altera parte ad partem oppoſitam, quem num.63. contemplati ſumus per nexum rectæ in infinitum utrinque recedentis, & in ipſo infinito quodammodo redeuntis in ſeſe, iterum ſe nobis ſiſtet ſub alio aſpectu totius infiniti hiatus unico puncto æquivalentis, quod tamen ad ea jam infiniti myſteria pertinebit, quæ in vera abſurda degenerant, & quæ nobis occaſionem præbebunt tam infinitas, quam infiniteſimas quantitates abſolutas, in ſe determinatas, & actu exiſtentes tollendi de medio, quod quidem cum noſtra ipſa theoria punctorum indiviſibilium conſentit mirum in modum.

69. Notiſſimum eſt ex communiſſimis Sectionum Conicarum Elementis, ſectionem coni parallelam baſi efformare circulum, qui, ſectionis inclinatione variata degeneret in Ellipſim; Ellipſim vero ipſam motu continuo plani ſectionis ita oblongari, ut illo evadente parallelo plano cuipiam per verticem ducto, & contingenti conum, evadat Parabola, tum continuato plani ſecantis motu, evadat ipſa ſectio Hyperbola, cujus forma mutetur continuo, donec plano illo ipſo tranſeunte per verticem, deſinat Hyperbola in rectam, in quibus transformationibus Parabola unica eſt indiviſibilis terminus, per quem momento temporis a continuata ſerie Ellipſium ad ſeriem continuatam Hyperbolarum ſit tranſitus. Atque hanc ipſam, & plures alias hujuſmodi transformationes curvarum harum in ſe invicem, in circulum, in rectas, ac mutationes continuas, quæ interea accidunt earum punctis, ac lineis fuſe, ac diligenter in ea ipſa diſſertatione perſecuti ſumus, quam qui viderit, aliquam ſaltem non omnino tenuem geometricæ continuitatis cognitionem acquiret. Hic innuemus tantummodo,

do, quæ pertinent ad contemplandum nexum hunc in infinita distantia, & regressum cujusvis Conicæ Sectionis in se ipsam servatum in ipso transitu per singularem Parabolæ casum, & punctorum recessum in infinitum.

70. Dum nimirum motu continuo Ellipsis figuræ 11 ad Parabolam accedit, recedit tota semiellipsis OM'V'N'O ultra quoscumque limites in infinitum, & ipsa etiam puncta O, O' a se invicem in infinitum recedunt, crescente in infinitum axe conjugato Ellipseos. Eo momento temporis, quo Ellipsis jam evasit Parabola, puncta O, O cum omni arcu M'V'N' nusquam jam sunt, sed infinito ipso veluti obruta delitescunt. Remanet autem ad partes V arcus MVN binis cruribus in infinitum productis nusquam interruptus, & consistens, sed in illa infinita distantia punctorum O, O' in infinito delitescentium adhuc quodammodo continuatus, quæ erat superior illa & rectæ, & Parabolæ idea redeuntis in sese in distantiis oppositis. Continuato autem motu plani secantis, sectio evadit Hyperbola figuræ 10 per regressum ex Infinito ad partes oppositas illius arcus N'V'M', qui in quavis Ellipsi in fig. 11 connectebatur cum arcu MVN in punctis illis determinatis O, O', in Parabola Infinito obrutus nusquam erat, in Hyperbola connectitur cum ipso quodammodo in binis Infiniti punctis altero in B, & A, altero in D, & E.

71. Atque hinc multa consequuntur, quæ ad Sectionum Conicarum naturam, & Geometricam continuitatem intelligendam apprime faciunt, in quibus illud, axi finito Ellipseos VCV', posito C in centro, non respondere in Hyperbola axem finitum VCV', sed axem V ∞ V' ex parte opposita traductum per infinitum, nec centro Ellipseos finito C centrum Hyperbolæ itidem finitum C, sed aliud in infinito delitescens, & viceversa. Cum nimirum juxta num. 60 utrobique ab V ad V' in recta linea considerata per modum infiniti circuli habeatur & finitum segmentum VCV', & aliud V ∞ V' traductum ex parte opposita per infinitum, ac illud secetur bifariam in C, hoc in ipso infinito ∞, utraque curva bina habet centra alterum in C, alterum in ∞, ex quorum altero ad alterum omnes diametri tendunt, & centro C Ellipseos, cui ipsa Ellipsis obvertit cavitatem binis semiellipsibus OVO', OV'O ipsum spectantibus respondet non centrum C Hyperbolæ, cui ea non cavitatem, sed convexitatem obvertit, sed centrum in Infinito delitescens ∞, cui pariter obvertit cavitatem; unde etiam consequitur, axem conjugatum Hyperbolæ non respondere ullo pacto axi conjugato Ellipseos, ut & alia multa, quorum ope plurima in eadem illa nostra dissertatione haud sane infeliciter explicantur, & ostenditur in iis omnibus, quæ ad finitas quantitates pertinent, per hosce transitus per infinitum cum perfecta Geo-

metriæ

metriæ analogia componi ea omnia, quæ ipſi máxime adverſari viderentur, ut illud oſtenditur, cur licet ſumma quadratorum binorum axium, & binarum quarumvis diametrorum conjugatarum in Ellipſi æquetur ſemper quantitati conſtanti, & licet quantitatum quarumvis, utcumque e poſitivis migrantium in negativas, mutata directione, quadrata debeant poſitiva eſſe, adhuc tamen in Hyperbola non ſumma, ſed differentia eorumdem quadratorum debeat eſſe conſtans. Sed ea ibi luculentius pertractavimus, & præterquamquod prolixiora ſunt, quam ut arctiſſimis, qui nobis hìc conſtituti ſunt, limitibus, coerceri poſſint, plures requirunt ipſarum Conicarum Sectionum proprietates in earum elementis a nobis demonſtratas, & multa, quæ ad poſitivorum, ac negativorum naturam pertinent, quæ nos hìc nondum attigimus, ac paullo inferius vix attingemus.

72. Interea tamen, quoniam ejuſmodi nexus continuarum linearum in Infinito myſteria nobis quædam exhibuit, quæ videntur humanæ mentis captum excedere, ſed contradictionem involvere nondum videntur ullam; proderit conſiderare ſublimiora quædam myſteria, quæ ibidem ſeſe nobis objiciunt, & in abſurda vera migrare demum videntur: cujus generis multa perſecuti ſumus uberius in diſſertatione illa ipſa, & quæ nobis demum perſuaſerunt illud; lineam actu exiſtentem in infinitum protenſam nullam eſſe poſſe, ſed infinitum ipſum eſſe indefinitam potentiam removendi reale punctum a reali puncto ultra quoſcumque limites utcumque ad libitum determinatos, quæ diſtantia quotieſcumque exiſtat, finita eſſe debeat, ſed quacumque finita alia major eſſe poſſit ita, ut nulla ſit poſſibilium ultima, & maxima: quemadmodum nulla eſt poſſibilium prima, ac minima, qua de re paullo inferius; hìc autem ipſa myſteria ejuſmodi, ut ſe nobis objicient ſponte ſua, perſequemur.

73. Dum Ellipſis motu continuo producitur, ac demum in Parabolam migrat, defigatur mentis acies in figura 11 in motum continuum arcus $OV'O'$, & rectarum $VF2$, $VF5$. Ille arcus ita recedet in Infinitum, ut puncta quidem O, O' etiam ipſa, ut monuimus, recedant a ſe invicem, & a centro C in Infinitum; & in caſu Parabolæ nuſquam jam erunt, Infinito ipſo demerſa atque obruta, hiatus autem ipſæ Parabolæ in infinitum excreſcet; at rectæ $VF2$, $VF5$ licet ſemper tranſeuntes per illa ipſa puncta O, O' a ſe invicem, & ab axe VV' recedentia in infinitum, perpetuo accedent ad ſe invicem, & ad axem, angulo $F2VF5$ decreſcente ultra quoſcumque limites, ut in caſu Parabolæ coeant inter ſe, & cum ipſo axe VV', & angulus ille $F2VF5$ penitus evaneſcat. Concipiatur enim centro V, quovis finito radio ſemirculus occurrens tangenti QR in K, L, axi VV' in H, ac rectis omnibus VF in I, ducaturque $I2I5$ occurrens ipſi VV' in S.

74. Quoniam in Ellipſi eſt latus rectum principale ad axem conjugatum, ut hic ad axem tranſverſum, & latus rectum finitum remanet, abit enim in latus rectum Parabolæ, axis autem conjugatus Ellipſeos in Parabolam deſinentis in infinitum excreſcit, excreſcente hiatu in infinitum, decreſcet in infinitum ratio lateris recti principalis ad axem conjugatum, & proinde hujus ad tranſverſum, adeoque, & ſumptis dimidiis ratio OC ad CHV, & multo magis ratio CO ad OV, ſive I2S ad I2V; nimirum ſinus anguli I2VH, ſive F2VV' decreſcit in infinitum: ac proinde factis VV', OO' abſolute infinitis, penitus evaneſcet ſinus ipſe, & angulus F2VV', & proinde etiam ejus duplus F2VF5 debet penitus evaneſcere. Debent igitur puncta I2, I5 cum omnibus intermediis coire in H, evaneſcente omni arcu intermedio, ac per omne finitum intervallum utcumque magnum rectæ VF2, VF5 coire inter ſe, & cum axe.

75. Ex hoc congreſſu eorum punctorum, & anguli F2VF5 evaneſcentia ſtatim intelligitur, qui fieri poſſit, ut in fig. 7 punctum P motu immediato tranſeat a crure VM, ad crus NV per axem. Nam in fig. 11 a puncto P1 ad punctum P6 tranſibatur in Ellipſi per appulſum ad rectam VF2, ad omnes intermedias in angulo F2VF5, & ad ipſam VF5 motu continuo. Si arcus KHL referat tempus, omnis arcus VMO percurrebatur tempore continuo KI2, momento temporis I2 appellebat punctum P ad rectam VF2, tum tempore continuo I2HI3 percurrebatur totus arcus OM'V'N'O', & altero momento temporis I5 appellebat punctum P ad O', tum demum tempore continuo I5L per arcum O'NV redibat P ad V. Coeuntibus jam punctis I2, I5, ſublatum eſt totum illud intermedium tempus, & momento temporis factus eſt tranſitus.

76. Pergente motu plani ſecantis, & Sectione verſa in Hyperbolam, puncta O, O' figuræ 11 remanent in fig. 10 in infinita diſtantia, ita tamen, ut illud ſit æque in diſtantia infinita ex parte F2, & B, ac ex parte G2, & A, hoc autem æque in diſtantia infinita ex parte F5, & D, ac ex parte G5, & E, ubi illud adhuc conjungat quodammodo crus infinitum VM cum crure M'V', hoc vero crus infinitum VN cum crure N'V', converſa idcirco poſitione ramorum, ut arcus dexter abierit in crus ſiniſtrum, ſiniſter in dexterum.

77. In caſu autem Parabolæ, quid acciderit referet figura 12. Puncta I2, I3, I4, I5, coierunt ibi cum H: In infinito demerſa latent puncta omnia O, O', P2, P3, N', V', M': in axem abeunt F2, F3, F4, F5, & quoniam tam Ellipſis, quam Hyperbola poteſt in eam Parabolam degenerare, prout motus plani ſecantis in hanc, vel vel in illam plagam dirigitur, oportet, tam ad partes H, quam ad

par-

partes V in Infinito delitescant ex æquo, quæ plagæ in unum ibi quodammodo coeant, & continuitatem servent.

78. At hic jam mysteria eo excrescunt, ut abeant in absurda. Debent enim coeuntibus rectis VF2, VF5, figuræ 11, ita coire puncta O, O' illius in fig. 12, ut intervallum illud, ille hiatus, qui rectis penitus congruentibus nullus esse potest, penitus evanescat, licet idem simul in infinitum excrescat; ac idem accidere debet infinitis punctis P3, P4 circa M', & N'. Rectæ VF2, VF5 per quamvis utcumque magnam finitam distantiam debent congruere penitus, & tamen in infinita distantia ab V debent a se invicem in infinitum distare, quasi omnis distantia finita indefinite accepta in infinitum non abeat, & rectitudini non repugnet immensa accurata præcedens congruentia conjuncta cum immensa posteriori distantia.

79. Nec vero hæ difficultates eludi possunt, dicendo, ubi Ellipsis in Parabolam abit, arcum I2HI5 in fig. 11 nequaquam evanescere omnino, sed evadere infinite parvum, ac proinde angulum F2VF5 esse adhuc infinitesimum, in quo in distantia infinita primi ordinis haberi possit intervallum finitum, ac in distantia infinita ordinum superiorum intervallum etiam infinitum haberi debeat. Nam in primis in illa ipsa toties memorata dissertatione luculenter demonstravimus, terminum, qui post infinitum absolutum, & finitum sit tertius, debere esse prorsus nihil, non quidpiam, quod licet infinitesimum esse dicatur, sit aliquid, & partes habeat. Deinde si adhuc circa punctum H esset aliquis infinitesimus arcus rectis F2V, F5V conclusus, licet ipse infinitesimus dicatur esse, & inassignabilis, haberet tamen in se ipso aliqua puncta, per quæ transirent aliquæ rectæ ductæ ex vertice V in se determinatæ, licet a nobis inassignabiles, quæ ab axe distantiam aliquam haberent, & tamen in crura Parabolæ infinita nequaquam incurrerent. At in Conicis Sectionibus per finitam Geometriam accuratissimè demonstratur, quamvis rectam utcumque parum inclinatam ad axem cruri Parabolæ licet in immensum recedenti ab axe semper alicubi occurrere iterum, adeoque prorsus nullam esse, quæ in hiatum illum sese abdat.

80. Et quidem in Dissertatione de natura, & usu infinitorum, & infinitè parvorum aliquot ab hinc annis edita, infinitesimas quantitates in se determinatas, utcumque a nobis inassignabiles, nullas omnino esse posse, demonstravimus argumento, quod nobis quidem eam evidentiam parit, ut nunquam in animum inducere possimus, ut ejusmodi infinite parvas quantitates admittamus, longe alia ratione præclarissimas infinitesimorum methodos evolventes per indefinite cognita, abstrahendo mentem a magnitudine, quorum uberius exponendorum non est hic locus, exponemus autem in quarto Elemento-

tum Tomo diligentiſſimè. Illud noſtrum argumentum tantummodo hic perſtringemus ad evincendam impoſſibilitatem infiniteſimorum in ſe determinatorum nobis etiam inferius futuram uſui: eſt autem hujuſmodi.

81. Si poteſt haberi quantitas aliqua, ut lineola, quæ ſit infinite parva, ac licet a nobis inaſſignabilis, ſit in ſe ipſa determinata, ea continebitur infinito numero in quavis quantitate finita, ut in palmo, qui palmus ejuſmodi lineolarum continebit numerum infinitum, atque ita continebitur, ut quævis ex iis per ſe etiam ſola poſſit ſubſiſtere, nec a ſociis pendeat ullo modo, utpote quæ in ſe determinata eſt, & ab earum ſingulis diſtincta, licet non actu diviſa. Hinc incipiendo a parte ſiniſtra erit aliqua licet a nobis inaſſignabilis verſus dexteram partem prima, ſecunda, tertia, & ita porro, ac itidem incipiendo a parte dextera verſus ſiniſtram erit aliqua ſecunda, tertia, & ita porro. Jam vero priores illæ, quæ ex parte ſiniſtra jacent, relinquent poſt ſe verſus partem dexteram numerum earum partium infinitum, cum fere totum palmum relinquant; illæ autem, quæ erant priores ex parte dextera, relinquent verſus ipſam dexteram partem numerum non infinitum, nam prima relinquet nihil, ſecunda relinquet unicam, tertia binas, & ita porro. Nulla autem erit ejuſmodi particula in univerſo illo palmo, de qua alterum ex iis verum non ſit, ut relinquat verſus dexteram earum numerum infinitum, vel numerum non infinitum, nec ulla ex iis ab alia ita pendebit, ut ea manente deſtrui non poſſit, cum unaquæque ſuum eſſe habeat in ſe determinatum, & a quavis, ut diximus actu diſtincta ſit, licet nondum actu diviſa.

82. Binæ igitur ibi habentur claſſes particularum, licet a nobis inaſſignabilium, quarum prima continet omnes & ſolas particulas relinquentes verſus partem dexteram numerum partium infinitum, ſecunda omnes, & ſolas relinquentes non infinitum. Id ſane evidens eſt ex eo, quod ipſarum nulla utroque ex iis binis caracteribus carere poſſit, nulla utrumque ſimul habere, & ſint omnino, quæ primum habeant, ſint, quæ ſecundum. Porro omnes illæ quæ ſecundam claſſem conſtituunt numero infinitæ eſſe debent, aliter enim poſtrema ex iis, quæ in priore ſunt claſſe, & quæ relinquit omnes illas, & ſolas, quæ conſtituunt ſecundam, non relinqueret numerum infinitum, adeoque non ad eam claſſem primam pertineret, ſed ad ſecundam. Omnium autem, quæ in ſecunda claſſe ſunt, præter primam numerus debet eſſe non infinitus. Si enim & is infinitus eſſet, prima illa, quæ haſce omnes relinquit, relinqueret numerum infinitum, ac proinde non ad ſecundam, ſed ad primam claſſem pertinuiſſet. Quamobrem a numero infinito, ad non infinitum per unitatem ſit tranſitus, quod

eſt

eſt abſurdum. Vis tota argumenti ſita eſt in eo, quod ab infinito ad non infinitum neceſſario alicubi in unica particula tranſitus haberetur, quod argumentum majorem habebit vim ſi concipiamus a Deo deſtrui omnes, & ſolas illas, quæ ad primam pertinent claſſem, quarum quælibet, a quavis ex iis, quæ conſtituunt ſecundam, omnino diſtinguitur in ipſa, licet a nobis non diſcernatur, nec aſſignari omnino poſſit.

83. Sunt, qui ut evincant, quantitates infiniteſimas exiſtere etiam independenter a noſtro concipiendi modo, adducant angulum contactus, quem arcus circuli cum recta, vel cum circuli alterius arcu tangente, efficit in contactu ipſo, quem dicunt eſſe infiniteſimum reſpectu anguli rectilinei. Liceret, ex Tacqueti doctrina reſpondere, angulum non eſſe quantitatem, cum in inclinatione conſiſtat, ſed quantitatis modum. Et quidem rectilineum angulum per modum quantitatis tractamus, ſumendo arcum circuli ejus cruribus interceptum, qui verè quantitas eſt, pro ejus menſura, quod in rectilineo, & curvilineis curvarum æqualium, & ſimilium, fieri poteſt, ubi crura e circulis utcumque magnis vel parvis eundem graduum, ac minutorum numerum abſcindunt, non iis, quorum crura diverſæ naturæ ſunt, ut varietur cum circuli radio, etiam ratio arcus intercepti ad totam peripheriam; adeoque varietur & menſura ipſa, & relatio, quæ ab ipſa menſura omnino pendet. Id autem ipſum diſcrimen ſatis eſt nobis, ut licet angulum dicamus quantitatem, angulum mixtilineum putemus ſpecie diverſum a rectilineo. Porro inter ea, quæ ſpecie differunt, alterum reſpectu alterius nullam reipſa rationem habet, adeoque nec infiniteſimum eſt, nec infinitum.

84. Alii quantitates incommenſurabiles in ſubſidium vocant, & ajunt, id per quod una linea eſt alteri incommenſurabilis, eſſe aliquid re ipſa infiniteſimum, quod ſic conantur evincere. Si dicatur, eſſe aliquid finitum, ſecetur illa altera quantitas in tot particulas æquales, ut una ex iis illa quantitate finita ſit minor, quod fieri ſemper poſſe facile demonſtratur. Tum, eâ particulâ translata continuo in primam illam incommenſurabilem, devenietur ad reſiduum ea minus, adeoque minus illa quantitate finita, per quam dicebatur eſſe incommenſurabilis illa prima ſecundæ. At in eo argumento, ſi rite continuitatis natura ſpectetur, fallacia eſt manifeſta, & indeterminatum aliquid pro determinato aſſumitur. Cum enim dicimus *incommenſurabilis*, excludimus menſuram communem. Menſura autem, niſi definiatur ejus quantitas, non eſt aliquid determinatum, ſed indefinitum, & indeterminatum, ut de parte ſuperius diximus, cum eodem recidat menſura, ac pars aliquota. Si quæratur per quid prima linea eſt ſecundæ incommenſurabilis? reſpondebimus, relate ad quam

men-

menſuram ? Determinetur menſura, determinabitur quantitas, per quam relate ad illam menſuram incommenſurabilis eſt, quæ erit reſiduum illud, utique finitum, & ipsâ illâ menſurâ minus. Imminuta menſura, illud reſiduum aliquando minuitur, aliquando augetur, cum ad eam habere poſſit rationem quamcumque; at ea in infinitum imminuta imminuitur tandem etiam illud in infinitum, cum ſemper ipſa minus eſſe debeat. Verum cum nulla ſit menſura ultima, & omnium minima, nulla eſt pars in ſe determinata, per quam reſpectu cujuſque menſuræ incommenſurabilis ſit prima illa quantitas quantitati ſecundæ.

85. Ut res evidentior evadat ipſis oculis ope Geometriæ, ſubjecta, ſit in fig. 13 AB quantitas major incommenſurabilis minori AD, Hac translata in AB quoties licet, reſiduum erigatur perpendiculariter in DF, tum ejus dimidio AG, triente AK, quadrante AN &c. pariter translato erigantur reſidua ſingula pariter in GI, KM, NP &c. producanturque omnia ejuſmodi perpendicula uſque ad rectam AC ductam in angulo ſemirecto BAC in E, H, L, O, ac concipiatur curva quædam continua per omnia puncta F, I, M, P. Patet omnia perpendicula DE, GH, KL, NO &c. æquari ob angulum ad A ſemirectum, & alterum rectum, partibus aliquotis, ſive menſuris AD, AG, AK, AN, quibus cum reſidua illa DF, GI, KM, NP minora ſint, tota ea curva continebitur angulo BAC. Porro patet imminui poſſe in infinitum partem aliquotam AN, adeoque NO ita, ut ſemper NP ſit minor. Nullam autem fore minimam omnium NP, ut nulla erit minima AN, adeoque nullam, per quam præciſe incommenſurabilis ſit, ſed menſuræ cuilibet ſuum reſpondere reſiduum, per quod relate ad eam menſuram incommenſurabilis ſit, quod determinatum ſit, & indefinitum, ut nomen menſuræ, ſeu partis aliquotæ eſt indeterminatum, niſi partium numerus, vel magnitudo determinetur, quibus determinatis, evadit determinatum, & finitum.

86. Conſtat igitur, infiniteſimas quantitates in ſe ipſis determinatas nullas eſſe, adeoque ipſas a noſtro ſolum indefinito cognoſcendi modo pendere. Quamobrem inane eſt effugium illud, quo abſurda ex Ellipſi in infinitum excreſcente, & Parabolæ cruribus actu in infinitum productis omnino profluentia devitentur. Verum demus, infiniteſimas ejuſmodi quantitates non eſſe impoſſibiles, adhuc abſurdum ex infinita Parabolæ extenſione profluens maniſeſtiſſimum deprehenditur, quod in illa ipſa toties memorata diſſertatione protulimus, & huc ad rem confirmandam transferemus.

87. Concipiatur in fig. 7. centro V circulus quidam abſolute infinitus, & tangens AB producta utrinque intelligatur in infinitum, quæ proinde erit ipſius circuli diameter, & erit idcirco major quarta ipſius peripheriæ parte. Cum vero ex quovis tangentis Q, vel Q'

pun-

puncto ductæ rectæ ipsi normales incurrant in perimetrum ipsius Parabolæ in P, vel P', patet, hiatum Parabolæ ipsius MN æquari toti tangenti infinitæ AB, adeoque debere esse majorem quadrante Periphæriæ illius infinitæ. Ex altera parte, quoniam facto angulo EVF, EVF' utcumque exiguo, semper rectæ VF', VF' occurrunt perimetro in P'P', adeoque exeunt extra ipsum hiatum, hiatus ipse debet intercipere ex infinita illa peripheria partem, quæ ad totam peripheriam habeat rationem minorem quavis determinata. Erit igitur ille hiatus & major quadrante infinitæ peripheriæ, & eodem infinities minor, quod est absurdum manifestissimum.

88. Respondebitur, quoniam imminuto angulo FVE in infinitum, minuitur pariter ratio tangentis ejus anguli ad radium, adeoque ratio RP ad RV, sive ratio VQ ad VR, & totius QQ' duplæ illius ad VR, punctis P'P' abeuntibus in infinitum, infinities majorem esse axem VE infinitum tangente AB. At si concipiamus solas rectas AB, DE in infinitum productas, nemo non videt, utramque æque produci posse, & omnia esse paria. Qui igitur fit, ut adveniente deinde Parabola MVN, axis VE infinities major esse debeat tangente VA? Quid illa Parabolæ appositio ad rectarum mutationem conducit? Quid vero si Parabola alia potius collocaretur, cujus axis esset VA, tangens VE? Jam illa VA, quæ erat infinities minor, contra infinities major evaderet. Id sane jam non mysterium quoddam est, sed absurdum.

89. Absurda autem in Infinito alia etiam plurima nobis occurrunt, quorum aliqua in illa dissertatione protulimus. At unum hic adjiciemus, quod simplicissima demonstratione conficitur, & in Dissertatione alia de Natura, & usu infinitorum, & infinite parvorum pariter supra memorata protulimus. Est autem hujusmodi. Sit in fig. 14. quivis angulus ABC, quem bifariam secet recta BD, & ex quovis puncto E lateris BC ducatur recta EF parallela BA, occurrens BD in F, producaturque duplo magis in FG; tum per B, & G ducatur BM, ac concipiatur alia *efg* ipsi EFG parallela. Constat omnem aream infinitam CBD fore æqualem areæ infinitæ ABD, cui suppositis æqualibus angulis congrueret. Constat itidem, triangula FBG, FBE, & *fBg*, *fBe* esse, ut bases, adeoque illa his dupla, & aream FG*gf* duplam areæ EF*fe*. Sed si concipiantur aliæ, atque aliæ ejusmodi parallelæ in infinitum, quævis area iis intercepta conclusa angulo MBE esset dupla areæ sibi respondentis inclusæ angulo DBC. Quare cum areæ omnes iis angulis conclusæ sint illarum areolarum omnium aggregata; area infinita contenta angulo DBM esset dupla areæ contentæ angulo DBC, adeoque & areæ conclusæ angulo ABD, sive pars dupla totius, quod est absurdum.

90. Absur-

90. Abſurdum ipſum totum oritur ex illa abſoluti infiniti ſuppoſitione. Si enim centro B fiat circulus occurrens rectis BA, BD, BC in I, H, E; donec habebitur finita magnitudo BE, nihil abſurdi erit. Sector EBH, erit æqualis Sectori HBI, & triangulum GBF erit duplum trianguli FBE. Sed nec illud triangulum erit pars illius Sectoris, neque hoc æquale huic. At abeunte E in infinitum ita, ut nuſquam jam ſit, & aſſumpta tota longitudine, quæ haberi poteſt in recta infinita BE, jam nulli habentur limites illi infiniti. Ex alia parte tota infinita area, quanta haberi poteſt in angulo MBD componitur ex omnibus areolis GF*fg*, & area EBC, quanta haberi poteſt, componitur ex omnibus FE*f*, quæ quidem æqualis eſt toti ABD, & ipſius ABD pars eſt MBD, in quo habetur abſurdum illud.

91. Hinc nobis extenſum, & infinite parvum, & infinite magnum actu exiſtens, & in ſe determinatum eſt prorſus impoſſibile, & quidquid quovis temporis momento exiſtit, finitum eſt, ita tamen, ut augeri, & minui poſſit ſine ullo limite in infinitum, ac infiniti extenſi impoſſibilitas unde fluat, ex Metaphyſicis etiam principiis quibuſdam cum Geometria conjunctis diligenter perſecuti ſumus in illa diſſertatione elementis Sectionum Conicarum adjecta. Binorum punctorum quorumcumque diſtantia finita eſt ſemper, ſed ſemper & aliæ minores haberi poſſunt, in qua poſſibilitate minuendi, vel augendi diſtantiam a nobis indefinite cognita arbitramur ideam quantitatis infinite parvæ, vel infinite magnæ conſiſtere. In Geometria autem, quæ ſpatium ut actu infinitum conſiderat, lineæ conſiderantur tanquam actu in infinitum productæ, ex qua deinde productione omnes illi nexus in ipſo infinito, & myſteria, quæ perſequi cæpimus, conſequuntur, quæ tamen ad intelligendam melius continuæ extenſionis naturam, ubi de finitis quantitatibus agitur, adhuc conducunt. Eadem autem poſt hanc de infiniteſimis, & infinitis digreſſionem non inutilem ad eam rem etiam, de qua agimus, ut conſtabit inferius, conſiderare pergemus, infinitorum crurum naturam, & nexum in Infinito, quam breviſſime fieri poterit innuentes.

92. In primis quotieſcumque crus aliquod ſive parabolicum, ſive hyperbolicum abit in infinitum, ſemper, ut diximus, ex infinito etiam regreditur. Illud autem in Hyperbolicis ſanctiſſime obſervatur, ut quam aſyptotum habet crus in infinitum recedens, eamdem habeat etiam crus ex infinito regrediens, licet poſſit vel ex eadem parte, vel ex oppoſita regredi ejuſdem rectæ infinitæ. Si in fig. 13. arcus VM abit infinitum per M1 ex parte B, poteſt regredi tam ex parte eadem B citra ipſam aſymptotum ACB, ut per M2 V2, & ultra ipſam, ut per M3 V3, quam ex parte oppoſita A' citra aſymptotum eamdem pariter, ut per M4 V4, & ultra, ut per M5 V5. Poſteriores tres

caſus

caſus habentur omnes in Hyperbolis altioribus, in quibus eſt aliqua potentia ordinatæ in ratione reciproca alicujus potentiæ abſciſſæ, ut de Parabolicis quoque cruribus vidimus num. 64, prout potentiæ ejuſmodi fuerint pares, vel impares, quemadmodum in illa diſſertatione adjecta elementis demonſtravimus; ubi & primi caſus curvas quaſdam determinavimus.

93. Id quidem ipſum ſanctiſſime obſervatur ex eo, quod in omnibus Geometricis curvis, nihil uſquam mutatur per ſaltum, ſed mutationes omnes motu continuo fiunt. Id ipſum autem in cæteris omnibus curvarum geometricarum proprietatibus quibuſcumque pariter evenit, ut etiam in tangentibus (quo nomine appellatur recta, per curvæ punctum ducta ita proxima ejus arcui inter omnes, quæ inde duci poſſunt, ut nulla alia in utriuſque angulo duci poſſit per idem punctum, ſive iis interſeri), ut nimirum ubicumque tangens ducitur per punctum connectens binos arcus ſe continuo excipientes, & ſit communis tangens utriuſque partis, in quam deſinant motu continuo tangentes omnes reliquæ punctorum ad eoſdem arcus pertinentium, & deſinentium in illud punctum motu continuo; cumque aſymptoti a Geometris conſiderentur tanquam quædam rectæ crura illa contingentes in infinita diſtantia, in qua ſe bina illa crura connectunt, communem etiam ibi tangentem habere debent, adeoque communem aſymptotum.

94. Porro eadem illa lex tangentium communium ubique obſervatur in curvis omnibus ubicumque in iis aſſumatur punctum quodpiam, ex qua lege per univerſam Geometriam latiſſime patente, quatuor habentur caſus, quorum bini bina cuſpidum, ſeu regreſſuum genera exhibent, unus flexum contrarium, & unus frequentiſſime occurrens progreſſum curvaturæ in eamdem plagam. Tangat in fig. 16 recta AB arcum MV, & ſit DVE ipſi perpendicularis. Ipſe arcus ad V delapſus poteſt vel regredi ex V in angulo eodem BVD, per VN1, ſive in angulo BVE ipſi adjacente ad eamdem tangentis partem B, ſeu ultra ipſam per VN2, vel progredi in angulo ad verticem oppoſito AVE, per VN3, vel pariter progredi in reliquo angulo AVD per VN4. Quartus hic caſus MVN4 communis eſt curvis omnibus, & generaliter omnibus arcuum continuorum punctis, præter puncta quædam quarumdam curvarum determinata, quæ aliquem continent ex prioribus tribus, & congruit cum caſu figuræ 7. Tertius MVN3 flexum contrarium ſecum trahit, curvatura obverſa prius puncto D, tum puncto E, & congruit cum caſu figuræ 9. Secundus MVN2 cuſpidem habet, quam primi generis dicimus, cum tangens binis arcubus in contactu conjunctis interjacet, & congruit cum caſu figu-

ræ 8, ac curvaturam, ut tertius, in contrariam obvertit partem. Atque hi tres habentur in illis Parabolis quarum ordinatæ ſunt in aliqua ratione abſciſſæ, ut monuimus num.64. Primus demum MVN1 continet cuſpidem ſecundi generis efformatam ab arcubus ad eamdem tangentis partem jacentibus, cujuſmodi curvæ exemplum in eadem illa dedimus diſſertatione. In horum autem caſuum ſecundo, & tertio tangens ipſa arcum in eodem puncto, in quo contingit, ſecat etiam, ut patet, in primo, & quarto non ſecat.

96. Continuitatis legem violari arbitrantur nonnulli in primo, & ſecundo cuſpidum caſu, ob regreſſum illum, & in ſecundo, ac tertio ob curvaturam in contrarium repente converſam, At neutro in caſu detrimentum continuitatis haberi ullum videbimus, ubi ipſam legem explicaverimus paullo inferius. Illud hic cavendum tantummodo, ne confundatur cum puncto regreſſus, & cuſpide, punctum duplex, in quo curva ſe ipſam ſecat, quod ubique fit in iis curvis, quæ nondum habent. Ejuſmodi eſt in fig. 17 curva MOVCFIVPN, quæ ſe interſecat in V, ac nodum efficit in ſe ipſam regreſſa, cujuſmodi nodus, præter curvas alias innumeras ſublimiores, in Concoide etiam citeriore occurrit. Videtur in V haberi cuſpis quædam MVN; ſed ſecus accidit, cum arcus MV non continuetur in V cum arcu VN, ſed ipſum ſecet progreſſus ultra V per VC, & inde iterum ad V regreſſus per IV. In illo occurſu V tangentes AVB, A'VB' inclinantur ad ſe invicem, & angulum continent. Verum quotieſcumque ex mutatis curvæ conditionibus, curva ipſa ita mutatur, ut nodus VCFIV evaneſcat, quod pariter in Concoide contingit, ſemper bina crura MV, VN continuantur, & cuſpis MVN gignitur figuræ 18, in quo tamen caſu ſemper binæ illæ tangentes in unicam coaleſcunt, nec unquam accidit in univerſa Geometria, ut bini arcus contigui, communi termino copulati, binas in eo tangentes habeant, quæ aliquem angulum conſtituant.

97. Plurima alia ſupereſſent dicenda de curvis, quæ vel finitum habent ramorum numerum quemcumque, vel etiam infinitum, cruribus in infinitum productis, quas inter admirabilis maxime, & notatu digniſſima logiſtica communis, quæ licet videatur unicum habere ramum, crure ex altera parte Hyberbolico, ex altera Parabolico, ipſis cruribus ne in illa quidem infinita diſtantia redeuntibus, & connexis, re vera infinitos habet ex utraque axis parte ad eumdem locum Geometricum pertinentes, communi infinitorum crurum aſymptoto, ac plurima de ſpiralibus curvis, quarum bini, vel quotcumque arcus in infinitum abeant, alii circa datum punctum perpetuo convertantur, quin in ipſum recidant, vel ad datos circulos, aut ad datas ovales in infinitum accedant perpetuo circumducti, nec tamen uſpiam in eas

inci-

incidant, cujus generis mira admodum, & utilis ſpiralis logarithmica, quam itidem, licet unicum habere videatur arcum ſpiralem hinc in infinitum recedentem a dato puncto, inde accedentem, demonſtrare poſſumus, habere infinitos, ut etiam ſpirales aliæ quamplurimæ ex ea ortæ ſatis miræ; plurima de aliis curvarum generibus, in quibus plures ſunt arcus ſive redeuntes in orbem, ſive abeuntes in infinitum, quarum alii nullam cum aliis licet ad eumdem geometricum locum pertinentibus communicationem habent ita, ut punctum ex altero in alterum commigrare nullo modo poſſit, quæ tamen dum transformantur, mutatis conditionibus, ſe diſcindant quodammodo, & arcus permutent ſuos ita, ut e binis arcubus ad diverſos ramos, vel orbes pertinentibus prius, oriatur novus quipiam continuus, cujuſmodi exempla plurima occurrunt, & elegantiſſima ſane in Concoidibus habentibus circulum pro axe, quarum Concoidum, & ſpecies ſunt plurimæ, & transformationes ſatis miræ. Ea omnia, & alia quamplurima ſupereſſent, quæ brevis diſſertatiunculæ limitibus coerceri non poſſunt, perſequemur autem uberrime in quarto noſtrorum elementorum tomo, quem infiniteſimorum, & infinitorum Geometriæ, ac curvarum proprietatibus deſtinavimus.

97. In hiſce omnibus curvarum generibus illud ubique ſervatur ſanctiſſime, ut nuſquam in unico quodam puncto curva ſiſtat, ac ibi veluti abrumpatur, ſed ſemper punctum quodcumque, ad quod curva quæpiam deveniat, licet id punctum ſit etiam in Infinito deliteſcens, conjungat binos arcus hinc & inde, quorum id communis terminus ſit. Et id quidem pro curvis omnibus, vel ex natura ipſa termini erui poteſt, ut num. 54. præſtitimus, vel inductioni ampliſſimæ curvarum omnium, quæ Geometris notæ ſunt comprobari. Verum pro curva quadam, cujus maximus nobis uſus erit inferius in lege Continuitatis demonſtranda, geometrico etiam rigore demonſtratur. Propoſitio eſt hujuſmodi. *Nullus locus Geometricus poteſt uſpiam abrumpi, qui relatus ad axem quemdam per ordinatas ipſi utcumque inclinatas in eodem angulo, nuſquam habet aut impoſſibilem ordinatam reſpondentem axis puncto cuicumque, aut plures ordinatas pariter eidem puncto reſpondentes.*

98. Sic facile demonſtratur. Sit in fig. 19, 20, 21 ejus loci pars altera DC, altera EF, ipſo loco abrupto in C, E. Ducatur ordinatæ CG, EH ad axem AB. Vel punctum H cadit poſt G, ut in fig. 19, vel cum ipſo congruit, ut in fig. 20, vel ipſum præcedit, ut in fig. 21. In primo caſu pro punctis omnibus intermediis inter puncta G, & H, quæ contigua eſſe non poſſunt juxta num. 10, ſed aliquam lineolam terminare debent continentem puncta infinita, nulla eſſet impoſſibilis ordinata, in ſecundo caſu haberentur binæ GC, GE pro eodem pun-

 cto G,

cto G, vel H, in tertio haberentur pro utroque puncto G, H, & pro infinitis intermediis binæ ordinatæ, quæ omnia sunt contra Hypothesim. Non potest igitur ejusmodi locus geometricus usquam abrumpi Q. E. D.

99. Tota argumenti vis sita est in eo, quod bina puncta non possint esse contigua: quod si fieri posset, in casu primo posset punctum H jacere immediate post punctum G, & ordinata post ordinatam, qua unica via vis argumenti eluderetur. Diximus autem ordinatam impossibiliem, ut includeremus etiam casum, quo ordinata sit nulla. Si enim in primo casu quis dicat, posse locum abrumpi compositum ex tribus lineis DC, GH, EF, binas tantum consideraremus DC, GH, & casus primus reduceretur ad secundum, deberet nimirum in G haberi simul ordinata GC, & ordinata zero, ultima nimirum pertinentium ad arcum DC, & prima pertinentium ad rectam GH.

100. Hisce præmissis deveniamus jam ad ipsam continuitatis legem explicandam. Leibnitius illam sine eo nomine in memorato schediasmate sic proposuit latine redditus. *Cum differentia duorum casuum potest diminui infra quamcumque quantitatem datam in datis, vel in eo, quod positum est, oportet ipsa possit inveniri imminuta infra quamcumque magnitudinem datam in quæsitis, vel in eo quod resultat.* Tum idem sic. *Cum casus (vel id, quod datur) accedunt ad se invicem continuo, ac desinit tandem unus in alium, oportet consectaria, vel eventa, (vel id, quod postulatur) idem præstent.* Demum idem generalius: *Datis ordinatis, etiam quæsita sunt ordinata.*

101. Eos enunciandi modos, priores binos potissimum, aptavit Leibnitius Cartesianis legibus motus; quas hujus ipsius principii applicatione impugnabat. Statuit Cartesius in prima lege, si bina corpora æqualia sibi invicem occurrant, debere retro regredi utrumque cum velocitate opposita, & æquali illi, quam prius habuerat, in secunda vero lege, si inæqualia sint, debere majus quidem progredi cum sua velocitate priore, minus vero regredi cum velocitate contraria, & æquali illi, quam prius habuerat. Binorum corporum magnitudines sunt id, quod Leibnitius appellat, *data*, vel *posita*, velocitates post conflictum, *quæsita*, *resultantia*, *consectaria*, *eventa*, *postulata*. Bini datorum casus sunt æqualitas corporum, & inæqualitas. Eorum differentia imminui potest in infinitum ita, ut ab inæqualitate ad æqualitatem demum deveniatur. Consideretur velocitas corporis alterius, quod prius erat majus, quæ in eo habetur post concursum, ut quæsitum quoddam, vel resultans. Ipsa velocitas imminuta utcumque inæqualitate, manebit semper illæsa per secundam Cartesii legem. Ea sublata, & mutata in æqualitatem, velocitas ipsa statim saltu quodam extinguitur tota per primam legem ipsius Cartesii, &

ipsi

ipſi ſubſtituitur oppoſita. Id legi Leibnitianæ repugnat, vi cujus ſi ordinatim mutentur, quæ dantur, ordinatim mutari debent ea etiam, quæ quæruntur, poſtulantur, reſultant.

102. Generaliter autem ſine relatione ad data, & quæſita ſic enunciari poteſt principium ipſum. Quotieſcumque binæ quantitates variabiles, quæ nimirum magnitudinem mutare poſſunt, ita inter ſe connexæ ſunt, ut determinata magnitudine alterius, alterius etiam magnitudo determinetur; ſi concipiantur binæ magnitudines prioris, & binæ poſterioris reſpondentes iiſdem binis, ac prima quantitas mutatione continua abeat a prima magnitudine ad ſecundam tranſeundo per omnes magnitudines intermedias; idem præſtabit etiam ſecunda. Prima illa magnitudo ea eſt, quam Leibnitius nominat *datum*, vel *poſitum*; ſecunda, quam appellat *quæſitum*, *reſultans*, *conſectarium*, *eventum*, *poſtulatum*. Tranſitus autem per omnes intermedias magnitudines omnium optime exprimit *ordinationem* illam, *continuitatem*, *imminutionem differentiæ* infra limites quoſcumque datos.

103. Id ipſum Jo. Bernoullius omnino intellexit in illo *Diſcurſu de motu*, qui habetur in tomo 3. ipſius operum, ubi latine itidem redditus ſic habet. *Illum dico ordinem immutabilem, ac perpetuum conſtitutum a creatione Mundi, quem appellare licet continuitatis legem, ac vi cujus quidquid fit, fit per gradus infinite parvos ... Natura non operatur per ſaltum: nihil poteſt ab uno extremo tranſire ad aliud niſi tranſeat per omnes intermedios geadus*. Fieri enim non poteſt, quæmadmodum paullo infra explicabimus, ac demonſtrabimus, ut habeatur tranſitus per omnes intermedios gradus, niſi fiat itidem tranſitus per omnes intermedios ſtatus, ſive intermedias magnitudines. Quamquam illa ipſa vox gradus & aliis multis, & ipſi, ut arbitramur, Maupertuiſio æquivocationis cujuſdam occaſionem præbuit, qua in ipſa continuitatis lege impugnanda ſunt uſi, tanquam ſi impoſſibile omnino eſſet ſaltum excludere, qui dum excludi dicitur ope tranſitus per intermedios gradus, ibi maixme neceſſario includatur.

104. Maupertuiſius quidem ipſe in primo e ſuis opuſculis ſimul impreſſis Dreſdæ anno 1752, cui titulus *Eſſay de Coſmologie* pag.20, poſtea quam præcedenti pagina expoſuerat eorum ſententiam, qui corpora dura nulla eſſe in natura contendunt ob Legem Continuitatis, & Bernoullium ipſum, atque hunc eundem ejus diſcurſum indigitaverat initio paginæ 20, ut ex notula adjecta patet, hæc addit, quæ nos ſic latine reddidimus. *Fateor, me hujus argumenti vim non ſentire. Haud ſcio, an ſatis nota ſit ratio, qua motus generatur, vel extinguitur, ut affirmare liceat, ibi legem continuitatis violari. Ego ſane nec illud ſatis novi, quid ſit ejuſmodi lex. Quando ſupponere-*

neretur velocitatem augeri, vel diminui per gradus, an non haberentur ſemper tranſitus ab uno gradu ad alium? Et tranſitus omnium maxime imperceptibilis an non tantundem continuitatem violat, quantum eam violaret deſtructio ſubita Univerſi? Duo hic a doctiſſimo viro innuuntur: alterum, ignorari a nobis modum, quo gignitur velocitas, & an ibi continuitas violetur; alterum legem ipſam involvere contradictionem incluſo ſaltu in ipſis gradibus, per quos excludi debeat, qui ſaltus in quovis gradu utcumque exiguo continuitati officiat, quantum officeret ſaltus in tanta re, quantus eſt univerſus Mundus. Porro dum huic ejus impugnationi hic reſpondemus, ac ejus vim omnem conamur eludere, ut nobis quidem videmus, cum evidenti ſucceſſu, non ſolum nihil detractum volumus de doctiſſimi viri fama, cujus ingenii vim, ac præclariſſima in univerſam litterariam remp: promerita, & Europa omnis admiratur, ac ſuſcipit, & nos inprimis veneramur, verum etiam ipſa ejus tanta & apud cæteros, & apud nos ipſos exiſtimatio nos impulit ad reſponſionem adornandam, & in hac diſſertatione ipſa inprimis evulgandam, quod verebamur, ne recens exortæ, & crebreſcenti jam theoriæ noſtræ ipſa tanti viri auctoritas officeret.

105. Et quidem quod ad modum pertinet, quo velocitas generatur, oſtendemus inferius, eam juxta continuitatis legem generari ſemper, ac deſtrui: nunc quod pertinet ad ſaltum ex illa ipſa continuitatis, & graduum ſuppoſitione violatum, quod ipſam continuitatem inintelligibilem redderet, impoſſibilem, & abſurdam, re aliquanto altius repetita expediemus, ac Leibnitianam, Bernoullianam, & noſtram definitionem eodem redeuntes, quod ad rerum ſummam pertinet, exponemus.

106. In primis binas quantitates variabiles poſſe a ſe invicem pendere, & connecti inter ſe ita, ut altera mutata mutari poſſit, & vero etiam mutetur & altera, innumeris exemplis conſtat, & ipſo quotidiano uſu compertum eſt: ſic a menſura, vel pondere rerum, quas emimus, pretium pendet, & ea aucta augetur, imminuta minuitur: contra vero a tempore, quod in dato intervallo percurrendo conſicitur, curſorum celeritatem æſtimamus, quam eo majorem cenſemus, quo tempus eſt brevius. Poteſt autem utraque quantitas variabilis eſſe ſimplex, vel altera ex iis componi e pluribus, inter ſe nullo nexu copulatis, a quorum omnium determinatione pendeat. Sic in ſuperiore caſu a ſola menſura, vel pondere ejuſdem rei pretium pendet, & a ſolo tempore celeritas. At generaliter celeritas mobilis cujuſvis, quod diverſis feratur temporibus, & per diverſa ſpatia, pendet a ſpatio & tempore, proportionalis illi directè, huic recipro-

gè.

cè. Quantitas autem motus generaliter pendet a maſſa, celeritate, & tempore, vel a mole, denſitate, celeritate, & tempore, quorum ſingulis variatis variantur; adeo ut poſſit a quocumque quantitatum numero unica quantitas pendere, & illis variatis variari.

107. Porro ſi ea, a quibus aliqua quantitas pendet, mutentur mutatione continua, & ab una magnitudine ad aliam abeant tranſeundo per omnes intermedias, etiam illa ipſa quantitas per omnes intermedias tranſibit. Id quidem multo facilius exponitur, & intelligitur, ubi binæ tantummodo quantitates inter ſe connectantur, quarum, utraque ſit ſimplex, vel conſideretur, ut ſimplex. Earum nexus in eo caſu exponi ſemper poteſt per lineas aſſumendo axem ad arbitrium, & in eo repræſentando alteram quantitatem per abſciſſas a dato puncto computatas, alteram per ordinatas ipſi in dato angulo inclinatas, quarum vertex in earum continuo excurſu per illum axem deſcribat lineam continuam ejuſmodi nexum referentem. Nam ubi una quantitas connectatur cum binis variabilibus, ut ſpatium deſcriptum cum celeritate, & tempore, nexus ille requirit ſuperficiem continuam, & de locis ad ſuperficiem tres variabiles quantitates connectentem profundiſſimum, & elegantiſſimum opuſculum edidit jam olim Doctiſſimus Clerautius adhuc puer. Si connectatur cum pluribus, omnes is nexus excedit vires Geometriæ tribus tantummodo dimenſionibus præditæ. Ad eos nexus in quocumque quantitatum variabilium numero Algebra extenditur, quæ in eo Geometriæ præſtat, quamquam ipſi præſtat contra Geometria in eo, quod nexus plurimos, in quibus non ipſæ quantitates, ſed earum decrementa, ac incrementa certam habent relationem ad ſe invicem, quod in tranſcendentibus curvis fit, exhibeat, ad quæ Algebra finita non pertingit, ſed infiniteſimalis requiritur calculus, & ſunt fortaſſe ejuſmodi nexus per lineas, & ſuperficies expreſſi, ad quos exprimendos nec finita Algebra finitas quantitates, & earum finitas potentias contemplata, nec infiniteſimalis calculus infiniteſimales earum differentias ordinum quorumcumque, & earum potentias quaſvis conſiderans omnino ſufficiat, ſed aliud quodpiam expreſſionum genus requiratur, cujus ideam habemus nullam. Hæc omnia perſequi infinitum eſſet, & vaſtis etiam voluminibus implendis materiam præberent: in iis antem omnibus continuitas quidem ſemper omnino ſervatur, multi vero caſus anomali conſiderandi obveniunt, ad ipſam continuitatis legem, & connexionis in ea conſervanda induſtriam contemplandam, illuſtrandamque per quam idonei.

108. Dicemus igitur pauca quædam, quæ pertinent ad nexum quantitatum binarum, qui habetur, ut diximus, per lineas, quod ad rem præſentem erit abunde, cum factum quodcumque ex quotcum-

cumque variabilibus quantitatibus, a quibus altera pendet, possit connecti cum tempore, considerando quantitatum illarum omnium, dum variantur, status determinatos pro quovis momento temporis expressos linea quadam continua, ut axe, & erigendo e puncto respondente illi ipsi momento ordinatam exprimentem magnitudinem quantitatis cum iis conexæ, quo pacto nexus etiam ille includitur, qui unus pro quantitatibus variabilibus in natura existit, in qua singulis momentis quantitates singulæ singulas tantummodo magnitudines habere possunt, expressus per lineam a vertice illarum ordinatarum descriptam. Et, quidem ipsa Maupertusii difficultas tempus respicit, & quantitatem perpetuo variatam, ac momentaneum saltum conatur inducere, ut necessarium, dum quantitas per omnes magnitudinis gradus variatur.

109. Porro ubi per lineam exprimitur nexus binarum quantitatum, quarum primam exprimat abscissa, secundam ordinata, fieri potest, ut singulis magnitudinibus primæ quantitatis non nisi unica respondere possit magnitudo secundæ, vel ut respondeat quicumque finitus ejus magnitudinum numerus, vel etiam infinitus, atque id ita, ut cuivis magnitudini primæ quantitatis respondeat unica secundæ magnitudinis quantitas, & tamen eadem aliqua magnitudo secundæ respondeat pluribus quocunque finito numero magnitudinibus primæ, vel etiam numero infinitis, vel ut viceversa cuivis secundæ respondeat unica primæ, & tamen cuivis primæ respondeat quivis finitus, vel infinitus numerus magnitudinum secundæ, vel demum cuicumque numero finito, vel infinito magnitudinum quantitatis cujuslibet respondeat quivis numerus magnitudinum secundæ finitus pariter, vel infinitus. Facile admodum esset exemplis illustrare singula, propositis etiam notissimis curvarum generibus. Res autem omnis pendet ex eo, quod quædam curvarum genera recta linea datam positionem habens axi, vel ordinatis parallelam in unico puncto secare potest tantummodo, alia in binis, vel ternis, vel quocumque finito numero, vel infinito etiam, ut evidenter patet in spiralibus abeuntibus in infinitum, ac potest altera occurrere in unico, vel in quotcumque, dum altera itidem in punctis quotcumque occurrit; ubi vero curvæ substituitur recta, ipsam quævis alia recta vel parallela ordinatis, vel parallela axi in unico tantummodo puncto secat. Sed hæc itidem investigatio in immensum abit, & nos in simplicissimis tantummodo casibus quibusdam consistere cogimur.

110. In primis in ejusmodi quantitatum geometrico nexu fieri potest, ut altera perpetuo crescente, altera crescat perpetuo, vel decrescat, vel illa perpetuo decrescente, hæc perpetuo crescat, vel decrescat, vel illa aut crescente, aut decrescente, hæc a crescendo tran-

tranſeat ad decreſcēndum, quo caſu habetur maximum quodpiam, vel viceverſa a decreſcendo tranſeat ad creſcendum, quo caſu habetur minimum. Ejuſmodi exempla admodum facile deſumi poſſunt a ſolo etiam circulo ad axem relato poſitum extra ipſum. Si enim in fig. 22 diameter circuli HI producta occurrat ad angulos rectos in C rectæ AB, & recta ex R ipſi AB pariter perpendicularis occurrat circulo in P, & P′, creſcente abſciſſa AR, vel decreſcente AR2 evadit RP minima, RP′ maxima, ubi R appulerit ad C, quod quidem in circulo & communiter in curvis accidit continuata in I, & H curvatura arcus progredientis: quandoque autem fit etiam per regreſſum arcus efficientis in I, vel H cuſpidem, quæ ſingula perſequi, & illuſtrare non vacat,

111. Fieri autem etiam poteſt, ut variata altera, decreſcat etiam altera per omnes magnitudines utcumque parvas, & evaneſcat, vel augeatur per omnes magnitudines utcumque magnas, & evadat abſolutè infinita. Si recta F′G in fig. 16 moveatur motu continuo verſus ED, rectæ VR, vel BR cum quavis RP nexum exhibeat MV, vel quævis NV, appellente R ad V, evaneſcit ſecunda quantitas RP, atque id vel evaneſcente prima, ut VR, vel manente adhuc, ut BR, ubi etiam ſi VR contra creſcat in infinitum, infinitum itidem creſcit quævis RP. At in fig. 15, abeunte pariter R in C, quævis RP evadit infinita, atque id pariter vel evaneſcente prima, ut CR, vel manente finita, ut BR, ubi contra facta CR infinita, RP in infinitum decreſcit, & concipitur, ut evaneſcens.

112. Porro ubi alterius magnitudo ad nihilum devenit, vel ad infinitum, fieri poteſt, ut alterius continuata mutatione directionem mutet, quo caſu dicitur abire in negativam, vel ut cum eadem directione regrediatur e nihilo, ac pariter, ubi in infinitum abiit, fieri poteſt, ut vel in negativam abeat, præcedenti directione mutata, vel, directione manente, maneat itidem poſitiva. In fig. 16, ſi nexus exprimatur per MVN3 abeunte R in R′ per V, abſciſſa BV, quæ remanſerat finita, pergit creſcere, AV decreſcere, & VR, quæ evanuerat, mutat directionem in R′P3; ſi vero nexus exprimatur per MVN4. mutat directionem, ac evadit negativa VR in VR′, ſed RP′ remanet poſitiva in R′P4. In fig. 15 abeunte R in R′ per C, pergit creſcere BR, in BR′, decreſcere AR in AR′, mutat directionem CR in CR′ poſt evaneſcentiam, & tranſitum per nihilum; ſi autem nexus exprimatur per M1 N1 N4 M4, remanet RP1 poſt appulſum ad infinitum directionis ejuſdem in R′P4, qui nexus ſi exprimatur per M1 N1 N5 M5, illa RP1 poſt abſceſſum in infinitum mutat directionem in RP5, niſi forte ipſi RP1 in eo caſu reſpondeat, non R′P5 negativa, quam communiter Geometræ, & ſemper Analyſtæ aſſumunt pro analoga illi R′P1,

sed alia positiva per infinitum traducta juxta num. 62, nimirum R'G' ∞ F P 5, qua de re, ut & de omnibus hisce appulsibus ad nihilum, & ad infinitum, ac transitu e positivo in negativum multo pluribus egimus in toties memorata dissertatione nostra Conicorum Elementis adjecta. Illud unum hìc notandum interea, ubi e positivo transitur ad negativum, licet magnitudo post decrementum ex parte positiva incipiat ex parte negativa iterum crescere, revera in Geometrica, & analytica consideratione pergere decrementum ipsius, cum negativa quantitas eo censeatur minor, quo, si positive consideretur, sit major; nam negativa, ut debitum, continua detractione, ut novis impensis factis, ob id ipsum quod decrescant, & infra nihilum deprimi pergant, videntur quodammodo augeri.

113. Quandoque dum altera quantitas perpetuo variatur, altera etiam alicubi abrumpitur, & abit in impossibilem. Sic in fig.22 abeunte R2 in R3, ubi RO contingit arcum in E, tum transgresso illo abit in R4, jam recta RO' nusquam occurrit circulo, & ordinata ad abscissam AR4, vel BR4 pertinens jam impossibilis evasit, quo casu ea appellari solet quantitas imaginaria. Sed is casus nusquam in Geometria potest accidere, nisi binæ fuerint ordinatæ, & binæ simul impossibiles evadant. Id & in Algebra dudum notatum est, ac demonstratum; radices nimirum imaginarias æquationum non nisi numero pari haberi posse; in Geometria autem manifesto evincitur ex ipsa natura linearum continuarum, & nusquam abruptarum. Neque enim potest ordinata quæpiam R2P2 delata ad R3E abire in imaginariam, nisi binæ R2P2, R2P'2 simul in imaginarias abeant. Cum enim non possit arcus P2E abrumpi in E juxta num.55, sed continuari debeat, nec ut habeatur imaginarietas continuari possit ultra R3E, si posteriores R4O in eam curvam non incurrunt, debet post appulsum ad E progredi, vel regredi per aliquem alium arcum EP2 jacentem citra R3, in quem pariter recta R2P2, antequam deveniat ad R3E, necessario incurret alicubi in P'2, & bina puncta P2 P'2 coire debebunt in E, binis ordinatis simul imaginariis evadentibus, quod itidem accidet si E lateat in Infinito, cum etiam ex ipso Infinito arcus redire debeat. Sic in fig.16 motu continuo puncti R per V in VR' si nexus exprimatur per curvam MVN1, vel MVN2, abeunt in imaginarias binæ simul RP', RP1, vel RP', RP2 in ipso earum appulsu ad nihilum: at in fig.15 si nexus exprimatur per N1M1M2V2, vel N1M1M3N3, evadunt imaginariæ binæ simul ordinatæ RP1, RP2, vel RP1, RP3 in ipso earum appulsu ad Infinitum, quæ in fig.22 abierant in imaginarias ipso appulsu ad finitam quantitatem R3E.

114. De iis etiam, quæ ad hunc velut interitum quantitatis abeuntis in imaginariam diximus in illa ipsa dissertatione, & iterum dicemus

mus infra, hic illud unum monebimus, id omnino contingere non poſſe, ubi ſingulis abſciſſis ſingulæ tantummodo ordinatæ reſpondent, ut accidit in recta linea, in Hyperbolis, & Parabolis omnibus, in quibus eſt aliqua potentia ordinatæ impar, directè, vel reciprocè, ut quævis potentia impar abſciſſæ, ac in infinitis aliis curvarum generibus, quæ definiuntur per æquationes quaſcunque, in quibus ordinata ad unicam cujuſvis imparis gradus potentiam aſſurgit, utcumque commixta ſit cum potentiis abſciſſæ quibuſcunque. In eo autem curvarum genere, quæ plures ordinatas eidem abſciſſæ reſpondentes habere non poſſunt, hunc tranſitum e ſtatu reali in imaginarium haberi non poſſe monuimus idcirco, quod ubi quantitates variabiles referuntur ad tempus, ille caſus obtinet, in quo ſingulis momentis temporis, ſingulæ reſpondent magnitudines quantitatis, non binæ ſimul, nimirum ſingulis abſciſſis ſingulæ ordinatæ, non plures.

115. Hiſce omnibus aliquanto fuſius expoſitis, exponemus jam, quid ſint illæ intermediæ quantitates, per quas tranſire debeat. Plurimi autem ſunt caſus orti ex eo, quod binæ magnitudines extremæ poſſunt eſſe vel directionis ejuſdem, vel contrariæ, ac in utroque ex iis caſibus poteſt deveniri in Geometria a prima ad ſecundam vel ſine receſſu in infinitum, vel cum eo, ipſe autem receſſus poteſt fieri ad partem utramlibet, & ad utramvis partem fiat, fieri poteſt vel cum regreſſu ex eadem Infiniti parte, vel cum tranſitu ad partes oppoſitas. Rurſus haberi idem poteſt tam ſecundum directionem, quam habent ordinatæ, quam ſecundum eam, quam habent abſciſſæ, & ſecundum aliam quamcumque, atque id tam per crura Parabolica, quam per Hyperbolica, vel etiam ſpiralia, vel ſerpentia, & flexuoſa. Plurimæ ſunt eorum caſuum claſſes, quæ variant acceptionem magnitudinum intermediarum inter binas extremas datas.

116. Simpliciſſimus caſus eſt, in quo non fiat receſſus in Infinitum, & is habet locum in Natura, in qua nihil actu infinitum eſſe poteſt: reliqui ad Geometricam contemplationem pertinent tantummodo; ac in eo caſu ſi ambæ extremæ ſint ejuſdem directionis, intermediæ omnes ſunt eæ, quæ eandem directionem habent, & ſunt minores majore ex iis, majores minore; ſi vero extremæ habeant directiones oppoſitas, intermediæ ſunt omnes minores utravis in ſua directione, quo caſu debet etiam haberi tranſitus per nihilum: reliqui caſus alii aliam intermediarum, per quas in motu continuo tranſiri neceſſe eſt, acceptionem habent. Sint in fig. 23 binæ ordinatæ ejuſdem directionis CD, QE, relatæ ad abſciſſas AC, AQ, vel directionis contrariæ C'D, Q'E relatæ ad A'C', A'Q'. Linea continua, quæ nexum exhibet inter quantitates iis abſciſſis, & ordinatis expreſſas, debet a puncto D abire ad punctum E, idque vel ſine receſſu in

 in-

infinitum per aliquam viam formæ cujuscumque DTT'E, vel cum recessu in infinitum, qui si fiat in directione eadem, quam habent ordinatæ, & per crura asympototica, haberi potest vel per DME, vel per D M ∞ M' E, vel per DM'E, vel per D M' ∞ M E, ut alios aliarum directionum, & aliorum crurum casus omittamus. Per puncta D, & E concipiantur rectæ NO, KL parallelæ axi AB, vel A'B', quarum prior ordinatæ QE occurrat in S. Tum in ipsa EQ utrinque in infinitum producta, sumatur punctum H utcumque, vel extra binas KL, NO ad partes E in H1, vel inter KL, & A'B' in H2, vel inter A'B', & NO in H3, vel iterum extra illas binas, sed inter NO, & AB in H4, vel etiam ultra AB in H5, ac per quodvis punctum H sit sua recta FG parallela ipsi axi, & illis binis rectis. Patet omnino, in casu, in quo linea DTT'E in infinitum recedit, quoscumque faciat gyros, vel flexus, eam alicubi debere saltem semel transcurrere quamcumque rectam inclusam binis illis KL, NO, ut quamcumque F2G2 in P2, vel F3 G3 in P3. Ducta autem ex ipso P, ut ex P2 recta PR perpendiculari ad axem, abscissæ AR respondebit ordinata RP2, sive QH2. Porro si axis sit AB, & binæ ordinatæ ejusdem directionis, patet inde alicubi debere haberi ordinatam æqualem cuicumque QH2, vel QH3 minorem majore e binis illis extremis nimirum QE, & majorem minore CD, vel QH3. Quod si axis sit A'B' interiacens binis NO, KL, ut binæ extremæ Q'E, C'D' sive Q'S oppositas directiones habeant, debebunt haberi omnes QH2 minores Q'E, & omnes QH3 minores itidem Q'S, sive CD, ac puncto H abeunte in Q', patet debere ordinatam evanescere, & per nihilum motu continuo transire e positiva ad negativam.

117. Si vero linea continua nexum exhibens abeat per D M' ∞ - ME, quod in Hyperbola conica accideret, possent, immo in ea debent, remanere immunes omnes illæ F2G2, F3G3 inclusæ binis KL, NO, adeoque nulla haberi ex intermediis in præcedente sensu acceptis, sed necessario debent secari omnes jacentes utrinque extra illos limites, ut F1G1, F4G4, F5G5: adeoque haberi reliquæ omnes utriuslibet directionis, quæ in præcedenti casu non includebantur. In reliquis autem tam hisce casibus, quam aliis hic non expressis, recessuum in infinitum, ac regressuum, ex ipsius figuræ contemplatione patebit facile, quæ pro singulis intermediæ illæ sint, per quas transiri debet.

118. Omissis hisce casibus, quæ Infinitum includunt, adeoque ad Naturam pertinere non possunt, patet, in priore casu posse abscissam ipsam AR initio & recedere ab abscissa AH, ut figura exhibet, & accedere, quod accideret, si linea nexum exhibens non recederet a recta QE, & vel ipsa recedat, vel accedat, posse ordinatam RP initio vel recedere ab ordinata QE, vel ad eam accedere, cum linea illa possit

vel

vel accedere ad axem, vel ab eo recedere, & iidem casus haberi possunt in fine, iidem respectu & axis A'B', & abscissæ A'R', ac ordinatæ R'C'; sed in omnibus ejusmodi casibus patet, salva continuitate lineæ nexum exhibentis, non posse in toto ejus lineæ excursu non haberi quamcumque ex illis ordinatis intermediis in sensu exposito, nec fieri posse, ut ubi ex D exit illa linea, vel in E desinit, punctum H per omnes distantias SH3 utcumque parvas non recedat a puncto S, vel punctum H2 non accedat ad punctum E per distantias H2E utcumque parvas. Quare patet ordinatam, dum ad utramlibet e binis datis QE, CD accedit, motu facto ex D ad E, vel ex E ad D, non posse non accedere ad illas per quascumque magnitudines utcumque proximas ipsis, atque id generale esse magnitudinibus quibuscumque utcumque inter se proximis, vel remotis quantitatum, quarum nexus per lineam continuam exprimitur, in quo sita est continuitatis lex, quam etiam clarius explicabimus exemplo quantitatum, quæ referuntur ad tempus, quod motu continuo fluit, nunquam recto regrediens, & quod binas ejusdem quantitatis magnitudines pro eodem momento non admittit. Ac ut Maupertuisii difficultatem dissolvamus tandem, & ostendamus, quo pacto saltus omnis a continuitatis lege excludatur utcumque exiguus, considerabimus casum simplicissimum, in quo a positiva quantitate ad aliam positivam majorem continuo incremento ascenditur, vel minorem continuo decremento descenditur.

119. Sint igitur in fig. 24 binæ magnitudines quantitatis ejusdem CD PE, respondentes binis momentis C, Q, & ambæ directionis ejusdem, a quarum prima minore ad secundam majorem ea quantitas transire debeat tempore continuo CQ, servata Continuitatis lege. Debet eo tempore habere omnes magnitudines majores, quam sit CD, sive QS, & minores quam QE ita, ut non solum dato quovis momento R habeatur magnitudo RP ipsi respondens, sed etiam data quacumque magnitudine, ut QH, in illo sensu intermedia inter QS, & QE, habeatur momentum ipsi respondens. Id autem momentum, data linea DE, sive recta, sive curva, quæ exhibeat ejus magnitudinis crescentis legem, semper invenietur saltem unum. Ducta enim per H recta FG indefinite parallela AB, ea necessario incurret in illam lineam DE alicubi in P saltem semel, ut figura exhibet; posset autem etiam in plurimis punctis ipsi occurrere, si nimirum illa linea sinuaretur hinc, & inde circa rectam ipsam FG, quod fieri non poterit, si quantitas, ut supposuimus continuo crescat. Ducta PR parallela DC, vel EQ, habebitur momentum R, cui illa magnitudo respondebit.

120. Hoc ubi generaliter habeatur, habebitur transitus per omnes magnitudines intermedias, & incrementum per omnes gradus infini-

finite parvos ſine ullo ſaltu utcumque exiguo. Id facile intelligetur, ſi rite concipiatur, quid ſit gradus adveniens, & quo pacto adveniat. Singulis momentis temporis R, T, O reſpondent ſingulæ magnitudines, ut RP, TV, OL. Utcumque igitur deſumantur bina momenta determinata, ſemper habebuntur binæ magnitudines iis reſpondentes, quæ inter ſe different, ut illa momenta inter ſe diſtant: Diſtantia momentorum determinate aſſumptorum determinata ſemper erit, & finita, ac pariter differentia magnitudinum iis reſpondentium. Ea differentia, & gradus, qui accedit magnitudini illo tempore continuo, debetur intervallo quod inter illa bina momenta intercedit. Si rectæ parallelæ AB ductæ ex D, P, V, L occurrant rectis RP, TV, OL, QE in I, K, M, N, gradus advenientes magnitudini CD temporibus CR, RT, TO, OQ erunt IP, KV, ML, NE. Si ea tempora determinata ſint, & proinde finita, ii etiam gradus determinati erunt, & finiti. Quoniam autem temporis particulæ decreſcere poſſunt in infinitum, ſi eæ ſumantur minores perpetuo, ac minores, etiam differentiæ illæ, ſeu gradus minores itidem, & minores evadent, ac ſi illa tempuſcula conſiderentur indefinita, ut decreſcentia ultra quoſcumque limites in infinitum, in quo ſtat per nos, quod ſint infinite, ſeu indefinite parva, etiam illæ differentiæ, illi gradus decreſcent indefinite ultra quoſcumcumque limites, eruntque in eodem ſenſu infinite, vel indefinite parvi, ac demum evaneſcent.

121. En autem, in quo ſtet excluſio ſaltus. Ille gradus quicumque, utcumque parvus, ubi ſervatur continuitas, non advenit momento aliquo temporis totus ſimul, ſed advenit tempore quodam continuo ita, ut ejus partes minores ſenſim, ac minores reſpondeant partibus temporis minoribus ſenſim, ac minoribus, nec ulla ſit utcumque exigua pars illius gradus, quæ aliquo itidem exiguo tempore non adveniat. Illa ipſa pars poteſt dici gradus, & ſi tranſitus fiat per omnes gradus infiniteſimos, nimirum, qui aſſumi poſſint utcumque indefinite, patet, cujuſcumque magnitudinis a zero ad magnitudinem quamvis finitam, jam haberi tranſitum per omnes intermedias magnitudines, & Bernoullii definitio conveniet cum noſtra. Quæ de incrementis diximus facile ad decrementa transferuntur, in quibus Continuitatis lex habetur, ſi decrementorum gradus non momentis temporis habeantur, ſed tempuſculis continuis ita, ut partes decrementi quæcumque, utcumque parvæ, ſuas habeant temporum partes itidem exiguas.

122. Saltus haberetur, ſi tota differentia inter binas magnitudines, utcumquque exigua, adveniret non tempore continuo, ſed momento temporis. Si nimirum toto tempore CR duraret ſemper magnitudo æqualis CD, vel RI, tum momento R adveniret totus ſimul

gradus

gradus IP, ac per totum tempus RT daretur magnitudo RP, vel TK & momento T adveniret totus gradus KV, & ita porro. Eo caſu non linea continua DPVLE, ſed ſcala quædam DIPKVMLNE legem mutationis exhiberet, quia immo eam exhiberent ſolæ rectæ DI, PK, VM, LN abruptæ, & ſaltus haberetur, qui Continuitati æque officeret, ac ſi totus Mundus momento temporis interiret: nam magna, & parva reſpectiva ſunt juxta ea, quæ diximus num.21, non abſoluta, & ſi res eo pacto fieret, vim haberet Maupertuiſii difficultas. Verum incrementum illud IP non advenit momento R totum, ſed pars I'P' ipſius IP utcumque parva advenit parte CR' tempuſculi CR itidem parvi, quo pacto nullus uſpiam habetur ſaltus, qui ſecum trahit momentaneum tranſitum ab una magnitudine ad aliam, quæ ab ea differat differentia aliqua in ſe determinata, utcumque parva.

123. Quare patet ex iiſdem prorſus principiis a continui natura derivatis hanc Maupertuiſii difficultatem evidenter ſolvi, ex quibus illa de motu Achillis, & teſtudinis ſoluta eſt ſuperius. Ut nimirum ex eo, quod nullum momentum, aut punctum eſt contiguum alteri momento, ſed inter bina quævis momenta, aut puncta, quæ non congruant, tempus continuum, vel lineola interjacet, quæ dividi poteſt in infinitum, aut minui acceſſu momenti ad momentum, vel puncti ad punctum, ſoluta eſt difficultas illa de motu continuo; ita hæc ſolvitur ex eo, quod ſingulis momentis ſingulæ magnitudines reſpondeant, at nulla magnitudo alteri magnitudini ita proxima eſſe poſſit, ut differentia non intercedat, quæ tempori illi non reſpondeat, & imminui non poſſit in infinitum, interjacentibus aliis magnitudinibus intermediis ultra quoſcumque limites propioribus, quæ reſpondeant intermediis momentis, & habeatur quidem prima, & ultima, a qua, & ad quam motu illo continuo fiat tranſitus, quin ſecunda, & penultima habeantur; in tota autem magnitudinum ſerie continua ſemper, ut in quovis continuo, unicus terminus communis ea, quæ præcedunt, cum iis, quæ conſequuntur conjungat; unde, ni fallimur, evidenter conſtat, legem Continuitatis nullam contradictionem involvere, nec inducere ſaltum, dum maxime ipſum ſaltum per intermedios gradus conatur excludere.

124. Explicata hoc pacto, & vindicata ipſa continui natura, & Continuitatis lege, ac ſuſpicione omni impoſſibilitatis amota, tranſeundum jam nobis eſt ad ipſam in Natura ſtabiliendam, quod multo brevius præſtandum erit, producta jam ultra præfinitos limites diſſertatione, plurimis, quæ digniſſima commemoratu eſſent, ægerrimo ſane animo, prætermiſſis, aliis, quæ prætermitti nullo modo poſſunt, vix indicatis.

125. Le-

125. Legem Continuitatis in natura Leibnitiani conantur evincere ex Principio illo, quod *Rationis ſufficientis* appellant, quod nimirum nulla eſſet ratio ſufficiens, cur ſemel admiſſo ſaltu, tantus determinate ſaltus fieri deberet, non major, nec minor. *Oporteret*, inquit Bernoullius in diſcurſu adducto num. 103, primum ſtatum deſtrui, quin ſciret *natura, ad quem aliam ſtatum determinari deberet*, ac eodem fere pacto cæteri Leibnitianorum. Nobis ſane id argumentum, nequaquam arridet, & id principium, ut a Leibnitio, & præcipuis Leibnitianis admittitur, falſum omnino eſſe, ac etiam perniciosum arbitramur, ac præterea, ut olim etiam in Diſſertatione de Maris Æſtu affirmavimus, cenſemus, *nunquam poſſe ulli eſſe uſui ad quidpiam utcunque determinandum, & multo minus ad demonſtrandum*.

126. Haud hic quidem eſt locus longiorem contra hoc ipſum principium diſſertationem inſtituendi; indicabimus tamen ea, quæ nos ad ita ſentiendum impellunt. In primis ſi etiam libera, vel humana, vel Divina voluntas debeat omnino rationem habere, cur id potius velit, quam nolit, vel viceverſa, actum eſſe cenſemus de libertate. Poſita enim earum rationum, quæ nobis objiciuntur, & quarum omnium cognitio a noſtro arbitrio omnino non pendet, præponderantia, jam fieri non poteſt, ut ad illud, quod præponderet, voluntas noſtra non inclinetur. In Deo autem in primis libertatem adimi neceſſe eſt, & induci abſolutam neceſſitatem ſingularum rerum, quæ exiſtunt, & impoſſibilitatem eorum, quæ non exiſtunt. Fieri enim omnino non potuit, ut Deus rationes omnes, quæ adeſſe poterant, pro hoc individuo rerum ordine creando non videret; fieri non potuit, ut eæ, quæ aderant non adeſſent; fieri non potuit, ut eæ, quæ præponderarunt, non præponderarent: ſuam enim naturam mutare non poſſunt; fieri non potuit, ut Deus præponderantiam non ſequeretur. Igitur etiam ex contradictionis principio innixo Divinæ naturæ præditæ ſapientia, & determinatione ad optimum eligendum, & naturæ rationum, quas videre potuit, eruitur, fieri non potuiſſe, ut hic ipſe ordo ſolus non exiſteret, qui idcirco omnino neceſſarius fuit, & ridicula eſt ſane eorum poſſibilitas, quæ exiſtere non poterant, niſi crearentur, creari non poterant, niſi ratio ſufficiens Deum ad creationem moveret, nec ipſa ratio ſufficiens ulla eſſe poterat, præter illas, quas ipſe Deus ob oculos habuit, cum Mundum crearet.

127. Accedit ad admittendam liberam Dei voluntatem & illud, quod ubi de poſſibilibus agitur, nulla bonitas creata eſt poſſibilis, qua major aliqua poſsibilis non ſit, ut in diſtantiis, ac in aliis ejuſmodi accidit, ſed quavis perfectione finita alia major haberi poteſt. Nulla autem creata perfectio infinita abſolute eſſe poteſt, ut de quantitate demonſtravimus ſupra. Quare Deus, ubi aliquid condendum decre-

vit

vit neceſſario debuit creare aliquid, quo alia perfectiora increata relinqueret, nec omnino potuit ab optimi electione moveri ad ea condenda, quæ condidit. Præterea quævis utcumque magna creaturarum naturalis perfectio, ita eſt exigua, immo ita nihil reſpectu Divinæ immenſitatis, ut exercitium libertatis ipſius infinities majoris pretii ſit, quam ejuſmodi bonitas quæcumque, & reſpectu ipſius omnia pro æqualibus habenda ſint. Debet igitur haberi ratio, cur aliquid potius ſit, quam non ſit, ſed ratio phyſica in creatis habebitur ſemper, nimirum cauſa aliqua, ratio moralis non ſemper aderit, & poterit haberi illud, *ſtat pra ratione voluntas*.

128. Hæc de falſitate principii, prout a Leibnitio admittititur, & prout ab ipſis Leibnitianis ad uſum traducitur, qui ipſo in contingentibus potiſſimum ſunt uſi ab humana, vel Divina electione pendentibus. Nemo negat omnium effectuum ſuas debere eſſe cauſſas, omnium concluſionum ſuas præmiſſas, quibus evidentes reddantur, quas cum videris, effectum inferas, concluſioni aſſentiaris, quas inveſtigare debeas, ut iis ſemel agnitis, alia etiam inde neceſſario conſequentia inferre poſsis. At negativi Leibnitianorum principii uſus non in eo eſt poſitus; ſed tota ejus vis, quam quotidie ipſi Leibnitiani obtrudunt, in eo ſita eſt, ut ex rationis defectu, rem, inferas, nequaquam exiſtere. Porro quam habere ad aliquid *determinandum*, vel *demonſtrandum* vim poteſt rationis defectus, ſi nobis compertum non ſit, nullam rationem haberi reipſa? At ſi libera Conditoris determinatio poteſt eſſe ratio, cur aliquid potius ſit, quam non ſit; nobis omnes rationes innoteſcere omnino non poſſunt, cum libera determinatio Conditoris non alio pacto nobis innoteſcat, niſi quadam veluti attentatione per inductionem eorum, quæ conſtanter fiunt, & quorum conſtantem quandam legem ab eo eſſe latam cenſemus, quæ inductio, quam manca ſemper ſit, & quantum ea illatio a demonſtrationis evidentia diſtet, nemo non videt.

129. At eo etiam prætermiſſo, an non Leibnitius ipſe profitetur; multa mala, ut illud Tarquinii flagitium, in Mundo etiam perfectiſsimo reperiri, cum omnes poſsibiles aliquid mali admixtum habeant, & id in optimo illo tolerari debeat ad tot alia habenda bona? At ubi in aliqua diſquiſitione invenerimus etiam, ſi fieri poteſt, quid ibi eo ſolo conſiderato optimum, quid ſimpliciſsimum ſit, & minimi diſpendii eſſet; unde nobis conſtabit, eam non eſſe Mundi particulam, quæ licet imperfectior, in aliorum gratiam, ut permiſsio Tarquiniani flagitii, ſelecta ſit? Quod ſi ita eſſet, quid ex ratione ſufficienti etiam pro ſingulis caſibus cognita inferri unquam poterit, cum viſa etiam prefectione majore, admiſſa neceſsitate ad optimum, adhuc in tanta noſtrarum cognitionum tenuitate, nihil inde determinate conſequatur.

H 130. Quid

130. Quid vero etiam, ubi de necessariis agitur rerum caussis? Licet semper cognita necessaria caussa effectum tuto inferre possis, quo te erroris periculo exponas, si a defectu caussæ, quarum tam paucas nosti, defectum ipsius effectus audacter deducas? Obtruditur quotidie a Leibnitiaris exemplum Archimedis, qui a defectu rationis sufficientis æquilibrium in æquiponderantibus deduxit, siletur ipsius error ortus ex eodem prorsus principio, cum ex eodem rationis defectu, stabilito æquilibrio, intulit sphæricam Telluris formam, quam a sphærica forma abludere nobis constat, atque id ipsum ob rationes sero detectas, quas Archimedes cum non videret, habuit pro nullis. Quamquam æquilibrium illud ipsum non a negativo principio, sed argumento, quod ad positivam formam, & vim facile reducitur, Archimedi profluxit, ut facile ostenderemus, si per tempus liceret. Illud unum addimus: inter alia plurima, in quibus argumentum a ratione sufficiente petitum omni robore destituitur, hanc ipsam esse exclusionem saltus e Natura. Quid enim vetat esse rationes aliquas, ob quas determinatæ magnitudinis saltus utilissimus præ ceteris omnibus esse possit, ut hominibus superiora tabulata scandentibus determinatæ cujusdam altitudinis gradus omnium maxime utiles sint?

131. Ea igitur ratione omissa, binas proferemus alteram ex metaphysicis principiis, alteram ex inductione, quæ in Physicis potissimum summi ubique usus esse debet, cum caussas saltem primas, vel semper, vel fere semper ignorari a nobis necesse sit Naturam sola, satis illa quidem tenui, nostrorum sensuum ope investigantibus. Prima ratio est hujusmodi. In quantitatibus, quæ variari possunt, & continuo tempore durant, nec unico momento plures magnitudines habere possunt, saltus, sive momentaneus transitus ab una magnitudine ad aliam, prætermissis omnibus intermediis, omnino haberi non potest. Hæc propositio si evincatur, evincetur saltum in natura haberi non posse. Nam quævis quantitas singulis momentis unicam tantummodo magnitudinem juxta Naturæ leges habere potest. Sic corpus licet densitatem, & velocitatem (intelligimus autem illam semper, quæ ex omnibus componitur, & motum ipsum, qui fit, determinat) mutare possit, singulis tamen momentis singulas tantummodo habere potest. Posset quidem duas habere densitates, si replicaretur ita, ut ejus puncta in una spatii parte unam a se invicem distantiam haberent, aliam in alia. Posset duas velocitates habere in eodem momento, si haberet determinationem percurrendi dato tempore & majus, & minus spatium, adeoque replicandi se omnibus sequentibus momentis, quæ Naturæ legibus repugnant, & per solam Divinam omnipotentiam præstari possunt.

(LIX.)

132. At ea propoſitio noſtro quidem judicio manifeſto evincitur ex iis, quæ ſupra expoſuimus. Si enim aliquo momento temporis haberetur ſaltus, eodem illa quantitas binas magnitudines habere deberet, nimirum poſtremam ſeriei continuæ pertinentis ad tempus præcedens, & primam ſeriei pertinentis ad tempus conſequens. Ut enim illud idem momentum & eſt poſtremum temporis præcedentis, & primum ſequentis, ita magnitudo, quæ habetur illo momento debet eſſe & poſtremus terminus ſeriei reſpondentis tempori præcedenti, & primus ſeriei conſequenti tempori reſpondentis. Series enim continua præcedens, debet habere ſuum poſtremum terminum, & ſeries conſequens primum, qui ſolus ab ea auferri non poteſt, quemadmodum ſolum ultimum punctum a linea, ſola ultima linea a ſuperficie auferri omnino non poteſt. Si toto tempore CR in fig. 24. habetur magnitudo æqualis RI, & toto tempore RT magnitudo æqualis RP, momento R debet haberi utraque, cum fieri non poſsit, ut areæ RIDC deſit ſola linea ultima RI, vel rectangulo RPKT ſola prima RP. Id ipſum manifeſto evincitur ex iis, quæ diximus num. 97 de loco geometrico, qui plures ordinatas habere non poſsit uni abſciſſæ reſpondentes, qui continuitatem omnino ſervare debet. Lineæ DC, EF in fig. 19, ſi abrumpuntur, hiatum debent relinquere in GH, in quo ordinata non ſolum nulla, ſed impoſsibilis ſit, vel in H ordinatas habere binas in fig. 20, vel binas habere toto tractu HG in fig. 21, nec ullus alius eſt caſus præter illos tres, cum, ut num. 99 monuimus, ad ſecundum reducatur caſus etiam is, in quo poſt G dicatur ordinata evaneſcere, congruente EF cum axe GB, in quo caſu momento G haberetur magnituuo GC, & magnitudo nulla, ut diſtantia ex. gr. GC, & diſtantia nulla, puncto altero replicato, & exiſtente tam in diſtantia GC, quam in eodem ſpatii puncto cum altero puncto.

133. Eodem argumento excluditur etiam ſaltus in motu locali. A puncto quovis ad aliud quodvis punctum ſpatii poteſt ire mobile quodpiam viis admodum diverſis, utcumque ſinuatis, & incurvatis; ſed linea, per quam abibit, continuo ductu deſcribenda erit ſemper ſine hiatu ullo. Cur id? Quia nimirum ſi alicubi abrumperetur, ut in fig. 1, & via eſſet ABCD interrupta in BC, vel momentum, quo inciperet deſcribere CD, eſſet idem, ac momentum, quo deſineret eſſe in AB, vel ipſum præcederet, vel ſequeretur. In utroque ex his poſtremis caſibus inter illa bina momenta neceſſario interjacere debet tempus continuum, in quo infinita momenta ſunt. Porro in primo ex tribus propoſitis caſibus eſſet eodem momento temporis, tam in B, quam in C: adeoque replicaretur, in ſecundo per tempus continuum eſſet in binis lineis, & proinde replicaretur e infinitis momentis, in tertio per tempus continuum nuſquam eſſet. Tota vis ar-

gumenti ſita eſt ſemper in excluſione momenti momento proximi, puncti proximi puncto, lineæ aliam habeatis lineam proximam, adeoque, & termini cujuſcumque feriei tempore durantis continuo, vel per lineam continuam traductæ, proximi termino.

134. Sed jam hoc ipſo argumento viam nobis ſtravimus ad inductionem, ad quam, & Leibnitius ipſe, & Leibnitiani provocarunt, & quam habere poſſumus ſatis amplam, cum hæc ipſa excluſio ſaltus in motu locali ad inductionem etiam pertineat. Sed pauca quædam de inductione ipſa præmittemus. In primis ubi generales Naturæ leges inveſtigantur, inductio vim habet maximam, & ad earum inventionem vix alia ulla ſupereſt via. Ejus ope extenſionem, figurabilitatem, mobilitatem, impenetrabilitatem corporibus omnibus tribuerunt ſemper Philoſophi etiam Veteres, quibus eodem argumento inertiam, & Generalem gravitatem plerique e Recentioribus addunt. Inductio, ut demonſtrationis vim habeat, debet omnes ſingulares caſus, quicumque haberi poſſunt percurrere. Ea in Naturæ legibus ſtabiliendis locum habere non poteſt. Habet locum laxior quædam inductio, quæ, ut adhiberi poſſit, debet eſſe ejuſmodi, ut in primis in omnibus iis caſibus, qui ad trutinam ita revocari poſſunt, ut deprehendi debeat, an ea lex obſervetur, eadem in iis omnibus inveniatur, & ii non exiguo numero ſint; in reliquis vero ſi quid prima fronte contrarium videatur, re accuratius perſpecta, cum illa lege poſſint omnia conciliari, licet, an eo potiſſimum pacto concilientur, immediate innoteſcere nequaquam poſſit. Si eæ conditiones habeantur, inductio ad legem ſtabiliendam cenſeri debet idonea. Sic quia videmus corpora tam multa, quæ habemus præ manibus, aliis corporibus reſiſtere, ne in eorum locum adveniant, & loco cedere ſi reſiſtendo ſint imparia, potius, quam eodem perſtare ſimul, impenetrabilitatem corporum admittimus, nec obeſt, quod quædam corpora videamus intra alia licet duriſſima inſinuari, ut oleum in marmora, lumen in chryſtalla, & gemmas. Videmus enim hoc phœnomenum facile conciliari cum ipſa impenetrabilitate, dicendo per vacuos corporum poros ea corpora permeare.

135. Præterea, quæcumque proprietates abſolutæ, nimirum, quæ relationem non habeant ad noſtros ſenſus, deteguntur generaliter in maſſis ſenſibilibus corporum, eaſdem ad quaſcumque utcumque exiguas particulas debemus transferre niſi poſitiva aliqua ratio obſtet, & niſi ſint ejuſmodi, quæ pendeant a ratione totius, ſeu multitudinis, contradiſtincta a ratione partis. Primum evincitur ex eo, quod magna, & parva ſunt reſpectiva, & a nobis parva, ac inſenſibilia dicuntur ea, quæ reſpectu noſtræ molis, & noſtrorum ſenſuum ſunt exigua. Quare ubi agitur de proprietatibus abſolutis non reſpectivis, quæ-

quæcumque communia videmus in iis, quæ intra limites continentur nobis ſenſibiles, ea debemus cenſere communia etiam infra eos limites: nam ii limites reſpectu rerum, ut ſunt in ſe, ſunt accidentales, adeoque ſiqua fuiſſet analogiæ læſio, poterat illa multo facilius cadere intra limites nobis ſenſibiles, qui tanto laxiores ſunt, quam infra eos, adeo nimirum propinquos nihilo. Quod nulla ceciderit, indicio eſt, nullam eſſe. Id indicium non eſt evidens, ſed ad inveſtigationis principia pertinet, quæ ſi juxta quaſdam prudentes regulas fiat, ſucceſſum habere ſolet. Cum id indicium fallere poſſit, fieri poteſt, ut committatur error, ſed contra ipſum errorem habebitur præſumptio, ut etiam in jure appellant, donec poſitiva ratione evincatur oppoſitum. Hinc addendum fuit, *niſi ratio poſitiva obſtet*. Sic contra haſce regulas peccaret, qui diceret, corpora quidem magna compenetrari, ac replicari, & inertia carere non poſſe, compenetrari tamen poſſe, vel replicari, vel ſine inertia eſſe exiguas eorum partes. At ſi proprietas ſit reſpectiva reſpectu noſtrorum ſenſuum, ex eo, quod habeatur in majoribus maſſis, non debemus inferre, eam haberi in particulis minoribus, ut eſt hoc ipſum, eſſe ſenſibile, ut eſt, eſſe coloratas, quod ipſis majoribus maſsis competit, minoribus non competit, cum ejuſmodi magnitudinis diſcrimen accidentale reſpectu materiæ, non ſit accidentale reſpectu ejus denominationis *ſenſibile*, *coloratum*. Sic etiam ſiqua proprietas ita pendet a ratione aggregati, vel totius, ut ab ea ſeparari non poſsit, nec ea, ob rationem nimirum eandem, a toto, vel aggregato debet transferri ad partes. Eſt de ratione totius, ut partes habeat, nec totum ſine partibus haberi poteſt. Eſt de ratione figurabilis, & extenſi, ut habeat aliquid, quod ab alio diſtet, adeoque, ut habeat partes; hinc eæ proprietates licet in quovis aggregato particularum materiæ, ſive in quavis ſenſibili maſſa inveniantur, non debent inductionis vi transferri ad particulas quaſcumque.

136. Expoſita hoc pacto vi principii inductionis, quo in naturam fere uno poſſumus cum ſpe ſucceſſus inquirere, & ex quo uno pendent, quæcumque facultates obſervationibus innituntur, Medicina, Anatomia, Optica, Aſtronomia, ac aliæ plurimæ, ad ipſam inductionem pro lege continuitatis demonſtrandam faciemus gradum. Plurima ſane afferri poſſent exempla manifeſtiſsima; ſed quædam pauca tantummodo attingemus, illud addendo, quod multo magis vim ipſam inductionis oſtendet, nihil uſpiam in quantitatum variabilium mutationibus reperiri, licet tam multa quantitatum variabilium genera quotidie obverſentur oculis, quod vel continuitatis legem non per ſeſe, ſponte, ac evidenter exhibeat, vel cum ipſa continuitatis lege diligentius conſiderata optimè componi non poſsit.

137. In

137. In primis amplifsima eft, inductio fpatii, ac temporis, in quibus, motu continuo, & fine ullo faltu, perpetuo pergitur, tum eorum, quæ in fpatio funt, ut linearum omnium, ac fuperficierum in Geometria, quæ fi eandem naturam fervent, omnes affectiones fuas ita continuo mutant, ut Geometris eft notifsimum, ut ab una magnitudine ad aliam per omnes intermedias omnino tranfeant. Ab una ordinata ad aliam, ab una areæ, vel arcus magnitudine ad aliam, ab una directione ad aliam, tranfitur femper per intermedias omnes, etiam a curvatura, quæ habetur in quovis puncto, ad curvaturam, quæ habetur in alio, quæ quidem curvaturæ pendent a radiis circulorum ofculatorum, quibus cenfentur reciproce proportionales, & a quavis affectione ad aliam ita femper tranfitur, ut mutationes continuæ fiant per intermedias magnitudines quafcumque; ac fi a pofitivis ad negativas fiat tranfitus, femper vel per nihilum tranfitur, vel per infinitum. Idem in Locorum Geometricorum transformationibus, ortis ex mutatione conditionis cujufpiam ita ubique obfervatur fanctifsime, ut ad infiniti myfteria, ubi opus, eft Geometria recurrat potius, quam certum faltum admittat, qnemadmodum in hac ipfa differtatione vidimus in tam multis exemplis, ac multo plura habentur in differtatione illa tomi tertii, & multo adhuc plura quarto noftrorum Elementorum tomo refervamus. Illud fane in univerfa Geometria, quin immo illud & in indefinitis Algebræ formulis fimplices Geometricos exprimentibus locos ubique fanctifsime obfervatur, in quibus nufquam, ubi de finitis quantitatibus agitur, faltus habetur ullus, nufquam ne infinitis quidem, qui per quædam Infiniti myfteria utcumque non evitetur. Nec in folis imaginariis lineis, quæ in fpatio funt habetur ejufmodi continuitas, verum etiam in realibus corporum motibus, qui a fpatio pendent, & tempore. In iis omnibus videre eft in primis illud, nunquam, ut diximus num. 133, ab uno puncto fpatii ad aliud deveniri, nifi tranfeundo per lineam continuam, licet ejufmodi continuæ lineæ tam multæ effe pofsint, & tam variæ inter fe. Inde autem contequitur in diftantiis itidem mutandis continuitatem fervari, nullo tranfitu unquam facto ab una ad aliam diftantiam fine tranfitu per intermedias, & hinc nullam denfitatem, quæ a diftantia punctorum pendet, mutari unquam per faltum; hinc vero pariter nullam arborem, aut aliam ejufmodi rem quamcumque, quæ crefcit per receffum verticis a fundo, unquam ab una altitudine ad aliam devenire fine tranfitu per intermedias.

138. Quin immo in motibus ipfis continuitas fervatur etiam in eo, quod motus omnes in lineis continuis fiunt nufquam abruptis. Plurimos ejufmodi motus videmus. Planetæ omnes, & Cometæ in lineis con-

continuis curſum peragunt ſuum, & omnes retrogradationes fiunt paullatim, ac in ſtationibus ſemper exiguus quidem motus, ſed tamen habetur ſemper, atque hinc etiam dies paullatim per Auroram venit, per veſpertinum crepuſculum abit, Solis diameter non per ſaltum ſed continuo motu ſupra horizontem aſcendit, vel deſcendit. Gravia itidem oblique projecta in lineis itidem pariter continuis motus exercent ſuos, nimirum in Parabolis ſecluſa aeris reſiſtentia, vel ea conſiderata in orbibus ad Hyperbolas potius accedentibus, & quidem ſemper cum aliqua exigua obliquitate projiciuntur, cum infinities infinitam improbabilitatem habeat motus accuratè verticalis inter infinities infinitas inclinationes licet exiguas, & ſub ſenſum non cadentes, fortuito obveniens, qui quidem motus in Hypotheſi Telluris motæ a Parabolicis plurimum diſtant, & curvam continuam exhibent etiam pro caſu projectionis accuratè verticalis, quo quieſcente penitus Tellure, & nulla ventorum vi deflectente motum, haberetur aſcenſus rectilineus, vel deſcenſus. Immo omnes alii motus a gravitate pendentes, omnes ab elaſticitate, a vi magnetica, continuitatem itidem ſervant, cum eam ſervent vires illæ ipſæ, quibus gignuntur. Nam gravitas cum decreſcat in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, & diſtantiæ per ſaltum mutari non poſſint, mutatur per omnes intermedias magnitudines. Videmus pariter vim magneticam a diſtantiis pendere lege continua, vim elaſticam ab inflexione, ut in laminis, vel a diſtantia, ut in particulis aeris compreſſi. In iis, & omnibus ejuſmodi viribus & in motibus, quos gignunt, continuitas habetur ſemper tam in lineis, quæ deſcribuntur, quam in velocitatibus, quæ pariter per omnes intermedias magnitudines mutantur, ut videre eſt in pendulis, in aſcenſu corporum gravium, & in aliis mille ejuſmodi, in quibus mutationes velocitatis fiunt gradatim, nec retro curſus reflectitur, niſi imminuta velocitate per omnes gradus. Ea diligentiſſimè continuitatem ſervant omnia. Hinc nec ulli in naturalibus motibus habentur anguli, ſed ſemper mutatio directionis fit paullatim, nec vero anguli exacti habentur in corporibus ipſis, in quibus utcumque videatur tenuis acies, vel cuſpis, microſcopii ſaltem ope videri ſolet curvatura, quam etiam habent alvei fluviorum ſemper, habent arborum folia, & frondes, ac rami, habent lapides quicumque, niſi forte alicubi cuſpides continuæ occurrant vel primi generis, quas natura videtur affectare in ſpinis, vel ſecundi generis, quas videtur affectare in avium unguibus, & roſtro, in quibus tamen manente in ipſa cuſpide unica tangente continuitatem ſervari videbimus infra. Infinitum eſſet ſingula perſequi, in quibus continuitas in Natura obſervatur. Satius eſt generaliter provocare ad

exhi-

exhibendum casum in Natura, in quo continuitas non servetur, qui omnino exhiberi non poterit.

139. In iis quæ ad Geometriam pertinent, objicere solent has ipsas, quas postremo loco nominavimus, cuspides, seu puncta regressuum tanquam si continuitas in iis læderetur, cum curva posteaquam ad certum punctum devenerit, retro cursum reflectat. Leibnitiani respondere solent, ibi nullum commiti saltum, quia cuspis oritur e nodo servante continuitatem, ac ipsius cuspidis verticem considerandum esse affirmant, non ut punctum quoddam indivisibile, sed ut nodum quemdam infinite parvum, qui curvaturam infinitam habeat, & cum omnibus directionibus in se ipsum redeat. In fig. 17 nodus excurrit directione semper in eamdem plagam continuata per MOVCFIVPN. In omnibus iis intermediis punctis excurrit & tangens excursu continuo per QOR, AVB, DCE, GFH, LIK, B'VA', SPT. Evanescente nodo, abit fig. 17 in 18, & habetur cuspis MVN, in qua dicunt, punctum V non esse punctum mathematicum, sed nodum quendam infinitè parvum, habentem adhuc easdem illas tangentes.

140. At nobis id nullo pacto probari potest. Nam punctum illud cuspidis est unicum indivisibile punctum, & arcus MOF in unico puncto cum arcu FPN conjungitur; quod per finitam geometriam facile demonstratur. Et quidem licet cuspis oriatur ex nodo, mutata conditione loci Geometrici, ut in Concoide, ubi, si distantia poli ab axe citra & ultra quem recta assumi debet æqualis datæ ad partes poli ipsius, vel ad oppositas, ut ejus vertex motu continuo eam curvam describat (quæ ipsius natura ipsa est), fuerit minor, quam ipsa recta data, habetur citra axem nodus, si æqualis, habetur cuspis, si major, habentur bini flexus contrarii; adhuc tamen illa curva, quæ nodum habet, suam habet naturam peculiarem diversam a reliquarum natura, & suas proprietates per finitam Geometriam accurate determinatas, ut Parabola inter Ellipses, & Hyperbolas media, suam speciem constituit, & suas proprietates habet, amissis eorum plurimis, quæ ad Ellipsim, & Hyperbolam pertinent, eo quod abierint in infinitum, vel evanuerint. Inter has proprietates est illa, quod nodus penitus evanescit, & ipsi non nodus quipiam infinitesimus succedit, sed indivisibile punctum. Adhuc tamen continuitatem omnino non lædi arbitramur. Nam si cuspis consideretur seorsum independenter a nodo, a quo est genita, in fig. 18; tangens in vertice V erit unica AB, & puncto per ipsam curvam excurrente motu continuo per OVP, tangens QOR mutatione directionis continua abibit in AVB, tum si cuspis sit primi generis, ut exhibet figura, mutatione itidem continua directionis ipsa tangens perget a positione AVB ad positionem TPS; nam si cuspis esset secundi generis, directio illa a tangente per cuspidem

ducta

ducta retro regrederetur. Semper tamen ab una directione tangentis ad aliam per omnes intermedias directiones transibitur.

141. Nec obest, quod directio motus puncti, quæ prius in OV spectabat plagam B, deinde in VP incipiat spectare oppositam. Iccirco enim nulla omnino est vera cuspis, in qua tangens non sit communis tam arcui advenienti ad cuspidem, quam inde redeunti, ut nimirum plaga B, quæ prius spectabatur, mutetur in plagam A oppositam in eadem recta, quas plagas vidimus num. 60. connecti quodammodo inter sese in ipso Infinito tanquam termino quodam communi. Hinc nimirum, & in Mechanica nihil turbat continuitatem descensus gravium per eandem rectam, per quam ascenderant, qui eum omnino læderet, si per aliam rectam descenderent, quod pariter accidit in oscillationibus per curvas quascumque. Directio immutari potest immediate in oppositam e diametro, cum ∞ ex una plaga positum, quod respiciebatur, cum ∞ posito ex plaga opposita, quod deinde respicitur, sit unicum punctum quodammodo, in quo crus rectæ infinitum cum alio crure opposito infinito conjungitur. Si directio mutari debeat utcunque, id in Mechanica, id hic in Geometria semper fiet per curvam continuam quandam, non per regressum saltu facto ab una directione ad alias sine intermediis.

142. Idem accidit etiam in fig.6 curvaturæ arcus MHN, quæ mutatur motu continuo, dum punctum P excurrit per rectam continuam in se quodammodo redeuntem per H R ∞ Q H, quod exemplum rem, quam diximus, etiam evidentius declarat. Respicit ea curvatura semper centrum suum P, quod continua rectæ FG conversione excurrit motu itidem continuo per eam rectam, & ubi ipsum P superato Infinito ex parte HR redit per QH, convertitur ad partes oppositas; in ipso autem casu rectæ AC utrumque ∞, tam versus R, quam versus Q æque respicit. Sic etiam ubi P per H transit, & circulus posteaquam evanuit, abit ad partes oppositas, directio plagæ ab hiatu spectatæ transit per eandem semper rectam ad partes oppositas. Et idcirco etiam, ubi curvæ flexum contrarium habent, mutatio non fit nisi radius circuli osculatoris vel evanuerit, vel in infinitum excreverit, nec centrum ipsius ullo uspiam saltu mutabit locum, nec plagam mutabit, nisi vel per punctum ipsum curvæ, ver per Infinitum traducatur, quod mille exemplis in Geometria illustrari potest. Hinc in puncto cuspidis V in fig.28 habetur tangens cum utraque directione AVB, B'VA'. Quin immo etiam ubique utraque directio indifferenter considerari potest tum plagis oppositis congruentibus, tum fluxu lineæ in ipso puncto O indifferentis per sese tam ad directionem OQ, quam ad directionem OR. Nullus in iis omnibus saltus deprehenditur, nullus nimirum transitus a magnitudine ad magnitudinem sine intermediis.

 143. Sed

143. Sed nec habetur ullus saltus, ubi concipitur mutatio nodi figuræ 17 in cuspidem fiuguræ 18. In illa dum nodus minuitur ultra quoscumque limites, binæ tangentes AVB, A'VB' ad se invicem accedunt pariter ultra quoscumque limites, & illo evanescente penitus congruunt, ac arcus MV, qui cum arcu VN conectebatur per nodum, jam connectitur immmediate per sese in unico puncto, & continuatur. Rectæ illæ, KL, HG, ED eas habebant tendentias, ut nulla per V transiret in angulo MVN, sed quævis ex iis relinqueret ad eandem plagam aliquem arcum VM, VN. Idem præstant in fig. 18 eadem directione manente. At ibi tangebant aliquem arcum, hic nullum tangunt, destructo nimirum arcu, quem deberent contingere. Idem accidit, ubi circulus in punctum desinit, evanescente radio. Rectæ quæ fuerant tangentes, remanent, & jam per illud punctum transeunt; sed nullius arcus tangentes sunt, cum is arcus esse desierit.

144. Ubi consideretur curva genita evolutione nodi abeuntis in cuspidem, videtur lædi continuitas, quæ tamen tum etiam servatur omnino. Si nodus figuræ 17 evolvatur incipiendo a P, ad determinanda puncta genitæ assumi debent in tangentibus VA', IK, FH, CE, VB, OR segmenta æqualia arcubus VP, IVP, FIVP, CFIVP, VCFIVP, OVCFIVP. Nodo evanescente, & abeunte in cuspidem figuræ 18, segmenta tangentium VA, IK, FH, CE, VB, quæ differebant a se invicem per arcus nodi, jam evadunt æqualia, & succedit illi curvæ continuæ curva genita evolutione arcus VP cœpta in P figuræ 18, semicirculus, & curva genita evolutione arcus FV, adjecta ipsi recta æquali arcui VP, quæ quidem curvæ diversæ a circulo naturæ sunt, & continuitatem non servant. At si assumpto arcu VO æquali VP concipiatur curva genita evolutione incipiente in O per OVCFIVP, & in singulis genitis concipiantur terni arcus, in illa, intercepti puncto P, & tangente VA', tangente VA', & tangente VB, tangente VB, & tangente OR, in hac puncto O, & tangente VA, tangente VA, & tangente VB', tangente VB' & tangente VS, momento, quo cuspis efformatur, & coeunt tangentes VA, VA', ac tangentes VB, VB'; continuantur inter se priores bini, bini medii inter se, postremi bini inter se, & primi illi duo efformant curvam continuam genitam filo evoluto in fig. 18 ex VP, & advoluto VP, ut in cycloide fieri solet, quæ ita generat se ipsam, secundi integrum circulum, tertii curvam continuam genitam opposita evolutione, & advolutione arcuum VP, VO, facta cum additione in V rectæ ipsis æquali. Ante eam transformationem arcus illi binarum curvarum continuarum accedunt ad arcus continuos trium, in quas illæ desinunt, & ad se ultra quoscumque limites, ac ne curvatura mutetur per saltum, circulus ille remanet utriusque novæ curvæ osculator, quæ omnia admodum facile demonstrantur. In omnibus hujus generis casibus transformatione continuata, dum permutantur arcus locorum

Geo-

Geometricorum, & alii cum aliis, a quibus distabant, conjunguntur, vel alium unicum locum geometricum efformant, continuitate ab aliis translata ad alia, quæ prius cum aliis continuabantur, vel etiam desinunt in bina loca Geometrica a se invicem prorsus distincta, & nulla jam communicatione continuitatis conjuncta, quædam etiam abrumpuntur, sed ita, ut eo momento, quo abruptio fit, uniantur, & continuentur lineæ continuæ cum aliis, ac puncta, in quibus connexiones novæ fiunt, tangentes per ea ductæ, radii osculatorum circulorum, & alia omnia ejusmodi ad se invicem prius accedant ultra quoscunque limites, donec penitus coeant.

145. Ubique in ejusmodi casibus, incredibilis quædam elucet Geometriæ industria in continuitate servanda, mysteriis etiam quibusdam, ubi opus est, in subsidium vocatis, quibus evolvendis in quarto elementorum tomo operam iterum dabimus; sed ad rem pro dignitate tractandam integra volumina nequaquam sufficerent. Diximus autem Geometriæ industriam elucere. Nam figuræ, quas e frustis locorum simplicium, nobis nos efformamus, continuitatem non servant. Sed ea frusta ita terminata Geometria, non agnoscit; unde fit, ut proprietates generales, quæ ejusmodi multilateris figuris conveniunt, semper traduci possint ad multilateras alias, in quibus uni intersectioni, inter bina loca Geometrica alia quævis substituitur, & ubi latus ab una ad aliam tendit, vel una directione ex parte finita, vel opposita etiam transgresso Infinito, si crura infinita occurant. Sed hic iterum immensa se offerret seges nunquam satis resecanda, & demetenda.

146. Simile quid accidit, ubi nos ipsi Geometriæ vim inferimus, & contra ejus naturam imus, continuatione, quam ipsa requirit, turbata, & interrupta, quo casu pereunt interemptæ Geometricæ quantitates, violata illarum natura. Sic in fig. 22, ubi recta perpendicularis ad AB motu continuo excurrit per R2, R3, R4, ordinatæ R2 P2, R3 P3 delatæ ad finitam magnitudinem R3E intereunt, & abeunt in imaginarias, reclamante Geometria, quæ requirit progressum puncti P2 ab arcu IE, ad EH, & P3 ab HE ad EI, & rectam perpendicularem frustra revocat, ut oscillet ab una tangente ad aliam, cujus progressu in desperationem acta quantitatem abruptam quodammodo velut interimit. Idcirco transitus a statu reali ad imaginarium fit semper binarum quantitatum simul, (binæ enim sunt revera etiam P2 P2', & P2'' P2, quarum altera succederet alteri in punctorum PP' progressu), ut sint quæ sibi mutuo servata Continuitate possint succedere. Et quidem is velut interitus, quod etiam in illa dissertatione tertii tomi nostri notavimus, semper fit ita, ut accessus illarum binarum quantitatum ad se invicem ante coitum fiat, vel aucta velocitate respectiva in infinitum, vel imminuta, ut animantium etiam mors jam fervore nimio in febribus, accidit, jam languore quodam in senili resolutione.

 147. Sal-

147. Saltum etiam in angulo diametri cum peripheria inevniunt aliqui, cum angulus acutus eo minor ad rectum majorem transeat, nec tamen unquam æqualis fiat. Sed hæc difficultas evanescit, ex iis, quæ diximus num.83, cum anguli mixtilinei specie differant a rectilineis, & continuitas haberi debeat inter ea, quæ specie non differunt. Sunt & in Mechanica saltus quidam, qui oriuntur e suppositionibus saltum involventibus, quas nos quidem idcirco impossibiles arbitramur. Ejusmodi saltum quemdam in puncto extra sphæricam superficiem sito, & attracto in omnia ejus puncta in ratione reciproca duplicata distantiarum, vel ita attracto in centrum quoddam, & primo quidem transversim projecto, tum libere demisso projectione evanescente, notavimus contra Eulerum in Dissertatione de motu corporis attracti in centrum virium ea lege, & alius similis saltus obvenit Eulero notante in Mechanica, ubi vi decrescente in ratione reciproca triplicata distantiarum punctum describit spiralem logaritmicam, in quo casu post finitum tempus deberet illud punctum advenire ad centrum, & deinde aut nullibi esse, ut ipse censet, aut in infinitis punctis simul, ut nos ex natura ejus spiralis videmur nobis probare posse, atque alia pariter, & saltuum genera, & absurda habentur plurima, ubi vires imminutis distantiis excrescant in infinitum, & attractivæ sint; quas nos, ut jam innuemus, in Natura nequaquam admittimus, qui vires in minimis distantiis volumus repulsivas, ut nihil usquam in Natura infinitum evadat. Iis omnibus illustrandis vix integra volumina satis essent. Verum in iis ipsis casibus, ubicumque de finitis quantitatibus agitur, Geometria, Mechanica, Facultates omnes legem Continuitatis ubique nobis objiciunt.

148 Sunt quidem nonnulla, quæ in finitis etiam magnitudinibus videntur saltum requirere, & inductionem turbare, quæ ad binas classes generaliter reducuntur. Primi generis sunt ea, in quibus nos per saltum assumimus magnitudines quasdam, intermediis omissis, non, quod non adsint; sed quod in usu vulgari non eodem nomine appellari soleant, vel quod ad nomina pertineant. Secundi generis sunt ea, in quibus mutatio fit tempusculo perquam exiguo, quod sub sensum vix, aut ne vix quidem cadat.

149. Ad primum genus reducuntur ipsæ etiam discretæ quantitates, nimirum numeri. Numeros dicimus unitatum aggregata, & fere alios numeros vulgus nequaquam considerat, nec aliis numeris dedimus nomen, nisi iis, qui ex continua unitatis additione fiunt. Ii saltu quodam procedunt, quia nos intermedias quantitates omittimus, nimirum omnes numeros surdos, & fractos, qui hiatum inter binos numeros quoscumque proximos supplent omnem, neque enim ulla est distantia utcumque parva in se determinata ejusdem numeri fracti, vel surdi a quovis numero integro, qua minor in aliquo alio fracto, vel

vel ſurdo non habeatur. Si concipiantur omnia, quæ haberi poſſunt numerorum nomina, ſive per fractiones ſpurias fiant, ſive per radicalium expreſsiones, ſive per alia ſigna in traſcendentaliter irrationalibus, ſeries in iis etiam continua habebitur; & quidem quidquid in Geometria fit per lineas nobis cognitas idem in Algebra finita, vel infiniteſimali præſtatur per ſymbola, & ſigna.

150. Eodem pertinent quædam, in quibus quantitas conſiderationi ſuppoſita habet principium, & finem, ac aſſumimus binas magnitudines, quarum initia a ſe invicem, & fines a ſe invicem certo intervallo diſtant intermediis omiſsis, quo in genere facilius erramus, ſi finis primæ cum poſterioris initio communis ſit. Sit in fig.25 curva quævis MN axe AB. Aſſumptis binis axis partibus CQ, QE, & erectis ordinatis CD, QP, EF, area PQEF videtur immediate ſuccedere areæ DCQP, a qua tamen differt per differentiam aliquam finitam, quæ inveniretur abſciſsis ex QP, EF rectis æqualibus CD, QP, & applicato ad earum vertices arcu DP. Mutatur igitur illa magnitudo per ſaltum. Ea difficultas facile ſolvitur notando, continuam ſeriem haberi debere inter ea, quorum initia, & fines motu continuo excurrunt, non inter ea quorum initia inter ſe, & fines inter ſe aliqua determinata diſtantia diſtant. Si hæc accipimus, nos accipimus binos ſeriei continuæ terminos omiſſis intermediis: intermedii autem ipſi facile habentur, dividendo certa quadam lege diſtantiam inter bina initia, & binos fines. In caſu expoſito ſi concipiatur, rectam *cq* motu continuo cum ſuis ordinatis *cd*, *qp* progredi a poſitione CQ ad poſitionem QE, area *dcqp* a magnitudine DCQP ad magnitudinem PQEF tranſibit per omnes intermedias ſine ullo ſaltu, quod idem contingeret, ſi deberet devenire ad aliquam, cujus principium diſtaret etiam utcumque a fine prioris QP, & interea ipſa *cq* continua quavis mutatione mutaretur, dummodo abeunte *cd* in illius poſterioris initium, abiret *qp* in ejus finem. Data curva MN, datis extremis binis areis, quæ ſemper per determinatam aliquam differentiam a ſe invicem different, data magnitudine cujuſvis intermediæ, ſemper Geometræ invenire poterunt locum illius *cq*, qui ejus magnitudinis aream exhibeat.

151. Bina ejuſmodi exempla proferemus ex Phyſica. Dies tam a Solis occaſu ad Solis occaſum, quam a Meridie ad Meridiem computata non eſt ſemper ejuſdem magnitudinis, ſed aliis anni temporibus, alia, licet inæqualitas prior poſteriore ſit minor, atque inde fit, ut horologia, quæ Aſtronomis, & univerſæ fere Europæ communia ſunt, cum Italicis Horologiis, & quævis horologia cum Sole accurate cohærere non poſsint, ſi motum æquabilem habeant. Concipiantur bini dies contigui, qui differant a ſe invicem per 10 minuta ſecunda. Videtur fieri ſaltus; tranſitur enim a primo ad ſecundum, ſine tranſi-

tu

tu per intermedios. Reſponſio ad difficultatem patet, ex iis, quæ dicta ſunt. Initium ſecundæ diei diſtat ab initio diei primæ, & finis a fine per determinatam diſtantiam. Invenientur intermedia, ſi illa intervalla dividantur in aliqua ratione, ut initia continuo excurrant, & fines itidem continuo. Id fiet ſi conſiderentur dies omnes, qui pertinent ad loca poſita ſub eodem parallelo verſus Occidentem, donec ad noſtrum locum, Orbe terrarum perluſtrato, redeatur. Singula illa loca ſuos dies habent, qui ſeriem continuam conſtituunt incipientem in primo noſtro die, deſinentem in ſecundo. In his intermediis diebus omnes magnitudines intermedias inveniemus, ſine ullo ſaltu, qui quidem itidem appellantur dies. Nos tamen eos, qui ad nos non pertinent, conſiderare non ſolemus. Sunt & alii intermedii termini, qui ad nos pertinent, ſed qui aduuc conſiderari non ſolent. Diviſo utroque die in horas, & minuta, intervalla temporum a quavis hora primæ diei ad quamvis ſecundæ conſtituunt itidem ſeriem intervallorum continuam, ut ab hora prima primæ diei, ad horam primam ſecundæ, a primo quadrante primæ horæ illius ad primum primæ hujus, & ita porro. Hæc intervalla mutatione continua tendunt a primo die ad ſecundum. In uſu communi non ſolent appellari dies, appellantur tamen aliquando; nam diceretur, integros decem dies inſumpſiſſe, qui inſumeret tempus a ſexta hora primæ ad ſextam diei undecimæ.

152. Alterum exemplum huic admodum ſimile in oſcillationibus pendulorum haberi poteſt. Secunda oſcillatio a prima differt aliquando per plures digitos. At ſi prima, & ſecunda in eumdem quemvis partium numerum ſecetur, & aſſumantur arcus intercepti inter ſimiles ſectiones, conſtituent ſeriem continuam magnitudinum, quarum initia, & fines motu continuo excurrent ab initio, & fine prioris oſcillationis ad initium, & finem ſecundæ. In utroque caſu, & in aliis ejuſmodi eodem pacto ſe res habet, ac in illa area *dcqp* figuræ 25.

153. Secunda claſſis eſt quantitatum, in quibus tempore perquam exiguo, & inſenſibili fiunt mutationes ingentes. Hujuſmodi eſt exploſio tormenti bellici, quæ videtur fieri momento temporis vix admoto igne. Et tamen certum eſt, debere accendi particulas alias poſt alias, dilatari aerem, quod motum localem, adeoque tempus continuum poſtulat, ac globum per omnes velocitatum gradus a quiete accelerari. Pariter emiſſio luminis delati ad noſtros oculos a corpore lucido, videtur fieri momento temporis, at phœnomena Satellitum Jovis, & annuæ Fixarum aberrationes oſtendunt fieri propagationem tempore ſucceſſivo, quo nimirum lux a Sole ad nos fere centum milliariorum millia ſemiquadrante horæ percurrat. Pariter ſi lamina elaſtica vi ingenti prædita, & nonnihil compreſſa globum

ha-

habeat contiguum ; ubi ea libera ſibi relinquitur , momento temporis videtur globo celeritatem determinatam quandam , & ingentem tri- buere , & tamen in eo etiam caſu , certiſſimum eſt apud omnes Me- chanicos globum breviſſimo quidem tempore , ſed tamen aliquo , per omnes gradus accelerari . Ejuſmodi pariter ſunt ſexcenta alia , inter quæ bina , quæ in contrarium adduci ſolent , & tamen optimè cum continuitatis lege componuntur , vel eam etiam confirmant ſe- ligemus .

154. Eorum primum ſit reflexio , & refractio luminis , quam di- cunt fieri in unico puncto , in appulſu radii ad novam ſuperficiem , ubi in reflexione tota celeritas perpendicularis ſuperficiei momento temporis extinguatur in primo caſu , producta æquali oppoſita , in ſecundo mutetur per ſaltum . Verum inflexionem illam non fieri per ſaltum in puncto , ſed per curvaturam quandam continuam , patet ex actione mutua inter lumen , & corpora , quæ conſtat ex diffra- ctione a noſtro P. Grimaldo detecta , qua fit , ut radius in quadam diſtantia ab ea ſuperficie intorqueri incipiat , mutata ab ea actione velocitate perpendiculari per omnes intermedios gradus . Et quidem lumen non reflecti ob impactum in ſuperficiem conſtat , tum ex aliis multis , quæ Newtonus in Optica congeſſit , tum ex eo , quod quæ- vis ſuperficies , ut vitri , quæ nobis quidem videtur leviſſima , aſpe- ritates habet , & ſulcos inductos ab illo ipſo pulviſculo , quo poliun- tur vitra , quæ aſperitates reſpectu particalarum luminis ingentes turbarent reflexionem ortam ab impactu , & lucem quaquaverſum diffunderent . Eæ autem aſperitates nihil prorſus obſunt reflexioni ortæ a vi repulſiva agente in aliqua diſtantia .

155. Si enim P ſit particula luminis in fig. 26, IEKF ſphæra, ad quam ſenſibilis actio corporum in lumen extenditur, AB ſuperficies bina me- dia dirimens ; donec illa ſphæra eſt tota in priore medio , radius ex omnibus partibus æqualiter attractus , vel repulſus , recta pergit . Ubi ea ſphæra jam novum medium ſubire cepit , intra quod ſit ejus ſegmentum CKD , actionum inæqualitas incipit . Si enim GH diſtet a centro æque , ac CD , ſegmenta GEPFH , CEPFD , æqualia , & ejuſdem medii æqualiter agent in particulam P , ſegmenta GIH , CKD diverſorum mediorum inæqualiter . Hinc habebitur vis quædam ac- cedendi ad planum AB , vel recedendi , & ea vi incurvabitur ſemita, quæ ubi ob vim repulſivam obvenerit parallela ſuperficiei AB , curſum reflectet, & deſcribet arcum prorſus ſimilem præcedenti , & deſinentem ad ſenſum in rectam ad partes N ſimilem illi , per quam advenerat ex parte M . Si ſuperficies CD , fuerit inæqualis , & aſpera , ſed inæ- qualitates fuerint perquam exiguæ reſpectu totius illius ſphæræ , & ejus ſegmenti CKD , nulla ſenſibilis turbatio fiet orbitæ MPN , cum vis pendeat ab omnibus particulis ſitis intra ſegmentum CKD , non

a ſola

a ſola prima ſuperficie. Turbatio autem maxima, & luminis diſperſio habetur, ubi aſperitates majores ſint. Idem ibi accidit, quod in Tellure montibus, & vallibus aſpera. Gravia libere projecta Parabolas deſcribunt, ſecluſa aeris reſiſtentia, quæ nullam ſenſibilem turbationem patiuntur ab aſperitate idcirco, quod gravitas pendet a tota Telluris maſſa, reſpectu cujus montes ſunt inſenſibiles, non a ſola ſuperficie. At ſi globorum copia in Terram ſimul incurreret, & omnis abeſſet gravitas, ac Terræ ipſius ſuperficies eſſet elaſtica, reflecterentur omnes ii globi diverſiſſimis directionibus determinatis a planis, in quæ ſinguli incurrerent, ac diſpergerentur.

156. Secundum exemplum ſumatur ab aqua, quæ effluit ex aliquo vaſe, quam dicunt, ſi foramen fiat ſub altitudine aliqua, ſtatim egredi cum velocitate illa, quam acquireret in deſcenſu per altitudinem ipſam; ac proinde contendunt evincere illud, totam illam velocitatem momento temporis generari. At in eo caſu quamplurimi melioris notæ Mechanici diſerte affirmant ſe putare, illam ipſam velocitatem acquiri paullatim non totam momento temporis, quo poſito, omnis difficultas evaneſcit. Verum eam difficultatem nulla eſſe vi præditam pro demonſtranda læſione continuitatis, & ſaltu, nobis quidem evidentiſſimum eſt, atque id ipſum duplici via evincimus. Primo quidem evidens eſt, aquam non poſſe egredi cum velocitate majore ea, cum qua aufertur obſtaculum illud, quo foramen obſtruebatur. Hujus remotio pendet a velocitate, quam ipſi manus removens imprimit, quam velocitatem, videbimus paullo infra imprimi per omnes gradus: & qui contendat illam ipſam remotionem fieri, genita in illo obſtaculo velocitate finita momento temporis, omnino principium petit, nec ullam peculiarem difficultatem affert ex aquæ velocitate, quæ velocitatem recedentis obſtaculi ſuperare non poteſt.

157. At dices, quid ſi Deus momento temporis obſtaculum ipſum deſtruat, & foramen aperiat? In primis reſpondebimus, nos hic inductionem efformare ex iis, quæ in Natura contingunt, non ex iis, quæ contingerent, ſi Deus Naturæ leges violaret. Deinde in eo etiam caſu putamus manifeſto conſtare, velocitatem acquiri breviſſimo quidem tempore, ſed tamen aliquo, & per omnes gradus, prorſus ut accideret in globo ingenti vi laminæ elaſticæ excuſſo. Nam vis, qua aqua premitur æquivalet toti ponderi columnæ, quæ eamdem baſim, & altitudinem habeat, cum quo pondere æquilibratur, in vaſe æque lato, & cui æquivalet, ut facile demonſtratur in cæteris vaſorum figuris. Compreſſionem illam cenſemus admovere ad ſe invicem particulas aquæ per ſpatium inſenſibile quidem, ſed tale, ut vis repulſiva æquatur illi ponderi, cui, & omnino proportionalis invenitur, cum inveniatur proportionalis altitudini aquæ ſuperioris. Eam vim ſuſtinet, vis repulſiva lateris vaſis. Latere momento temporis aperto,

vis

vis ea primas particulas accelerat, donec a conſequentibus recedant per omne ſpatium, in quo vis repulſiva agit. Porro idcirco acquiritur velocitas, quæ ſit ut radix quadrata altitudinis, quia ubi vires in aliqua ratione conſtanti inter ſe agunt per ſpatia æqualia, acquiruntur velocitates ſubduplicatæ virium ob id ipſum, quod vires tempuſculis æqualibus acquirunt velocitates proportionales ſibi, & tempori, tempuſcula autem, ubi majore vi jam velocitas major acquiritur, in ſingulis ſpatiolis breviora ſunt, unde fit, ut celeritas minus augeatur, quam vis. Ea œconomia tempus ſupponit, & omnes magnitudinum gradus intermedios. Quare ex ipſo illo effectu habetur maxima præſumptio pro ſucceſsiva ejuſmodi generatione. Saltem illud nobis eſt evidens, nullo pacto demonſtrari poſſe, non hoc potiſſimum pacto rem accidere, & ipſa inductio, ſi nihil aliud haberemus, cogeret hoc pacto conciliare ſecum hoc phænomenum, juxta ea quæ diximus num. 134.

158. Expoſita, & comprobata Lege Continuitatis, ac ſolutis iis, quæ contra ipſam obiici ſolent, aut poſſunt, reliquum eſt, ut occaſione ſolvendi oppoſitionem aliam, quæ fieri ſolet ex colliſione corporum, aperiamus Theoriæ noſtræ ortum, & eam ex ipſa Lege Continuitatis demonſtremus. Conſtitueramus quidem initio hujus diſſertationis, de eadem Theoria pluribus agere, at excreſcente jam nimium diſſertatione ipſa, id argumentum alteri diſſertationi, vel aliis pluribus reſervare cogimur, & quidem multa, quæ ad ipſam pertinent dedimus in diſſertatione de Viribus Vivis, multo plura initio ſecundæ partis diſſertationis de lumine; adhuc autem plura per hoſce ipſos dies a P. Carolo Benvenuto doctiſſimo e Noſtra Societate viro (qui noſtram in hac re mentem optime novit) in diſſertatione publicæ diſputationi proponenda brevi in Seminario Romano, potiſſimum quæ pertinent ad ipſam theoriam virium illuſtrandam, & ejus uſum per univerſam Phyſicam latiſſime patentem ab ipſo multo diligentius exculta, & perpolita publici juris fiunt. Quamobrem ſumma tantummodo capita *theoriæ* ipſius hìc attingemus, & ea ex hac ipſa continuitatis lege demonſtrabimus, qua ſemel admiſſa, videtur nobis tam evidenter deduci theoria omnis, ut nihil præter meras cavillationes, ad infirmandam deductionem produci poſſit.

159. Sunt autem hæc ſumma theoriæ noſtræ capita. Primo quidem corpora ad immediatum contactum nunquam devenire, ſed in minimis diſtantiis habere determinationem quamdam recedendi a ſe invicem, quam appellamus vim repulſivam, quæ diſtantiis in infinitum imminutis, augeatur ultra quoſcumque limites ita, ut ſit par extinguendæ cuilibet velocitati, utcumque magnæ, auctis diſtantiis minuatur, donec penitus evaneſcat, tum tranſeat in determinationem accedendi, ſive vim attractivam, quæ primo augeatur, tum

K decre-

decreſcat, & in repulſivam iterum tranſeat, idque per multas vices in exiguis diſtantiis, donec demum in majoribus diſtantiis evadat ad ſenſum reciproca duplicata diſtantiarum, atque id juxta conſtantem legem ordinatarum ad curvam quamdam continuam, & ſimplicem, quæ in ipſa abſciſſarum diſtantias referentium origine aſymptotum habeat parallelam ordinatis ipſis, tum axem in plurimis ſecet punctis hinc, & inde ſinuata, ac demum ex parte axis oppoſita priori aſymptotico cruri, crus aliud habeat aſymptoticum, exiſtente aſymptoto ipſo axe, & accedente cruris forma quamproxime ad formam cruris Hyperbolæ habentis ordinatas in ratione reciproca duplicata diſtantiarum. Inde colligimus materiam conſtare ex punctis prorſus indiviſibilibus, a ſe invicem aliquo finito intervallo diſtantibus, & ſoliditatem, ac cohæſionem repetimus a diſtantia limitis inter repulſionem in minori diſtantia, attractionem in majori; adeoque ſoliditatem, & extenſionem mathematicè continuam nequaquam admittimus.

160. Hæc noſtræ theoriæ ſumma; en ejus deductionem a lege Continuitatis. Concipiamus bina corpora delata in eamdem plagam, quorum primum habeat velocitatis gradus ſex, ſecundum vero duodecim. Ubi hoc ſecundum aſſequitur illud primum, deberet, ſi utcumque eſſet omnino durum, in ipſo momento temporis, in quo contactus fit, fieri mutatio velocitatis per ſaltum vel in altero, vel potius in utroque. Id quidem evidentiſſimum eſt, ſi corpora compenetrari non poſſunt, ut revera non poſſunt juxta num. 134, nam illud ſecundum ultra illud primum ferretur, & in ejus locum ſuccederet, ſi pergeret quovis utcumque exiguo tempuſculo moveri cum velocitate majore. Id ſane fatentur omnes, ſed duplici via occurrunt difficultati. Sunt qui corpora admittunt etiam dura, cujuſmodi ſaltem prima materiæ elementa Newtonus etiam admiſit, qui perfecte ſolida voluit ita, ut eorum partes continuo contactu cohærere poſſent per attractionem. Hi ſaltum a Natura excludendum eſſe non putant, inter quos Mac Laurinus inprimis, nihil abſurdi in ipſo ſaltu agnoſcit. At horum ſententiam tota hæc diſſertatio enervat. Alii, ut Leibnitiani in primis omnes, e Natura rejiciunt omne corporum durorum genus, & idcirco, dicunt, mollia eſſe omnia corpora, vel elaſtica, ut nimirum paullatim partes introcedant, & dum figura mutatur, velocitatis diſcrimen gradatim juxta Continuitatis legem elidatur.

161. At hæc reſponſio ſaltum quidem tollit a totis corporum maſſis, non a primis ſuperficiebus, quæ ſe contingunt, & in quibus vis impenetrabilitatis exeritur. In primis illud ipſum ab ejuſmodi reſponſione nos removeret, quod ſi in ipſis elaſticis corporibus nullas particulas utcumque exiguas prorſus ſolidas admittamus, agnoſcenda ſit diviſio actualis materiæ in infinitum ſine ullo limite ita, ut nulli parietes ibi ſint ultimi, qui vacuo, & configuratione ad elaſticitatem neceſſa-

cessaria omnino careant, quod quam multa Infiniti mysteria, & vero etiam absurda, secum trahat, ex iis, quæ supra de Infinito diximus, satis patet. Sed eo omisso, corpus quodcumque, utcumque habeat particulas in infinitum divisas, omnino superficies habet extremas, quæ si ad contactum devenitur, se immediate contingant. Hujusmodi superficies sunt reales corporum termini indivisibiles, juxta num. 16, nec dici potest pro superficiebus haberi posse solida quædam infinite parva crassitudine prædita, nam & infinitesimas quantitates in se ipsis determinatas nullas esse, demonstravimus num. 80, & si sint, eorum interiores partes ad limitem extremum, adeoque ad superficiem pertinere omnino non possunt. Nec aliud est compressio corporis figuram immutantis, nisi accessio extremarum superficierum ad se invicem, quod in Dissertatione de Viribus Vivis satis luculenter ostendimus adjecto etiam schemate, quod modum compressionis exhiberet, consistentis in eo, quod præcedentis superficiei velocitate minore existente jam, quam consequentis, earum accessus habeatur.

162. Porro superficies illæ, in quibus contactus fieret, deberent velocitatem mutare per saltum. Si enim prima superficies secundi corporis aliquo tempore divisibili postea, quam sublata est omnis earum distantia, cum postrema primi corporis ad æqualitatem reducitur, erit aliquod momentum posterius, quo illa habebit velocitatis gradus 11, hæc minus adhuc quam 11, ut 7, adeoque toto illo pro tempore secundi corporis superficies habuisset velocitatem majorem, quam superficies primi, & proinde plus spatii percurrisset, quod compenetrationem aliquarum corporis particularum induceret.

163. Evidens igitur est saltum in ipsis superficiebus, salva impenetrabilitate evitari non posse, si cum illo velocitatum discrimine ad contactum devenitur, adeoque debent omnino, ante quam deveniatur ad contactum, mutari paullatim, & per gradus velocitates illæ corporum, retardata altera, altera accelerata. Quare debet haberi causa, quæcumque ea sit, quæ retardationem, & accelerationem inducat, quæ quoniam mutat statum corporum in ordine ad determinationem motus, & quietis, dicenda erit vis, & quoniam tendit ad removendum alterum corpus ab altero, dicenda erit vis repulsiva, quo nomine intelligenda erit determinatio, quam habebit, quævis materiæ particula recedendi ab alia quavis particula, dum ad eam accedere cogitur etiam ante contactum. Ea autem determinatio sine actione in distans, & sine ullo impulsu, poterit haberi vel in natura ipsa materiæ requirentis recessum illum sub conditione illius determinatæ distantiæ ab alia materia, vel per liberam legem Dei sancientis eum recessum in illa distantia, quo utroque modo etiam vis attractiva in majoribus distantiis ab ipsis distantiis pendens æque bene explicari potest sine ulla actione in distans, & sine ullo impulsu. Idea ejusmodi

K 2 deter-

determinationis diſtinctiſſima eſt, & clariſſima. Miramur autem tan-
tam difficultatem apud nonnullos haberi in admittenda hujuſmodi de-
terminatione aſſumente pro conditione certam diſtantiam, cum ii
omnes admittant ſimilem prorſus determinationem mutandi ſtatum,
ubi diſtantia ſit nulla, ortam ex impenetrabilitate, quam cenſent agere
in immediato contactu. Num eſt captu facilior, præjudiciis ſepoſitis,
determinatio ſive a materiæ natura profluens, ſive a libera Dei vo-
voluntate, aſſumens pro conditione potius diſtantiam zero, quam
diſtantiam determinatam quamcumque?

164. Porro ea vis repulſiva imminutis diſtantiis in infinitum debet
augeri in infinitum ita, ut ſit par extinguendæ cuilibet velocitati ut-
cumque magnæ. Si enim in uno caſu, ut in allato, extingueretur di-
ſcrimen velocitatis in ipſo contactu; ubi in alio caſu corpus ſecundum
majori velocitate præditum eſſet, deberet pervenire ad contactum,
ante, quam totum diſcrimen velocitatum extingueretur; videmus
enim, vires omnes breviori tempore minorem velocitatem gignere,
vel extinguere, & majori differentiæ velocitatis reſponderet tempus
brevius uſque ad contactum. Quare ne in poſteriore caſu habeatur
in ipſo contactu differentia velocitatum, & ſaltus, debet in priore
extingui totum diſcrimen ante, quam ad contactum immediatum de-
veniatur, ut nimirum in poſteriore caſu, per vim repulſivam in ul-
teriore illo acceſſu exercitam majus illud diſcrimen extinguatur to-
tum. Cumque idem diſcurſus redeat pro quavis utcumque magna
velocitatum differentia, patet, ejuſmodi debere eſſe vim repulſivam,
ut corpora nunquam ad immediatum contactum deveniant, & ipſa ſit
par extinguendæ velocitati utcumque magnæ, adeoque ut imminu-
tis in infinitum diſtantiis excreſcat ultra quoſcumque limites in infi-
nitum, atque ita excreſcat, ut recta ipſi proportionalis ducta in re-
ctam exprimentem diſtantias deſcribat aream infinitam (cum nimirum
illi areæ in Mechanica demonſtretur proportionale quadratum veloci-
tatis genitæ, vel deſtructæ) ad quam areæ infinitatem requiritur,
ut vis decreſcat non minus, quam in ſimplici ratione diſtantiæ; nam
ea ratio exhibet Hyperbolam Conicam inter aſymptotos habentem
aream infinitam, & in omni Hyperbolarum familia eæ omnes, quæ
ordinatas habent minus creſcentes, habent aream finitam, quæ ha-
bent magis creſcentes, habent ipſam aream itidem infinities magis
infinitam.

165. Jam vero hinc eruitur, materiam conſtare e punctis prorſus
indiviſibilibus, & inextenſis, a ſe invicem quodam ſemper interval-
lo disjunctis. Nam ejuſmodi repulſiva vis, cum nec relativa ſit re-
latè ad noſtros ſenſus, nec ab aggregati, & totius natura pendeat,
debet per num. 135. tribui omnibus materiæ particulis. Unde fit, ut
nulla pars materiæ ex aliis particulis contiguis conſtet, quæ nimirum
vi il-

vi illa repulſiva in infinitum aucta deberent ſtatim a ſe invicem diſcedere; ac proinde oportet, primæ particulæ materiæ ſint omnes ſimplices, incompoſitæ, adeoque indiviſibiles, & a ſe invicem diſtantes, quæ cum nec illam virtualem extenſionem habere poſſint, juxta num.26, erunt puncta prorſus indiviſibia, & inextenſa,

166. Quoniam autem in majoribus diſtantiis habetur determinatio accedendi ad ſe invicem, quod conſtat ex generali gravitate a Nevvtono detecta, quæ in immenſum protenditur, & ſequitur ad ſenſum rationem reciprocam duplicatam diſtantiarum, ac ex ipſa cohæſione corporum, cum nimirum anteriorem partem adductam poſterior conſequatur; patet vim illam repulſivam, quæ minutis in infinitum diſtantiis creſcit in infinitum, adeoque iis auctis decreſcit, alicubi ita decreſcere, ut evaneſcat, ac deinde directione mutata, ut curvarum ordinatis ſæpe accidere vidimus num.112, in attractivam migret, ubi habebitur neceſſario limes quidam inter repulſionem, & attractionem, in cujus limitis diſtantia ſi ponantur bina puncta materiæ, quieſcent, nulla vi attracta, nulla repulſa, at ea diſtantia utcumque imminuta, agente jam vi repulſiva conabuntur recedere a ſe invicem, ea aucta, adeoque agente jam vi attractiva, conabuntur accedere ad ſe invicem; unde fiet, ut in ea diſtantia conſtituta, eam tueri conentur, & altero verſus alterum promoto, hoc poſterius cogatur progredi, illo tracto verſus partes oppoſitas, hoc ipſum cogatur conſequi, conanti autem alterum ad alterum adducere, vel alterum ab altero abducere, reſiſtant, in quibus phænomenis conſiſtit tota cohæſionis, & ſoliditatis notio, quam per ſenſus acquirere poſſumus; quamobrem ejuſmodi limites dicimus *limites cohæſionis*.

167. Porro ejuſmodi limitis, ſive tranſitus a vi repulſiva in minoribus diſtantiis ad atractivam in majoribus, imaginem ſenſibilem habemus in elaſtica forcipe, qua per hyemem carbones accenſos tractamus, cujus cuſpides ſi plus æquo admoveantur, determinantur ad mutuum receſſum, ſi plus æquo removeantur ad acceſſum. Sed & alterius generis limites admitti debent, in quibus ab attractione ad repulſionem, auctis diſtantiis fiat tranſitus, cum videamus aquæ particulas cohærentes, adeoque in priore limite poſitas, abire deinde in vapores, quorum particulæ maxima vi a ſe invicem conentur recedere, in quibus proinde & repulſioni in minimis diſtantiis attractio in paullo majoribus, & iterum in aliis majoribus repulſio, ac iterum in maximis, in quibus mutua gravitas agit, attractio ſuccedat. Quin immo plurimos eſſe hujuſmodi tranſitus, & limites, conſtat ex eo ipſo, quod multa corpora poſt iteratas compreſſiones in reſpectiva quiete perſeverent, novos nimirum, & propiores cohæſionis limites aſſecuta. Hoc autem ſecundum limitum genus a priore illo plurimum differt, cum bina puncta in ejus limitis diſtantia conſtituta quieſcant,

ſed

sed utcumque parum ea immutata, cogantur ab ea magis recedere; cum nimirum, imminuta distantia, habeatur vis attractiva, quæ ipsam adhuc magis imminuat, eadem acta agat repulsio, quæ ipsam augeat adhuc magis.

168. Porrò hujusmodi virium alternationes & transitus etiam Nevvtonus admisit in Quæstionibus Opticis sub finem, licet ipse in minimis deinde distantiis attractionem ultimam voluerit, & contactum, non repulsionem. Transitus autem ipsos explicat exemplo quantitatum positivarum, & negativarum in Albegra, cum in Mechanica necesse esse censeat, ubi vis attractiva desinit, incipere vim repulsivam, ut in Algebra ubi quantitates positivæ desinunt, debeant incipere negativæ. Verum ibi notandum illud, quod & in nostra Algebra secundo Elementorum nostrorum tomo demonstravimus, & eruitur ex iis, quæ dicta sunt num. 112: non esse verum, eo ipso, quod aliqua quantitas positiva esse desinit, necessario in negativam migrare debere, & viceversa; cum nimirum aliquando post accessum ad nihilum retro etiam quantitas redeat, nec ipsum transgrediatur. Est autem generalis regula, in iis etiam, quæ in ipsa Algebra nostra demonstravimus, ex qua regula cognosci possit, an per nihilum transire debeat quantitas ipsa, an inde regredi. Nimirum si ubi ad nihilum devenit, ejus magnitudo decrescat in ratione, quæ sit eadem accurate, vel infinities proxime, quam habet aliqua potentia impar distantiæ ab ipso nihilo, transiliet; si in ratione, quam habet aliqua potentia par, regredietur. Mutata enim distantia a nihilo, & abeunte ultra ipsum, ejus potentiæ impares mutantur etiam ipsæ e positivis in negativas, vel viceversa, pares manent; adeoque idem formulæ algebraicæ, vel quantitati cuivis eam rationem habenti debet evenire. quod itidem in Geometria servatur sanctissimè, ut nimirum curva linea ad axem delata debeat ipsum secare, & transgredi mutata directione ordinatarum, vel contingere, & regredi ipsa servata, prout ordinatæ ipsæ fuerint ibi accuratè, vel in infinitum proximè in ratione potentiæ cujuspiam gradus imparis, vel paris suæ distantiæ a puncto illo, in quo ad nihilum deveniunt, & evanescunt.

169. Inde autem consequitur, vim hoc modo traductam per nihilum, & jam abeuntem in attractivam, jam iterum in repulsivam non esse vim quamdam multiplicem &, indigentem pluribus causis, quam si tantummodo attractiva esset. Simplicissima ejus lex erit, sive semper negativa, sive e positiva in negativam migret, & ipsa ejus natura requiret transitus illos, si ejusmodi sit, ut alicubi prope loca, in quibus evanescit, sequatur rationem illam potentiæ imparis potius, quam paris. Poterit ea per simplicissimam etiam Algebraicam formulam exprimi, cujus valor imminuto valore variabilis distantiam referentis in infinitum crescat, & negativus sit, tum eo aucto, jam e nega-

gati-

(LXXIX.)

gativo in positivum migret, jam e positivo in negativum; donec, eodem satis, excrescente fit semper positivus, & accedat quamtumlibet ad rationem reciprocam duplicatam distantiarum. Quamobrem poterit per simplicem curvam etiam Algegraicam exprimi, quæ in initio ordinatarum asymptotum habeat parallelam ordinatis in infinitum crescentibus ex ea parte, ac ex opposita decrescentibus, donec ipsa curva axem secet, ac resecet vicibus quotlibuerit, & in punctis quibuscumque ad arbitrium; desinat autem in crus infinitum habens pro asymptoto ipsum axem, & jacens ad partes ejus oppositas, ac accedens quantumlibet ad formam Hyperbolici cruris habentis ordinatas in ratione reciproca duplicata distantiarum. Atque hæc ipsa est forma curvæ, qua nos nostram virium theoriam exprimimus. Ut vero ejusmodi curva simplicissima in se esse potest, & continuæ, ac constantis naturæ, ita & virium lex non multiplex erit, sed unica, & ab unica vel punctorum materiæ natura, vel Artificis Divinis libera voluntate pendebit.

170. Porro mirum sane, quam ea, licet unica sit, ad omnes generales, & particulares corporum proprietates explicandas conducat. Primus ille ramus asyptoticus impenetrabilitatem, postremus gravitatem, intermedii limites varia cohæsionum genera, & discrimen inter corpora elastica, & mollia, solida, & fluida, ac alia ejusmodi, sinus illi multiplices fermentationem, & inflammationem, emissionem vaporum, & luminis, quamvis constante, & non disrupta massa quæ emittit, atque alia sexcenta ejusmodi mirum in modum expediunt; ubi illud facile perspicitur, cur tanta corporum omnium similitudo sit in iis, quæ pertinent ad impenetrabilitatem agentem in minimis distantiis, & gravitatem in majoribus, tantum autem discrimen in reliquis, e quibus pendent operationes chymicæ, nutritiones, & alia omnia adeo mira, & varia Naturæ opera. Sed de his satis multa in illa ipsa dissertatione de lumine demonstrata protulimus, & multo plura a P. Carolo Benvenuti per hosce ipsos dies, ut innuimus, proferuntur.

171. Illud unum hic addemus, quod ad spatii ideam pertinet in hac nostra sententia realem Mathematice continuam extensionem, a corporibus excludente. Nos præter puncta materiæ realia, admittimus reales existendi modos, per quos ibi sint, ubi sunt, quod admittere omnino debent, qui locum ponunt in ordine coexistentium, vel reale spatium admittunt, ne quotiescumque existant, quæ existunt, eundem ordinem habeant, vel in eadem spatii parte sint. Illi ipsi modi sunt nobis realia, & immobilia punctorum loca, quæ ubi existunt, fundant realem relationem distantiæ inter se, & ipsa materiæ puncta, ad quæ pertinent. Eorum possibilitas indefinite a nobis cognita est nobis spatium imaginarium continuum quidem, & infinitum, quia cum nullum sit punctum loci possibile ita proximum alteri, ut aliud propius,

aut

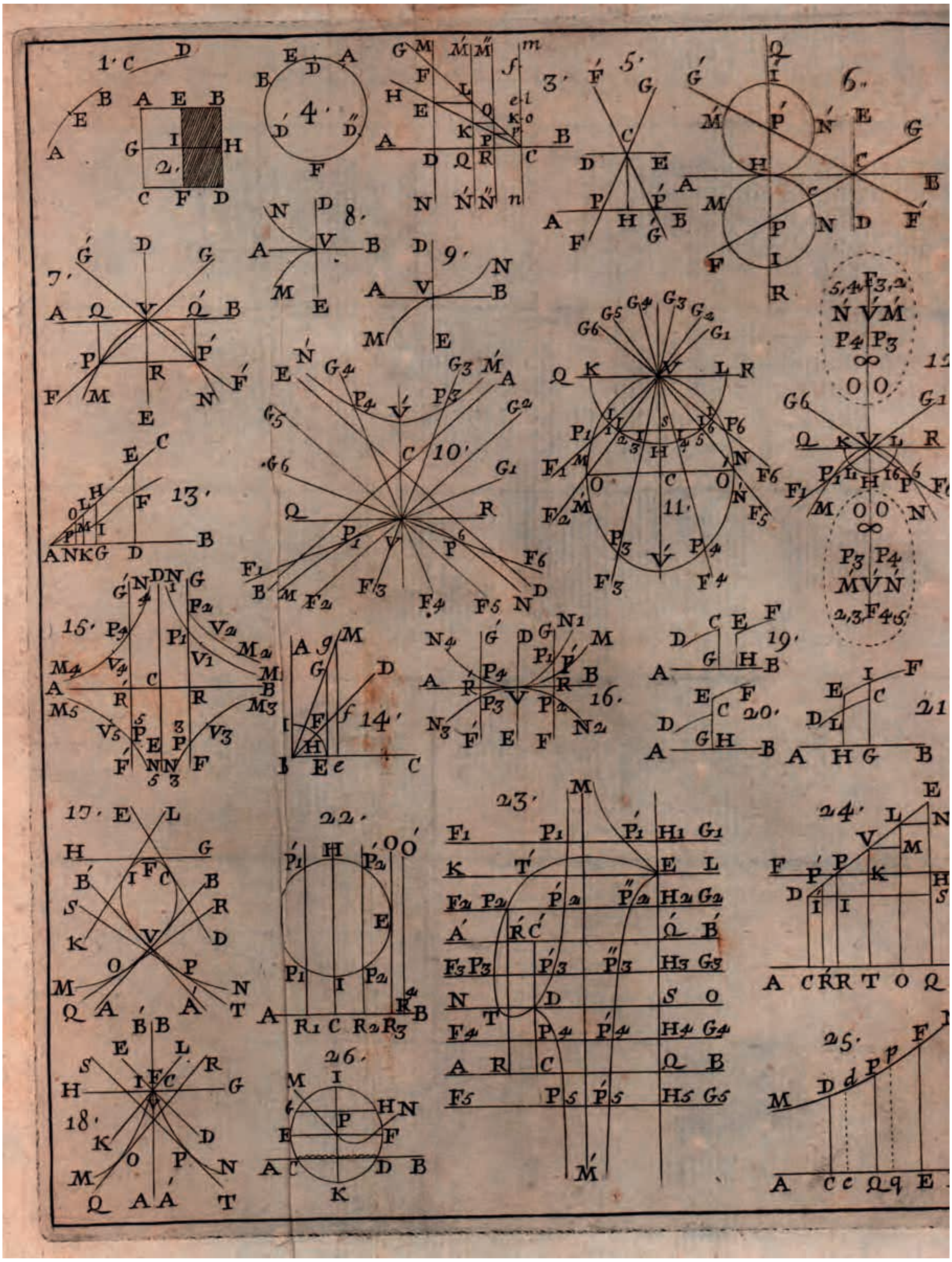
aut remotius eſſe non poſſit, in poſſibilibus indefinite cognitis nullus habetur hiatus, nullus terminus, qui ſemper in exiſtentibus adeſt.

172. Porro cum illi reales exiſtendi modi realem diſtantiæ relationem inducant, a caſu compenetrationis, qui per alios ab iis diſtinctos exiſtendi modos haberetur, realem etiam, non continuam, ſed diſcretam extenſionem conſtituunt, in quo nihil abſurdi eſt: extenſum enim continuum ab inextenſis conſtitui non poteſt, non vero diſcretum in expoſito ſenſu, in quo evidentiſſimum eſt, phænomena extenſionis, quæ ſupra innuimus, ut a nobis cognoſcuntur per ſenſus, eadem fore.

173. Sunt, qui vereantur, ne in noſtra theoria nullum, ſit diſcrimen noſtrorum punctorum a ſpiritibus, quibus ſi eædem illæ vires tribuantur, extenſam in eodem noſtro ſenſu maſſam eſſormabunt. At bina habemus diſcrimina inter materiam, & ſpiritus nobis utcumque notos. Illa vi cognoſcendi cenſetur carere, & impenetrabilitate, ac extenſione prædita eſt, hi vi cognoſcendi pollent, impenetrabilitate, & extenſione carent. Idcirco autem his carent, quia illis ipſis viribus carent. Si vires haberent eaſdem, adhuc per potentiam cognoſcendi diſtinguerentur a materiæ punctis, ſed impenetrabilitatem haberent, & maſſas extenſas formarent, quo caſu an adhuc ſpirituales ſubſtantiæ dici deberent, lis eſſet de nomine.

174. Supereſſent alia quamplurima, ſed illud, ut fidem datam numer. 35 liberemus, nequaquam omittendum; in noſtra ſententia nec quietem punctorum, nec regreſſum ad eumdem locum, aut appulſum ad locum, in quo fuerit, vel ſit aliud punctum, ſeu conjunctionem unius puncti ſpatii, cum ſerie continua momentorum temporis, vel cum momentis a ſe diſtantibus pro eodem puncto materiæ vel pro binis haberi poſſe in Natura. Primum patet ex eo, quod viribus ad immenſas etiam diſtantias pertinentibus, ad motum puncti cujuſvis debent mutari vires punctorum omnium, adeoque ipſa in perpetuo eſſe motu; ſed utrumque facile demonſtratur ex eo, quod cum punctorum ſpatii in quavis linea recta, linearum in quovis plano, planorum in toto ſpatio numerus ſit infinitus, numerus autem punctorum materiæ finitus, numerus momentorum ejuſdem generis, ac numerus punctorum in quavis recta; infinita tertii ordinis eſt improbabilitas pro quovis momento pro determinato appulſu cujuſvis puncti materiæ ad quodvis punctum loci, in quo ipſum fuerit alias, vel in quo fuerit aliud punctum materiæ, vel tum ſit, & infinita ſecundi ordinis, pro momentis omnibus indefinite ſumptis. Ex quibus conſtant, quæ in eo numero demonſtratione indigebant. Sed contrahenda jam vela ſunt, & conſiſtendum.

F I N I S.



SULLA LEGGE DI CONTINUITÀ

E LE SUE CONSEGUENZE

RIGUARDANTI

I PRIMI ELEMENTI DELLA MATERIA

E LE LORO FORZE

Dissertazione

tenuta dai Padri della Compagnia di Gesù

nel Collegio Romano

il 7 agosto 1754

Roma MDCCLIV.
Dalla tipografia di Generoso Salomoni.
Per concessione delle autorità.

[altro frontespizio: «Dissertazione / del Padre Ruggiero Giuseppe Boscovich / pubblico professore di matematica della Compagnia di Gesù / presso il Collegio Romano» / Roma MDCCLIV. / Dalla tipografia di Generoso Salomoni / presso la libreria di Venanzio Monaldini in Via del Corso. / Per concessione delle autorità.][*]

---

[*] Da una copia custodita presso la Bayerische Staatsbibliothek München (collocazione: 4 Phys.sp. 36).

1. Sin dal 1745, nella dissertazione *De viribus vivis*, presentata e difesa pubblicamente in questa stessa sede, poi nuovamente stampata nei *Commentari dell'Accademia di Bologna* (Tomo II), abbiamo proposto una nostra teoria delle forze. Di tali forze sono dotati tutti i punti della materia; da esse discendono spontaneamente, in modo da venirvi necessariamente dedotte come pure conseguenze, sia la costituzione della materia sia tutte le proprietà generali dei corpi, così come le loro più importanti proprietà particolari. Abbiamo esposto questa stessa teoria in forma assai più analitica nel 1748, nella seconda parte della dissertazione *De lumine*, anch'essa presentata in questa sede, e coll'aiuto della geometria abbiamo dedotto le principali conseguenze, svolgendo dimostrazioni. Grazie a esse sono stati chiariti – tra gli altri – i più importanti principi anzitutto della solidità e della fermentazione.

2. Inoltre, di fatto noi non abbiamo costruito quella teoria ad arbitrio, a mo' d'ipotesi (come immaginano taluni, che evidentemente appartengono al genere di quelli che, dopo aver letto qualcosa solo in parte, sono soliti giudicarla per intero); invece, abbiamo tentato di dimostrare la nostra teoria con argomenti positivi, e in modo che possa risultare maggiormente evidente che noi non abbiamo fatto ciò che spesso accade in stati d'animo preconcetti: cioè ci si serve di argomentazioni raccolte da qualsiasi parte per provare in qualunque modo un'opinione mediante il metodo sintetico. Piuttosto, abbiamo esposto accuratamente tutta quest'analisi che dai principi più semplici della natura ci ha condotto a quella teoria con una concatenazione necessaria e spontanea delle conclusioni. A tale proposito, possiamo confessare sinceramente che ciò non ci è capitato perché volevamo esprimere un'opinione né perché spinti alla teoria – i cui abbondantissimi frutti abbiamo raccolto allora e continuiamo a raccogliere di giorno in giorno – dal desiderio di risultati che allora ignoravamo del tutto. A trascinarci è stata l'indole naturale e la forza dell'argomentare.

3. Il principale fondamento di tutta la nostra analisi consiste in quel celeberrimo principio che ormai generalmente i filosofi chiamano *principio di continuità*. Esso venne presentato nel 1687 da Leibniz, il quale tuttavia non si servì di questo nome; egli lo impiegò contro le leggi cartesiane del moto nella rivista che Bayle battezzò *Nouvelles de la République des Lettres*[1]. In seguito fu esposto da molti altri leibniziani, e le loro argomentazioni vennero raccolte dalla dottissima Madame De Chatellet [Émilie du Châtelet] nelle *Istituzioni di fisica*[2]. Inoltre, ci siamo occupati ancora in minima parte

---

[1] Boscovich si riferisce a G.W. Leibniz, *Lettre de M.L. sur un principe general utile à l'explication des loix de la nature par la consideration de la sagesse divine, pour servir de replique à la reponse du R.P. Malebranche,* pubblicato nel 1687 sulla rivista, fondata da Pierre Bayle nel 1684 e da lui diretta fino al 1687, *Nouvelles de la République de Lettres* (luglio 1687, art. VIII, pp. 744-753). Poi in G.W. Leibniz, *Die philosophischen Schriften*, hgg. von C.I. Gerhardt, vol. III, Weidmann, Berlin 1887, pp. 51-55.
[2] Boscovich allude all'opera di Émilie du Châtelet, *Institutions de Physique*, Prault, Paris 1740. Come nota J. Talanga («Anmerkungen», in R.J. Boscovich, *De continuitatis lege.*

di ciò che riguarda la spiegazione, la prova o la giustificazione di quel principio, sebbene ci siano certamente molte altre cose, degne della massima considerazione, che non solo sono utilissime e indispensabili per corroborare quel principio, ma anche per dedurre tante altre verità e per impedire un gran numero di errori. Alcune, quando ne abbiamo avuta l'occasione, le abbiamo esposte a più riprese sia in lettere private sia in lezioni pubbliche; molte, che riguardano la continuità dei luoghi geometrici, le abbiamo presentate nelle *Sezioni coniche* che abbiamo pubblicato quest'anno, seguite da un più ampio trattato[3].

4. Pertanto, in questa esercitazione solenne ci ripromettiamo di trattare l'argomento in maniera più ordinata, sperando che, spiegate tutte le difficoltà che già da tempo parecchi autori di prima qualità e uomini dottissimi hanno sollevato o continuano a sollevare contro quel principio, la nostra teoria riesca a conseguire più autorità e forza grazie a questa nuova esposizione del suo più importante fondamento. Del resto, a poco a poco essa comincia a venire maggiormente divulgata – attaccata dagli uni, avanzata e difesa dagli altri – anche in istituzioni pubbliche.

5. Tuttavia, non manca chi contesta allo stesso principio di continuità di celare una qualche contraddizione, ritenendo che contenga necessariamente ciò che invece cerca di escludere nel modo più assoluto: per esempio, come vedremo fra poco, è questo il caso di Maupertuis, il più grande matematico e filosofo della nostra epoca. Perciò, daremo dapprima una spiegazione autentica di questo principio, affinché, compresala debitamente, non si possa scoprire in esso alcunché che non sia in accordo col principio stesso o con la retta ragione. Da ciò scaturirà la sua possibilità, stabilita la quale procederemo oltre, per tentare di provarne l'esistenza in natura.

6. Ma affinché la nozione del principio di continuità riesca più evidente, tratteremo anzitutto la natura delle quantità continue, illustrandola per mezzo della geometria; avanzeremo poi gradualmente, esponendo il principio di continuità stesso. Stando a Aristotele, che Leibniz loda nel saggio ricordato al n. 3, la natura delle quantità continue consiste nel fatto che in esse le parti immediatamente successive hanno un termine comune. E, continua Aristotele, mentre i numeri sono privi di continuità, essa caratterizza la linea, la superficie, il corpo e lo spazio (che chiama *locus*), nonché il tempo. Ecco il passo da *Categorie*, cap. 6, *De quanto*, dall'edizione parigina del 1619: «Quantità discreta è, per esempio, il numero […]; quantità continue sono la linea, la superficie, il corpo e inoltre, in aggiunta a questi, il tempo e il luogo. Infatti delle parti

---

Über das Gesetz der Kontinuität, übersetzt und herausgegeben von J. Talanga, Universitätsverlag C. Winter, Heidelberg 2001, pp. 243-244), Boscovich si riferiva probabilmente alla seconda edizione (Amsterdam 1742), poiché la prima edizione parigina venne pubblicata anonima.

[3] Boscovich si riferisce ai propri *Elementorum universae matheseos tomus* III. *Continens Sectionum conicarum elementa*, Salomoni, Roma 1754, e al trattato in appendice *De transformatione locorum geometricorum, ubi de continuitatis lege, ac de quibusdam Infiniti mysteriis* (ora compresi in *ENo*, II).

del numero non vi è nessun limite comune in relazione al quale le sue parti si congiungono […]. La linea, invece, è una quantità continua: infatti è possibile concepire un limite comune in relazione al quale le sue parti si congiungono, il punto. E il limite comune alla superficie è la linea: infatti le parti del piano si congiungono in relazione a un certo limite comune. Parimenti anche nel caso del corpo si potrebbe concepire un limite comune: la linea o la superficie, in relazione a cui le parti del corpo si congiungono. Anche il tempo e il luogo sono tra le quantità di questo genere. Infatti il tempo presente si congiunge con quello passato e con quello futuro. A sua volta il luogo è tra le quantità continue: infatti le parti del corpo, le quali si uniscono in relazione a un certo limite comune, occupano un certo luogo. Dunque anche le parti del luogo, che ciascuna delle parti del corpo occupa» si uniscono in relazione a un certo limite comune[4]. Così Aristotele. Di ciò ci occuperemo in maniera un po' più ampia e accurata.

7. Si immagini (Figura 1) una linea ABCD che sia interrotta in B, C. Qui la continuità è violata, poiché B, che costituisce la fine della parte AB precedente, dista da C, che è l'inizio della parte CD, che a sua volta segue immediatamente AB. Al contrario, invece, la linea AEB è continua, poiché lo stesso punto E è limite comune alla parte AE e alla parte EB.

8. In qualsiasi quantità continua bisogna distinguere ciò che è termine o limite da ciò di cui esso è termine. Il primo, per il suo stesso essere termine, deve essere indivisibile; il secondo deve essere divisibile all'infinito. Termine di una linea è un punto, termine di una superficie è una linea, termine[5] di un solido è una superficie. La linea è divisibile all'infinito per la lunghezza; un punto, invece, è indivisibile. La superficie è divisibile secondo lunghezza e larghezza; ma la linea che ne è termine è indivisibile in larghezza, sebbene sia divisibile per la lunghezza, secondo cui si estende con la superficie. Lo stesso vale per una superficie rispetto a un solido, giacché, in quanto suo termine, essa è del tutto priva di spessore.

---

[4] *Aristotelis opera omnia, quae extant, Graece et Latine, veterum ac recentiorum interpretum, ut Adriani Turnebi, Isaaci Casauboni, Iulii Pacii studio emendatissima […]*, authore Guillelmo Du Val, 2 voll., Lutetiae Parisiorum Typis Regiis, 1619, vol. I, «Aristotelis Categoriae», p. 20. Traduzione italiana adattata da Aristotele, *Organon*, a cura di M. Zanatta, vol. I, UTET, Torino 1996, pp. 190-191. Si noti che le ultime parole del testo latino riportato da Boscovich («*aliquo termino copulantur*») non concordano con l'edizione citata e sono imputabili a un errore di trascrizione oppure a un'abbreviazione intenzionale del passo. Il testo citato recita, a questo punto: «*eodem termino coniunguntur, quo partes corporis*», cioè «[le parti del luogo] si congiungono in relazione allo stesso limite in relazione al quale si congiungono le parti del corpo».

[5]* Nell'originale «*termini*», ma è un refuso per «*terminus*». Le note seguite dall'asterisco (*) riprendono le correzioni fornite da Boscovich nell'Errata Corrige dell'edizione Monaldini, riportata alla fine di questa traduzione.

9. Inoltre, che un termine o limite sia indivisibile per il suo essere limite, risulta evidente dalla stessa nozione di termine o limite. Infatti, se fosse divisibile e avesse parti, non apparterrebbe più al limite come un tutto, ma la parte interna apparterrebbe a ciò di cui quella esterna sarebbe limite. Poiché, seguendo questo andamento, si torna nella parte esterna, ne segue manifestamente che ciò che è limite è indivisibile. Perciò, il punto dev'essere completamente indivisibile, la linea indivisibile secondo larghezza, la superficie secondo spessore o profondità.

10. Dalla natura del termine segue anche che non può esservi contiguità fra due termini. Infatti, quel continuo di cui essi sono termini deve sempre giacere fra loro. Né l'uno può essere la fine del precedente e l'altro l'inizio del seguente, poiché il loro termine, per la natura del continuo (n. 6), dev'essere comune. Lo stesso si conclude in modo ancor più evidente dall'indivisibilità del termine. Infatti, le cose indivisibili o distano l'una dall'altra oppure, eliminata la distanza, si fondono e divengono un tutto. Infatti le che sono del tutto prive di estensione o non si toccano oppure si toccano ovunque. Nel primo caso distano l'una dall'altra; nel secondo si compenetrano e si fondono in un tutto. Bisogna far violenza a se stessi per immaginare un punto contiguo a un altro punto e tuttavia posto al di fuori di quello, senza che lo compenetri. Si immagineranno, così, delle sferette estese che si tocchino da una parte e si allontanino a vicenda dall'altra parte, ammettendo con ciò che un medesimo punto ha parti e distruggendo il concetto di indivisibilità e inestensione. È certamente questo l'argomento più antico con cui fu incessantemente confutata la concezione di Zenone, stando al quale il continuo esteso è formato da punti completamente inestesi. Di tale argomento nessuno ha potuto esibire, finora, soluzione adeguata; nessuno lo farà in futuro. Esso, infatti, ha la forza di una dimostrazione assoluta e quella dell'evidenza.

11. Ma molte di queste cose appaiono assai oscure a coloro che non sono penetrati più a fondo nell'origine delle proprie idee e non capiscono appieno che anche loro hanno formato alcune delle idee apprese mediante i sensi attraverso riflessione, in modo per lo più conforme al corretto ragionamento e alla natura. Non soltanto le cose indivisibili e inestese, ma anche le infinite grandezze divisibili sfuggono ai nostri sensi, i quali, una volta giunti a certi limiti di taglia assai ridotta, ci abbandonano completamente. Sin dalla prima infanzia abbiamo attinto innumerevoli percezioni di quantità divisibili ed estese sia dalla vista sia dal tatto. A esse ci siamo abituati a poco a poco, in modo che ogni volta che vogliamo richiamare alla mente l'idea di un qualche punto, richiamiamo quella di una sferetta estesa in lunghezza, larghezza e profondità; e aggiungendo una sferetta all'altra, contempliamo persino la più lunga schiera di tali sferette. Ma se alla percezione sensibile si aggiunge la riflessione, se si considera che qualunque estensione finita debba avere la propria fine e che ciò che ha parti non può costituire la fine rispetto alle sue parti interne, apparirà subito chiaro che, di fatto, deve esserci una fine e che essa dev'essere priva di parti e di estensione, e che una cosa inestesa non può entrare in contatto con un'altra inestesa, giacché in tal caso si unirebbero immediatamente.

12. In verità, per cedere alla debolezza dell'immaginazione, mostreremo in che modo anche quelli che abbracciano la comune concezione dell'estensione continua della materia siano generalmente costretti a riconoscere punti del tutto indivisibili e inestesi, linee prive di larghezza, superfici prive di larghezza e profondità[6] (mentre per noi, come verrà chiarito in seguito, la materia è composta di punti assolutamente indivisibili e inestesi, sempre separati da un intervallo completamente vuoto). Qui utilizzeremo l'immagine che già una volta abbiamo impiegato nel primo volume dei nostri *Elementi*, in particolare nel preambolo alla geometria[7]. All'epoca non ci eravamo ancora imbattuti nella nostra teoria, e abbiamo utilizzato quell'immagine per mostrare che superfici, linee, punti sono qualcosa nell'estensione continua reale, qualcosa che non è stato plasmato dalla nostra mente, ma è realmente esistente in sé ed è indissolubilmente legato a tale estensione continua.

13. Sia la tavola ABDC (Figura 2) continua e levigata ad arte. Si immagini la metà EFDB di colore nero, l'altra metà AEFC di colore bianco. Certo non sfuggirà alla vista il limite EF che separa la parte bianca da quella nera, di cui si dirà – e sarà senz'altro vero – che è tanto lungo quanto è lunga la tavola, essendo però del tutto privo di larghezza. Infatti, non appena ci si scosti dall'una o dall'altra parte del limite, ci si troverà sul bianco o sul nero. Ecco l'idea che una linea ha lunghezza, ma non larghezza! Immaginiamo ora la tavola dotata di profondità e trasparente (per esempio di cristallo) e, per tutta la sua profondità, una metà sia nera, l'altra bianca; allora, agli occhi di un osservatore il limite fra il tratto bianco e quello nero apparirà esteso in lunghezza e larghezza pari alla lunghezza e profondità della tavola, ma privo di profondità propria. Ci si può pure immaginare quattro parti AEIG, GIFC, FIHD, e HIEB di quattro colori diversi, le cui linee GH, EF si intersecano in un unico punto I, in modo che tale punto non abbia assolutamente estensione né parti. Si avrà così l'idea di punto.

14. Sappiamo, però, che colori differenti richiedono una diversa trama di particelle e che una tavola continua non può essere qui di un colore e lì di un altro. Per questo abbiamo detto «s'immagini» [*intelligatur*] una tavola siffatta impregnata di quei colori. Ma ciò non impedisce di formarsi l'idea di limite e della sua indivisibilità, ed è facile per la mente trasferire il proprio sguardo dall'immagine sensibile dei colori alla semplice suddivisione della tavola. Dunque, si tagli una siffatta tavola continua trasversalmente

---

[6] Nell'originale «*longitudinem*», ma dev'essere «*crassitudinem*» o «*profunditatem*».

[7] Boscovich si riferisce ai propri *Elementorum universae matheseos tomus I. Continens Geometriam planam, Arithmeticam vulgarem, Geometriam solidorum et Trigonometriam planam, et sphaericam*, Salomoni, Roma 1754 (ora in *ENo*, II). La prima edizione è del 1752, con alcune differenze nel titolo: *Elementorum matheseos ad usum studiosae juventutis tomi I pars I. Complectitur Geometriam planam, Arithmeticam vulgarem, Geometriam solidorum et Geometriam solidorum et Trigonometriam cum planam, tum sphaericam*, Romae MDCCLII excudebat Generosus Salomoni.

lungo EF; si avvicinino poi nuovamente le parti tagliate finché esse giungano a contatto. Alla vista non apparirà certo alcun limite fra la parte destra e quella sinistra; tuttavia esso ci sarà, e in qualche posto avverrà il passaggio da una parte all'altra. Se tale limite verrà esteso in lunghezza e larghezza per tutta la profondità della tavola, questo rivelerà una superficie che separa due solidi. In tale superficie la parte più esterna della suddivisione avrà lunghezza EF e separerà una porzione di superficie dall'altra, riproducendo una linea; mentre la nuova sezione GH, incontrando in I la precedente, vi produrrà un punto indivisibile e inesteso.

15. Ora, da qui sarà assai facile comprendere che non vi potrà essere perfetta adesione fra superficie e superficie secondo profondità, fra linea e linea secondo larghezza, fra punto e punto secondo lunghezza; vi dovrà essere, invece, o coincidenza o distanza. Infatti, dividendo lungo EF è oltremodo evidente che ogni nuova divisione deve o coincidere con la precedente oppure togliere una po' di tavola fra sé e la suddivisione precedente. Se parti di tavola si toccano, è oltremodo evidente che non si può fare una nuova divisione contigua alla precedente senza alcuna particella di tavola intermedia. Ciò, del resto, deriva manifestamente dal fatto che quella suddivisione è il limite comune alle due parti della tavola, e in quanto limite è assolutamente indivisibile.

16. Da ciò segue che, nella concezione comune dell'estensione continua della materia, una superficie, una linea, un punto non sono qualcosa d'inventato dalla nostra mente, ma devono esistere realmente in quella stessa estensione reale della materia, in quanto affezioni di tale estensione: sono termini inseparabili dalle cose di cui sono affezioni, sicché una superficie non può esistere in sé, come una vela priva di spessore, o una linea in sé, come una bacchetta priva di spessore[8] e larghezza, o un punto in sé, come una specie di granello senza estensione alcuna. Tuttavia, sia una superficie il limite reale di un solido esistente in sé; una linea, il limite reale di una superficie; un punto, il limite reale di una linea. Allora la prima definizione di Euclide e tutte le dimostrazioni dei geometri avranno la validità che è loro propria in tale comune concezione[9] dell'estensione reale continua.

17. Noi, invece, che non ammettiamo assolutamente l'estensione continua della materia, riconosciamo l'esistenza di punti reali indivisibili, esistenti in sé senza bisogno di alcuna linea, superficie o solido reale; parimenti, nella materia non ammettiamo alcuna superficie, linea o solido. Tuttavia, ammettiamo la linea continua nel moto (verrà chiarito in seguito che esso debba essere continuo). Ammettiamo poi certamente l'estensione continua – in lunghezza, larghezza e profondità – dello spazio, in cui sono contenuti e disseminati i punti così come noi li intendiamo. Che esso abbia tre dimensioni di tal fatta è oltremodo evidente dagli stessi moti, che avvengono in tutte le direzioni. Comunque, riveleremo più in basso ciò che pensiamo dello spazio e in che cosa con-

---

[8] Nell'originale «*longitudinem*», ma dev'essere «*crassitudinem*» o «*profunditatem*».
[9] Nell'originale «*communis*», ma è certamente un refuso per «*communi*».

sista secondo noi la continuità. Ma una volta ammessa la triplice estensione dello spazio, segue manifestamente che in esso si devono parimenti ammettere superfici prive di spessore, linee prive di larghezza, punti privi di qualunque dimensione. Riconosciuto questo, le dimostrazioni geometriche rimangono parimenti del tutto valide in tutto ciò che riguarda l'estensione continua dello spazio.

18. Dopo aver esposto queste cose, attinenti l'indivisibilità dei termini o limiti, dobbiamo procedere trattando la divisibilità all'infinito di ciò che è racchiuso fra i limiti. Anzitutto, ciò che è contenuto fra due termini indivisibili deve poter essere diviso e avere parti. Infatti, se fosse indivisibile e privo di parti, non potrebbe essere contiguo a uno qualsiasi dei due limiti (n. 10), ma dovrà compenetrarsi con esso e coincidervi del tutto. Pertanto, coincideranno fra loro anche i due limiti, sicché essi non sarebbero distanti l'uno dall'altro, ma si fonderebbero in un unico limite. Fatta invece la divisione, fra il nuovo limite ed entrambi i precedenti dovrà nuovamente giacere qualcosa di divisibile; e, applicando lo stesso argomento, la divisione potrà continuarsi all'infinito. Così, qualsiasi linea posta fra due punti potrà dividersi all'infinito per il fatto stesso di poter essere divisa una volta in due parti. Infatti, eseguita tale divisione in due parti limitate da un punto comune, le due parti a loro volta termineranno qui con un nuovo punto, lì con uno dei precedenti, sicché dovranno essere a loro volta divisibili, e con ciò il processo si ripete incessantemente senza fine.

19. Certo, in tal modo si deduce la divisibilità all'infinito del continuo esteso dalla natura stessa dell'estensione continua e dall'indivisibilità dei termini. Essa si dimostra pure in geometria sulla base di argomenti veramente innumerevoli, tanto da non lasciare spazio a dubbio alcuno. È messa per così dire dinanzi agli occhi dalla relazione fra quantità incommensurabili non rappresentabile da alcun numero finito, dall'angolo di contingenza intersecato da archi di circonferenze via via maggiori, dalle gambe asintotiche prolungate indefinitamente. Ecco il problema che generalmente viene risolto nei trattati di geometria elementare citati sopra: tagliare una retta data in un numero di parti dato; separare da una retta data la parte richiesta; date due rette qualunque, trovare una terza continuamente proporzionale. Di questi problemi, i primi due fanno vedere appunto la divisibilità all'infinito di una linea qualunque, mentre il terzo mostra che una grandezza qualsiasi può essere diminuita oltre qualunque limite determinato, così come può essere accresciuta oltre qualunque limite determinato. Infatti, se delle due grandezze date la seconda rimane costante e la prima viene accresciuta a piacere, la terza continuamente proporzionale diminuirà quanto si vorrà.

20. Indubbiamente è la stessa soluzione di quel problema a svelare la fonte di quel pregiudizio con cui ci affanniamo nel concepire il concetto di divisibilità all'infinito e di diminuzione di una grandezza oltre qualunque limite. Infatti, sin dall'infanzia ci siamo abituati a considerare grandezze non troppo sproporzionate rispetto al nostro corpo. Abbiamo visto che in grandezze siffatte era contenuto un numero non troppo grande di parti, che potevamo percepire attraverso i nostri sensi. Senza difficoltà ci siamo

convinti che, per divisione continua, si dovesse presto arrivare a grandezze che sfuggissero ai sensi. E infatti siamo soliti considerare come un nulla ciò che non cade sotto i nostri sensi – il che costituisce la principale fonte, sempre troppo facile da raggiungere, di pregiudizi comunemente diffusi. Ovvero, se mediante una qualche riflessione correggiamo le idee acquisite tramite i sensi, appena scesi al di sotto di quello stesso limite sensibile, il più delle volte, come sopraffatti, abbandoniamo l'impresa. Pochi, dotati di maggior acume intellettuale e di animo più audace, si elevano più in alto e, messo da parte ogni pregiudizio, contemplano la sola ragione, la sola natura. Ma sarà utile rafforzare più e più volte la debolezza della mente con certe immagini che, come i telescopi di solito avvicinano agli occhi i globi lontanissimi degli astri, siano in grado di rendere in qualche modo concretamente presenti alla mente le più nascoste e coperte verità come se fossero estratte dal terreno, e di offrirle all'osservazione.

21. Ma anzitutto, per eliminare la difficoltà che abbiamo incontrato nell'immaginare una così grande moltitudine di parti in qualsiasi quantità, per quanto piccola, immaginiamo un essere umano di taglia così gigantesca da superarci di tante volte quanto quelle di cui l'intero globo terrestre supera tale piccola quantità. Quell'individuo avrà la stessa difficoltà nell'immaginare la moltitudine delle parti di cui è formata la Terra, che abbiamo noi nell'immaginare la moltitudine delle parti che formano quella piccolissima quantità. Grande e piccolo sono concetti relativi, e con la medesima legge si potrebbe aumentare a dismisura sopra di noi la sequenza degli individui più grandi o diminuirla sotto di noi. E agli uni costoro apparirebbero del tutto indivisibili ai sensi; agli altri, invece, sembrerebbero racchiudere un'estensione immensa e un gran numero di parti.

22. Per adattare l'argomento positivo della divisibilità all'infinito alla comune capacità di comprendere, immaginiamo – secondo la concezione diffusa, stando a cui la materia ha estensione continua – due aste di spessore qualsiasi, che però siano almeno da una parte assai dritte e abbastanza lunghe: per esempio, misurino 100 palmi[10] ciascuna. Stando a quella concezione, ciò può indubbiamente accadere: infatti, se un'apertura facesse mancare un po' di rettilineità, si potrà rimediare aggiungendo; se ci fosse qualcosa in più, si potrà togliere. Dalla natura della rettilineità risultano evidentissimi due asserti del tipo seguente: 1. Se le due aste si toccano all'estremità e distano al vertice, distano pure nel punto medio. Infatti, è oltremodo evidente che, se per 50 palmi esse si corrispondono esattamente, non è possibile che poi si allontanino l'una dall'altra, a meno che una delle due o entrambe si discostino dalla rettilineità. 2. In quest'ultimo caso la loro distanza reciproca nel punto medio è minore che al vertice. Infatti, se per 50 palmi non si avvicinano per nulla, è certo evidentissimo che non si avvicineranno di alcunché nemmeno dopo altri 50 palmi. E non si è mai trovato alcuno il quale,

[10] Il riferimento è al sistema codificato da Vitruvio, ove un *palmus* (palmo) è costituito da quattro *digiti* (dita). Poiché un *digitus* corrisponde a circa 18,5 millimetri, 100 palmi equivalgono a 74 metri circa.

appena gli siano state sottoposte queste verità, non abbia ammesso che gli sono evidentissime.

23. Ciò premesso, si immagini di aver collocato aste siffatte, il primo giorno, in modo che si tocchino alla base e distino di un qualsiasi intervallo – per esempio, di un dito – al vertice. Per la prima proposizione disteranno anche nel punto medio; per la seconda, meno nel punto medio che al vertice. Il secondo giorno Dio potrebbe averle poste in modo che al vertice abbiano la stessa distanza che avevano il primo giorno nel punto medio. In quel giorno verrà sottratta una parte da quel dito. Infatti, il giorno prima erano meno distanti nel punto medio che al vertice, sicché il secondo giorno la loro distanza al vertice sarà inferiore rispetto al primo giorno. Ma poiché il secondo giorno distano al vertice, analogamente dovranno essere distanti l'una dall'altra anche al punto medio – e meno distanti al punto medio che al vertice. Perciò, il terzo giorno potranno essere collocate in modo tale che al vertice distino quanto il secondo giorno distavano nel punto medio; e argomentando allo stesso modo, si conclude che il terzo giorno è stata sottratta una particella da quel dito. Inoltre, la stessa cosa potrà ottenersi il quarto giorno e in tutti i giorni seguenti senza alcun termine. Infatti, non potrà mai arrivare il giorno in cui non sia lecito eseguire la medesima operazione, perché, se si dicesse che dovrà venire infine un giorno in cui non sia lecito procedere, si dovrà ammettere di aver fatto lo stesso fino al giorno prima, sicché quel giorno le aste divergevano al vertice. Per tale ragione, divergevano anche nel punto medio e, di conseguenza, il giorno successivo avrebbero potuto venir collocate in modo da rimanere aperte al vertice. Disposte in tal maniera, il giorno dopo dovranno distare anche nel punto medio. Dunque, sarà possibile sottrarre giorno per giorno sempre nuove parti di quello stesso dito, senza che tale processo abbia fine. Sicché quel dito – o qualsiasi altro intervallo, per il quale vale sempre la stessa argomentazione – si può dividere ancora e ancora, all'infinito.

24. Di fatto, questo argomento poggia interamente su un principio geometrico: *Due rette non hanno alcun segmento in comune*, e su un teorema anch'esso geometrico: *In triangoli simili i lati omologhi sono proporzionali*. Infatti, le due aste a due distanze diverse racchiudono due triangoli isosceli simili; di conseguenza, l'intervallo al punto medio, che in virtù del principio sopra riportato ci sarà sempre, dovrà essere la metà dell'intervallo al vertice. Tuttavia, per quelli che sono meno avvezzi alle dimostrazioni geometriche o che ritengono di non potervi riporre la propria fiducia, risulta in certo modo convincente prendere un intervallo di 50 palmi di spessore, per il quale aste dritte non possono coincidere se non per tutta la loro superficie, nonché assumere in maniera indefinita una diminuzione della distanza nel punto medio rispetto alla distanza al vertice, senza vedere che il motivo di ciò sono i triangoli e le proporzioni. Ma tutta la forza dell'argomentazione consiste nel fatto che, assunto un qualsiasi intervallo, se ne può trovare un altro più piccolo. E laddove ciò venga dimostrato una volta, segue necessariamente un progresso all'infinito, com'è accaduto sopra per la bisezione dell'angolo. D'altra parte, è evidente che chi volesse indebolire tale argomentazione

dovrebbe negare completamente la possibilità di avere aste assolutamente dritte, oppure sconvolgere e alterare l'idea di rettilineità, che abbiamo chiarissima. Ognun vede quanto siano misere queste scappatoie.

25. Per la nostra concezione della materia, secondo cui essa non ha estensione continua, la stessa argomentazione può avere la medesima validità immaginando tre punti disposti in linea retta, ove il punto centrale disti 100 palmi dal superiore e dall'inferiore; s'immagini poi che un quarto punto sia collocato al vertice, anch'esso a distanza di 100 palmi dall'inferiore e di un dito dal superiore. Allo stesso modo, a metà fra quest'ultimo punto e quello inferiore sia posto un quinto punto allineato. Tra di esso e il secondo punto medio fra i primi ci sarà necessariamente, per la natura della rettilineità, un certo intervallo, che sarà minore dell'intervallo fra il quarto punto e il superiore. Perciò, con il medesimo procedimento si avrà divisibilità all'infinito. Ma essa – sia per la natura dell'estensione continua sia per le innumerevoli dimostrazioni geometriche sia, infine, per l'argomento sopra esposto, ancor più adatto a essere comunemente compreso – è così evidente e chiara che nessuno individuo sano di mente potrà dubitarne.

26. Prima di andare avanti bisogna però notare che argomentazioni siffatte dimostrano tutte quante la divisibilità all'infinito di un intervallo, cioè di uno spazio esteso continuo, non della materia. Infatti, in primo luogo, c'è anche chi ritiene che una particella indivisibile e semplicissima di materia sia estesa in lunghezza, larghezza e profondità, ovvero sia estesa in uno spazio divisibile in modo da occupare lo spazio che dieci o cento particelle semplici analoghe, ma con minore estensione, potrebbero occupare. È ciò che alcuni peripatetici hanno chiamato estensione o divisibilità virtuale; anzi, taluni fra loro hanno ritenuto che quella medesima particella occupasse ora più ora meno spazio, parlando così di punti gonfiati. Spiegavano poi tale estensione prendendo a esempio l'anima razionale che, semplice e indivisibile, ammettevano estesa in tutto il corpo o in una sua certa parte comunque divisibile; prendevano poi a esempio l'immensità divina, la quale è sempre presente in tutti i punti dello spazio, a qualunque distanza si trovino. Questa concezione non ha mai potuto incontrare il nostro favore, poiché è assolutamente contraria all'analogia della natura e all'induzione tratta da ciò che vediamo. Infatti, qualsiasi cosa materiale vediamo collocata in una parte ben distinta di spazio, per quanto possiamo cogliere mediante osservazione, la vedremo distinta e separabile a propria volta da sé. Invece, secondo questa concezione – la cui falsità certo non può venire dimostrata in modo evidente con alcun argomento metafisico o geometrico –, è possibile concepire su un'unica particella indivisibile ogni genere di figure e sezioni, senza che vi siano parti reali in cui questa possa venire divisa.

27. Quindi, anche nella nostra concezione, secondo cui la materia è formata da punti assolutamente indivisibili e inestesi, e sempre separati fra loro da un qualche intervallo, una massa può consistere, per esempio, di mille punti soltanto. Potrà allora venire tagliata solo in mille parti, in modo che ciascuna di esse contenga un po' di materia.

Invece, se si aumenta il numero delle parti, verranno tagliati intervalli vuoti, e le parti in eccesso dovranno essere del tutto prive di materia. I suoi punti saranno o fra le mille particelle di spazio racchiuse da quella massa oppure nei limiti fra due particelle vicine.

28. Dimostrata l'indivisibilità dei limiti e la divisibilità di ciò che entro tali limiti è compreso, bisogna dedurre alcune cose che portano alla corretta comprensione della natura di qualunque continuo e della legge di continuità stessa. Ciò porta pure a evitare moltissimi errori, in cui cade non solo la gente comune, ma spesso anche autori assai competenti e di primo piano, attratti da pregiudizi così profondamente radicati nell'animo che inaspettatamente e gradatamente s'insinuano nell'argomentare e ammiccano furtivi. Parleremo anche dei punti e della linea. Tutto ciò che di essi si dice deve valere per tutti gli altri limiti e per tutte le altre quantità continue delimitate, per esempio per le linee rispetto alla superficie e per le superfici rispetto al solido.

29. In primo luogo, da ciò che abbiamo dimostrato segue evidentemente che i punti non sono parti di linea, bensì termini, sicché una linea non si compone di punti ma di lineette o segmenti, e in segmenti si divide. Infatti, le parti di una linea, ottenute per divisione proseguita all'infinito, sono sempre altre linee a sé stanti, limitate ciascuna da due punti estremi. Cioè, una linea viene descritta dal trascinare in modo continuo un punto, ovvero dal suo percorso continuo, non dall'aggiunta e ripetizione di esso, attaccato al precedente.

30. Dunque, si conclude con altrettanta evidenza che, dato un qualunque intervallo, non esiste una parte più piccola di tutte, in quanto una parte di qualsiasi linea è parimenti una linea, e qualsiasi linea è parimenti divisibile all'infinito. Per tale ragione, il nome *parte* in un'estensione continua comprende in sé necessariamente la congiunzione di più parti, sicché non c'è alcuna parte che, presa come un tutto, sia la prima o l'ultima di un dato intervallo, in modo che in essa non vi sia alcunché che non abbia dell'altro all'inizio davanti a sé e alla fine dopo di sé. Il nome stesso di parte è vago e indeterminato. Se si determinasse un numero di parti uguali di un intervallo determinato, risulterà pure determinata la grandezza delle singole parti; se a venire determinata fosse la grandezza delle parti, risulterà determinato il numero. In entrambi i casi qualcuna sarà la prima e la seconda, qualcun'altra l'ultima e la penultima. Ma, data una grandezza definita o assegnato un numero definito, il nome di parte non significa qualcosa d'indeterminato. A chi chieda quante parti ci siano in un dato intervallo si può rispondere in modo determinato solo se è determinata la loro grandezza, definita la quale anche il numero risulta determinato; d'altra parte, si può rispondere in maniera indeterminata, dicendo che il numero delle parti è infinitamente finito. Cioè, data una qualsiasi grandezza delle parti sarebbe finito; ma poiché questa può venire diminuita all'infinito, analogamente il loro numero può crescere all'infinito, cosicché non vi sia numero delle disposizioni e il numero delle particelle prese in qualunque disposizione sia sempre finito. Questa risposta, nella comune concezione dell'estensione continua

della materia, va incontro a una difficoltà in certo modo maggiore; ma non ne ha affatto nella nostra, ove l'intervallo (cioè lo spazio, come vedremo in seguito) non contiene nulla che esista realmente e in atto, e la divisibilità non è altro che, per così dire, l'inseribilità di punti reali.

31. Infine, cosa assai notevole, in qualsiasi intervallo determinato ci saranno sempre un primo e un ultimo punto, ma non un secondo o un penultimo. Infatti, poiché fra due punti deve sempre giacere una linea (n. 10), e tale linea è anch'essa sempre divisibile (n. 18), risulta oltremodo evidente che nessun punto è tanto vicino a un altro da far sì che non ve ne siano altri ancora più vicini. Sicché non c'è alcun secondo né penultimo numero. Se poi, ancora a proposito di questi punti, qualcuno domandasse quanti ve ne siano in un intervallo dato, stando alla diffusa concezione dell'estensione continua della materia si deve ammettere che il loro numero supera ogni altro, cioè che sono in numero infinito. Infatti, prima di essere separate con una divisione in atto, le parti sono completamente distinte l'una dall'altra: l'una non coincide con l'altra, sicché hanno un termine loro proprio che esiste laddove esso è. Per tale ragione, in una linea siffatta esistono tanti punti quante divisioni si possono fare, e poiché il numero delle divisioni possibili può superare qualsiasi numero finito, il numero dei punti esistenti in atto sarà anch'esso maggiore di qualsiasi numero finito: cioè sarà infinito. Invece, nella nostra concezione, in cui il numero di punti dello spazio consiste unicamente nella possibilità di inserire punti reali, si risponde che, come per le parti, il loro numero è finito all'infinito. In altre parole, il numero dei punti esistenti in atto sarà sempre in sé determinato e finito; ma può sempre aumentare senza fine. Invece, non possono esistere simultaneamente tutte le cose che, considerate separatamente, possono esistere solo separatamente, affinché l'Onnipotenza divina stessa non ne venga esaurita. (Ma di ciò tratteremo in seguito.)

32. Da quanto abbiamo detto segue che da nessuna linea si può togliere soltanto l'ultimo o il primo punto; invece, o le si deve sottrarre un infinito numero di punti togliendo una parte di un segmento oppure si deve lasciare anche il punto estremo. Infatti, tolto l'ultimo o il primo punto, la linea rimarrebbe comunque terminata, sicché avrà avuto un limite e, di conseguenza, un ultimo o un primo punto che, prima che le venisse sottratto il precedente ultimo o primo punto, doveva essere il penultimo o il secondo punto. Ma, come abbiamo visto, ciò è impossibile. La stessa cosa si otterrà in qualsiasi altra sequenza continua di quantità, come risulta da tutto ciò che abbiamo detto sopra. Infatti, se ci sono tutti gli altri, a mancare non potranno essere soltanto il primo o l'ultimo termine, per esempio l'ultima linea di una superficie finita, la superficie di un solido finito. L'applicazione di tale regola si ripresenterà in seguito, nello stabilire la legge di continuità.

33. Fra le cose continue bisogna annoverare anche il tempo, come abbiamo visto citando Aristotele. Il tempo, infatti, scorre continuo e le sue parti si succedono continuamente l'un l'altra senza alcuno stacco intermedio. Perciò anche nel tempo, come nella linea, dovremo distinguere un tempo continuo – per esempio, l'ora – da un termine o limite

che separa due tempi continui, che chiameremo istante. Il tempo continuo corrisponderà alla linea, l'istante al punto. L'istante sarà indivisibile come il punto; il tempo continuo, divisibile all'infinito come la linea. Come nella linea, nel tempo continuo non vi sarà alcuna particella piccola a piacere, tale che non possa essercene una ancora più piccola; né esisterà un intervallo di tempo così grande da non poter essercene uno ancora più grande. In una misura determinata di tempo continuo non ci sarà alcuna particella che, come un tutto, sia la prima o l'ultima. In qualsiasi intervallo finito di tempo, ci saranno sempre un primo e un ultimo istante; non ci saranno un secondo o un penultimo istante, ma fra due istanti qualsiasi, vicini a piacere (ed è cosa notevolissima), giacerà un tempo continuo in cui vi saranno altri istanti più prossimi a uno dei due estremi, come abbiamo detto per i punti nella linea. Come una linea viene generata da un flusso continuo di punti (e non dal ripeterli e dall'aumentarli), così il tempo è generato dalla durata continua di una cosa, che esiste in singoli istanti e dura per un tempo continuo.

34. In tutto questo, spazio e tempo si corrispondono completamente, e non c'è altra differenza fra loro, se non che lo spazio ha linee a una dimensione, superfici a due dimensioni e solidi a tre dimensioni, di conseguenza nelle linee può mutare lunghezza e posizione (cioè direzione); il tempo, invece, ha una sola dimensione, e muta unicamente in rapporto alla lunghezza della durata, non distinguendo la direzione, analogamente alla linea soltanto.

35. Dalla relazione fra le quantità continue della linea e del tempo hanno origine il moto continuo e la velocità. Questa può essere considerata tanto nel moto in atto quanto nella propensione al moto che un mobile possiede. Nella dissertazione *De viribus vivis* abbiamo chiamato il primo tipo di velocità, con termine assai opportuno, introdotto dagli scolastici, velocità in atto secondo; mentre abbiamo chiamato velocità in atto primo l'altro tipo di velocità. Moto continuo è quello in cui un punto mobile cambia ininterrottamente di posto, in modo tale che a singoli istanti di tempo corrispondano sempre singoli punti di spazio diversi fra loro. Se un punto mobile collegasse uno stesso punto di spazio con un numero finito di istanti che sono separati da un certo intervallo, si avrà il ritorno del punto mobile al medesimo punto di spazio; se esso congiungesse uno stesso punto di spazio con una sequenza continua di istanti, tutti contenuti entro un qualche tempo continuo, si avrà la quiete. Al contrario, se uno stesso istante di tempo fosse congiunto con un numero finito di punti di spazio, separati fra loro da un qualche intervallo finito, si avrà quella che si chiama replicazione; se uno stesso istante di tempo fosse congiunto con una sequenza continua di punti di spazio, contenuta in un qualche intervallo continuo finito, si avrà quella che abbiamo chiamato (n. 26) estensione virtuale. L'estensione virtuale di un punto di materia corrisponde alla quiete; la replicazione, al ritorno del medesimo punto di materia allo stesso punto di spazio. Considerando più punti di materia, avremo tre casi ulteriori: infatti, se si collega un medesimo istante di tempo con diversi punti di spazio, si ottiene la coesistenza dei disgiunti; se si collega un medesimo punto di spazio con istanti di tempo differenti, ciò significherebbe che punti di materia giungono gradualmente

nello stesso luogo; se si congiunge un medesimo punto di spazio con lo stesso istante di tempo, si ha la compenetrazione. Questi sette casi esprimono tutte le combinazioni causate dal nesso fra tempo e spazio. Mostreremo più avanti, quando avremo dedotto la nostra teoria dalla legge di continuità, che essi[11] sono tutti possibili all'Onnipotenza Divina, mentre solo la coesistenza dei disgiunti è possibile in natura.

36. Come a singoli istanti di tempo corrispondono, per un qualsiasi punto mobile, singoli punti di una linea, così alle singole parti di un tempo continuo corrispondono singole parti di una linea, e viceversa. Questo moto viene detto equabile o uniforme qualora a parti uguali di tempo corrispondano parti uguali di spazio; ineguale e non uniforme, se si tratta di parti disuguali. Invece, la velocità in atto secondo è la relazione fra spazio e tempo nel moto uniforme, la quale risulta prendendo lo spazio in proporzione diretta e il tempo in proporzione inversa. Sicché appunto la velocità sarà tanto maggiore quanto più spazio corrisponderà a uno stesso tempo, oppure quanto meno tempo corrisponderà a uno stesso spazio. Perciò la sua misura è spazio diviso tempo. Essa si ottiene precisamente solo nel moto uniforme, in cui la velocità rimane sempre invariata; analogamente, soltanto in quel moto si ha un'idea precisa della velocità in atto secondo. Invece, la velocità in atto primo è la propensione a questa stessa velocità in atto secondo, cioè la propensione a percorrere un certo spazio in un certo tempo che passa in modo continuo, se non vi sono impedimenti. Soltanto questa vale per i singoli istanti di tempo; non la velocità in atto secondo, poiché a un istante non corrisponde alcun moto, che contiene in sé il tempo continuo. Perciò, è questa la velocità cui devono riferirsi gli studiosi di meccanica quando moltiplicano per il tempo la velocità assegnata a singoli istanti, al fine di ottenere la misura dello spazio anche nel moto non uniforme.

37. Se una linea fosse composta di punti e un tempo continuo di istanti tali da succedere immediatamente gli uni agli altri, tutti i moti continui dovrebbero avere la stessa velocità: infatti, a istanti singoli corrisponderebbero singoli punti. Non possono esserci velocità diverse a meno che lo stesso punto di spazio venga unito da un altro punto mobile a più istanti (come hanno affermato coloro che spiegavano la differenza di velocità con le *morulae*, cioè delle brevi soste), oppure a meno che un medesimo punto-istante venisse congiunto con più punti di spazio (come hanno affermato alcuni fra coloro che sostenevano l'estensione virtuale dei punti). Però, una volta compresa la natura della continuità, non c'è alcuna difficoltà nel concepire la differenza di velocità, e quanto viene affermato in contrario è puro sofisma, che viene facilmente dissolto quando si osservi che, in qualunque moto, a qualsiasi tempuscolo piccolo a piacere corrisponde un suo spazietto e a qualsiasi spazietto il suo tempuscolo, e che non c'è alcun tempuscolo o spazietto più piccolo di tutti, alcun istante o punto che è il secondo o il penultimo.

---

[11] Nell'Errata Corrige dell'edizione Monaldini Boscovich emendava «*quorum*» con «*quos*». Ai fini della traduzione, la correzione è indifferente.

38. Ovviamente, in un moto continuo più veloce a uno stesso tempo corrisponde uno spazio maggiore, oppure a uno stesso spazio un tempo minore. Se in due mobili si considerasse sempre lo stesso intervallo di tempo e tale intervallo di tempo venisse diviso in un numero qualsiasi di parti piccole a piacere, posto però che il primo mobile si muova con una velocità dieci volte maggiore di quella del secondo, per qualunque particella piccola a piacere di tempo continuo si avrà, per il primo mobile, uno spazio dieci volte maggiore rispetto al secondo. Se si considera sempre lo spazio comune e se questo venisse diviso in un numero qualsiasi di particelle piccole a piacere, per ciascuna particella piccola a piacere di spazio continuo si avrà, per il primo mobile, un tempo dieci volte minore rispetto al secondo. In ciò non v'è alcunché di assurdo. Per quanto piccolo sia lo spazietto che il secondo mobile percorre in un determinato tempuscolo, ci saranno sempre spazietti via via più piccoli all'infinito, e uno di essi – ovviamente, quello che è dieci volte più piccolo rispetto al caso del secondo corpo – viene percorso dal primo mobile in quello stesso tempuscolo. Per quanto piccolo sia il tempuscolo in cui il primo mobile percorre un determinato spazietto, ci saranno sempre tempuscoli via via più piccoli all'infinito, e uno di essi – ovviamente, quello che è dieci volte più piccolo rispetto al caso del secondo corpo – viene percorso dal primo mobile. Poiché non esiste uno spazietto più piccolo di tutti e che perciò, preso nella sua totalità, sia il primo, né esiste un tempuscolo più piccolo di tutti e che perciò, preso nella sua totalità, sia il primo, e neppure c'è un secondo punto in un intervallo spaziale o un secondo istante in un intervallo temporale, svanisce completamente qualsiasi difficoltà. Il moto dell'uno e dell'altro mobile ha inizio in un determinato punto dello spazio e in un determinato istante di tempo, e lo stesso vale per la fine del moto. In tali istanti non c'è parte di moto, cioè di una quantità continua, bensì c'è un limite indivisibile. Il moto richiede uno spazio e un tempo continui, che sono divisibili all'infinito, e che perciò causano la divisibilità all'infinito del moto stesso. Il numero di parti (sia di spazio sia di tempo) e il moto dipendono dalla grandezza delle singole parti; se questa non fosse determinata, rimarrebbe indeterminato anche il numero, così come la relazione reciproca fra le parti. Stabilita la legge con cui si opera la divisione, la relazione fra le parti segue immediatamente. A una stessa parte di tempo continuo può corrispondere una parte di spazio più grande o più piccola a piacere all'infinito; ne viene pure che anche la velocità può aumentare o diminuire all'infinito, senza alcuna morula o estensione virtuale, cioè senza nesso di uno stesso istante di tempo con più punti di spazio o di uno stesso punto di spazio con più istanti di tempo.

39. Sarà poi possibile guardare in un certo modo con i propri occhi tutto questo, con l'aiuto della Geometria, nella relazione continua delle linee. Per qualunque punto D della retta AB (Figura 3) si conduca una retta illimitata MN, con un angolo qualunque; in essa si prendano, dalla stessa parte, due segmenti DE, DF che stanno fra loro in un qualsiasi rapporto dato, per esempio in un rapporto di dieci volte, come nel caso citato sopra. Analogamente, da un qualsiasi punto dato C della stessa AB, si conducano due rette CG, CH attraverso i punti F, E.

40. Rappresenti ora DC un certo tempo, DF lo spazio percorso dal primo mobile, DE lo spazio percorso dal secondo. Per quanto si riduca il tempo CD, il rapporto fra gli spazi descritti in quello stesso tempo sarà il medesimo di quello fra DF e DE, ossia 10 a 1, e non ci sarà alcun tempuscolo CD così piccolo o istante D così vicino all'istante C, tali che per entrambi i mobili non ci siano spazi continui che non stiano in quel medesimo rapporto. Se si chiedesse in quanto tempo il primo mobile percorra uno spazio uguale allo spazio DE, percorso dal secondo mobile nello tempo CD, sarà sufficiente condurre da E una retta parallela a AB, fino a incontrare la retta CG in L; quindi una retta LQ parallela a MN, che incontri CA, CH in Q, K. CQ[12] sarà il tempo cercato, nel quale il primo mobile avrà il moto QL uguale al moto ED. Ma in quel tempo più breve, il secondo mobile stesso avrà un moto ancora più piccolo, cioè QK. Nessuna FD è così piccola da non avere alcuna ED dieci volte più piccola corrispondente; nessuna CD è così piccola da non avere alcuna CQ corrispondente e analogamente dieci volte minore di essa, in quanto CQ sta a CD come QL (ovvero DE) sta a DF, ossia come 1 sta a 10. Il rapporto costante tra gli spazi DE, DF esprime il rapporto costante tra i moti occorsi nello stesso tempo; il rapporto anch'esso costante CQ, CD esprime il rapporto costante fra i tempi corrispondenti al medesimo spazio. A qualsiasi spazio piccolo a piacere descritto dal primo mobile corrisponde uno spazietto dieci volte minore descritto dal secondo; a qualsiasi tempuscolo piccolo a piacere impiegato dal primo mobile corrisponde un altro tempuscolo dieci volte minore, impiegato dal secondo. Ovunque sia situato il punto D, purché non coincida con C, devono corrispondervi sia DE sia DF, il primo dei quali sarà dieci volte più piccolo dell'altro. Posto fra D e C, il punto Q sarà dieci volte meno distante da C [rispetto alla distanza DC]; per esso passa un'altra retta M′N′, che analogamente avrà i segmenti QK, QL in rapporto di 1 a 10.

41. E con l'aiuto della stessa Figura 3 si risolve facilmente anche la difficoltà principale che gli antichi opponevano al moto continuo, derivata dal moto di Achille e della tartaruga, ove il primo è dieci volte più veloce della seconda. Questo argomento è stato assai felicemente risolto dal nostro Gregorio di Saint-Vincent con le somme, scoperte poco prima, delle progressioni geometriche. Comunque, per prima cosa esporremo la ben nota difficoltà; poi la scioglieremo unicamente mediante la natura della quantità continua; infine, chiamata a sostegno la geometria, offriremo agli occhi la stessa soluzione. Benché tutto ciò che riguarda questa questione[13] sia notissimo, tuttavia non abbiamo ritenuto di poterlo trascurare qui, essendovi qualcosa che permette di comprendere la natura della continuità e che è necessario per superare il dubbio dell'impossibilità [del moto continuo].

42. Dunque, ragioneremo in questo modo. All'inizio del moto, Achille disti mille passi dalla tartaruga. Mentre egli completa quei mille passi, la tartaruga ne percorrerà cento; mentre egli fa quei cento passi, la tartaruga ne fa altri dieci; mentre egli fa quei dieci,

---

[12] Nell'originale «C, Q», ma dev'essere un refuso per «CQ».
[13]* Nell'originale «*ad summum*», ma è un refuso per «*ad summam*»

la tartaruga ne compie uno; mentre egli ne fa uno, la tartaruga fa la decima parte di un passo, e così via all'infinito. Perciò, mai e in nessun luogo Achille potrà raggiungere la tartaruga; il che d'altra parte è assurdo. Infatti, se Achille, in un certo tempo assegnato, percorresse un miglio, mentre nel medesimo tempo la tartaruga percorre un decimo di miglio, lui le si avvicinerà di nove decimi di miglio; perciò, fatti uguali i tempi, poiché entrambi si muovono di moto uniforme, dovrebbe avvicinarsi a essa uniformemente. Se un tempo sta all'altro come 9 sta a 1, vi sarà quel tempo in cui la distanza fra loro deve svanire del tutto, e fra quei mille passi effettuati da Achille in quel tempo e lo spazio che lui doveva coprire per raggiungere la tartaruga ci sarà un rapporto di 9 a 1. Dunque, è falso che mai e in nessun luogo i due possano incontrarsi, poiché se a quel tempo e a quei mille passi si aggiunge la loro nona parte, si arriverà a quell'istante e a quel punto in cui deve aver luogo l'incontro. D'altra parte, l'apparente forza di questa difficoltà sta nell'ambiguità di significato delle espressioni *in nessun luogo* e *mai*.

43. Anzitutto, infatti, da tale divisibilità all'infinito di un intervallo finito si ricava in modo evidente che una sequenza di quantità via via più piccole può essere proseguita all'infinito senza che l'intera somma delle quantità oltrepassi una certa quantità finita. Com'è ovvio, poiché la lunghezza di un dito può essere divisa in due parti e la sua metà in altre due parti, e così via all'infinito, è evidente che si può prendere la metà di un dito, poi la metà della metà rimanente, e ancora la metà dell'altra metà, e così via all'infinito; ma, prendendole tutte, non si supererà mai quel dito, del quale si assume che rimane sempre una particella, dopo averne preso di nuovo soltanto metà.

44. Ma da ciò segue manifestamente che l'intera sequenza di passi 1000, 100, 10, 1, 1/10, 1/100, 1/1000 ecc., e la sequenza – a essa corrispondente – dei tempi impiegati da Achille e dalla tartaruga, possano essere proseguite all'infinito, senza che, tuttavia, la somma di quelle quantità oltrepassi uno spazio e un tempo finiti. Allora, di fatto, se quel *mai e in nessun luogo* indicasse un istante o un punto qualsiasi, contenuti entro quella misura finita di spazio o di tempo, sarà vero nel modo più assoluto che Achille non arriverà mai e in nessun luogo alla tartaruga. Ma se si riferissero in maniera indeterminata a un qualunque istante o punto a piacere, assunto in tutto quanto il tempo e lo spazio, secondo il significato abituale di tali espressioni, l'asserto sarà assolutamente falso. Achille, infatti, raggiungerà la tartaruga nell'ultimo istante e nell'ultimo punto di quello spazio e di quel tempo in cui si conclude tale sequenza proseguita all'infinito, da lui esaurita completamente.

45. Non è difficile definire tale misura finita di tempo o di spazio. Infatti, poiché qualsiasi termine precedente ha il medesimo rapporto col conseguente, anche la somma di tutti i precedenti e la somma di tutti i conseguenti avranno lo stesso rapporto; perciò, la differenza tra il primo e il secondo starà al primo come la differenza tra la somma di tutti i precedenti e la somma di tutti i conseguenti starà alla somma di tutti i precedenti, cioè all'intera serie. Inoltre, la somma di tutti i termini precedenti contiene tutti i termini della serie, poiché in qualsiasi numero finito di termini manca, nei precedenti,

solo il temine estremo, il quale, continuando la serie all'infinito, diminuisce sino a svanire, quando la si consideri tutta insieme. Invece, la somma di tutti i conseguenti li contiene tutti tranne il primo, sicché la differenza tra la prima e la seconda è unicamente il primo termine. Si ha, così, questo ben noto teorema: la differenza tra il primo ed il secondo termine sta al primo come il primo termine sta alla quantità finita che contiene l'intera serie in modo da esaurirla. Nel nostro caso si ottiene: mille passi (o il tempo impiegato da Achille per percorrerli) stanno alla misura di spazio (o di tempo) nel cui ultimo punto (o istante) Achille incontra la tartaruga come 9 sta a 1. Infatti, trascorso il tempo in cui Achille ha completato mille passi e trascorsa ancora la nona parte di questo tempo, Achille avrà compiuto mille passi più la nona parte di mille passi, mentre la tartaruga avrà fatto solo la nona parte di mille passi, il cui decuplo è appunto mille passi più la nona parte di quei mille passi, e lì s'incontrano. Con ciò si è stabilito lo stesso di quanto avevamo stabilito sopra, nell'argomentazione per assurdo, al n. 42.

46. Se si vuole visualizzare questa stessa soluzione, è sufficiente condurre, nella Figura 3, da K la retta KO, parallela a AB, fino a incontrare la retta CG in O, poi condurre per O la retta M″N″ parallela a MN; condotta nuovamente da P una retta parallela a AB, si potrà poi immaginare di ripetere la medesima costruzione all'infinito. Invece, condotta per C la retta *mn*, pure parallela a MN, se ne prendano i segmenti C*f*, C*l*, C*o* ecc., C*e*, C*k*, C*p*, ecc., uguali ai segmenti DF, QL, RO ecc., DE, QK, RP ecc.: sarà evidente che i punti *l*, *o*, ecc., devono coincidere con i punti *e*, *k*, ecc.

47. Poniamo ora che la retta AB esprima il tempo, il suo punto D sia l'istante in cui inizia il moto, FE sia pari a mille passi e il rapporto fra FD e ED, come prima, sia di 10 a 1. Inoltre, si immagini che la retta MN si sposti di moto continuo verso C, in modo che nel frattempo su di essa scorrano due mobili, di cui l'uno sia sempre all'intersezione di MN con la retta CG, l'altro all'intersezione di MN con CH. Quei due mobili riprodurranno appunto i moti di Achille e della tartaruga. Infatti, in primo luogo è chiaro che nel tempo DC il primo mobile dovrà percorrere sulla retta MN l'intero spazio FD (corrispondente a *f*C sulla retta *mn*), mentre il secondo mobile dovrà percorrere lo spazio ED (corrispondente a *e*C sulla retta *mn*), sicché le loro velocità staranno in rapporto di 10 a 1, mentre la distanza dall'inizio del moto sarà FE (ossia *fe*), pari a un miglio, analogamente a quanto abbiamo assunto nel caso di Achille e la tartaruga. È dunque evidente che quei mobili si incontreranno nell'istante C, spostatasi MN in *mn*, trascorso un certo tempo finito DC, e percorso il primo mobile uno spazio finito FD (ossia *f*C), il secondo mobile uno spazio ED (ossia *ed*).

48. Poi, per definire quel tempo e quegli spazi e visualizzare l'intera serie di termini che decrescono all'infinito in rapporto di 1 a 10, bisognerà anzitutto che CD stia a CQ come DF a QL (cioè a DE) appunto come 10 a 1. Per tale ragione, anche la differenza DQ tra gli antecedenti starà al secondo antecedente CQ come la differenza dei conseguenti EF sta al secondo conseguente ED, cioè come 9 a 1. Pertanto, lo spazio ED, percorso dalla tartaruga, e percorso da Achille dopo i suoi primi mille passi, è la nona

parte dei primi mille passi, e il tempo totale CQ impiegato da entrambi dopo che Achille ha compiuto i suoi mille passi è la nona parte di quel tempo in cui i mille passi sono stati fatti. Se poi consideriamo due successioni di linee DQ, RQ ecc., e FE, LK, OP ecc., oppure *fe*, *lk*, *op* ecc., troveremo che esse stanno nel rapporto costante FD : DE, sicché, nel caso presente, decrescono in rapporto 1 : 10. Infatti, CD sta a CQ come DF sta a QL, ossia DE, cioè (secondo il notissimo lemma di geometria in base a cui la retta CH, che passa per l'intersezione delle rette FL, DQ, taglia FD[14] e LQ, parallele fra loro, in E, K, mantenendo il rapporto invariato) come LQ sta a KQ (ossia RO), e perciò come CQ sta a CR. Per tale ragione, stanno nel rapporto continuo di 10 a 1 tanto le rette CD, CQ, CR, ecc. quanto le rette DF, QL, RO ecc., che sono proporzionali alle prime. Di conseguenza, nel medesimo rapporto continuo staranno tanto le differenze di queste (DQ, QR, ecc.) quanto le differenze di quelle (FE, LK, OP, ecc.).

49. È pure evidente che questa costruzione può venire proseguita all'infinito al di qua del punto C e che mai e in nessun luogo il punto C può venire oltrepassato, sicché l'intera serie di tempuscoli e spazietti, proseguita all'infinito, non oltrepassa assolutamente il tempo finito DC e lo spazio finito FD. E si dimostra anche facilmente che quei tempi CD e quegli spazi FD vengono esauriti da quelle serie, se esse vengono prese tutte insieme, essendo ciò facilmente dimostrabile sulla base della natura delle progressioni decrescenti. E nei trattati di geometria elementare si dimostra solitamente che i termini di queste progressioni decrescono all'infinito in modo da scendere al di sotto di qualunque grandezza fissata arbitrariamente. Per tale ragione, se si immagini una qualsiasi particella di tempo CD o di spazio C*f* piccola a piacere, prima o poi i termini delle progressioni CD, CQ, CR, ecc., C*f*, C*e*[15], C*k*, ecc. scenderanno sotto di essa. Di conseguenza, non ci sarà nessuna parte – per quanto davvero minuta – di quelle misure che le progressioni DQ, QR, ecc., FE, LK, OP, ecc. (ossia *fe*, *ek*, *kp*, ecc.) lascino intatta. Perciò, considerando ciascuna progressioni tutta in una volta, quelle progressioni esauriscono tali misure.

50. Riassumiamo ora la questione. Nel momento in cui Achille è in F (cioè in *f*) la tartaruga è in E (cioè in *e*). Nel tempo continuo DE Achille percorre i mille passi FE (vale a dire *fe*), la tartaruga completa la decima parte di mille passi, ovvero *ek*. Nell'ultimo istante di quell'intervallo temporale Achille è in L (cioè *l*, ovvero *e*), mentre la tartaruga è in K (cioè *k*). In un secondo tempo, che è un decimo del primo, Achille percorre lo spazio LK (cioè *lk*, ovvero *ek*), la tartaruga lo spazio OP (ovvero op, ossia *kp*). Nell'ultimo istante di questo tempuscolo Achille è in O (cioè *o*, ossia *k*), la tartaruga in P (cioè *p*); e così via con una serie di tempuscoli decrescenti in rapporto di 1 a 10: all'ultimo istante di uno qualsiasi di questi tempuscoli, Achille è in quel punto di spazio in cui si trovava la tartaruga nel primo istante di quel medesimo tempuscolo; nel tempuscolo immediatamente successivo Achille percorre quello spazietto che la tartaruga ha effettuato nel tempuscolo immediatamente precedente. Entrambe le serie di

[14]* Nell'originale «FP», ma è un refuso per «FD».
[15]* Nell'originale «C*e*, C*f*», ma è un refuso per «C*f*, C*e*».

spazietti e di tempuscoli possono essere proseguite all'infinito. Allo spazietto descritto da Achille in un certo tempuscolo corrisponderà sempre uno spazietto descritto dalla tartaruga nello stesso tempuscolo, equivalente a un decimo dello spazietto di Achille, che si porta dietro un nuovo tempuscolo successivo, pari a un decimo del precedente.

51. Considerando così i termini, non vi sarà per loro alcuna fine, se con la parola *fine* si intende il termine ultimo della considerazione effettuata in base a quell'ordine; ci sarà, invece, una fine, se con la parola *fine* si intende il tempo o lo spazio che l'intera serie, considerata come un tutto, esaurisce ma non oltrepassa. Infatti, tale serie di tempuscoli sarà contenuta tutta in un tempo finito CD, che essa, considerata come un tutto, completerà; la serie di spazietti sarà contenuta tutta in uno spazio finito DF (oppure C*f*), che essa, se considerata come un tutto, completerà. In nessun istante entro il tempo finito CD, in nessun punto entro lo spazio finito FD (cioè *f*C), Achille raggiungerà la tartaruga; infatti la incontrerà nell'istante e nel punto C. Perciò, sarà vero che mai e in nessun luogo costoro si incontreranno, se quel *mai* e *in nessun luogo* si riferisce a istanti e punti presi tutti entro un certo tempo finito CD ed entro uno spazio finito DF, C*f*. Non lo sarà, invece, qualora tale espressione venga intesa in modo indefinito, riferendola a un punto o a un istante qualsiasi, preso a piacere, sì da includere anche quell'istante o punto C.

52. Riconosciuta in tal modo correttamente la natura della continuità, svanisce ogni apparente, grave difficoltà. Si tenga sempre presente che a ogni *istante di tempo* corrisponde l'*essere in un qualche punto* dello spazio; a ogni intervallo temporale continuo, *percorrere un qualche spazio continuo*, cioè una linea. E non c'è istante o punto che segue immediatamente un altro istante o punto, ma fra due istanti o punti qualsiasi è sempre interposto un qualche tempo continuo o una linea continua, nei quali ci sono istanti e punti meno distanti quanto si vuole dall'uno o dall'altro dei due estremi rispetto alla distanza che li separa. Di conseguenza, non c'è tempuscolo o spazietto tanto piccolo, tale che non ve ne siano di più piccoli; perciò, non c'è un primo tempuscolo o spazietto tale che in esso non vi siano parti che ne precedano altre. Se si considerano adeguatamente queste cose e le si tengono presenti, svaniranno tutte le difficoltà circa la continuità. Proprio questa, nelle pagine seguenti, sarà la chiave più importante con cui dischiuderemo e dissolveremo la difficoltà contro la legge di continuità avanzata da Maupertuis contro [Johann] Bernoulli.

53. Intanto, per meglio cogliere la natura stessa della continuità e ciò che diremo circa la legge di continuità, gioverà moltissimo considerare con ben maggiore accuratezza il comportamento di un genere di quantità continua, cioè la linea. Prendere in considerazione la linea, infatti, implica avere a che fare con l'intera geometria superiore. Ma ci limiteremo a esaminare gli aspetti più utili per sommi capi. Anzitutto, in geometria ci sono infiniti generi di linee continue, che si chiamano anche luoghi geometrici, ciascuno dei quali ha una natura in sé assai semplice, anche se a noi spesso essa può risultare complessa e intricata. Tale natura da esse posseduta e certe proprietà generali

che ne derivano sono condivise in ogni loro punto, in modo che non vi sia alcun arco piccolo a piacere che non goda di quelle proprietà.

54. Ora, in ciascuna di quelle linee continue si avrà sempre la prosecuazione dello stesso corso, in modo tale che l'arco non s'interrompa mai né cessi o si fermi in alcun punto. Ciò è ben chiaro grazie a un'induzione amplissima che riguarda tutte le curve la cui natura è nota ai geometri; in verità, essa segue necessariamente dalla stessa natura della continuità e, in generale, si deduce facilmente. Infatti, qualunque punto dev'essere termine fra due parti di linea che si susseguono immediatamente, così come nel tempo un istante qualsiasi è termine fra un intervallo temporale precedente e uno successivo. Una linea di spazio differisce da una linea reale di materia (se solo tale linea continua di materia reale esistesse; nella nostra teoria essa non esiste assolutamente) per il fatto che, in una linea reale, qualunque punto intermedio è limite comune fra una parte e l'altra della linea. Ma qui il primo e l'ultimo punto costituiscono un limite fra una linea reale da una parte e uno spazio vuoto (cioè il nulla) dall'altra; invece, in una linea di spazio non ci sarà mai un punto in cui la linea stessa s'interrompa, tale da non essere preceduto e parimenti seguito da una linea. Di fatto ciò è richiesto dalla natura stessa del punto geometrico, tale da connettere e congiungere sempre due linee contigue, o disgiungerle e separarle. Infatti, svolge contemporaneamente entrambi i compiti, proprio come, nel tempo, qualunque istante è sempre tanto preceduto quanto seguito da un intervallo di tempo, e separa e disgiunge un certo passato dal futuro che segue immediatamente.

55. Da qui si comprende facilmente perché qualsiasi linea continua o torna circolarmente su se stessa oppure si allontana con una gamba all'infinito, oltre qualunque limite, senza subire mai un'interruzione tale da impedirle di proseguire. E anzi accade necessariamente che, qualora una sua gamba si allontani all'infinito da una parte, allo stesso modo anche l'altra gamba si allontana all'infinito, senza mai terminare, dalla stessa parte o dall'altra, e neppure subisce mai interruzioni di sorta. Davvero mirabili, d'altra parte, sono le caratteristiche tanto delle linee che ritornano circolarmente su se stesse quanto di quelle che si allontanano con una gamba all'infinito. Indubbiamente si dischiude qui un campo immenso, in cui si potrebbe correre e vagare senza riuscire mai a esplorarlo del tutto, non dirò con una breve dissertazione stretta entro limiti così angusti, ma persino con interi, ponderosi volumi. Ma dobbiamo assolutamente contenere l'impulso e scegliere soltanto le finalità principali.

56. Anzitutto, tutte le linee che tornano circolarmente su se stesse non hanno inizio né fine in alcun luogo, tornando su se stesse per così dire con un numero infinito di spire. Come sanno molto bene i geometri, è questo il caso del cerchio, che per il nostro intelletto umano è l'esempio più semplice e chiaro di tutte queste linee. Tale semplicità è l'unica ragione per cui non è assolutamente possibile ottenere la trisezione di un arco circolare attraverso la geometria euclidea. Così, infatti, abbiamo illustrato anche nei nostri *Sectionum conicarum elementa* (terzo volume degli *Elementa universae matheseos*) a partire dal n. 278: se ci si propone di tagliare un arco di un determinato

cerchio AB (Figura 4) in tre parti uguali, a prima vista l’arco assegnato sembrerebbe il solo che può essere tagliato in tre parti; tuttavia, ce ne sono infiniti. Infatti, poiché un cerchio torna su se stesso girando, per così dire, con infinite spire, il punto A – oppure il punto B – è comune all’infinito numero delle spire. Infiniti archi cominciano in A e finiscono in B in entrambe le direzioni, come in AEB così in AFB. Tutti godono esattamente della stessa natura (i loro punti, cioè, stanno tutti alla medesima distanza dal centro) e hanno le medesime proprietà generali (per esempio, loro parti uguali sono sottese da corde uguali, ugualmente inclinate le une rispetto alle altre). Dunque, gli archi nella prima direzione sono: AEB, AEBFAEB, AEBFAEBFAEB, e così via; nella seconda direzione, invece: AFB, AFBEAFB, AFBEAFBEAFB e così via. Il primo arco AEB sia di gradi 60, AFB sarà di 300 gradi: fra A e B saranno contenuti tutti gli archi espressi da un numero di gradi composto da 60 (oppure 300) e dalla continua addizione di 360, cioè gli archi 60, 420, 780, 1140 ecc.; 300, 660, 1020, 1380 ecc.

57. Ora, per la natura e le proprietà comuni a tutte le linee continue, non può assolutamente accadere che – dato un qualunque luogo geometrico o tratta una qualsiasi costruzione geometrica dalla sola natura e dalle proprietà dell’arco che ha inizio in A e fine in B – si trovi la terza parte di uno di quegli archi, senza contemporaneamente trovare la terza parte di tutte le altre, che come abbiamo detto, sono in numero infinito. Sicché quel problema che sembrava avere un’unica soluzione appare ora richiedere infinite soluzioni. Ma capita a proposito che tutte quelle infinite soluzioni si riducano a tre soltanto, cioè al ritrovamento di tre soli punti. Infatti, se AD (di 20 gradi) è la terza parte dell’arco AEB (di 60 gradi), aggiungendo DD′ (120 gradi), che è la terza parte dell’intera circonferenza di 360 gradi, AD′ (140 gradi), sarà la terza parte dell’arco AEBFAEB (420 gradi), composto da AEB più una circonferenza. Aggiungendo ancora l’arco D′D″ (120 gradi), terza parte dell’intera circonferenza, si avrà l’arco ADBD′FD″[16] (260 gradi), che è la terza parte dell’arco AEBFAEBFAEB (780 gradi), composto da AEB più due circonferenze. E poiché anche D″D equivale alla terza parte di un cerchio, l’arco AEBFAD, composto dall’arco AD più una circonferenza, sarà la terza parte dell’arco che inizia in A e termina in B dopo tre giri interi; analogamente, l’arco AEBFAEBD′ sarà la terza parte dell’arco che inizia in A e termina in B dopo quattro giri, e così via all’infinito. Poiché all’arco su cui effettuare la trisezione sono state aggiunte nuove circonferenze intere e poiché alla terza parte dell’arco si aggiungono terzi di circonferenza, è evidente che tutti gli archi che iniziano in A e terminano in B secondo l’ordine AEB, dopo aver compiuto per intero quanti giri si vogliano, vengono tagliati in tre parti uguali in uno dei tre punti D, D′, D″; per converso, essendo AD un terzo dell’arco AEB, e DD′ un terzo dell’intera circonferenza, AD″ sarà un terzo dell’arco AFB e, ragionando allo stesso modo, AFD′ sarà un terzo dell’arco che aggiunge a AFB tutto un giro dell’arco composto da AFB, AFBED e due circonferenze. Analogamente, ciò vale per tutti gli archi che escono da

[16]* Nell’originale «ADB′DFD″», ma è certamente un refuso per «ADBD′FD″».

A e terminano in B passando per F dopo aver percorso qualunque numero di giri: se essi devono venire tagliati in tre parti, si avrà sempre il taglio di un terzo in uno di quegli stessi punti D″, D′, D. Per tale ragione, tutte quelle infinite soluzioni si riducono all'individuazione di questi tre punti soltanto.

58. Inoltre, a questo fine si cerca il luogo geometrico che taglia quello stesso cerchio in quei tre punti, oppure due luoghi geometrici che possano intersecarsi a vicenda in tre punti: poiché due rette che s'intersecano a vicenda o una retta che interseca un cerchio non lo possono fare (infatti, nel primo caso può esserci una sola intersezione, nel secondo può esservene unicamente una doppia), ma possono farlo due sezioni coniche o una sezione conica soltanto (o anche una qualsiasi curva superiore) che intersecano un cerchio, in generale la trisezione di un arco circolare non potrà mai essere effettuata mediante la geometria di Euclide, che si serve unicamente di rette e cerchi; si potrà bensì effettuare mediante le sezioni coniche o anche per mezzo di qualsiasi curva superiore. Se poi si tentasse di trovare la soluzione mediante l'analisi algebrica, si dovrà sempre e necessariamente pervenire a un'equazione di terzo grado che abbia tutte e tre le radici reali, ove quelle loro radici esprimano tutti e tre quei punti. Se si fosse tenuto presente ciò, avendo riflettuto a sufficienza sulla natura della continuità e su quella del cerchio, privo d'inizio e di fine perché si avvolge infinitamente su se stesso, non sarebbe capitato a un numero così grande di persone di sudare invano alla ricerca di una soluzione per questo problema con metodi incapaci di procurarla.

59. Ovviamente, ciò che abbiamo detto del cerchio vale generalmente per tutte le curve che in qualunque modo tornano circolarmente su se stesse. Vi sono infiniti tipi di tali curve, sicché non è assolutamente possibile trattarle tutte. Parimenti infiniti sono i tipi di linee che si allontanano con una o più gambe all'infinito, senza che vi sia alcun limite. La più semplice di tutte, per la nostra mente umana, è la linea retta, la quale per sua natura si estende all'infinito da entrambe le parti e di fatto in nessun luogo s'interrompe sì da non poter essere proseguita. Essa ha, per così dire, due gambe infinite. Analogamente, anche la parabola ha due gambe; l'iperbole, invece, ne ha quattro, come ben sanno i geometri. Ci soffermeremo qualche tempo a trattarle, affinché si chiarisca la natura della continuità. Del resto, di cose che riguardano questi aspetti abbiamo trattato più dettagliatamente in una dissertazione più ampia, aggiunta ai già ricordati *Elementi delle sezioni coniche*[17]. Lì, discutendo la trasformazione dei luoghi geometrici, ci siamo occupati in modo assai accurato di parecchie cose che riguardano la natura della continuità geometrica.

60. Anzitutto (Figura 5) sia una retta AB, che si immagini prolungata quanto più possibile da entrambe le parti. Si scelga un qualsiasi punto H su di essa e un punto C a essa esterno, per il quale passi una retta GF, anch'essa prolungata il più possibile, che, supposto che non coincida con DCE (parallela a AB), la intersechi in un punto P.

[17] Boscovich si riferisce al già citato *De transformatione locorum geometricorum*.

Immaginiamo ora che quella retta GF[18] coincida dapprima con CH[19] e poi sia fatta ruotare incessantemente su C in direzione di A. Dapprima il punto P si troverà ovviamente in H, poi scorrerà con moto continuo lungo tutta la retta HA in modo che non vi sia alcun punto su di essa, a qualsiasi distanza da H, cui non possa arrivare prima di coincidere con la retta ED, parallela a BA stessa. Nell'istante in cui la retta GF vi coinciderà, l'intersezione P non sarà in alcun posto, bensì rimarrà nascosta, come sommersa e sepolta in una sorta di mare e abisso dell'infinito. Ma in uno qualsiasi degli istanti successivi, trascorrendo GF in G′F′, l'intersezione P′ tornerà dall'infinito dalla parte di B, in modo che non vi sia alcun punto della sua gamba infinita HB per il quale non passi; e in modo che, percorsa quella gamba completamente, arrivi di nuovo in H. Bisogna qui vedere un meraviglioso nesso della retta infinita che torna in qualche modo su se stessa passando per l'infinito, cosicché le sue due gambe HB, HA in qualche modo si uniscano e si congiungano a quell'infinita distanza. Proprio in tal modo l'infinito è come un punto comune che congiunge entrambe le gambe dalla parte di HB e HA, così come il punto H le connette ed è loro termine comune dalla parte di BH e AH. Infatti, se si concepisce il moto continuo dell'intersezione P congiunto con il moto continuo GF, indicando la proprietà di trovarsi all'infinito con il segno ∞, l'infinito apparirà prodursi per HA∞BH, e in modo che questa intersezione si trovi, in un istante qualsiasi, in un qualche punto di quella specie di cerchio infinito, passando dalla gamba HA alla gamba HB per il termine comune ∞. Proseguendo la retta che ruota su se stessa il proprio moto, l'intersezione porta a termine due volte un giro intero in singoli ribaltamenti; e di fatto la retta stessa, prolungata da entrambe le parti all'infinito, si riduce in qualche modo a un cerchio per così dire infinito, che ritorna su di sé compiendo incessantemente infiniti giri.

61. Tale equivalenza con un cerchio infinito si constata anche nella Figura 6. Si prenda su AB il punto C, sul quale ruota incessantemente la retta GF, incontrando sempre in un qualche punto P la retta QHR perpendicolare a AB; si immagini poi un cerchio HMIN con centro in P e raggio PH, e si considerino tutte le variazioni che l'arco MHN subisce nel corso di tale continuo moto. Sarà facile vedere che, avvicinandosi la retta GF alla posizione della retta ECD, parallela a QR, il punto P si allontanerà da H, il cerchio crescerà e l'arco MHN si avvicinerà incessantemente alla retta AH. La retta GF oltrepasserà AH con moto continuo, finendo dalla parte opposta, in M′HN′, mentre, avendo la stessa GF superato la posizione ED, il punto P, dopo aver superato l'infinito ∞, trascorrerà dalla parte Q. In tale passaggio è evidente che quell'arco transita per quella stessa retta, avvicinandosi la retta GF a ED e il punto P all'infinito ∞; infatti, a tutti gli istanti rimanenti corrispondono sempre altri stati della circonferenza cui l'arco appartiene, da una parte o dall'altra della stessa retta AHB. Questi stati, nel corso di quel moto continuo, radono tutto quanto lo spazio posto da entrambe le parti, e per così dire lo spazzano in modo che di quello spazio non possa darsi alcun punto

---

18* Nell'originale «GE», ma è un refuso per «GF».
19* Nell'originale «CG», ma è un refuso per «CH».

che, per una qualche posizione del punto P (che esiste da una parte o dall'altra sulle rette HQ, HR[20]), non venga raggiunto da quell'arco di cerchio. Perciò, in quell'unico istante in cui la retta GF coincide con ED[21], e il punto P con l'infinito ∞, si ha quello stato unico in cui la circonferenza MHN coincide con la retta infinita AHB. Di conseguenza, l'arco deve trovarsi in tale stato nell'istante in cui il centro P del cerchio e l'estremo I del diametro non sono più in alcun posto, in cui il cerchio stesso è divenuto infinito, la curvatura è scomparsa completamente e alla circonferenza infinita è seguita una retta.

62. Se si immagina che la retta CP incontri in *c* la circonferenza, sono archi continui del cerchio HMINH, che iniziano in H e terminano in *c*, entrambi gli archi H*c* ed HMI*c*, che vanno in direzioni opposte. Anzi, stando al n. 56, essi sono infiniti in ambedue le direzioni, così come i segmenti nella retta infinita HA∞BH, che sono come archi che iniziano in H e terminano in C, vanno sia nell'una direzione sia nell'altra direzione. Cioè si tratta di HC e HA∞BC, e degli infiniti HCB∞AHC, HCB∞AHCB∞AHC ecc. e HA∞BCHA∞BCHA[22]∞BCHA∞BCHA∞BC ecc. Quale meraviglioso impiego si farebbe di questa considerazione nella dissertazione citata per illustrare un'analogia reciproca di ellisse e iperbole, dove sembrerebbero invece sovvertirla massimamente!

63. Ma non meno elegante e insieme misteriosa è una certa continuità degli archi sia parabolici sia iperbolici e la loro congiunzione a quella distanza infinita. Sia DVE (Figura 7) l'asse, AVB una tangente alla parabola MVN, che si immagina prolungata a sufficienza. In tutti i trattati elementari sulle sezioni coniche si dimostra che le gambe VM, VN si allontanano fra loro all'infinito, così come dall'asse e dalla tangente[23]. Ed ecco: per qualsiasi punto Q della tangente o per un punto R dell'asse lontano a piacere da V si conduca una retta perpendicolare alla tangente o all'asse: l'una dovrà incontrare in qualche luogo una delle due gambe, l'altra dovrà incontrarle entrambe da tutte e due le parti. Condotta poi una qualsiasi retta FG attraverso V da una parte o dall'altra dell'asse, che non incontra una seconda volta alcuna delle due gambe, si dimostra che in qualche luogo essa deve incontrare di nuovo in P l'una o l'altra gamba, a meno che essa non sia la stessa tangente, nel qual caso i punti P, V coincidono. Dunque, si immagini che GVP venga fatta ruotare con moto continuo, e si osservi il moto continuo del punto P. Allontanatasi la retta dalla posizione della tangente BA, il punto P si separerà da V e percorrerà l'intera gamba VM, occupandovi sempre una certa posizione, per quanto poco FG disti dall'asse ED. E nella stessa gamba VM non ci sarà alcun punto lontano a piacere da V cui P non giungerà. In quell'unico istante in cui

---

[20] Intendi: il punto P appartiene alla semiretta HQ o alla semiretta HR (si tratta di una condizione mutuamente esclusiva: vale a dire, se non si trova sull'una, si deve trovare necessariamente sull'altra, ma non può trovarsi su entrambe).

[21] Nell'originale «FD», ma dev'essere un refuso per «ED».

[22] Nell'originale «BC,HA», ma la virgola dev'essere un refuso.

[23] Quanto all'opera di Boscovich, la dimostrazione è contenuta al n. 696 di *Elementorum universae matheseos tomus* III, cit.

la retta coincide con l'asse, il punto P non sarà in alcun posto, sepolto dall'infinito. Ma, trascorrendo FG in F′G′ dalla parte opposta, quello stesso punto tornerà dall'infinito attraverso tutti i punti P′ della gamba infinita NP′V, finché, passando F′G′ in BA, farà ritorno in V. Poiché il moto di quella retta attorno a V è continuo, lo sarà anche il moto del punto P per tutta la parabola, così da percorrerla due volte interamente da una gamba all'altra, nell'avvicinarsi della retta alla tangente passando per V (nell'istante in cui le gambe della parabola appaiono collegate da un termine comune V), e nell'avvicinarsi della retta all'asse passando per l'infinito (nell'istante in cui in qualche modo le due gambe vengono collegate a quelle infinite distanze opposte dall'asse, come se la regione di sinistra – come si vede nel caso della retta – si unisse con quella di destra). Il punto P, che si allontana all'infinito lungo la retta RP, tornerebbe dall'infinito dalla parte opposta P′, e la parabola stessa, a quella distanza infinita, in qualche modo ritornerebbe per così dire su se stessa, unita da un termine comune all'infinito.

64. Ovviamente, in una parabola conica la gamba NV torna dall'infinito dalla medesima parte VE dell'asse in cui la gamba VM si sarà allontanata all'infinito. Se si considerassero in generale le curve la cui ordinata PR sta in qualsiasi rapporto diretto di qualsiasi potenza intera o frazionaria con l'ascissa VR – ci siamo occupati dettagliatamente di queste curve, insieme con quelle in cui le ordinate stanno in rapporto inverso con le ascisse, nella dissertazione citata sopra[24] – e se la direzione e la continuità geometrica dei loro archi fossero determinate, si avranno parabole di ordine superiore. In tali curve la gamba VN torna dalla parte opposta; oppure (Figura 8) nel l'angolo AVD giacente di lato alla tangente: in questo caso abbiamo una cuspide in V, che in quel trattato abbiamo chiamato del primo genere e, come pure sono soliti dire i geometri, punto di regresso; o ancora (Figura 9), nell'angolo DVB opposto al vertice: in tal caso si ha in V un flesso contrario. In quello stesso trattato abbiamo dimostrato che tutta la famiglia delle parabole di ordine superiore si riduce a questi tre casi.

65. Certamente tutte le parabole, in cui le ordinate stanno in un qualche rapporto diretto con l'ascissa, hanno solo due gambe infinite; invece le iperboli, ove tale rapporto è inverso, ne hanno quattro ciascuna; essi, presi a due a due, formano i loro due rami. Questi, poi, sembrano assolutamente disgiunti l'uno dall'altro. Tuttavia quei due rami si congiungono in uno solo a distanza infinita a opera delle quattro gambe, sì da costituire un'unica linea continua, che all'infinito è generalmente congiunta alle parti contrapposte. Sicché, un punto in moto continuo può percorrerle e, dopo essersi allontanato all'infinito lungo una gamba, tornare dall'infinito lungo l'altra. Fra queste gambe e quelle della parabola c'è la differenza seguente: quelle della parabola si allontanano incessantemente all'infinito dall'asse e da qualsiasi altra retta; quelle delle iperboli hanno una retta cui si avvicinano oltre qualunque limite, senza mai toccarle in un punto qualsiasi, lontano a piacere. Perciò tale retta è chiamata asintoto. Sarà possibile osservare questo problema nella comune iperbole conica.

[24] Boscovich allude al già citato *De transformatione locorum geometricorum*.

66. La Figura 10 riporta i due rami d'iperbole MVN, M′V′N′, costituiti da quattro gambe asintotiche infinite VM, VN, V′N′, V′M′[25], i cui due asintoti sono le due rette illimitate ACB, DCE. In uno dei rami si prenda un punto V a piacere, per il quale passi la tangente QVR; allora, una qualsiasi delle rette $G_i VF_i$ incontrerà l'iperbole in un uno solo dei punti P_i, eccetto le due rette F_2G_2 e F_5G_5, parallele ai due asintoti. Ciò si dimostra, di solito, nei comuni trattati elementari sulle sezioni coniche[26], o da essi facilmente si deduce. Perciò, se immaginiamo che la retta stessa, allontanatasi dalla posizione della tangente QR, ruoti con moto continuo su V in direzione di F_1G_1, e fissiamo l'attenzione sul moto continuo del punto P, apparirà chiaro che il punto P_1 percorre l'intera gamba infinita VM, finché F_5G_5 – che finisce in F_2G_2 – diventa parallela all'asintoto BA. In quell'istante il punto P, che scompare nell'infinito, non si troverà in alcun posto. Proseguendo il moto lungo F_3G_3, esso ritornerà dall'infinito in P_3 e descriverà l'intera gamba M′V′ del ramo opposto; poi, giunto in P_4 lungo la gamba V′N′, col moto continuo della retta F_4G_4 si allontanerà all'infinito dalla parte di N′, finché la retta va a finire in F_5G_5, parallela all'asintoto DE. In quell'istante il punto P scompare nuovamente nell'infinito. Ma in qualsiasi istante successivo, passata la retta in F_6G_6, esso ritornerà dall'infinito in P_6, lungo la gamba infinita NV. E, non appena la retta ricade sulla tangente QR dopo aver compiuto mezzo giro, il punto P ritornerà a V, da dove era partito, avendo percorso l'intera iperbole.

67. È evidente, da tale moto continuo, che l'uno e l'altro ramo dell'iperbole costituiscono un'unica curva geometrica continua VMM′V′N′NV. Essa si allontana per due volte all'infinito e due volte ritorna in qualche modo dall'infinito dalla parte opposta, essendo le sue gambe infinite due volte collegate anch'esse nell'infinito, sebbene da parti opposte, mediante un certo termine comune; allo stesso esse si congiungono a distanza finita in un solo punto comune, V e V′. D'altra parte, si può osservare qui l'elegantissima analogia dell'iperbole con la parabola e l'ellisse, che abbiamo trattato in maniera leggermente diversa nella tante volte ricordata dissertazione aggiunta al terzo volume dei nostri *Elementi*[27]. Si abbia (Figura 11) l'ellisse OVO′V′, ove i punti VV′[28] siano due vertici sull'asse trasverso [asse maggiore] o sul diametro a esso più prossimo, e OO′ dell'asse coniugato [asse minore]; sia poi QVR una tangente all'ellisse, F_iVG_i[29] una qualsiasi altra retta, tale che F_2G_2 e F_5G_5 passino per O e O′ rispettivamente; le quattro rette rimanenti taglino ciascuna uno dei quattro archi VO, OV′, VO′, O′V, in P_1, P_3, P_4, P_6. Se ora la retta FVG, allontanatasi dalla posizione della tangente QVR, viene fatta ruotare con moto continuo su V (ponendo, inoltre, da una

[25] Nel testo originale: «V′N′, V′M′», ma, osservando la figura, si tratta di refusi per «V′N, VM′».
[26] La dimostrazione è data in R.G. Boscovich, *Elementorum universae matheseos tomus III*, cit., nn. 754 e seguenti.
[27] Il riferimento è a R.G. Boscovich, *De transformatione locorum geometricorum*, cit., nn. 754 e seguenti.
[28]* Nell'originale «V′V′», ma si tratta certamente di un refuso per «VV′».
[29]* Nell'originale «FV′G», ma si tratta certamente di un refuso per «FVG».

parte e dall'altra di O le due lettere M[30], M′, e da una parte e dall'altra di O′ le due lettere N, N′), il punto P percorrerà per intero l'ellisse, con moto anch'esso continuo, nello stesso ordine in cui percorreva tutta l'iperbole. I due rami dell'iperbole MVN, N′V′M′ corrispondono alle due semiellissi MVN, N′V′M′; i quattro archi dell'ellisse VM, M′V′, V′N′, NV corrispondono alle quattro gambe dell'iperbole VM, M′V′, V′N′, NV. Gli archi dell'ellisse si congiungono nei due punti V, V′, e analogamente negli altri due punti O, O′; a loro volta, le gambe dell'iperbole si connettono nei due punti V, V′ e nei due punti per così dire all'infinito ∞, ∞′, il primo dei quali giace sulla retta AB, il secondo sulla retta ED. In tali punti all'infinito le congiunzioni, condotte sin lì dopo aver attraversato tutte le grandezze finite, si nascondono. È unico il circuito continuo percorso dall'ellisse che ritorna su se stessa, VMOM′V′N′O′NV; è unico il circuito geometrico continuo dell'iperbole che ritorna su se stessa lungo VM∞M′V′N∞′ NV. Né l'uno né l'altro vengono interrotti; né l'uno né l'altro hanno un termine che non sia comune alle due linee giacenti dall'una e dall'altra parte.

68. Certamente si può già osservare qui il passaggio, anch'esso continuo, dall'ellisse all'iperbole attraverso la parabola, così come un certo nesso fra loro, davvero prodigioso, in cui anche il passaggio istantaneo da una parte all'altra attraverso l'immensa apertura della parabola – passaggio che al n. 63 abbiamo osservato lungo la congiunzione della retta che si allontana all'infinito da entrambe le parti e all'infinito torna in qualche modo su se stessa – ci si propone nuovamente sotto l'altro aspetto di un'intera apertura infinita che equivale a un unico punto. Tuttavia, ciò avrà già a che fare con quei misteri dell'infinito che degenerano in autentici assurdi e che ci offriranno l'occasione di togliere di mezzo le quantità assolute sia infinite sia infinitesime, in sé determinate ed esistenti in atto. Ciò si trova in meraviglioso accordo con la nostra teoria dei punti indivisibili.

69. Com'è ben noto dagli abituali trattati elementari sulle sezioni coniche, la sezione di un cono parallela alla base dà luogo a un cerchio, il quale, variando l'inclinazione della sezione, degenererà in un'ellisse. D'altra parte, per il moto continuo della sezione piana, l'ellisse si allunga in modo tale da trasformarsi in una parabola, allorché il piano [secante] finisca per essere parallelo a un piano qualsiasi che passi per il vertice; poi, continuando il moto del piano secante, la sezione diverrà un'iperbole, la cui forma muterà incessantemente finché, passando quello stesso piano per il vertice, l'iperbole finisce col diventare una retta. In tali trasformazioni la parabola, che è una sola, è un limite indivisibile, attraverso il quale in un istante ha luogo il passaggio da una serie continua di ellissi a una serie continua di iperboli. Di questa e di svariate altre trasformazioni analoghe di tali curve le une nelle altre – in un cerchio o in una retta –, nonché delle mutazioni continue che i loro punti e le loro linee subiscono nel frattempo, ci siamo occupati in modo esteso e accurato nella dissertazione più volte citata[31], e chi la vedrà acquisirà qualche nozione, per nulla di poco conto, circa la

[30]* Nell'originale «M′», ma si tratta certamente di un refuso per «M».
[31] Il riferimento è a R.G. Boscovich, *De transformatione locorum geometricorum*, cit.

continuità geometrica. Qui accenneremo solamente a ciò che riguarda la considerazione di questa congiunzione a distanza infinita, così come il ritorno di qualsiasi sezione conica su se stessa, che si osserva in tale passaggio attraverso l'unico caso della parabola e l'allontanarsi di punti all'infinito.

70. Infatti, via via che l'ellisse della Figura 11 si avvicina con moto continuo a una parabola, l'intera semiellisse OM′V′N′O′[32] si allontana all'infinito oltre ogni limite, e gli stessi punti O, O′ si allontanano fra loro all'infinito, crescendo all'infinito l'asse coniugato dell'ellisse. Nell'istante in cui l'ellisse degenera in parabola, i punti O, O′[33] insieme con l'arco M′V′N′ non sono in nessun luogo, ma scompaiono come sepolti dall'infinito. Invece, dalla parte di V resta l'arco MVN con le due gambe prolungate all'infinito, mai interrotto o arrestato, ma sempre in qualche modo proseguito in quella distanza infinita tra i punti O, O′ che scompaiono nell'infinito. Si tratta ancora dell'idea menzionata sopra della retta e della parabola che ritornano su se stesse da distanze opposte. Continuando poi il moto del piano secante, la sezione si trasforma nell'iperbole della Figura 10, per allontanamento dall'infinito dalle parti opposte dell'arco N′V′M′. In qualsiasi ellisse, nella Figura 11, esso si collegava con l'arco MVN nei punti dati O, O′; nella parabola non si trovava da nessuna parte, sepolto dall'infinito; nell'iperbole si congiunge in qualche modo con l'arco MVN in due punti dell'infinito, l'uno su BA, l'altro su DE.

71. Da ciò seguono parecchie cose assai adatte alla comprensione della natura e della continuità geometrica delle sezioni coniche. Fra queste: all'asse finito VCV′ dell'ellisse, posto il centro in C, non corrisponde nell'iperbole l'asse finito VCV′, bensì l'asse V∞V′, ottenuto passando dalla parte opposta per l'infinito. Al centro finito C dell'ellisse non corrisponde il centro C, anch'esso finito, dell'iperbole, bensì un diverso centro nascosto nell'infinito, e viceversa. Poiché, infatti, secondo il n. 60, dall'una e dall'altra parte di V e di V′, nella linea retta considerata come circonferenza infinita, si avrebbe un segmento finito VCV e un altro V∞V′, che passa dalla parte opposta attraverso l'infinito, l'uno verrà tagliato in due parti in C, l'altro nell'infinito stesso ∞. Entrambe le curve hanno due centri, l'uno in C, l'altro in ∞, dall'uno all'altro dei quali si estendono tutti i diametri. Al centro C dell'ellisse – cui essa volge la concavità, mentre le due semiellissi OVO′, OV′O′[34] sono rivolte al centro – non corrisponde il centro C dell'iperbole (cui questa non volge la concavità, bensì la convessità), ma un centro che si nasconde nell'infinito ∞, cui analogamente l'iperbole rivolge la concavità. Ne viene che anche l'asse coniugato dell'iperbole non corrisponde assolutamente all'asse coniugato dell'ellisse. E da ciò si traggono pure molte altre cose che ci hanno consentito di esporre svariati temi in maniera tutt'altro che infelice nella dissertazione più volte citata[35], e di mostrare – in tutto ciò che ha a che fare con le

[32] Nell'originale «OM′V′N′O», ma si tratta certamente di un refuso per «OM′V′N′O′».
[33]* Nell'originale «O, O», ma si tratta certamente di un refuso per «O, O′».
[34]* Nell'originale «OV′O», ma si tratta certamente di un refuso per «OV′O′».
[35] Il riferimento è a R.G. Boscovich, *De transformatione locorum geometricorum*, cit.

quantità finite – che mediante questo passaggio per l'infinito si costruiscono con perfetta analogia geometrica tutte le cose che sembrerebbero in massima contraddizione con essa. Analogamente si mostra perché – sebbene la somma dei quadrati dei due assi e la somma di due diametri coniugati qualunque nell'ellisse sia sempre uguale a una quantità costante, e sebbene i quadrati di due quantità qualsiasi che, avendo mutato direzione, passano in qualunque modo da positive a negative, debbano essere positivi – tuttavia nell'iperbole debba essere costante non la somma dei quadrati, bensì la loro differenza. Ma queste cose le abbiamo esaminate con maggiore eleganza. Oltre a essere studiate in maniera più estesa di quanto sia possibile qui, costringendole nei ristrettissimi limiti che ci siamo prefissati, esse richiedono parecchie delle proprietà delle sezioni coniche da noi dimostrate nel nostro trattato[36], così come molte cose circa la natura delle grandezze positive e negative che qui non abbiamo ancora toccato, ma toccheremo tra poco.

72. Intanto, però, giacché tale congiunzione di linee continue all'infinito ci ha svelato certi misteri che sembrano oltrepassare le capacità di comprensione della mente umana, ma non paiono ancora celare alcuna contraddizione, sarà bene considerare certi misteri più elevati che proprio qui ci si presentano, e sembrano infine trasformarsi in assurdità vere e proprie. Molte cose di questo genere abbiamo trattato in maniera più dettagliata nella dissertazione menzionata, ed esse ci hanno convinto, da ultimo, che non può esistere in atto alcuna linea prolungata all'infinito, ma che l'infinito stesso è una potenza indefinita per allontanare un punto reale da un altro punto reale oltre ogni limite fissato a piacere. Tale distanza, per quanto grande sia, dev'essere finita, ma può essere maggiore di qualunque altra distanza finita, in modo tale che non vi sia una distanza ultima e massima fra quelle possibili, così come non c'è una distanza prima e minima fra le possibili. Di ciò discuteremo in seguito; qui, invece, ci occuperemo di misteri di tal fatta così come spontaneamente ci si presentano.

73. Mentre l'ellisse si allunga con moto continuo e si trasforma infine in parabola, si concentri l'attenzione – osservando la Figura 11 – sul moto continuo dell'arco OV′O′ e delle rette VF_2, VF_5. L'arco si allontana all'infinito in modo che anche i punti O, O′ - come abbiamo notato – si allontanino all'infinito l'uno dall'altro ed entrambi dall'asse VV′. Nel caso della parabola non saranno da nessuna parte, immersi o sepolti dall'infinito, e l'apertura nella parabola crescerà infinitamente. Ma le rette VF_2, VF_5, sebbene passino sempre per gli stessi punti O, O′ che si allontanano all'infinito fra loro e dall'asse VV′, continuano incessantemente ad avvicinarsi fra loro e all'asse, diminuendo l'angolo F_2VF_5 oltre ogni limite: sicché, nel caso della parabola, si uniscono l'una all'altra e all'asse VV′ stesso, e l'angolo F_2VF_5 svanisce completamente. Si immagini, infatti, un semicerchio con centro V e di raggio finito qualunque, che incontri la tangente QR in K, L, l'asse VV′ in H e tutte le rette VF in I, e si tracci I_2I_5 che incontri lo stesso VV′ in S.

[36] Cioè R.G. Boscovich, *Elementorum universae matheseos tomus* III.

74. Poiché nell'ellisse il lato retto principale sta all'asse coniugato come questo sta all'asse trasverso, anche il lato retto rimane finito; e infatti, nella parabola esso diviene il lato retto, ma l'asse coniugato di un'ellisse che degenera in parabola cresce all'infinito, e cresce all'infinito l'apertura, mentre diminuirà all'infinito il rapporto fra il lato retto principale e l'asse coniugato e, di conseguenza, anche il rapporto fra l'asse coniugato e l'asse trasverso, e perciò anche (prese le loro metà) il rapporto fra OC e CHV, e ancor di più il rapporto fra CO e OV, ovvero fra I_2S e I_2V. Infatti, il seno dell'angolo I_2VH (cioè di F_2VV') diminuisce all'infinito. Dunque, immaginando VV′, OO′ come assolutamente infiniti, il seno scomparirà completamente, e l'angolo F_2VV' (e di conseguenza anche il suo doppio F_2VF_5) deve sparire completamente. Pertanto, i punti I_2, I_5 devono coincidere in H con tutti i punti intermedi, scomparendo ogni arco intermedio; e per ogni intervallo finito, grande a piacere, le rette VF_2, VF_5 devono coincidere fra loro e con l'asse.

75. Da tale coincidere dei punti e dallo scomparire dell'angolo F_2VF_5 si capisce immediatamente come possa accadere (in riferimento alla Figura 7) che il punto P passi con moto immediato, attraverso l'asse, dalla gamba VM alla gamba NV. Infatti (Figura 11) nell'ellisse si passava dal punto P_1 al punto P_6 raggiungendo con moto continuo la retta VF_2, poi tutte le rette intermedie comprese nell'angolo F_2VF_5, infine la stessa VF_5. Se l'arco KHL rappresenta il tempo, l'intero arco VMO veniva percorso nel tempo continuo KI_2: nell'istante I_2 il punto giungeva alla retta VF_2; poi, nel tempo continuo I_2HI_5[37] veniva percorso l'intero arco OM′V′N′O′ e nell'altro istante I_5 il punto P giungeva in O′; infine, nel tempo continuo I_5L, P tornava in V lungo l'arco O′NV. Coincidendo ora i punti I_2, I_5, tutto quel tempo intermedio viene eliminato e il passaggio si realizza in un istante.

76. Proseguendo il moto del piano secante e trasformatasi la sezione in iperbole, i punti O, O′ della Figura 11 restano, nella Figura 10, a distanza infinita, tuttavia in modo tale che il primo sia a distanza infinita ugualmente dalla parte di F_2 e B così come dalla parte di G_2 e A, il secondo a distanza infinita ugualmente dalla parte di F_5 e D così come dalla parte di G_5, e E. Nella figura 10, inoltre, il primo punto congiungerà in certo modo la gamba infinita VM con la gamba M′V′, il secondo congiungerà la gamba infinita VN con la gamba N′V′. Dunque, la posizione dei rami risulterà invertita, in modo che l'arco destro finirà nella gamba sinistro, il sinistro nella gamba destra.

77. Invece, ciò che avviene nel caso della parabola è raffigurato nella Figura 12. I punti I_2, I_3, I_4, I_5, coincideranno lì in H. Immersi nell'infinito, rimangono celati tutti i punti O, O′, P_2, P_3, N′, V′, M′. Sull'asse vanno a finire F_2, F_3, F_4, F_5; e poiché tanto l'ellisse quanto l'iperbole possono degenerare in parabola, a seconda che il moto del piano secante sia diretto verso l'una o l'altra regione [rispetto all'asse del cono], bisogna che i punti scompaiano in egual modo all'infinito tanto dalla parte di H quanto da

[37] Nell'originale « I_2HI_5», ma è certamente un refuso per « I_2HI_3».

quella di V. Queste regioni si uniscono qui in certo modo a formarne una sola e conservano la continuità.

78. Ma ora qui i misteri crescono talmente da trasformarsi in assurdità. Infatti, coincidendo le rette VF_2, VF_5 della Figura 11, i suoi punti O, O′ devono coincidere nella Figura 12, cosicché quell'intervallo – quell'apertura – che, coincidendo perfettamente le rette, non può sussistere, svanisca del tutto, sebbene esso contemporaneamente cresca all'infinito. Lo stesso deve accadere [Figura 11] agli infiniti punti P_3, P_4 attorno a M′ e N′. Le rette VF_2, VF_5, per qualsiasi distanza finita grande a piacere da V, devono coincidere perfettamente, e tuttavia, a distanza infinita da V, devono distare fra loro infinitamente, come se ogni distanza finita, presa in modo indefinito, non si allontani all'infinito, e come se l'immensa, precisa congruenza precedente, congiunta con l'immensa distanza seguente, non sia in contraddizione con la rettilineità.

79. Di fatto, queste difficoltà non si possono eludere dicendo che, ove l'ellisse si trasforma in parabola, l'arco I_2HI_5 della Figura 11 non svanisce affatto completamente ma diviene infinitamente piccolo, di conseguenza l'angolo F_2VF_5 sarebbe pur sempre infinitesimo. In esso, a una distanza infinita del primo ordine può esserci un intervallo finito, e a una distanza infinita di ordine superiore deve esserci un intervallo anch'esso infinito. Anzitutto, infatti, nella dissertazione più volte ricordata abbiamo dimostrato splendidamente che un termine che sia terzo dopo l'infinito assoluto e il finito dev'essere assolutamente nulla, non qualcosa che – sebbene sia detto infinitesimo – sia qualcosa e abbia parti[38]. Dunque, se attorno al punto H vi fosse un qualche arco infinitesimo delimitato dalle rette F_2V', F_5V, sebbene sia detto infinitesimo e indeterminabile, esso conterrebbe tuttavia alcuni punti per i quali passerebbero alcune rette condotte dal vertice V, in sé determinate, sebbene da noi indeterminabili, che manterrebbero una qualche distanza dall'asse, e tuttavia non incontrerebbero affatto le gambe infinite della parabola. Ma nelle sezioni coniche si dimostra in modo estremamente preciso, attraverso la geometria finita, che qualsivoglia retta, con un'inclinazione piccola a piacere rispetto all'asse, incontrerà sempre nuovamente in qualche luogo la gamba di una parabola, per quanto questa si allontani dall'asse nell'immensità. Perciò, non c'è alcuna retta che stia nascosta in quell'apertura.

80. E certamente nella dissertazione *De natura, et usu infinitorum, et infinite parvorum*, pubblicata parecchi anni or sono, abbiamo dimostrato che non possono per nulla esistere quantità infinitesime in sé determinate, per quanto da noi non determinabili. Lo abbiamo fatto con un argomento che fa nascere in noi un'evidenza tale che non potremmo mai indurci ad ammettere quantità infinitamente piccole. Già da lungo tempo sviluppiamo, in modo assai differente, metodi eccellenti per gli infinitesimi tramite cose conosciute indefinitamente, distogliendo la mente dalla grandezza. Non è questa la sede per esporre tutto ciò con maggiori particolari; lo esporremo invece in un quarto

[38] Il riferimento è a R.G. Boscovich, *De transformatione locorum geometricorum*, cit., nn. 837 e 883.

volume degli *Elementi*[39]. Ci limitiamo qui a esporre sommariamente il nostro argomento per la dimostrazione dell'impossibilità di infinitesimi in sé determinati, che utilizzeremo anche in seguito[40]. Ed eccolo:

81. Se può esservi una qualche quantità (per esempio una lineetta) che sia infinitamente piccola e, benché indeterminabile da parte nostra, determinata in se stessa, essa sarà contenuta infinite volte in qualsiasi quantità finita (per esempio in un palmo, che conterrà un numero infinito di tali lineette); e vi sarà contenuta in modo che una qualsiasi lineetta possa esistere anche da sola, senza dipendere in alcun modo dalle lineette associate, in quanto essa è in sé determinata e distinta da ciascuna di quelle, sebbene non sia divisa in atto. Sicché, iniziando dalla parte sinistra verso destra, vi sarà una certa prima lineetta, sebbene da noi non determinabile, poi una seconda, una terza, e così via; analogamente, iniziando dalla parte destra verso sinistra ci sarà una certa seconda lineetta, poi una terza, e così via. In verità, già le prime linee che giacciono dalla parte sinistra, lasceranno dietro di sé, verso la parte destra, un numero infinito di loro parti, giacché si lasciano dietro tutto quanto il palmo; invece, quelle che erano le prime dalla parte destra, lasciano, verso la stessa parte destra, un numero non infinito: infatti, la prima non lascia niente, la seconda ne lascia una sola, la terza ne lascia due, e così via. Ma in tutto quel palmo non ci sarà alcuna di tali particelle di cui non sia vera una di queste due cose: cioè che lasci verso destra un numero infinito oppure un numero non infinito di parti. Nessuna di esse dipenderà dalle altre in modo che, se l'una rimane, l'altra non possa venire distrutta, giacché ciascuna ha il suo essere in sé determinato ed è – come abbiamo detto – distinta in atto da qualsiasi altra, benché in atto[41] non divisa.

82. Ci saranno dunque due classi di particelle, sebbene da noi non determinabili. La prima di esse conterrà tutte e sole le particelle che lasciano verso la parte destra un numero infinito di parti; la seconda conterrà tutte e sole le particelle che ne lasciano un numero non infinito. Ciò è certamente evidente dal fatto che nessuna di esse può essere priva di entrambe le proprietà e che nessuna le ha entrambe contemporaneamente, e che in generale ci sono particelle dotate della prima proprietà e particelle dotate della seconda. Inoltre, tutte quelle che costituiscono la seconda classe devono essere in numero infinito; in caso contrario, infatti, l'ultima particella di quelle che sono nella

---

[39] Tale quarto volume degli *Elementa universae matheseos*, per il quale Boscovich aveva all'epoca cominciato a raccogliere materiale non avrebbe mai visto la luce. Doveva trattarsi, però, di un progetto di lungo periodo, giacché ancora nel 1761 Boscovich scriveva all'amico Giovan Stefano Conti: «Spero anche di lavorar con piu quiete in quel ritiro, un tomo di Stay, che porta tutta l'Optica, e un tomo de' miei elementi, che tratterà della Geometria degli Infiniti, e infinitamente piccoli» (Boscovich a Conti, Amsterdam, 30 gennaio 1761, ora in *ENc*, V/1, p. 30).

[40] La dimostrazione era stata originariamente esposta in *De Natura, et usu Infinitorum, et Infinite parvorum*, Komarek, Roma 1741 (ora compreso in *ENo*, I), n. 10.

[41]* Nell'originale «*auctu*», ma è un refuso per «*actu*».

prima classe, e che lascia tutte e solo quelle che costituiscono la seconda, non ne lascerebbe un numero infinito, sicché non apparterrebbe alla prima classe, bensì alla seconda. Invece, il numero di tutte le particelle che sono nella seconda classe, al di là della prima particella, deve essere non infinito. Infatti, se fosse infinito, la prima particella, che si lascia indietro tutte queste, ne lascerebbe un numero infinito, sicché rientrerebbe non nella seconda classe, bensì nella prima. Per questa ragione, il passaggio da un numero infinito a uno non infinito avverrebbe attraverso l'unità, il che è assurdo. Tutta la forza dell'argomentazione sta nel fatto che si avrebbe da qualche parte necessariamente un passaggio dall'infinito al non infinito in un'unica particella. Tale argomento avrà ancora maggior forza se immaginiamo che da Dio vengano distrutte tutte e sole le particelle che appartengono alla prima classe, ciascuna delle quali è affatto distinta da qualunque particella appartenente alla seconda, sebbene a noi non sia assolutamente possibile distinguerla o determinarla.

83. C'è chi, per dimostrare che quantità infinitesime esistono anche indipendentemente dal nostro modo di concepirle, adduce l'angolo di contatto che un arco di circonferenza forma con una retta o con l'arcotangente di un'altra circonferenza al contatto medesimo, dicendo che è infinitesimo rispetto all'angolo rettilineo. Sarebbe possibile, seguendo l'insegnamento di Tacquet, rispondere che un angolo non è una quantità, poiché consiste nell'inclinazione, bensì il modo di una quantità. E certamente trattiamo l'angolo rettilineo come modo di una quantità, in quanto assumiamo come sua misura l'arco di circonferenza intercettato dalle sue gambe, che è veramente una quantità. Ciò si può fare anche nell'angolo rettilineo e negli angoli curvilinei fra curve uguali e simili, ove le gambe staccano da circonferenze grandi o piccole a piacere lo stesso numero di gradi e minuti; non in quelli le cui gambe sono di natura diversa, da comportare che con il raggio del cerchio vari pure il rapporto fra l'arco intercettato e l'intera circonferenza. Perciò, a variare sarebbero anche la misura e il rapporto, che dalla misura dipende completamente. D'altra parte, questa stessa distinzione ci basta a farci ritenere – anche se dicessimo che l'angolo è una quantità – l'angolo mistilineo e quello rettilineo di specie differenti. Di più, fra angoli che differiscono per specie, di fatto l'uno non sta in alcun rapporto con l'altro, perciò [l'angolo di contatto] non è né infinitesimo né infinito.

84. Altri chiamano in loro aiuto le quantità incommensurabili, dicendo che ciò per cui una linea è incommensurabile rispetto a un'altra è, in realtà, qualcosa di infinitesimo, e tentano di dimostrarlo così. Si consideri questo qualcosa (questa quantità) finito; si tagli l'altra quantità in tante particelle uguali, in modo che una di loro sia minore di quella quantità finita: com'è facile dimostrare, ciò è sempre possibile. Ora, riportando continuamente quella particella nella prima, che è incommensurabile, si arriverà a un resto minore di essa, cioè minore di quella quantità finita per la quale si diceva che la prima quantità è incommensurabile con la seconda. Ma in tale argomentazione, se si osserva correttamente la natura della continuità, la fallacia è manifesta: una cosa indeterminata viene presa per determinata. Infatti, quando diciamo *incommensurabile*, escludiamo una misura comune. Ma una misura, se non viene definita la sua quantità,

non è alcunché di determinato; è invece qualcosa di indefinito e indeterminato, come abbiamo detto sopra circa la parte, poiché misura e parte frazionaria sono la stessa cosa. Se si chiedesse: «Che cosa rende la prima linea incommensurabile con la seconda?», risponderemo: «In relazione a quale misura?». Se si determina una misura, si determinerà una quantità per cui essa è incommensurabile relativamente a tale misura. Tale quantità sarà il resto comunque finito e minore di quella stessa misura. Ridotta la misura, il resto ora diminuisce, ora aumenta, potendo avere con essa un rapporto qualunque. Ma se la misura viene ridotta infinitamente, da ultimo diminuisce all'infinito anche il resto, dovendo questo essere sempre minore della misura. Invero, poiché non c'è una misura ultima e più piccola di tutte, non c'è alcuna parte in sé determinata che, rispetto a ogni misura, renda quella prima quantità incommensurabile con la seconda quantità.

85. Perché la cosa riesca più evidente, ponendola sotto gli occhi con l'aiuto della geometria, sia, nella Figura 13, una quantità maggiore AB incommensurabile con una quantità minore AD. Riportata AD quante volte si possa in AB, con il resto si costruisca la perpendicolare DF. Quindi, riportate analogamente in AB la sua metà AG, la sua terza parte AK, la sua quarta parte AN, ecc., parimenti si costruiscano, con i singoli resti, GI, KM, NP, ecc., e si prolunghino tutte le perpendicolari del genere fino a incontrare la retta AC, che forma l'angolo semiretto BAC, in E, H, L, O. Si immagini una curva continua che passa per tutti i punti F, I, M, P. È evidente che tutte le perpendicolari DE, GH, KL, NO, ecc. equivalgono – per l'angolo semiretto in A e per quello retto [in D] – alle parti frazionarie, cioè alle misure AD, AG, AK, AN. Ed essendo tutti i resti DF, GI, KM, NP minori di tali parti, l'intera curva sarà contenuta entro l'angolo BAC. Inoltre, è evidente che si può diminuire all'infinito la parte frazionaria AN (perciò anche NO), in modo che NP sia sempre minore di questa. Ma non ci sarà un resto NP minore di tutti, così come non ci sarà una parte AN minore di tutte, perciò non vi sarà alcuna parte che renda una quantità esattamente incommensurabile con un'altra. Invece, a qualsiasi misura corrisponderà il suo resto, per il quale, relativamente a quella misura, una quantità risulta incommensurabile con un'altra. Esso sarà determinato e indefinito, così come lo è l'espressione *misura*, cioè *parte frazionaria*, a meno che non si determini il numero, ovvero la grandezza delle parti. Determinate queste, essa diventa determinata e finita.

86. Ne viene, pertanto, che non esistono quantità infinitesime in sé determinate; dunque, esse dipendono soltanto dal nostro modo di conoscere, che è indefinito. Per tale ragione, è vana quella scappatoia con cui vengono evitate le assurdità che in generale emergono quando un'ellisse cresce all'infinito e le gambe di una parabola vengono in atto prolungate all'infinito. In verità, se accettiamo che quantità infinitesime del genere non sono impossibili, coglieremo in maniera evidentissima l'assurdità che emerge dall'estensione infinita della parabola. Ciò abbiamo esposto nella dissertazione più volte ricordata[42], e lo riportiamo qui a conferma della questione.

[42] Il riferimento è a R.G. Boscovich, *De transformatione locorum geometricorum*, cit.

87. Si immagini, nella Figura 7, un cerchio assolutamente infinito con centro V, e si pensi la tangente AB [alla parabola] prolungata all'infinito da entrambe le parti. Di conseguenza, essa sarà il diametro di quel cerchio, e perciò sarà maggiore della quarta parte di quella circonferenza. Ma poiché, condotte da qualsiasi punto Q ovvero Q′ della tangente le rette a essa normali, queste incontreranno in P ovvero P′ il tracciato della parabola, è evidente che l'apertura MN della parabola è uguale all'intera tangente infinita AB, e perciò dovrà essere più grande della quarta parte di quella circonferenza infinita. D'altra parte, poiché, resi gli angoli EVF, EVF′ piccoli a piacere, le rette VF[43], VF′ incontreranno sempre il tracciato della parabola in P, P′[44] e perciò usciranno dall'apertura, questa deve intercettare una parte di quella circonferenza infinita, che starà alla circonferenza intera in un rapporto minore di qualsiasi rapporto determinato. Pertanto, l'apertura sarà sia maggiore sia infinitamente minore di un quarto della circonferenza infinita, il che costituisce un assurdo evidentissimo.

88. Si risponderà: «L'asse infinito VE – allontanandosi all'infinito i punti P, P′[45] – risulta infinite volte maggiore della tangente AB perché, se si riduce all'infinito l'angolo FVE, analogamente diminuisce il rapporto fra la tangente di tale angolo e il raggio (e perciò il rapporto fra RP e RV, ovvero il rapporto fra VQ e VR, così come quello fra l'intera QQ′, doppia di VQ, e VR)». Ma se immaginiamo le sole rette AB, DE prolungate all'infinito, non sfuggirà ad alcuno che entrambe si possano prolungare in ugual modo e che tutto rimane uguale. Come mai, allora, accade che, quando emerge la parabola MVN, l'asse VE debba essere infinitamente maggiore della tangente VA? Come mai l'aggiunzione della parabola conduce a una modificazione delle rette? Che cosa accadrebbe, invece, se venisse costruita un'altra parabola il cui asse fosse VA e la tangente VE? Ora VA, che era più infinitamente più piccola, all'opposto diverrebbe infinitamente più grande. Certo questo non è più un mistero, ma un assurdo.

89. D'altra parte, nell'infinito incontriamo moltissimi altri assurdi, alcuni dei quali abbiamo presentato nella dissertazione più volte citata[46]. Ne aggiungiamo qui uno, che si esaurisce con una dimostrazione semplicissima e che abbiamo esposto nell'altra dissertazione ricordata sopra, *De Natura, et usu Infinitorum, et Infinite parvorum*; eccola di seguito[47]. Sia, nella Figura 14, un qualsiasi angolo ABC, diviso in due parti uguali dalla retta BD; da un qualsiasi punto E del lato BC si conduca la retta EF parallela a BA, che incontri BD in F, e la si prolunghi finché FG sia due volte EF. Si conduca poi BM per B e G, e si immagini un'altra retta *efg* parallela a EFG stessa. Risulta che l'intera area infinita CBD sarà uguale all'area infinita ABD, con la quale coinciderebbe, giacché si è supposto che gli angoli sono uguali. Analogamente, risulta

---

[43]* Nell'originale «VF′», ma è un refuso per «VF».
[44]* Nell'originale «P′, P′», ma è un refuso per «P, P′».
[45]* Nell'originale «P′, P′», ma è un refuso per «P, P′».
[46] Il riferimento è a R.G. Boscovich, *De transformatione locorum geometricorum*, cit.
[47] La dimostrazione è data in R.G. Boscovich, *De Natura, et usu Infinitorum, et Infinite parvorum*, cit., n. 11.

che i triangoli FBG, FBE e *f*B*g*, *f*B*e* stanno fra loro come le basi, perciò i primi hanno superficie doppia rispetto ai secondi e l'area FG*gf* è doppia dell'area EF*fe*. Ma se immaginassimo via via altre parallele del genere all'infinito, qualsiasi area da esse ritagliata e compresa nell'angolo MBD[48] sarebbe doppia dell'area a essa corrispondente, compresa nell'angolo DBC. Di conseguenza, poiché tutte le aree comprese in quegli angoli sono degli aggregati di tutte quelle areole, l'area infinita contenuta nell'angolo DBM sarebbe doppia dell'area contenuta nell'angolo DBC, perciò anche dell'area compresa nell'angolo ABD; cioè si avrebbe che una parte è il doppio del tutto, il che è assurdo.

90. Questo assurdo nasce tutto dalla supposizione dell'infinito assoluto. Infatti [Figura 14], s'immagini un cerchio con centro B che incontri le rette BA, BD, BC in I, H, E; finché ci sarà la grandezza finita BE, non vi sarà alcunché di assurdo. Il settore EBH sarà uguale al settore HBI e il triangolo GBF sarà grande il doppio del triangolo FBE. Ma né il primo triangolo sarà parte del primo settore, né il secondo triangolo sarà uguale al secondo settore. Però, allontanandosi E all'infinito in modo da non essere più in alcun posto, e assunta l'intera lunghezza che può essere contenuta nella retta infinita BE, non vi saranno più limiti a quell'infinito. D'altra parte, tutta quanta l'area infinita che può essere compresa nell'angolo MBD si compone di tutte le areole GF*fg*; e tutta quanta l'area che può essere compresa nell'angolo DBC[49] si compone di tutte le areole FE*ef*[50]. Essa è certo uguale all'intera ABD, e MBD è parte della stessa ABD: proprio qui sta l'assurdo.

91. Per questi motivi, è per noi del tutto impossibile che un'estensione infinita (sia infinitamente piccola sia infinitamente grande) esista in atto e in quanto determinata in sé. Qualunque cosa esista in qualsiasi istante di tempo è finita, tale tuttavia da poter essere aumentata e diminuita all'infinito senza alcun limite. Da dove derivi l'impossibilità dell'estensione infinita, l'abbiamo trattato accuratamente anche a partire da certi principi metafisici connessi con la geometria nella dissertazione aggiunta agli *Elementi delle sezioni coniche*[51]. La distanza fra due punti qualunque è sempre finita, ma ci possono essere sempre altre distanze minori; in tale possibilità di diminuire o aumentare la distanza – possibilità da noi conosciuta in modo indefinito – riteniamo consista l'idea di quantità infinitamente piccola o infinitamente grande. Invece, in geometria, ove si considera lo spazio come infinito in atto, le linee vengono considerate prolungate all'infinito per così dire in atto. Dunque, da tale prolungamento conseguono tutte quelle congiunzioni nell'infinito stesso nonché i misteri che abbiamo cominciato a trattare e che, tuttavia, giovano ancor più a una migliore comprensione della natura dell'estensione continua, laddove si tratta di quantità finite. E dopo questa digressione

[48]* Nell'originale «MBE», ma è un refuso per «MBD».
[49] Nell'originale «EBC», ma è un refuso per «DBC».
[50]* Nell'originale «FE*f*», ma è un refuso per «FE*ef*».
[51] Vedi R.G. Boscovich, *De transformatione locorum geometricorum*, cit.

sugli infinitesimi e sugli infiniti, per nulla inutile anche rispetto al problema che abbiamo trattato (come risulterà in seguito), continueremo a considerare la natura delle gambe infinite e della congiunzione nell'infinito, accennandovi il più brevemente possibile.

92. Per prima cosa, tutte le volte che una qualche gamba – sia essa parabolica o iperbolica – va all'infinito, deve anche tornare dall'infinito, come abbiamo detto. Nel caso delle gambe iperboliche si osserva incontestabilmente che l'asintoto della gamba che si allontana all'infinito è lo stesso di quella che torna dall'infinito, benché essa possa tornare dalla stessa della medesima retta infinita o dalla parte opposta. Se nella Figura 15[52] un arco VM va all'infinito lungo M_1 dalla parte B, può ritornare tanto dalla stessa parte B (al di qua del medesimo asintoto ACB, per esempio lungo M_2V_2, e al di là di esso, per esempio lungo M_3V_3), quanto dalla parte opposta A[53] (analogamente: al di qua del medesimo asintoto, per esempio lungo M_4V^4, e al di là di esso, per esempio lungo M_5V_5). I tre ultimi casi si hanno nelle iperboli di grado superiore, ove una qualche potenza dell'ordinata è in ragione inversa di una qualche potenza dell'ascissa, come abbiamo visto al n. 64 per le gambe paraboliche, a seconda che tali potenze siano pari o dispari, come abbiamo dimostrato nella dissertazione in appendice agli *Elementi*, dove abbiamo pure determinato curve del primo caso[54].

93. Ciò si osserva certo incontestabilmente per il fatto che in tutte le curve geometriche mai niente cambia per salto, ma tutte le variazioni avvengono con moto continuo. D'altra parte, lo stesso vale per qualsiasi altra proprietà delle curve geometriche, per esempio anche nel caso delle tangenti (con questo nome si chiama una retta che passa per un punto di una curva, tanto vicina a un suo arco fra tutte quelle che da lì si possono tracciare, che nessun'altra retta, compresa in uno dei due angoli [che la tangente forma con la curva], possa venir condotta per il medesimo punto, cioè possa esservi inserita). In generale, laddove una tangente sia condotta per un punto che collega due archi che si succedono in modo continuo, essa sarà pure tangente comune di entrambe le parti; in essa finiranno con moto continuo tutte le restanti tangenti nei punti che appartengono a quegli stessi archi e che culminano in quel punto con moto continuo. E poiché gli asintoti vengono considerati dai geometri come rette che toccano le gambe a quella distanza infinita alla quale esse si congiungono, le gambe devono pure avere lì una tangente comune, perciò un asintoto comune.

94. D'altra parte, quella stessa legge delle tangenti comuni si osserva generalmente in tutte le curve, ovunque in esse si assuma un punto qualsiasi. Sulla base di questa legge, il cui campo d'applicazione è vastissimo e abbraccia l'intera geometria generale, si hanno quattro casi, due dei quali esibiscono due generi di cuspidi o punti di regresso; uno esibisce un flesso contrario; e uno, che capita assai di frequente, un avanzamento

52* Nell'originale «fig. 13», ma è un refuso per «fig. 15».
53 Nell'originale «A′», ma si tratta certamente di un refuso per «A».
54 Vedi R.G. Boscovich, *De transformatione locorum geometricorum*, cit., nn. 710-712.

della curvatura nella stessa regione di piano. Sia la retta AB, nella Figura 16, tangente all'arco MV, e sia DVE la perpendicolare a essa. Sceso in V, l'arco può ritornare da V nel medesimo angolo BVD, lungo VN_1; oppure nell'angolo BVE a esso adiacente, dalla medesima parte B della tangente, cioè al di là di essa, lungo VN_2; oppure avanzare nell'angolo al vertice opposto AVE, lungo VN_3; o del pari avanzare nell'angolo restante AVD, lungo VN_4. Il quarto caso MVN_4 è comune a tutte le curve e in generale a tutti i punti di archi continui (tranne certi determinati punti di alcune curve, che comprendono almeno uno dei primi tre casi), e coincide col caso illustrato nella Figura 7. Il terzo caso MVN_3 comporta un flesso contrario – la curvatura è rivolta dapprima al punto D, poi al punto E – e coincide con il caso illustrato nella Figura 9. Il secondo caso MVN_2 ha una cuspide, che abbiamo chiamato del primo genere, in quanto la tangente giace fra due archi congiunti a contatto, e coincide con il caso rappresentato nella Figura 8; come nel terzo caso, la curvatura viene invertita. Questi tre casi si hanno nelle parabole le cui ordinate stanno in un qualunque rapporto con le ascisse, come ricordato al n. 64. Infine, il primo caso MVN_1 contiene una cuspide del secondo genere, formata da archi che giacciono dalla stessa parte della tangente. Un esempio di una curva di questo tipo lo abbiamo dato nella dissertazione citata[55]. Per altro, nel secondo e nel terzo caso la tangente taglia anche l'arco nello stesso punto in cui lo tocca, come si vede; nel primo e nel quarto non lo taglia.

96[56]. Taluni ritengono che la legge di continuità venga violata nel primo e nel secondo caso (che comportano le cuspidi) per via del regresso, nonché nel secondo e terzo caso per la curvatura che viene improvvisamente invertita. Ma vedremo che in nessuno dei casi si perde la continuità, quando, fra poco, avremo spiegato la legge stessa. Qui bisogna solo evitare che si confonda col punto di regresso e con la cuspide il punto doppio in cui la curva taglia se stessa; esso, in generale, è presente nelle curve che hanno un nodo[57]. Di questo tipo è la curva MOVCFIVPN (Figura 17), che interseca se stessa in V e forma un nodo ritornando su se stessa. Un nodo siffatto, oltre che in altre innumerevoli curve superiori, si presenta anche nella concoide inferiore[58]. Sembra che in

---

[55] Vedi R.G. Boscovich, *De transformatione locorum geometricorum*, cit., nn. 744-746.

[56] Evidentemente, per un errore nella fase di composizione è stato attribuito il numero 96 a questo paragrafo e 97 al successivo, mentre la numerazione corretta (con l'effettivo paragrafo 97) riprende alla pagina seguente. Per uniformità si è scelto di conservare l'erronea numerazione originale, in cui manca il n. 95 e il n. 97 viene ripetuto due volte.

[57]* Nell'originale «*nondum*», ma è un refuso per «*nodum*».

[58] Le concoidi sono una famiglia di curve che si costruiscono utilizzando un punto fisso (*polo*) e una curva (*base*) che non passa per il polo, e riportando un segmento di lunghezza costante (*intervallo*) sulle rette uscenti dal punto a partire dalle loro intersezioni con la curva data, da una parte e dall'altra. Se la base è rettilinea si ottiene una *concoide di Nicomede* (cui Boscovich allude qui), formata da due rami, al di qua e al di là della base: per *concoide inferiore* si intende di solito quella che si forma dalla parte del polo. Questo è sempre un punto doppio della curva e, a seconda che l'intervallo sia maggiore, minore, o uguale alla distanza del polo dalla base, è rispettivamente un nodo, una cuspide o un punto

V ci sia una cuspide MVN; ma la cosa sta diversamente, in quanto l'arco MV non continua in V con l'arco VN, bensì lo taglia, procedendo oltre V lungo VC, e da lì di nuovo ritornando in V attraverso IV. Nell'incontrare V, le tangenti AVB, A′VB′ sono inclinate l'una rispetto all'altra e delimitano un angolo. In verità, tutte le volte che, al variare delle condizioni della curva, essa varia in modo che il nodo VCFIV svanisca (come accade nella concoide), i due rami MV, VN vengono sempre prolungati e si genera la cuspide della Figura 18. In tal caso, tuttavia, quelle due tangenti vengono a coincidere in una sola, e non accade mai nell'intera geometria generale che due archi contigui, congiunti da un termine comune, abbiano in esso due tangenti che determinino un qualche angolo.

97. Rimarrebbero molte altre cose da dire circa le curve che hanno un numero finito qualunque o anche infinito di rami, con gambe prolungate all'infinito. Fra queste troviamo la più prodigiosa di tutte e assai degna di nota: la logistica comune[59]. Essa, sebbene sembri avere un unico ramo, con una gamba da una parte iperbolica e dall'altra parabolica (mentre le gambe neppure a distanza infinita tornano affatto né si congiungono), in realtà ne ha infiniti da entrambe le parti dell'asse; questi appartengono allo stesso luogo geometrico, mentre l'asintoto è comune a tutte le infinite gambe. Molto ci sarebbe da dire sulle curve spirali, ove due o quanti archi si vogliano vadano all'infinito, altri archi si avvolgano incessantemente attorno a un punto dato senza cadervi, oppure si avvicinino infinitamente a cerchi dati o a ovali date, ruotandovi continuamente attorno, tuttavia senza mai cadervi. Di tal genere è la meravigliosa e utile spirale logaritmica[60], per la quale – sebbene essa sembri possedere un unico arco spirale che

isolato. La concoide di Nicomede è una curva algebrica di quarto grado rappresentata dall'equazione, in coordinate cartesiane, $(x-a)^2 \cdot (x^2+y^2) - l^2x^2 = 0$, ove i parametri a, l definiscono rispettivamente l'intervallo e la distanza del polo dalla base. Sulle curve citate in questo paragrafo e nel seguente vedi G. Loria, *Curve piane speciali algebriche e trascendenti*, 2 voll., Hoepli, Milano 1930.

[59] È chiamata *logaritmica* o *logistica* la curva definita (in notazione odierna) da un'equazione della forma $y = b \log_B \frac{x}{a}$, ove a, b, B sono costanti. Scrivendo l'equazione come $x = a \cdot B^{y/b}$ appare giustificato anche il nome di *esponenziale*, impiegato, fra gli altri, da Leibniz. Boscovich implicitamente rimanda al suo *De Cycloide, et Logistica* (Mainardi, Roma 1743; poi pubblicato come appendice a A. Tacquet, *Elementa Euclidea Geometriae planae ac solidae*, Mainardi, Roma 1745, pp. 173-226. Ora raccolto in *ENo*, I).

[60] Il nome di *spirale logaritmica* venne attribuito da Pierre Varignon alla curva definita da un'equazione della seguente forma (in coordinate polari θ, r e in notazione odierna): $\theta = \log_b \frac{r}{a}$, dove a, b sono costanti. L'equazione indica che l'angolo compreso tra il raggio vettore r e l'asse polare è proporzionale al logaritmo della lunghezza del raggio stesso, sicché il polo è un punto asintotico della curva, che continua a 'riprodursi' uguale a se stessa, avvolgendosi incessantemente su di esso. Questa e altre caratteristiche notevoli dovevano spingere Jakob Bernoulli a battezzare la curva *spira mirabilis* e a riassumerne le qualità nel motto, che volle inciso nella propria lapide, «*eadem mutata resurgo*».

da una parte si allontana all'infinito da un punto dato e dall'altra gli si avvicina – possiamo analogamente dimostrare che possiede infiniti archi; e bellissime sono pure tante e tante altre spirali che da essa derivano. Parecchio ci sarebbe poi da dire di altri generi di curve, caratterizzate da più archi che tornano lungo traiettorie chiuse o che si allontanano all'infinito, ove gli uni non comunicano con gli altri, sebbene appartengano allo stesso luogo geometrico, cosicché un punto non può in alcun modo trasmigrare dall'uno all'altro. Ma s'immagini che queste curve, mentre si trasformano, variate le condizioni, in qualche modo si separino e mutino i loro archi in modo che da due archi, che prima appartenevano a rami differenti o a traiettorie chiuse differenti, si origini un qualche nuovo arco continuo; di ciò abbiamo esempi molteplici e assai eleganti nelle concoidi aventi un cerchio come base, che hanno svariate specie e trasformazioni straordinarie[61]. Dunque, rimarrebbero indietro tutte queste cose e moltissime altre, che non possono essere costrette nei limiti di una breve dissertazione; ma ce ne occuperemo assai più diffusamente nel quarto tomo dei nostri *Elementi*, che abbiamo destinato alla geometria degli infinitesimi e degli infiniti, nonché alle proprietà delle curve.

97[bis]. In generale, in tutti questi tipi di curve si osserva inequivocabilmente che in nessun caso una curva si arresta in un unico punto; dove essa pare come interrotta, lì, invece, qualsiasi punto al quale una certa curva giunge – anche se quel punto si nascondesse nell'infinito – congiunge sempre da una parte e dall'altra due archi, dei quali è termine comune. Ovviamente, per tutte le curve questo può essere ricavato dalla natura stessa del termine (come abbiamo mostrato al n. 54) oppure venire provato per induzione la più ampia possibile di tutte le curve note ai geometri. In verità, per una certa curva che sfrutteremo massimamente in seguito, nella dimostrazione della legge di continuità, ciò viene dimostrato anche con rigore geometrico. L'asserto è il seguente: *Non può mai essere interrotto un luogo geometrico che, riferito a un certo asse mediante ordinate inclinate su di esso di uno stesso angolo ampio a piacere, non ha mai né*

---

[61] Se la base della concoide non è rettilinea, bensì circolare, si ottengono peculiari curve chiuse, a seconda che il polo appartenga alla base (*lumaca di Pascal*, che può avere anch'essa un nodo, una cuspide oppure un punto isolato) o non vi appartenga. Ma con tutta probabilità Boscovich aveva in mente un caso specifico, su cui sarebbe tornato qualche anno dopo: «Si troveranno appartenenti ad una stessa curva continua più rami anche finiti, e separati l'uno dall'altro in modo, che noi non si incontrino, come ve ne sono due nella concoide di base circolare, ove il polo sia preso dovunque tra il centro, e la circonferenza, esprimendosi la natura di amendue questi rami da un'unica equazione indivisibile di sesto grado». (R.G. Boscovich, *Su i Logaritmi delle quantità negative*, in F. Luino, *Delle progressioni e serie*, Galeazzi, Milano, 1767, n. 41, p. 255). Una trattazione delle concoidi, con un importante apparato di tavole, compariva pure in G. Suardi, *Nuovi istromenti per la descrizione di diverse curve antiche e moderne*, Rizzardi, Brescia 1752, che per altro riportava alle pp. 62-79 due lettere dello stesso Boscovich «Sulle ovali cartesiane», datate rispettivamente 16 marzo e 27 aprile 1748 (ora comprese in *ENo*, I).

un'ordinata impossibile corrispondente a un punto qualunque dell'asse né più ordinate corrispondenti allo stesso modo al medesimo punto.

98. Ciò si dimostra facilmente come segue. Nelle Figure 19, 20, 21 si abbiano una parte DC e una parte EF di tale luogo geometrico, e il luogo stesso sia interrotto in C, E. Si conducano le ordinate CG, EH all'asse AB. O il punto H cade dopo G (come nella Figura 19), o coincide con esso (come nella Figura 20), o lo precede (come nella Figura 21). Nel primo caso, per tutti i punti intermedi fra i punti G e H, che – in base al n. 10 – non possono essere contigui, ma devono delimitare una qualche lineetta contenente infiniti punti, è impossibile che non vi sia alcuna ordinata; nel secondo caso si avrebbero due GC, GE per lo stesso punto G oppure H; nel terzo caso, per entrambi i punti G e H e per gli infiniti punti intermedi si avrebbero due ordinate. Tutto ciò contraddice l'ipotesi. Pertanto, un luogo geometrico siffatto non può mai essere interrotto. C.V.D.

99. Tutta la forza dell'argomentazione sta nel fatto che due punti non possono essere contigui: se ciò potesse accadere, nel primo caso il punto H potrebbe giacere immediatamente dopo il punto G, e ordinata dopo ordinata: per quest'unica via verrebbe elusa la forza dell'argomentazione. Del resto, abbiamo menzionato l'ordinata impossibile per includere anche il caso in cui l'ordinata sia nulla. Infatti, se nel primo caso uno dicesse che si può interrompere un luogo composto da tre linee DC, GH, EF, considereremmo soltanto le due DC, GH, e il caso primo si ridurrebbe al secondo. Infatti, in G dovrebbero esserci insieme l'ordinata GC e l'ordinata zero, di cui l'ultima appartiene appunto all'arco DC, la prima alla retta GH.

100. Ciò premesso, veniamo ora a spiegare la legge di continuità. Leibniz l'ha avanzata, senza darle quel nome, nel breve saggio che abbiamo ricordato, qui in traduzione: «Quando la differenza di due casi può essere diminuita al di sotto di qualsiasi grandezza data *in datis*, ovvero in ciò che è stato posto, bisogna poterla trovare altrettanto diminuita al di sotto di qualsiasi grandezza data *in quaesitis*, ovvero in ciò che risulta; o, per usare un linguaggio più comune, quando i casi (ovvero ciò che è dato) si avvicinano continuamente e si perdono infine l'uno nell'altro, lo fanno anche le conseguenze o accadimenti (ovvero ciò che si domanda)». Infine, la stessa cosa viene espressa in termini più generali: «Se i dati sono ordinati, sono ordinati anche i risultati».[62]

---

[62] Vedi per raffronto l'originale francese di G.W. Leibniz, *Lettre de M.L. sur un principe general utile à l'explication des loix de la nature par la consideration de la sagesse divine, pour servir de replique à la reponse du R.P. Malebranche* (1687), cit., in Id., *Die philosophischen Schriften*, vol. III, cit., p. 52 (il corsivo sta per lo spaziato nel testo originale): «*Lorsque la difference de deux cas peut estre diminuée au dessous de toute grandeur donnée in datis ou dans ce qui est posé, il faut qu'elle se puisse trouver aussi diminuée au dessous de toute grandeur donnée in quaesitis ou dans ce qui en resulte*, ou pour parler plus familierement: *Lorsque les cas (ou ce qui est donné) s'approchent continuellement et*

101. Leibniz collegò queste formulazioni – soprattutto le prime due – alle leggi cartesiane del moto, che contestava applicando questo suo principio. Nella prima legge Descartes stabilì: se due corpi uguali si urtano, l'uno deve tornare indietro con velocità uguale e contraria a quella dell'altro; mentre nella seconda legge: se i due corpi non sono uguali, il più grande deve procedere con la velocità che aveva prima dell'urto, il più piccolo, invece, deve tornare indietro con velocità uguale e contraria a quella che aveva il primo. Le grandezze dei due corpi sono ciò che Leibniz chiama *dati*, o *ciò che è stato posto*; le velocità dopo l'urto sono ciò che chiama *ciò che è cercato*, *ciò che risulta*, *conseguenze*, *accadimenti*, *ciò che si domanda*. I due casi dati sono l'uguaglianza e la disuguaglianza dei corpi. La differenza fra loro può venire diminuita all'infinito, cosicché da disuguaglianza si arrivi infine a uguaglianza. Si consideri, di quello dei due corpi che prima era il più grande, la velocità dopo l'urto come qualcosa di cercato ovvero come ciò che risulta. Questa stessa velocità, diminuita a piacere la disuguaglianza dei due corpi, per la seconda legge di Descartes rimane comunque immutata. Se tale disuguaglianza viene eliminata e trasformata in uguaglianza, per la prima legge quella velocità si estingue improvvisamente con un salto e viene sostituita con la velocità contraria. Ciò contrasta con la legge di Leibniz, in virtù della quale, se si muta ordinatamente ciò che è dato, ordinatamente devono mutarsi anche ciò che si cerca, si domanda, risulta.

102. Ma più in generale, è possibile enunciare il principio senza riferimento al dato o a ciò che viene cercato: due quantità variabili, cioè tali che possono variare la loro grandezza, sono connesse l'una con l'altra in modo che se la grandezza dell'una è determinata, lo è anche la grandezza dell'altra; se per la prima e la seconda quantità si immaginano due grandezze che si corrispondono a vicenda, e la prima quantità passa dalla prima alla seconda grandezza con variazione continua attraverso tutte le grandezze intermedie, anche la seconda fa lo stesso. La prima grandezza è ciò che Leibniz chiama *dato* ovvero *ciò che è stato posto*; la seconda è ciò che chiama *ciò che è cercato*, *ciò che risulta*, *conseguenza*, *accadimento*, *ciò che si domanda*. Mentre il passaggio attraverso tutte le grandezze intermedie esprime nel modo migliore quell'*ordinamento*, *continuità*, *diminuzione della differenza* al di sotto di qualsiasi limite assegnato.

103. Lo stesso intese, in maniera assolutamente corretta, Johann Bernoulli in quel *Discorso sul moto* che è compreso nel terzo volume delle sue *Opere*, dove si legge (anche qui in traduzione): «Parlo di quest'ordine immutabile ed eterno, stabilito sin dalla creazione dell'Universo, che è lecito chiamare *legge di continuità*, in virtù della quale tutto ciò che accade, accade per gradi infinitamente piccoli […]. *La natura non opera per*

---

se perdent enfin l'un dans l'autre, il faut que les suites ou evenemens (ou ce qui est demandé) le fassent aussi. Ce qui depend encor d'un principe plus general, sçavoir: *Datis ordinatis etiam quaesita sunt ordinata*».

salto; nulla può passare da un'estremità all'altra senza passare per tutti i gradi intermedi».[63] Infatti non può accadere, come spiegheremo e dimostreremo in seguito, che si abbia passaggio per tutti i gradi intermedi, se il passaggio non ha luogo per tutti gli stati intermedi, ovvero le grandezze intermedie. Tuttavia, questa stessa espressione – 'grado' – ha fornito l'occasione a molti altri (e fra loro, a nostro parere, allo stesso Maupertuis) per un certo equivoco, di cui si valgono per contestare la legge di continuità, come se fosse del tutto impossibile escludere il salto giacché, dicendo che viene escluso mediante passaggio per gradi intermedi, esso verrebbe anzi incluso con la massima necessità.

104. Di seguito riportiamo (in traduzione) le osservazioni svolte appunto da Maupertuis alla pagina 20 del primo dei suoi opuscoli, raccolti e stampati a Dresda nel 1732 sotto il titolo *Essay de Cosmologie*. Alla pagina precedente Maupertuis presenta la concezione di coloro che, sulla base della legge di continuità, contestano l'esistenza in natura di corpi duri, poi – all'inizio di p. 20, come risulta dalla nota in calce – cita Bernoulli stesso e il *Discorso* menzionato sopra. Ma ecco le parole di Maupertuis: «Confesso di non percepire la forza di quest'argomentazione. E neppure so se la ragione per cui il moto si produce o si estingue è sufficientemente nota, per poter dire dove la legge di continuità venga violata. Non so neppure troppo bene che cosa sia tale legge. Quando si supponga che la velocità aumenta o diminuisce gradualmente, forse non si ha sempre un passaggio da un grado a un altro? E il passaggio più impercettibile non viola forse la continuità quanto la violerebbe la repentina distruzione dell'Universo?»[64]. Due cose vengono qui accennate dal dottissimo studioso: anzitutto che noi ignoriamo il modo in cui si genera la velocità e se vi venga violata la continuità; in

---

[63] Vedi per raffronto l'originale francese di Jo. Bernoulli, *Discours sur les loix de la communication du mouvement*, in *Opera Omnia, tam antea sparsim edita, quam hactenus inedita*, Lousannae & Genevae, Sumptibus M.-M. Bousquet & Sociorum, 1742, vol. III, p. 9: «Je parle de cet ordre immuable & perpetuel, établi depuis la création de l'Univers, qu'on peu apeller LOY DE CONTINUITE, en vertu de laquelle tout ce qui s'execute, s'execute par des degrez infiniment petits […]. *Natura non operatur per saltum*; rien ne peut passer d'une extremité à l'autre, sans passer par tous les degrez du milieu».

[64] Vedi per raffronto l'originale francese di P.-L. Moreau de Maupertuis, *Essai de Cosmologie*, nouvelle édition corrigée & augmentée, Bruyset, Lyon 1768, vol. I, p. 38: «Mais j'avoue que je ne sens pas la force de ce raisonnement. Je ne fai si l'on connoit assez la maniere dont le mouvement se produit ou s'éteint, pour pouvoir dire que la loi de continuité fut ici violée: je ne fai pas trop même ce que c'est que cette loi. Quand on supposeroit que la vîtesse augmentât, ou diminuât par degrés, n'y auroit il pas toûjours des passages d'un degré à 1'autre? & le paifage le plus imperceptible ne viole-t-il pas autant la continuité, que feroit la destruction subite de l'Univers?». L'indicazione fornita da Boscovich, tuttavia, è errata: il saggio «Les Loix du mouvemente & du repos, déduites d'un Principe Metaphysique», che apre l'*Essai de Cosmologie*, venne pubblicato per la prima volta in *Histoire de l'Académie royale des sciences et des belles lettres de Berlin pour l'année 1746*, Haude, Berlin 1746, pp. 268-294.

secondo luogo che la legge stessa implica contraddizione, giacché il salto viene incluso proprio nei gradi che dovrebbero escluderlo; e tale salto in ogni grado piccolo a piacere impedirebbe la continuità quanto la impedirebbe un salto grande quanto il mondo intero. Inoltre, mentre qui così rispondiamo al suo attacco cercando di vanificarne ogni forza – ci pare – con marcato successo, da una parte non intendiamo togliere nulla della fama del dottissimo studioso, la cui forza d'ingegno e i cui meriti eccellenti nell'intera repubblica delle lettere sono ammirati e riconosciuti da tutta l'Europa così come venerati da noi per primi; d'altra parte, la profonda stima per lui – sia quella che altri nutrono sia quella che nutriamo noi – ci ha spinto a preparare una risposta e a pubblicarla anzitutto in questa stessa dissertazione, poiché temevamo che l'autorità di una personalità tanto grande nuocesse alla nostra recente teoria, ormai in via di diffusione.

105. Quanto al modo in cui viene generata la velocità, mostreremo più sotto che essa viene sempre generata e distrutta in base alla legge di continuità; ora spiegheremo, attraverso una questione ripetuta alquanto più profondamente, ciò che attiene al salto violato da quella continuità e dall'ipotesi che ci siano dei gradi, salto che a sua volta renderebbe la continuità incomprensibile, impossibile e assurda. Esporremo pure la definizione di continuità data da Leibniz, da Bernoulli e da noi stessi, tornando agli aspetti principali.

106. In primo luogo, che due quantità variabili possano dipendere l'una dall'altra e legarsi in modo che al mutare dell'una muti – e di fatto muta – anche l'altra, risulta da innumerevoli esempi, e ce lo insegna persino l'uso quotidiano. Così dalla misura o dal peso dipende il costo di ciò che compriamo: aumentati tali fattori, aumenta anch'esso; diminuendo quelli, anch'esso cala. Al contrario, calcoliamo la velocità dei corridori dal tempo impiegato per percorrere un dato intervallo, e la riteniamo tanto più grande quanto più breve è il tempo. D'altra parte, entrambe le quantità variabili possono essere semplici, oppure una delle due può essere composta da più quantità che non sono unite da alcun nesso, in modo che essa dipenda dalla determinazione di tutte loro. Così, nei casi citati sopra il costo di una stessa cosa dipende solo dalla misura o dal peso, la velocità solo dal tempo. Generalmente, però, la velocità di ogni mobile, che si sposta in tempi diversi e per spazi diversi, dipende da spazio e tempo, in maniera direttamente proporzionale al primo e inversamente proporzionale al secondo. Invece, la quantità di moto generalmente dipende dalla massa, dalla velocità e dal tempo, ovvero dal volume, dalla densità, dalla velocità e dal tempo, elementi che variano tutti al variare di uno qualsiasi. Sicché, un'unica quantità può dipendere da un numero qualunque di quantità, e variare al variare di esse.

107. Inoltre, se gli elementi da cui dipende una qualche quantità venissero variati per variazione continua e passassero da una grandezza all'altra attraversando tutte le grandezze intermedie, anche quella quantità passerà per tutte le grandezze intermedie. Ciò si spiega e si comprende assai più facilmente collegando fra loro due quantità soltanto, una delle quali sia semplice o considerata come tale. In questo caso il loro nesso si

può sempre esprimere mediante linee, assumendo arbitrariamente un asse e rappresentando su di esso una delle due quantità mediante ascisse a partire da un dato punto, l'altra quantità attraverso ordinate, inclinate sull'asse di un certo angolo, la cui intersezione, percorrendo queste l'asse in maniera continua, descriva una linea continua che si riferisce a siffatto nesso. Infatti, laddove una quantità sia collegata a due variabili – per esempio, lo spazio descritto mediante velocità e tempo – tale nesso richiede una superficie continua. Sui luoghi relativi a una superficie che connette tre quantità variabili pubblicò tempo fa un opuscolo estremamente profondo ed elegante, quando era poco più che un fanciullo, il dottissimo Clairaut[65]. Se essa viene connessa con più di tre quantità variabili, tale nesso supera tutte le forze della geometria, attrezzata per le tre dimensioni soltanto. A tali collegamenti fra un numero qualunque di quantità variabili è estesa l'algebra, che in ciò è superiore alla geometria; per converso, la geometria è superiore all'algebra nell'esibire moltissimi collegamenti in cui non sono le quantità stesse a possedere una certa relazione reciproca, bensì i loro decrementi e incrementi, come avviene nelle curve trascendenti. A ciò l'algebra finita non giunge; è necessario, invece, il calcolo infinitesimale, e forse legami del genere vengono espressi mediante linee e superfici per riprodurre i quali non bastano né l'algebra finita, che osserva le quantità finite e le loro potenze finite, né il calcolo infinitesimale, che considera le loro differenze infinitesimali di ordine qualunque nonché potenze qualunque. Si richiede, invece, un qualche altro tipo di rappresentazione, di cui non abbiamo idea alcuna. Trattare tutte queste cose sarebbe un compito interminabile e offrirebbe materia per riempire ponderosi volumi. D'altra parte, in tutto ciò viene certo sempre e assolutamente rispettata la continuità; ma si incontrano molti casi da considerarsi anomali, assai adatti a osservare e illustrare la legge di continuità e la perseveranza del nesso nel conservarsi.

108. Diremo, pertanto, poche cose che riguardano il nesso di due quantità, che si ha – come abbiamo accennato – mediante linee. Ciò basterà per la presentazione del problema, poiché qualsiasi cosa prodotta da quante variabili si vogliano, dalle quali dipende un'altra quantità, può venire connessa con il tempo, considerando per ogni istante di tempo stati determinati di tutte quelle quantità, mentre esse variano, tali da essere espressi da una certa linea continua (per esempio l'asse), e innalzando dal punto corrispondente a quell'istante l'ordinata che esprime la grandezza della quantità a essi connessa. In tal modo si include anche quell'unico nesso che per le quantità variabili esiste in natura (nella quale singole quantità possono avere solo grandezze singole in singoli istanti) e che è espresso da una linea descritta dall'intersezione di quelle ordinate. E appunto, la difficoltà di Maupertuis riguarda il tempo e una quantità che varia incessantemente, e tende a introdurre come elemento necessario un salto istantaneo, mentre la quantità viene variata attraverso tutti i gradi delle grandezze.

---

[65] Boscovich si riferisce a A. Clairaut, *Recherches sur les courbes à double courbure*, Nyon, Didot et Quillot, Paris 1731. L'opera era già stata ultimata già nel 1729, quando Clairaut aveva sedici anni.

109. Se poi il nesso di due quantità, ove l'ascissa rappresenta la prima e l'ordinata la seconda, viene espresso mediante una linea, può accadere che alle singole grandezze della prima quantità corrisponda solo un'unica grandezza della seconda, oppure che vi corrisponda un numero finito qualunque (o persino un numero infinito) di tali grandezze, e in modo tale che a qualsivoglia grandezza della prima quantità corrisponda un'unica grandezza della seconda quantità[66], tuttavia corrispondendo una certa identica grandezza della seconda quantità a più grandezze della prima, in qualunque numero finito o anche di numero infinito; o viceversa in modo tale che a qualsivoglia grandezza della seconda quantità corrisponda un'unica grandezza della prima, tuttavia corrispondendo a qualsiasi grandezza della prima quantità qualunque numero finito (o un numero infinito) di grandezze della seconda; o infine in modo tale che a qualunque numero finito o a un numero infinito di grandezze della prima quantità[67] analogamente corrisponda qualsiasi numero finito della seconda oppure un numero infinito. Sarebbe assai facile illustrare con esempi i singole casi, avendo anche esposto tipi di curve ben noti. Ma tutta la questione dipende dal fatto che una linea retta, avente una data posizione parallela all'asse o alle ordinate, può intersecare certi tipi di curve in un punto soltanto, altri tipi in due punti, in tre, o in qualunque numero finito o infinito di punti. Ciò appare particolarmente evidente nelle spirali che vanno all'infinito: una retta può incontrare la spirale in un unico punto o in quanti punti si vogliano, mentre analogamente un'altra la incontra in quanti punti si vogliano. Se però alla curva si sostituisce una retta, qualsiasi altra retta – sia essa parallela alle ordinate o parallela all'asse – la taglia in un unico punto soltanto. Ma anche questa indagine si perde parimenti nell'immensità, e noi siamo costretti a limitarci soltanto a certi casi semplicissimi.

110. Anzitutto, in tale nesso geometrico delle quantità può accadere che, aumentando l'una incessantemente, aumenti o diminuisca incessantemente anche l'altra; oppure che, diminuendo quella incessantemente, aumenti o diminuisca incessantemente anche questa; o ancora che, aumentando o diminuendo quella, questa passi dall'aumentare al diminuire (nel qual caso si ha un massimo) o viceversa dal diminuire all'aumentare (nel qual caso si ha un minimo). Esempi del genere si possono desumere in modo assai facile anche solo da un cerchio riferito a un asse esterno a esso. Se infatti (Figura 22) il diametro HI del cerchio, una volta prolungato, incontra perpendicolarmente in C la retta AB e dalle R una retta, parimenti perpendicolare a AB, incontra il cerchio in P e P′, al crescere dell'ascissa AR_1[68] o al diminuire di AR_2, le RP raggiungono un minimo, le RP′ un massimo quando le R saranno arrivate in C. Ciò ovviamente accade nel cerchio e di solito in curve con una curvatura che continua in I e in H con un arco che

---

[66] Nell'originale «*respondeat unica secundae magnitudinis quantitas*», ma dev'essere «*respondeat unica secundae quantitatis magnitudo*».
[67]* Nell'originale «*quantitatis cujuslibet*», ma è un refuso per «*quantitatis primae*».
[68] Nell'originale «AR», ma dev'essere «AR_1».

prosegue; ma talvolta accade anche con il ritorno dell'arco, che forma una cuspide in I o in H. Ma non abbiamo spazio per trattare e illustrare i singoli casi.

111. Può anche accadere che, al variare di una quantità, l'altra diminuisca assumendo ogni grandezza piccola a piacere e svanisca, oppure che aumenti assumendo ogni grandezza grande a piacere e divenga assolutamente infinita. Se nella Figura 16 la retta FG[69] si muove di moto continuo verso ED, MV (o qualunque curva NV) esprime un nesso della retta VR o BR con qualsiasi RP. Giunta R in V, svanisce la seconda quantità RP, il che accade o in modo che la prima svanisca come VR o in modo che si conservi come BR; laddove, invece, VR cresca all'infinito, cresce analogamente all'infinito anche ogni RP. Mentre nella Figura 15, parimenti giungendo R in C, qualunque RP diviene infinita, e ciò accade allo stesso modo sia che la prima svanisca come CR sia che si conservi finita come BR; al contrario, invece, fatta CR infinita, RP diminuisce all'infinito e viene pensata come evanescente.

112. Inoltre, se la grandezza dell'una giunge a zero o all'infinito, può accadere che l'altra cambi direzione per variazione continua (nel qual caso si dice che diviene negativa), oppure che torni dal nulla con la stessa direzione. Analogamente, quando va all'infinito può accadere che si trasformi in negativa, mutando la precedente direzione, oppure che, rimanendo invariata la direzione, del pari rimanga positiva. Nella Figura 16, se il nesso viene espresso lungo MVN_3, ove R va in R′ passando per V, l'ascissa BV, che era rimasta finita, continua ad aumentare, AV a diminuire, e PR[70], che era svanita, cambia la direzione verso $R'P_3$. Se invece il nesso è espresso lungo MVN_4, l'ascissa cambia direzione e VR si trasforma in negativa verso VR′, mentre RP′ rimane positiva verso R′P4. Nella Figura 15, andando R in R′ attraverso C, BR continua ad aumentare verso BR′, AR a diminuire verso AR′, CR cambia direzione in CR′ dopo essere svanita e passata per il nulla; se invece il nesso fosse espresso lungo $M_1N_1N_4M_4$, RP_1 – dopo essere giunta all'infinito – rimane nella stessa direzione, verso $R'P_4$; mentre, se il legame è espresso lungo $M_1N_1M_5N_5$, RP_1 – dopo essersi allontanata all'infinito – cambia direzione, verso $R'P_5$[71], a meno che, in questo caso, alla stessa RP_1 corrisponda non $R'P_5$, negativa, che i geometri comunemente (e gli analisti sempre) assumono come analoga a RP_1[72], bensì un'altra positiva che, in base al n. 62, è stata condotta attraverso l'infinito, cioè $R'G'\infty F'P_5$[73]. Ma di ciò, così come di tutti questi avvicinamenti allo zero e all'infinito e del passaggio da positivo a negativo, abbiamo trattato assai più dettagliatamente nella già ricordata dissertazione in calce ai nostri *Elementi delle sezioni coniche*[74]. Per il momento bisogna rimarcare solo quanto segue: laddove dal positivo si passa al negativo – sebbene la grandezza, dopo essere diminuita dalla

---

[69]* Nell'originale «F′G», ma è un refuso per «FG».
[70]* Nell'originale «VR», ma è un refuso per «VR».
[71] Nell'originale «RP_5», ma dev'essere «$R'P_5$».
[72]* Nell'originale «$R'P_1$», ma è un refuso per «RP_1».
[73] Nell'originale «$R'G'\infty FP_5$», ma dev'essere «$R'G'\infty F'P_5$».
[74] Il riferimento è al già citato *De transformatione locorum geometricorum*.

parte positiva, cominci nuovamente ad aumentare dalla parte negativa –, in realtà, nella considerazione geometrica e analitica, la grandezza continua a diminuire, in quanto una quantità negativa viene considerata tanto minore quanto, se considerata dal punto di vista del positivo, è maggiore: infatti, per il fatto stesso che diminuisce e continua a scendere al di sotto dello zero, ciò che è negativo (per esempio, un debito) sembra in qualche modo aumentare per continua detrazione (per esempio, per nuove spese effettuate).

113. Talvolta, mentre una quantità varia incessantemente, l'altra s'interrompe invece in qualche posto e diviene impossibile. Così, nella Figura 22, andando R_2 in R_3, laddove RO tocca l'arco in E, e poi, oltrepassato quello, giunge in R_4, la retta RO′ non incontra il cerchio in nessun posto e l'ordinata corrispondente all'ascissa AR_4 o BR_4 è ormai risultata impossibile. In tal caso si è soliti chiamarla quantità immaginaria. Ma tale caso non può mai accadere in geometria, a meno che le ordinate siano due, e siano risultate contemporaneamente impossibili. Ciò è stato da tempo notato e dimostrato anche in algebra: cioè, le radici immaginarie delle equazioni possono essere solo in numero pari[75]; d'altra parte, in geometria lo si evince in maniera evidente dalla natura delle linee continue, ovunque prive d'interruzione. Infatti una certa ordinata R_2P_2, traslata in R_3E, non può risultare immaginaria a meno che entrambe le R_2P_2, $R_2P'_2$ risultino contemporaneamente immaginarie: poiché, in base al n. 55, l'arco P_2E non può interrompersi in E, ma deve continuare, e del momento che esso – affinché si abbiano valori immaginari – non può continuare oltre R_3E, se i successivi R_4O'[76] non incontrano la curva, l'arco deve, dopo esser giunto in E, avanzare o tornare indietro lungo un qualche altro arco EP_2 che giaccia al di qua di R_3; allo stesso modo qui si ha che l'arco, prima di arrivare in R_3E, incontra necessariamente in qualche posto in P'_2 la retta R_2P_2, e i due punti P_2, P'_2 dovranno congiungersi in E, mentre le due ordinate divengono contemporaneamente immaginarie (il che analogamente accadrebbe se E fosse nascosto nell'infinito, poiché l'arco deve tornare dall'infinito stesso). Così nella Figura 16, muovendosi il punto R di moto continuo attraverso V in direzione VR′, esprimendo il nesso lungo la curva MVN_1 o MVN_2, risultano contemporaneamente immaginarie RP′, RP_1 o RP′, RP_2 rispettivamente, nel loro avvicinarsi allo zero; invece, nella Figura 15, esprimendo il nesso lungo $N_1M_1M_2V_2$ o $N_1M_1M_3V_3$, risultano contemporaneamente immaginarie le due ordinate RP_1, RP_2 o RP_1, RP_3 rispettivamente, nel loro avvicinarsi all'infinito. Nella Figura 22 esse sarebbero risultate immaginarie con lo stesso avvicinarsi alla quantità finita R_3E.

---

[75] Boscovich tratta tale conoscenza come ormai acquisita; ma forse sta riprendendo un passo di L. Euler, *Recherches sur les racines imaginaires des équations*, in «Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres, année 1749», Berlin 1751, pp. 222-288, in particolare § 6, p. 224 (ora in *Leonardi Euleri Opera Omnia*, Serie I, vol. VI, Teubner, Leipzig-Berlin 1912, pp. 78-150, in particolare p. 80): «Il est démontré dans l'Algèbre, que lorsqu'une équation a des racines imaginaires, leur nombre est toujours pair». Euler dà una formulazione simile anche nell'*Introductio in Analysin Infinitorum* (1748, I, § 30).
[76]* Nell'originale «R_4O», ma è un refuso per «R_4O'».

114. Di quanto poi abbiamo detto in quella stessa dissertazione (e diremo nuovamente in seguito) circa questa sorta di distruzione di una quantità che diviene immaginaria, ricordiamo questo soltanto: ciò non può affatto accadere laddove a singole ascisse corrispondano soltanto singole ordinate, come avviene nel caso della linea retta, nonché in tutte le iperboli e parabole in cui una qualche potenza dell'ordinata è dispari, direttamente o reciprocamente, così come è dispari ogni potenza dell'ascissa; lo stesso dicasi per infiniti altri tipi di curve definite da qualunque equazione in cui l'ordinata è elevata a un'unica potenza di grado dispari a piacere, in qualunque modo sia essa mescolata a potenze qualsiasi dell'ascissa. Ma abbiamo avvertito che tale passaggio dallo stato reale all'immaginario non può avere luogo in questo tipo di curve (nelle quali non è possibile che più ordinate corrispondano alla stessa ascissa) perché, laddove quantità variabili vengano riferite al tempo, si presenta il caso in cui a singoli istanti di tempo corrispondono singole grandezze di una quantità anziché due grandezze contemporaneamente, cioè a singole ascisse corrispondono singole ordinate, non più ordinate contemporaneamente.

115. Avendo esposto un po' più dettagliatamente tutte queste cose, vedremo ora cosa siano quelle quantità intermedie per le quali si debba passare. D'altra parte, sono emersi svariati casi dal fatto che due grandezze estreme possano avere la stessa direzione oppure direzione contraria, e in entrambi questi casi, in geometria, è possibile giungere dalla prima alla seconda sia senza allontanarsi all'infinito sia allontanandosi all'infinito, e ciò può avvenire da entrambe le parti. E da qualunque parte avvenga, l'allontanamento può aver luogo o con il ritorno dalla stessa parte dell'infinito o con il passaggio dalla parte opposta. A sua volta, lo stesso può accadere tanto secondo la direzione che hanno le ordinate, quanto secondo quella che hanno le ascisse, o secondo qualsiasi altra direzione, e può accadere sia lungo gambe paraboliche sia lungo gambe iperboliche, o ancora lungo gambe di spirale o serpentine e con flessi. Ci sono svariate classi in cui rientrano tali casi, in base alle quali varia l'accezione delle grandezze intermedie fra due estremi dati.

116. Il caso più semplice è quello in cui non si ha allontanamento all'infinito, ed esso ha luogo in natura, in cui nulla può essere infinito in atto; gli altri casi spettano soltanto alla considerazione geometrica. Ma nel caso menzionato, se entrambi gli estremi hanno la stessa direzione, le grandezze intermedie sono tutte quelle che hanno la medesima direzione e che sono minori della maggiore fra esse e maggiori della minore. Se, invece, gli estremi hanno direzioni opposte, le grandezze intermedie sono tutte minori in ciascuna delle due direzioni: in tal caso dev'esserci anche passaggio per lo zero; nei casi rimanenti le grandezze intermedie per le quali è necessario passare nel corso di un moto continuo assumono un altro significato. Si abbiano, nella Figura 23, due ordinate CD, QE nella stessa direzione, riferite alle ascisse AC, AQ, oppure C′D, Q′E in direzione opposta, riferite ad A′C′, A′Q′. La linea continua che esprime il nesso fra le quantità espresse da tali ascisse e tali ordinate, deve andare dal punto D al punto E; ciò deve accadere senza che essa si allontani all'infinito, percorrendo una qualche

traiettoria di qualunque forma DTT′E, oppure allontanandosi essa all'infinito. Se l'allontanamento avesse luogo nella stessa direzione delle ordinate e lungo i rami asintotici, esso potrebbe avvenire lungo DME o lungo DM∞M′E, o ancora lungo DM′E o lungo DM′∞ME, per non dire di altri casi in cui sono coinvolte altre direzioni e altre gambe. Si immaginino le rette NO, KL, parallele all'asse AB o A′B′, passanti per i punti D, E, la prima delle quali incontri in S l'ordinata QE. Poi, nella stessa EQ prolungata all'infinito da ambo le parti, si prenda un punto H a piacere, che sia fuori da KL e da NO dalla parte E in H_1, oppure fra KL e A′B′ in H_2, o ancora fra A′B′ e NO in H_3, o di nuovo fuori dalle due KL e NO, ma fra NO e AB in H_4, o anche oltre AB in H_5. Inoltre, per qualsiasi punto H passi una corrispondente retta FG parallela all'asse e alle due rette KL e NO. È del tutto evidente che, nel caso in cui la linea DTT′E si allontani all'infinito e per quanti giri o flessi compia, essa deve attraversare almeno una volta in qualche posto qualunque retta inclusa fra le due KL, NO, per esempio qualunque F_2G_2 in P_2, oppure F_3G_3 in P_3. Condotta poi da un punto P (per esempio da P_2) una retta PR perpendicolare all'asse, all'ascissa AR corrisponderà l'ordinata RP_2 oppure QH_2. Inoltre, posto che l'asse sia AB e che le due ordinate siano nella stessa direzione, è evidente da ciò che in qualche posto dev'esserci un'ordinata uguale a qualunque QH_2 o QH_3, minore della maggiore fra le estreme (cioè QE) e maggiore della minore CD (cioè QH_3). Se, invece, l'asse fosse A′B′, che giace fra NO e KL, in modo che le estreme Q′E, C′D[77] (oppure Q′S) abbiano direzioni opposte, tutte le $Q'H_2$[78] dovranno essere minori di Q′E, e tutte le $Q'H_3$[79] dovranno analogamente essere minori di Q′S (cioè C′D). Poi, andando il punto H in Q′, è evidente che l'ordinata deve scomparire, e passare da positiva a negativa per moto continuo attraverso lo zero.

117. Se invece la linea continua che esprime il nesso percorresse DM′∞ME, come accade nell'iperbole conica, tutte le F_2G_2, F_3G_3 comprese fra le due rette KL e NO potranno, anzi dovranno, rimanere non secate. Perciò non può esservi alcuna delle intermedie nel senso di cui sopra, ma devono necessariamente venire intersecate tutte quelle che giacciono da una parte e dall'altra, all'esterno di quei limiti, come F_1G_1, F_4G_4, F_5G_5; dunque, in entrambe le direzioni, devono esserci tutte le rimanenti, che non erano comprese nel caso precedente. Quanto a tutti gli altri casi di allontanamento all'infinito e di ritorno dall'infinito che non abbiamo presentato – tanto in quelli accennati sopra quanto in altri ancora – sarà facile constatare dall'ispezione di quella stessa figura quali siano, nei singoli casi, le grandezze intermedie attraverso cui avviene il passaggio.

118. Trascurati questi casi che includono l'infinito e perciò non possono riguardare la natura, è evidente che nel primo caso l'ascissa AR può da principio sia allontanarsi

[77] Nell'originale «C′D′», ma dev'essere «C′D».
[78] Nell'originale «QH_2», ma dev'essere «$Q'H_2$».
[79] Nell'originale «QH_3», ma dev'essere «$Q'H_3$».

dall'ascissa AQ[80], come mostra la figura, sia avvicinarsi a essa – cosa che accadrebbe se la linea che esprime il nesso non si allontanasse dalla retta QE. Inoltre, sia che tale linea si allontani sia che si avvicini, l'ordinata RP può inizialmente allontanarsi dall'ordinata QE oppure avvicinarsi a essa, perché la linea può sia accostarsi all'asse sia allontanarsene. Gli stessi casi possono presentarsi alla fine, parimenti sia rispetto all'asse A′B′ sia all'ascissa A′R′ e all'ordinata RP[81]. In tutti questi casi è evidente che, fatta salva la continuità della linea che esprime il nesso, nell'intero percorso della linea è impossibile che non si abbia una qualunque delle ordinate intermedie nel senso sopra esposto; né può avvenire che, se tale linea esce da D o termina in E, il punto H non si allontani dal punto S passando per tutte le distanze piccole a piacere SH_3 o che il punto H_2 non si avvicini al punto E passando per le distanze piccole a piacere H_2E. Per tale motivo è evidente che un'ordinata, mentre si avvicina all'una o all'altra delle due ordinate date QE, CD con moto da D a E o da E a D, non può che avvicinarvisi passando per ogni grandezza quanto si voglia vicina a esse; ed è altresì chiaro che ciò vale in generale per grandezze qualunque vicine o lontane a piacere le une dalle altre, riferite a quantità il cui nesso – nel quale consiste la legge di continuità – viene espresso mediante una linea continua. Lo spiegheremo anche in maniera più chiara con l'esempio di quantità riferite al tempo, che fluisce con moto continuo senza mai tornare indietro[82] e non ammette due grandezze della stessa quantità per il medesimo istante. Infine, per dissolvere la difficoltà di Maupertuis e mostrare in che modo ogni salto, per quanto piccolo sia, venga escluso dalla legge di continuità, considereremo il caso semplicissimo in cui da una quantità positiva con incremento continuo si sale a un'altra quantità positiva maggiore, oppure con decremento continuo si scende a una minore.

119. Pertanto, nella Figura 24 siano CD, QE[83] due grandezze della stessa quantità e orientate nella medesima direzione, corrispondenti ai due istanti C, Q. La quantità deve passare dalla prima grandezza (minore) alla seconda (maggiore) nel tempo continuo CQ, essendo rispettata la legge di continuità. In tale intervallo di tempo quella quantità deve assumere tutte le grandezze maggiori di CD (ovvero QS) e minori di QE, in modo che non solo in qualsiasi istante dato R si abbia una grandezza RP a esso corrispondente, ma anche che, data qualunque grandezza (per esempio QH), che sia intermedia fra QS e QE nel senso specificato, vi sia un istante a essa corrispondente. Data la linea DE (sia essa una retta o una linea curva) che esprima la legge di quella grandezza crescente, si troverà sempre almeno un istante con tali caratteristiche. Infatti, condotta per H la retta FG indefinitamente parallela a AB, essa incontrerà necessariamente la linea DE in qualche punto P almeno una volta, come mostra la figura. Ma potrebbe anche incontrarla in più punti – ovviamente se la linea si piegasse da una

---

[80]* Nell'originale «AH», ma è un refuso per «AR».

[81]* Nell'originale «R′C′», ma è un refuso per «RP».

[82] Nell'originale «*nunquam recto regrediens*», ma dev'essere «*nunquam retro regrediens*».

[83]* Nell'originale «CD PE», ma dev'essere «CD, QE».

parte e dall'altra attorno alla retta FG; ciò, invece, non potrà accadere se, come abbiamo supposto, la quantità cresce in modo continuo. Condotta PR parallela a DC o EQ, vi sarà un istante R cui corrisponderà quella grandezza.

120. Se ciò avviene generalmente, vi sarà passaggio per tutte le grandezze intermedie e incremento attraverso tutti i gradi infinitamente piccoli, senza alcun salto, per quanto piccolo. Sarà facile capirlo immaginando opportunamente quale grado subentrerà e in che modo subentrerà. A singoli istanti di tempo R, T, O corrispondono singole grandezze, per esempio RP, TV, OL. Dunque, comunque si scelgano due istanti determinati, ci saranno sempre due grandezze a essi corrispondenti, che differiscono fra loro allo stesso modo in cui quegli istanti distano l'uno dall'altro. La distanza fra gli istanti presi in modo determinato sarà sempre determinata e finita, e lo stesso vale per la differenza fra le grandezze a essi corrispondenti. Tale differenza e il grado che si aggiunge alla grandezza in quel tempo continuo si devono all'intervallo che intercorre fra quei due istanti. Se le rette parallele a AB, condotte da D, P, V, L, incontrano le rette RP, TV, OL, QE in I, K, M, N, i gradi che subentrano alla grandezza CD negli intervalli CR, RT, TO, OQ saranno IP, KV, ML, NE. Se quegli intervalli sono determinati, cioè finiti, anche quei gradi saranno determinati e finiti. D'altra parte, poiché le particelle di tempo possono contrarsi all'infinito, se esse vengono prese via via sempre più piccole, anche quelle differenze (ossia i gradi) diverranno parimenti sempre più piccole, e se quei tempuscoli venissero considerati indefiniti, cioè contraentisi all'infinito oltre ogni limite (e in ciò per noi consistono gli infinitamente ovvero indefinitamente piccoli), anche quelle differenze – quei gradi – si contrarranno indefinitamente oltre ogni limite e saranno, nello stesso senso, infinitamente ovvero indefinitamente piccoli, e infine svaniranno.

121. Ecco, inoltre, in che cosa consiste l'esclusione del salto. Ove vale la continuità, tale "grado qualunque, piccolo a piacere" non subentra tutto in una volta in questo o quell'istante di tempo, bensì subentra in un certo tempo continuo, in modo che le sue parti via via più piccole corrispondano a parti di tempo via via più piccole; e non ci sarà alcuna parte piccola a piacere di quel grado, la quale non possa subentrare in un qualche momento analogamente piccolo. Quella stessa parte può essere chiamata grado, e posto che il passaggio avvenga per tutti i gradi infinitesimi, che ovviamente possono venire assunti comunque indefinitamente, è evidente che per qualunque grandezza, da zero a qualsivoglia grandezza finita, ora ci sarà un passaggio attraverso tutte le grandezze intermedie, sicché la definizione di Bernoulli sarà in accordo con la nostra. Ciò che abbiamo detto degli incrementi si trasferisce facilmente ai decrementi, nei quali la legge di continuità vale se i gradi dei decrementi non hanno luogo in istanti di tempo, bensì in tempuscoli continui, in modo che parti qualunque di decremento, piccole a piacere, abbiano corrispondenti parti di tempo analogamente piccole.

122. Ci sarebbe salto se l'intera differenza piccola a piacere fra due grandezze subentrasse non in un tempo continuo, bensì in un istante di tempo. Infatti, se per tutto il tempo

CR perdurasse sempre una grandezza uguale a CD o RI, allora nell'istante R subentrerebbe tutto insieme il grado IP; la grandezza RP o TK durerebbe per tutto il tempo RT e nell'istante T subentrerebbe tutto il grado KV, e così via. In tal caso, la legge di variazione verrebbe espressa non dalla linea continua DPVLE ma da una certa scala DIPKVMLNE, o per meglio dire verrebbe espressa dalle sole rette spezzate DI, PK, VM, LN, e vi sarebbe un salto che impedirebbe la continuità, come se tutto il mondo venisse distrutto in un istante: infatti, grande e piccolo non sono termini assoluti, bensì relativi, come abbiamo detto al n. 21 e, se le cose andassero in questo modo, sarebbe giustificata la difficoltà avanzata da Maupertuis. In verità, l'incremento IP non avviene tutto nell'istante R; invece, una parte I′P′ dello stesso IP, piccola a piacere, ha luogo in una parte CR′ del tempuscolo CR, anch'esso piccolo a piacere. In tal modo non c'è mai un salto che comporti passaggio istantaneo da una grandezza a un'altra, separata dalla prima da una qualche differenza piccola a piacere, in sé determinata.

123. È perciò è evidente che la difficoltà di Maupertuis si risolve proprio muovendo dagli stessi principi, derivati dalla natura del continuo, a partire da cui si risolveva quella posta dal moto di Achille e della tartaruga. Infatti, come tale difficoltà del moto continuo si risolve muovendo dal fatto che un istante nullo o un punto è contiguo a un secondo istante, ma fra due istanti o punti qualsiasi non coincidenti giace un tempo continuo o una lineetta che si può dividere all'infinito o ridurre avvicinando istante a istante o punto a punto, così la difficoltà di Maupertuis si risolve basandosi sul fatto che a singoli istanti corrispondono singole grandezze. Ma nessuna grandezza può essere così vicina a un'altra senza che intercorra una differenza corrispondente a quell'intervallo di tempo, e che tale differenza non possa diminuire all'infinito. Fra tali grandezze, infatti, sono frapposte altre grandezze intermedie, vicine oltre qualunque limite, che corrispondono a istanti intermedi, e vi sono certamente una prima e un'ultima grandezza, dalla quale e alla quale rispettivamente c'è passaggio con moto continuo; non ci sono, però, una seconda e una penultima grandezza. D'altra parte, nell'intera sequenza continua di grandezze, come in qualunque continuo, un unico termine comune congiunge sempre le grandezze che precedono con quelle che seguono. Perciò, se non ci sbagliamo, risulta in modo evidente che la legge di continuità non implica alcuna contraddizione né introduce un salto, mentre si sforza appunto di escludere tale salto per gradi intermedi.

124. Spiegate in questo modo le cose e giustificata la natura stessa del continuo così come la legge di continuità, allontanato poi ogni sospetto circa la sua possibilità, dobbiamo ora passare a fondare la legge di continuità nella natura. Tale compito dovrà riuscire molto più breve, essendosi ormai protratta la dissertazione oltre i limiti prestabiliti, anche se abbiamo tralasciato a malincuore moltissime cose assai degne di essere ricordate e solamente accennato ad altre che non si possono assolutamente tacere.

125. I leibniziani cercano di dimostrare la legge di continuità nella natura in base a quel principio che chiamano di *ragion sufficiente*, per il quale appunto non vi sarebbe al-

cuna ragione sufficiente perché, una volta ammesso il salto, esso debba assumere soltanto una grandezza determinata, non più grande né più piccola. «Sarebbe necessario», suggerisce Bernoulli nel *Discorso* citato al n. 103, «che il primo stato sia distrutto, senza che la natura sappia a quale altro[84] stato dovrebbe essere determinata»[85], e pressappoco allo stesso modo argomentano altri leibniziani. Certo tale argomentazione non piace a noi, e riteniamo quel principio, così come viene ammesso da Leibniz e dai più importanti leibniziani, del tutto falso e anche dannoso. Inoltre, come abbiamo affermato una volta nella dissertazione *De maris aestu*, riteniamo che esso «non possa mai essere di alcuna utilità per determinare alcunché e ancor meno per dimostrarlo»[86].

126. Non è questa la sede per intraprendere una più lunga dissertazione contro questo principio; tuttavia accenneremo a ciò che ci spinge a questa idea. Anzitutto, anche se una libera volontà – sia essa umana o divina – dovesse avere in generale una ragione per volere anziché non volere o viceversa, riteniamo questo un atto di libertà. Infatti, ammesso che la bilancia penda dalla parte delle ragioni che ci vengono opposte e la cui cognizione non dipende assolutamente dal nostro arbitrio, non può accadere che la nostra volontà non si pieghi a ciò che abbia il peso maggiore. Ma allora è anzitutto necessario che in Dio si tolga la libertà e si introduca la necessità assoluta delle singole cose che esistono e l'impossibilità di quelle che non esistono. Infatti, non poteva minimamente accadere che Dio non vedesse tutte le ragioni che potevano esserci per creare questo particolare ordine delle cose. Non poteva accadere che le ragioni che c'erano non ci fossero. Non poteva accadere che le ragioni che avevano maggior peso non lo avessero: esse, infatti, non possono mutare la loro natura. Non poteva accadere che Dio non seguisse la parte ove pende il peso maggiore. Dunque, pure in base al principio di contraddizione, insito nella natura di Dio (dotata di sapienza e della determinazione a scegliere lo stato migliore di tutti) e nella natura delle ragioni che poteva vedere, emerge che non poteva accadere che quest'ordine delle cose non esistesse in quanto unico possibile. Esso, perciò, fu assolutamente necessario. Ed è certamente ridicola la possibilità di cose che non sarebbero potute esistere se non fossero state create, e non sarebbero potute venir create se una ragione sufficiente non avesse spinto

---

[84]* Nell'originale «*aliam*», ma è certamente un refuso per «*alium*».
[85] Per l'argomentazione e la citazione vedi Jo. Bernoulli, *Discours sur les loix de la communication du mouvement*, cit., p. 9: «Si la nature pouvoit passer d'un extrême à l'autre, par exemple, du repos au mouvement, du mouvement au repos, ou d'un mouvement en un sens à un mouvement en sens contraire, sans passer par tous les mouvemens insensibles qui conduisent de l'un à l'autre; il faudroit que le premier état fut detruit, sans que la nature sçût à quel nouvel état elle doit se déterminer; car enfin par quelle raison en choifiroit-elle un par préference, & dont on ne pût demander pourquoi celui-ci plutôt que celui-là? puisque n'y ayant aucune liaison néccessaire entre ces deux états, point de passage du mouvement au repos, du repos au mouvement, ou d'un mouvement à un mouvement oposé; aucune raison ne la détermineroit à produire une chose plutôt que toute autre».
[86] R.G. Boscovich, *Dissertatio de maris aestu*, Komarek, Roma 1747, n. 87, p. XLIII.

Dio alla creazione. E altrettanto ridicolo è pensare che non ci poteva essere altra ragione sufficiente all'infuori di quella che Dio aveva davanti agli occhi mentre creava il mondo.

127. Alla libera volontà di Dio, che si deve ammettere, si aggiunge pure il fatto che – ove si tratti di possibilità – non è possibile alcuna buona qualità creata della quale non sia possibile una maggiore, come accade per le distanze e per altre cose del genere; ma, data una qualunque perfezione finita, se ne può avere una maggiore. Però, nessuna perfezione creata può essere assolutamente infinita, come abbiamo dimostrato sopra circa la quantità. Per tale motivo, quando Dio decise di creare qualcosa, dovette necessariamente creare qualcosa tale che rimanessero non create altre cose più perfette, e non poté assolutamente essere spinto dalla scelta dello stato migliore di tutti, per creare ciò che creò. Inoltre, qualsiasi perfezione naturale delle creature, per quanto grande, è così piccola, anzi così un nulla rispetto all'immensità divina, che l'esercizio della libertà stessa è di infinitamente maggior valore di qualunque bene siffatto, e rispetto a tale libertà tutte le cose sono da considerare uguali. Perciò, dev'esserci una ragione per cui qualcosa c'è anziché non esserci; ma nelle cose create ci sarà sempre una ragione fisica, cioè una qualche causa, mentre non sempre vi sarà una ragione morale, e potrà aversi «la volontà al posto della ragione»[87].

128. Basti questo circa la falsità del principio, così come esso viene ammesso da Leibniz e come viene utilizzato dai leibniziani, che se ne valgono soprattutto nelle cose contingenti, dipendenti dalla scelta umana oppure divina. Nessuno nega che ogni effetto debba avere la sua causa, ogni conclusione la sua premessa, in virtù di cui risultano evidenti le cause che sono inferite quando sia stato osservato l'effetto, nonché le premesse che devono venire investigate quando sia stata approvata la conclusione, affinché, una volta conosciute, possano essere pure ricavate necessariamente tutte le altre conseguenze. Ma i leibniziani non fanno uso di questo principio negativo nel senso descritto sopra; bensì tutta la sua forza – come non perdono occasione di ripetere – sta nel fatto che dalla mancanza di una ragione si inferisce che una cosa non può affatto esistere. Ma quale forza può mai avere la mancanza di una ragione per *determinare* o *dimostrare* qualcosa, se a noi non è dato di sapere se di fatto non vi sia alcuna ragione? Del resto, se la libera determinazione del Creatore può essere una ragione per cui c'è qualcosa anziché non esserci, noi non possiamo assolutamente venire a conoscenza di tutte le ragioni, in quanto la libera determinazione del Creatore non può esserci nota in altro modo se non in virtù di una sorta di tentativo mediante induzione sulle cose

---

[87]* Nell'originale «*stat pra ratione voluntas*», dove vi è un refuso per «*pro*». L'aforisma deriva da una satira di Giovenale (VI, 223), ma entra nell'uso comune degli autori di diritto canonico e civile sul finire del dodicesimo secolo per descrivere la relazione fra la volontà del sovrano e le leggi. Vedi G. Post, *Vincentius Hispanus, «Pro ratione voluntas», and the Early Modern Theories of Sovereignty*, «Traditio», 28, 1972, pp. 159-184. K. Pennington, *The Prince and the Law. Sovereignty and Rights in the Western Legal Tradition*, University of California Press, Berkeley-Los Angeles 1993, pp. 43-45.

che accadono costantemente e di cui pensiamo che Lui stesso abbia dato una legge costante. E non c'è chi non veda che tale induzione è sempre incompleta, e quanto questa illazione disti dall'evidenza di una dimostrazione.

129. Ma messo da parte tutto ciò, Leibniz stesso non ha forse riconosciuto che molti mali – per esempio, le azioni scellerate di Tarquinio – si trovano anche nel più perfetto dei mondi, poiché tutti i mondi possibili portano in loro un qualche male, che nel mondo migliore dev'essere tollerato per avere tutti gli altri beni? Ma laddove in una qualche indagine trovassimo anche, se ciò fosse possibile, considerando quel mondo soltanto, ciò che è ottimo, che è più semplice e che comporta il danno minore, da dove trarremo la certezza che non c'è particella di mondo che, per quanto più imperfetta, venga scelta per compiacere ad altri, per esempio una concessione alle azioni scellerate di Tarquinio? Se così fosse, che cosa si potrà mai dedurre da una ragione sufficiente, nota anche per singoli casi? Infatti, anche considerando una perfezione maggiore, ammettendo la necessità della tendenza al meglio, in presenza di conoscenze così misere da parte nostra non segue ancora nulla in modo determinato.

130. Che dire, invece, delle cause necessarie delle cose? Conosciuta la causa necessaria, se ne può sempre inferire con certezza l'effetto; ma a quale pericolo d'errore ci esporremo, se dalla mancanza di una causa (delle quali ben poche sono quelle che abbiamo conosciuto) passeremo audacemente a dedurre la mancanza di un effetto! I leibniziani non si stancano di addurre l'esempio di Archimede, che dalla mancanza di una ragione sufficiente dedusse l'equilibrio negli equiponderanti; ma tacciono il suo errore, che origina appunto da quello stesso principio. Infatti, stabilito l'equilibrio, dalla mancanza di una ragione sufficiente Archimede inferiva che la Terra avesse forma sferica; a noi, invece, essa risulta divergere da tale forma per ragioni scoperte in seguito, che egli, non avendole viste, aveva considerato inesistenti. D'altra parte, l'equilibrio si è manifestato a Archimede non in base a un principio negativo, bensì in base a un'argomentazione alla cui forma positiva e alla cui forza è facile risalire. Non avremo difficoltà a mostrarlo, se il tempo lo consentirà. Aggiungiamo solo una cosa: fra i moltissimi casi in cui l'argomentazione in base al principio di ragione sufficiente è destituita di ogni validità c'è pure l'esclusione del salto dalla natura. Che cosa vieta, infatti, che vi siano ragioni per le quali un salto di una grandezza determinata possa essere utilissimo in confronto a tutte le altre, come agli individui sarebbero massimamente utili dei ripiani superiori, via via che i gradi di una certa determinata altezza salgono?

131. Così, lasciata cadere la ragion sufficiente quale ragione del principio di continuità, ne proponiamo altre due, la prima in base a principi metafisici, la seconda fondata sull'induzione, che dev'essere di grandissima utilità soprattutto e ovunque in fisica. Infatti è inevitabile che almeno le cause prime siano sempre o quasi sempre ignote a noi, che investighiamo la natura con la sola debole forza dei nostri sensi. La prima ragione è questa: nelle quantità che possono variare e durano per un tempo continuo e non possono assumere più grandezze in un unico istante, non può esservi salto, cioè passaggio

istantaneo da una grandezza all'altra senza passare per tutte le grandezze intermedie. Se questo asserto viene dimostrato, viene dimostrato che non può esservi salto in natura. Infatti, secondo le leggi di natura ogni quantità in singoli istanti di tempo può assumere una sola grandezza. Così un corpo, sebbene possa mutare densità e velocità (ma intendiamo sempre la velocità risultante, che determina il moto che effettivamente ha luogo), tuttavia in ciascun istante può avere una densità e una velocità soltanto. Un corpo potrebbe avere due densità se si replicasse in modo che i suoi punti assumessero una certa distanza gli uni dagli altri in una porzione di spazio, un'altra distanza in un'altra porzione di spazio; e potrebbe avere due velocità nello stesso istante, se avesse la propensione a percorrere in un dato tempo uno spazio sia maggiore sia minore, cioè la propensione a replicarsi in tutti gli istanti successivi. Ma ciò contrasta con le leggi della natura e può venire realizzato dall'onnipotenza divina soltanto.

132. D'altra parte, a nostro giudizio questo asserto si ricava manifestamente da quanto abbiamo esposto sopra. Se, infatti, in un qualche istante di tempo vi fosse un salto, in quello stesso istante la quantità dovrebbe assumere due grandezze, cioè l'ultima di una sequenza continua riguardante il tempo precedente e la prima di una sequenza riguardante il tempo seguente. Infatti, come quello stesso istante è sia l'ultimo estremo del tempo precedente sia il primo del tempo seguente, così la grandezza che si ha in quell'istante dev'essere sia il termine estremo della sequenza relativa al tempo precedente sia il primo termine della sequenza relativa al tempo seguente: il fatto è che la sequenza continua che precede deve avere il suo termine estremo, e la sequenza successiva deve avere il suo primo termine, che da solo non può venire isolato da essa, proprio come l'ultimo punto soltanto non può venire assolutamente isolato dalla linea o l'ultima linea soltanto dalla superficie. Se (Figura 24) in tutto il tempo CR ci fosse una grandezza uguale RI e in tutto il tempo RT una grandezza uguale a RP, nell'istante R devono esserci entrambi, dal momento che non può accadere che all'area RIDC manchi la sola ultima linea RI, o che al rettangolo RPKT manchi la sola prima linea RP. Ciò si ricava manifestamente da quanto abbiamo detto al n. 97 circa il luogo geometrico, che non può avere più ordinate corrispondenti a un'unica ascissa, dovendo assolutamente conservare la continuità. Se le linee DC, EF delle Figure 19-21 si interrompono, devono lasciare un'apertura in GH (Figura 19), in cui l'ordinata sia non solo nulla ma impossibile, o (Figura 20) avere in H le due ordinate, o (Figura 21) averne due in tutto il tratto HG. E non si dà altro caso oltre quei tre, in quanto, come abbiamo avvertito al n. 99, ci si riduce al secondo caso anche qualora si dica che dopo G l'ordinata svanisce, non appena EF tocca l'asse GB: in tal caso, infatti, all'istante G si avrebbero la grandezza GC e la grandezza zero, come, per esempio, una distanza GC e una distanza nulla, replicandosi uno dei due punti ed esistendo esso, insieme con l'altro, tanto alla distanza GC quanto nello stesso punto di spazio.

133. Il salto nel moto locale viene escluso con il medesimo argomento. Un certo mobile può procedere da un punto qualsiasi a un altro punto qualsiasi dello spazio seguendo traiettorie alquanto diverse, quanto si voglia incurvate e piegate; ma la linea lungo la

quale passerà dovrà essere sempre descritta da un tratto continuo, senza alcuna apertura. Perché? Appunto perché se s'interrompesse in qualche posto, come nella Figura 1, dove la via ABCD è interrotta in BC, l'istante in cui il mobile inizierebbe a descrivere CD sarebbe identico all'istante in cui cesserebbe di essere in AB, oppure lo precederebbe, o infine lo seguirebbe. Negli ultimi due casi, fra quei due istanti deve necessariamente intercorrere un tempo continuo, nel quale vi sono infiniti istanti. Inoltre: nel primo dei tre casi proposti il mobile sarebbe nel medesimo istante sia in B sia in C, cioè si replicherebbe; nel secondo caso si troverebbe per un tempo continuo su due linee, dunque si replicherebbe infinite volte; nel terzo caso, per un tempo continuo non si troverebbe in alcun posto. La forza dell'argomentazione sta sempre tutta nell'esclusione che si dia istante successivo a istante, punto successivo a punto, linea successiva a linea, perciò anche esclusione del fatto che il successivo di un termine sia il termine di una qualunque sequenza che dura in un tempo continuo o che viene condotta lungo una linea continua.

134. Ma già con quest'argomentazione ci siamo spianati la strada all'induzione, alla quale lo stesso Leibniz e i leibniziani hanno fatto ricorso. Possiamo averla anche in modo abbastanza esteso, giacché anche questa esclusione del salto nel moto locale riguarda l'induzione. Premettiamo, però, alcune indicazioni circa l'induzione stessa. Anzitutto[88], laddove s'investigano le leggi generali della natura, l'induzione ha massima validità, e per scoprirle quasi non sussiste altra via. Per induzione i filosofi, anche nell'antichità, hanno sempre ascritto a tutti i corpi l'estensione, l'essere suscettibili di forma, la mobilità, l'impenetrabilità; a ciò molti dei filosofi più recenti aggiungono, con la stessa argomentazione, l'inerzia e la gravità universale. Per avere forza probatoria, l'induzione deve passare in rassegna tutti i casi particolari che possano mai esservi. Essa non può avere posto nel determinare le leggi di natura. Per un'induzione meno rigorosa c'è spazio: per poter essere applicata, essa deve essere tale che la si trovi effettivamente e in primo luogo in tutti i casi – in numero significativo – che si possono mettere sulla bilancia in modo da dover riconoscere se tale legge sia osservata; nei casi rimanenti, invece, qualora qualcosa appaia a prima vista contraddittorio, tutto potrà essere conciliato con quella legge dopo un più preciso esame, anche se non si potrà mai riconoscere subito se le cose stiano principalmente così. Se queste condizioni sono soddisfatte, l'induzione dev'essere considerata adatta alla determinazione di leggi. Così, poiché vediamo così tanti corpi attorno a noi resistere ad altri corpi affinché quelli non prendano il loro posto, e li vediamo cederlo se non riescono a resistere, anziché stare simultaneamente nello stesso posto, ammettiamo l'impenetrabilità dei corpi. Né ci è d'ostacolo vedere che certi corpi s'insinuano in altri, sebbene

[88] Da questo punto in poi e fino alla fine del 135 i due paragrafi sono stati riportati, con variazioni minime, nel n. 40 della *Theoria philosophiae naturalis*.

durissimi, come l'olio nei marmi, la luce nei cristalli[89] e nelle gemme. Vediamo, infatti, che questo fenomeno si concilia facilmente con la stessa impenetrabilità, dicendo che quei corpi penetrano in quelli attraverso i loro pori vuoti.

135. Inoltre, qualunque esse siano, le proprietà assolute – cioè quelle che non hanno relazione con i nostri sensi – si rivelano generalmente nelle masse percepibili dei corpi. Dobbiamo trasferire queste stesse proprietà a qualunque particella piccola a piacere, se non ci è d'ostacolo alcuna ragione positiva e se esse non sono tali da dipendere da una ragione che ha a che fare con un corpo considerato come un tutto (cioè come una molteplicità di particelle), distinta da una ragione che ha a che fare con una parte. Prova ne è, anzitutto, che grande e piccolo sono termini relativi: chiamiamo piccole e impercettibili cose che sono minute rispetto alla nostra taglia e ai nostri sensi. Perciò, ove si tratti di proprietà non relative, bensì assolute, dobbiamo ritenere tutte le caratteristiche generali che vediamo in esse, contenute entro i limiti per noi sensibili, altrettanto generali anche al di sotto di quei limiti: infatti, rispetto a come sono in sé le cose, quei limiti sono accidentali, sicché, se vi fosse stata una violazione dell'analogia, essa avrebbe potuto assai più facilmente cadere[90] entro i limiti per noi percepibili, che sono ben più ampi, che al di sotto di essi, cioè in prossimità del nulla. Il fatto che nei limiti per noi percepibili non sia caduta alcuna violazione è indizio che non ci sono violazioni. Tale indizio non è evidente, ma riguarda i principi dell'investigazione, la quale, se svolta secondo certe regole di prudenza, di solito ha successo. Poiché l'indizio può ingannare, può accadere che si commetta un errore; ma contro tale errore ci sarà una presunzione, com'è chiamata anche nel diritto, finché viene dimostrato l'opposto con una ragione positiva. Qui dovremmo aggiungere: «A meno che vi sia una ragione positiva contraria». Così, sbaglierebbe contro tutte queste regole chi dicesse che corpi di grossa taglia non possono compenetrarsi o replicarsi o essere privi d'inerzia, mentre possono compenetrarsi o replicarsi o essere prive d'inerzia le loro più piccole parti. D'altra parte, se una proprietà è relativa per i nostri sensi, dal fatto che essa si trovi nelle masse più grandi non dobbiamo inferire che ci sia nelle particelle più piccole – per esempio, che "essere percepibile" è la stessa cosa, di "essere colorato". In tal caso, ciò è vero per le masse più grandi, ma non per quelle più piccole, poiché tale distinzione di grandezza, accidentale rispetto alla materia, non è accidentale rispetto alla sua denominazione di *sensibile* e *colorato*. Così pure, se una qualche proprietà dipende da una ragione riferita a un aggregato o a un tutto in modo tale da non potervi essere separata, allora, in virtù di tale ragione, nemmeno quella proprietà dev'essere trasferita dal tutto o dall'aggregato alle sue parti. È nella natura di un tutto avere delle parti, e non può esservi un tutto senza parti. È nella natura dell'essere suscettibili di forma ed estensione l'avere qualcosa che dista da qualcos'altro, dunque l'avere parti. Di qui quelle proprietà, sebbene esse si trovino in un qualsiasi aggregato

[89] Nell'originale «*chrystalla*», ma è un refuso per «*crystalla*» (la versione corretta è riportata al n. 40 della *Theoria philosophiae naturalis*).
[90]* Nell'originale «*cadera*», ma è un refuso per «*cadere*».

di particelle di materia, ovvero in una qualsiasi massa percepibile, non devono venire trasferite a qualunque particella per induzione.

136. Ciò esposto in questo modo, in forza del principio d'induzione, che è quasi l'unico mezzo con cui possiamo investigare la natura con speranza di successo, e dal quale soltanto dipende qualsiasi pratica che si basa sull'osservazione – medicina, anatomia, ottica, astronomia, e moltissime altre –, faremo un passo avanti per dimostrare l'induzione a vantaggio della legge di continuità. Si possono indubbiamente addurre svariati, chiarissimi esempi; ma ne accenneremo soltanto pochi, aggiungendo qualcosa che mostrerà in misura assai maggiore la forza stessa dell'induzione: benché quotidianamente si osservino coi propri occhi tipi così numerosi di quantità variabili, non si trova mai alcunché nelle modificazioni delle quantità variabili che non esibisca da sé, in maniera spontanea ed evidente, la legge di continuità, o che non si possa accordare nel migliore dei modi con tale legge, una volta consideratala più attentamente.

137. In primo luogo, amplissima è l'induzione di spazio e tempo, nei quali si prosegue incessantemente, con moto continuo e senza alcun salto. Segue poi l'induzione delle cose che sono nello spazio, come tutte le linee e le superfici in geometria, le quali, se conservano la loro natura, modificano in modo continuo le loro proprietà, com'è ben noto ai geometri, in modo da passare da una grandezza all'altra sempre e soltanto attraverso tutte le grandezze intermedie. Da un'ordinata all'altra, dalla grandezza di un'area o di un arco all'altra, da una direzione all'altra, si passa sempre per tutte le intermedie. Lo stesso vale quando si passa da una curvatura che si ha in un certo punto alla curvatura che si ha in un altro – curvature che ovviamente dipendono dai raggi dei cerchi osculatori, rispetto ai quali sono inversamente proporzionali. E ancora, da una qualsiasi proprietà a un'altra si passa sempre in modo che avvengano modificazioni continue attraverso grandezze intermedie qualunque. E se si tratta di un passaggio da grandezze positive a grandezze negative, si passa sempre per lo zero o per l'infinito. Le trasformazioni dei luoghi geometrici, originate dalla modificazione di una condizione qualsiasi, rispettano ciò ovunque e tanto infallibilmente che la geometria, laddove è necessario, preferisce ricorrere ai misteri dell'infinito piuttosto che ammettere un determinato salto, come abbiamo visto in moltissimi esempi in questa stessa dissertazione (ma molti di più se ne trovano nella già citata dissertazione aggiunta al terzo volume dei nostri *Elementi*, e tanti ancora ne riserviamo per il quarto volume)[91]. E certamente, ciò si trova ovunque e invariabilmente rispettato nell'intera geometria, anzi anche nelle formule indefinite dell'algebra che esprimono semplici luoghi geometrici: in essi, ove si tratti di quantità finite non si ha mai salto; e non si ha mai salto, che non venga evitato con il ricorso a certi misteri dell'infinito, anche nel caso di quantità indefinite. Tale continuità non si ha soltanto nelle linee immaginarie che ci sono nello spazio, ma anche nei moti reali dei corpi, che dipendono da

[91] Il riferimento è ancora a R.G. Boscovich *De transformatione locorum geometricorum*, cit. Per il riferimento al quarto volume degli *Elementa*, mai composto, vedi sopra, nota 39 al n. 80.

spazio e tempo. In essi bisogna badare anzitutto a questo: come abbiamo detto al n. 133, non si arriva mai da un punto all'altro dello spazio, se non transitando lungo una linea continua, sebbene possano esservi molteplici linee continue del genere, assai diverse fra loro. D'altra parte, da ciò segue che, dovendosi parimenti modificare le distanze, la continuità si conserva, giacché non si compie mai alcun passaggio da una distanza all'altra senza passaggio per quelle intermedie; a sua volta, da qui segue che nessuna densità, che dipende dalla distanza fra i punti, cambia mai per salto; analogamente, da ciò segue poi che nessun albero o nessun'altra cosa del genere, che cresce coll'allontanarsi della cima dalla base, giungerà mai da un'altezza all'altra senza passare per le altezze intermedie.

138. E anzi, la continuità si conserva anche nei moti, per il fatto che tutti i moti avvengono per linee continue, che non presentano mai interruzioni. Assistiamo a moltissimi moti del genere. Tutti i pianeti e le comete compiono il loro corso lungo linee continue e i moti retrogradi avvengono tutti poco a poco; nelle soste, poi, il moto è assai piccolo, e tuttavia è sempre presente. Di conseguenza, anche il giorno giunge a poco a poco attraverso l'aurora e se ne va passando per il crepuscolo serale. Il diametro del Sole sale e scende sopra l'orizzonte non per salto, bensì con moto continuo. Analogamente i gravi, lanciati di traverso, effettuano i loro moti lungo linee parimenti continue, cioè, se si astrae dalla resistenza dell'aria, lungo parabole; oppure, tenendone conto, lungo traiettorie più prossime a iperboli. I gravi vengono sempre lanciati con almeno una piccola inclinazione, poiché un moto esattamente verticale, che accada casualmente, ha un'improbabilità infinitamente infinita di aver luogo fra le infinitamente infinite inclinazioni (per quanto piccole e non percepibili). Tali moti, nell'ipotesi che la Terra si muova, si differenziano notevolmente da quelli parabolici ed esibiscono una curva continua anche nel caso di un lancio esattamente verticale; nell'ipotesi che la Terra sia perfettamente in quiete, e assumendo che non vi sia alcuna forza dei venti che defletta il moto, si avrebbe moto rettilineo di salita e di discesa. Di più: tutti gli altri moti che dipendono dalla gravità, tutti quelli che dipendono dall'elasticità o dalla forza magnetica parimenti conservano la continuità, in quanto la conservano quelle stesse forze da cui vengono generati. Infatti, poiché la gravità decresce secondo l'inverso del quadrato delle distanze, e le distanze non possono cambiare per salto, essa varia passando per tutte le grandezze intermedie. Analogamente, vediamo che la forza magnetica dipende dalle distanze secondo una legge continua, la forza elastica dalla flessione (come nelle lamine) oppure dalla distanza (come nelle particelle di aria compressa). In queste forze, e in tutte le forze di questo tipo, così come nei moti che esse generano, la continuità c'è sempre, tanto nelle traiettorie descritte quanto nelle velocità, che allo stesso modo cambiano passando per tutti i valori intermedi, come si vede nei pendoli, nei moti di salita dei gravi e in moltissimi altri casi del genere, in cui le variazioni di velocità avvengono gradualmente e il moto non s'inverte se non diminuendo la velocità per tutti i gradi. In tutti questi casi la continuità si conserva immancabilmente. Di conseguenza, nei moti naturali non ci sono angoli, ma il cambiamento di direzione avviene sempre gradualmente; né, in realtà, ci sono veri e propri angoli

nei corpi stessi, nei quali, per quanto sottili sembrino essere uno spigolo o una punta, la curvatura di solito si vede solo coll'aiuto del microscopio. Di essa per altro sono sempre dotati anche gli alvei dei fiumi, le foglie e le fronde degli alberi nonché i rami e qualsiasi pietra, a meno che, eventualmente, da qualche parte si presentino delle cuspidi continue, che possono essere o di primo genere, che la natura sembra adottare nelle spine, o di secondo genere, che essa pare adottare nelle unghie e nel becco degli uccelli, ove tuttavia, poiché tale cuspide ha una sola tangente, la continuità viene conservata, come vedremo fra poco. Sarebbe compito infinito trattare i singoli casi in cui la continuità è rispettata in natura. In generale, è preferibile cercare di esibire un caso in natura in cui la continuità non si conservi – che non si riuscirà affatto a esibire.

139. Nelle questioni riguardanti la geometria si suole utilizzare come controesempio quelle che nel paragrafo precedente abbiamo chiamato cuspidi (o punti di ritorno), come se in esse venisse violata la continuità, in quanto la curva, dopo essere giunta a un certo punto, inverte la direzione. I leibniziani sono soliti rispondere che lì non si compie[92] alcun salto, perché la cuspide nasce da un nodo che conserva la continuità, e – sostengono – bisogna considerare il vertice della cuspide non come una sorta di punto indivisibile, bensì come un nodo infinitamente piccolo, dotato di curvatura infinita, che torna su se stesso da tutte le direzioni. Nella Figura 17 il nodo corre, proseguendo nella sua direzione, sempre nello stesso settore, lungo MOVCFIVPN. In tutti i punti intermedi corre anche la tangente, con un corso continuo, per QOR, AVB, DCE, GFH, LIK, B′VA′, SPT. Allo sparire del nodo, la Figura 17 si trasforma nella 18 e si ha la cuspide MVN, nella quale – dicono i leibniziani – il punto V non è un punto matematico, bensì una sorta di nodo infinitamente piccolo, che ha sempre e comunque quelle stesse tangenti.

140. A nostro parere, però, ciò non si può provare in alcun modo. Vale a dire, quel punto della cuspide è un punto unico e indivisibile, e l'arco MOF si congiunge in un unico punto con l'arco FPN, come si dimostra facilmente mediante la geometria finita. È certamente possibile che la cuspide abbia origine da un nodo, una volta modificata la condizione del luogo geometrico. È quanto accade, per esempio, nella concoide: se la distanza del polo dall'asse è minore della retta data, si ha un nodo al di qua dell'asse; se uguale, si ha una cuspide; se maggiore, si hanno due flessi contrari (nella concoide, infatti, si prende un segmento uguale a quello dato dalla stessa parte del polo oppure da quella opposta; in tal modo il vertice, muovendosi di moto continuo, descrive quella curva, che quanto alla sua natura è sempre la stessa). Tuttavia, la curva che ha un nodo ha una sua natura peculiare, diversa da quella delle rimanenti, e le sue proprietà sono determinate in modo preciso mediante la geometria finita (così come la parabola, che è intermedia fra le ellissi e le iperboli, costituisce un genere suo proprio e ha le sue proprietà, avendone perdute moltissime di quelle che caratterizzano ellisse e iperbole, proprio perché saranno andate all'infinito oppure saranno svanite). Fra le proprietà della curva con un nodo c'è quella che il nodo svanisce completamente, e a

[92] Nell'originale «*commiti*», ma si tratta di un refuso per «*committi*».

esso non subentra una sorta di nodo infinitesimo, bensì un punto indivisibile. Tuttavia, riteniamo che la continuità non sia affatto violata. Infatti, se la cuspide viene considerata in sé, indipendentemente dal nodo che l'ha generata nella Figura 18, la tangente nel vertice V sarà l'unica AB, e scorrendo il punto lungo quella curva con moto continuo per OVP, la tangente QOR, cambiando direzione in maniera continua, andrà in AVB; poi, se la cuspide è di primo tipo, come mostrato nella figura, la tangente, anche qui cambiando direzione in modo continuo, proseguirà dalla posizione AVB alla posizione TPS. Se, invece, la cuspide fosse di secondo tipo, tale direzione tornerebbe indietro dalla tangente condotta per la cuspide. Tuttavia, si passerà sempre da una direzione della tangente a un'altra per tutte le direzioni intermedie.

141. Non comporta alcuna difficoltà il fatto che la direzione di moto del punto, che in OV era dapprima indirizzata verso il settore B, cominci poi, in VP, a indirizzarsi verso il settore opposto. Proprio per questo non c'è alcuna vera cuspide in cui la tangente non sia comune tanto all'arco che giunge alla cuspide quanto a quello che da essa torna, cosicché appunto su quella retta il settore B, cui la direzione di moto era dapprima rivolta, cambia nel settore A opposto; settori che, come abbiamo visto al n. 60, sono fra loro in qualche modo connessi all'infinito, che è come un termine comune. Perciò, in meccanica la discesa dei gravi lungo la medesima retta per cui erano saliti non viola assolutamente la continuità, mentre essa verrebbe completamente violata se essi scendessero lungo un'altra retta; ciò vale pure nelle oscillazioni lungo curve qualsiasi. La direzione può invertirsi immediatamente in quella diametralmente opposta, poiché il simbolo ∞, collocato nell'un settore verso cui si guarda, e il simbolo ∞, collocato nel settore opposto da cui si guarda, rappresentano in certo modo l'unico punto in cui la gamba infinita della retta si congiunge con l'altra gamba infinita opposta. Se la direzione deve comunque cambiare tanto in meccanica quanto in geometria, ciò avverrà sempre lungo una qualunque curva continua, non tornando con un salto da una direzione a un'altra, senza direzioni intermedie.

142. Lo stesso si ha pure nella Figura 6 per la curvatura dell'arco MHN, che cambia con moto continuo, mentre il punto P scorre lungo una retta continua che torna in certo modo su se stessa lungo HR∞QH. Tale esempio spiega in modo ancor più evidente quanto abbiamo detto. La curvatura guarda sempre il suo centro P che, per ribaltamento continuo della retta FG, scorre con moto anch'esso continuo lungo quella retta, e quando lo stesso P, superato l'infinito dalla parte HR, torna lungo QH, la curvatura si ribalta dalla parte opposta; mentre nel caso della retta AC, la curvatura guarda allo stesso modo l'infinito di entrambe le parti, tanto verso R quanto verso Q. Analogamente, quando P passa per H e il cerchio, dopo essere scomparso, passa dalla parte opposta, la direzione del settore, considerandolo dalla parte aperta, passa dalla parte opposta sempre lungo la stessa retta. Perciò, anche dove le curve hanno un flesso contrario, il cambiamento di curvatura non avrà luogo se non quando il raggio del cerchio osculatore sarà svanito o cresciuto all'infinito; il suo centro non cambierà posto con un salto in qualche luogo, né cambierà settore, a meno che venga fatto passare per

quel punto della curva o per l'infinito: ciò che in geometria si può illustrare con migliaia di esempi. Dunque, nel punto V della cuspide riportata nella Figura 18[93] c'è la tangente con entrambe le direzioni AVB, B′VA′. Anzi, ovunque è possibile considerare indifferentemente l'una e l'altra direzione, sia quando i settori opposti sono congruenti sia per il fluire della linea nello stesso punto O, essendo questa di per sé indifferente tanto alla direzione OQ quanto alla direzione OR. In tutti questi casi non si coglie alcun salto, cioè alcun passaggio da una grandezza all'altra senza passaggio per quelle intermedie.

143. Salto non c'è neppure ove si immagini la trasformazione del nodo della Figura 17 nella cuspide della Figura 18. Nella prima, mentre il nodo si riduce oltre qualunque limite, le due tangenti AVB, A′VB′ si avvicinano l'un l'altra, anch'esse oltre qualunque limite, e coincidono perfettamente allo svanire di questo; l'arco MV, che si collegava all'arco VN attraverso il nodo, ora si connette direttamente attraverso se stesso in un unico punto e prosegue. Le rette KL, HG, ED tendevano a non passare per V entro l'angolo MVN; ciascuna di loro lasciava invece dalla stessa parte qualche arco VM, VN. Lo stesso fanno nella Figura 18, mantenendo la medesima direzione. Lì, però, toccavano qualche arco; qui non ne toccano alcuno, poiché appunto è andato distrutto l'arco che dovevano toccare. Lo stesso accade allorché il cerchio si trasforma in un punto e il raggio scompare. Le rette che erano state le tangenti del cerchio rimangono, passando ora per quel punto; ma non sono tangenti ad alcun arco, giacché tale arco ha cessato di esistere.

144. Qualora si considerasse la curva generata dallo sciogliersi del nodo che degenera in una cuspide, sembrerebbe che la continuità sia violata, mentre viene assolutamente conservata anche in tal caso. Se il nodo della Figura 17 si scioglie cominciando da P, per determinare i punti della generata si devono prendere nelle tangenti VA′, IK, FH, CE, VB, OR segmenti uguali agli archi VP, IVP, FIVP, CFIVP, VCFIVP, OVCFIVP. Svanendo il nodo e trasformandosi esso nella cuspide della Figura 18, i segmenti di tangente VA, IK, FH, CE, VB, che erano tenuti separati l'uno dall'altro mediante l'arco del nodo, ora divengono uguali, e a quella curva continua subentra la curva generata dallo sciogliersi dell'arco VP, che ha avuto inizio nel punto P della Figura 18; il semicerchio e la curva generata dallo sciogliersi dell'arco FV, dopo che a esso sia stato aggiunto un segmento uguale all'arco VP, sono curve di natura diversa dal cerchio e non conservano la continuità. Ma s'immagini, assumendo che l'arco VO sia uguale a VP, di generare una curva sciogliendo il nodo da O lungo OVCFIVP; s'immagini poi, in ciascuna curva generata, di prendere tre archi: da una parte quelli delimitati dal punto P e dalla tangente VA′, dalla tangente VA′ e dalla tangente VB, dalla tangente VB e dalla tangente OR; dall'altra parte, quelli delimitati dal punto O e dalla tangente VA, dalla tangente VA e dalla tangente VB′, dalla tangente VB′ e dalla tangente VS. Nell'istante in cui la cuspide si forma e le tangenti VA, VA′ e VB, VB′ si sovrappongono rispettivamente, i primi due archi divengono l'uno la prosecuzione

[93]* Nell'originale «fig. 28», ma è un refuso per «fig. 18».

dell'altro, e lo stesso accade ai due intermedi e ai due estremi. I primi due formano una curva continua generata dal filo che, nella Figura 18, si svolge a partire da VP e si avvolge in VO[94], come solitamente avviene nella cicloide, che in tal modo genera se stessa; i secondi formano un cerchio intero; i terzi formano una curva continua generata per svolgimento e avvolgimento degli archi VP, VO in direzione opposta, eseguita aggiungendo in V un segmento uguale agli archi. Prima che tale trasformazione abbia luogo, quegli archi di due curve continue si avvicinano oltre qualunque limite agli archi continui di tre curve, nelle quali finiscono le prime due, e a se stessi. Affinché la curvatura non cambi per salto, il cerchio rimane cerchio osculatore di entrambe le nuove curve. Tutto ciò si dimostra in modo facilissimo. In tutti i casi di questo genere, in cui c'è trasformazione continua (mentre si permutano gli archi dei luoghi geometrici, e gli uni si congiungono agli altri, da cui distavano), accade o che gli archi formano un diverso, unico luogo geometrico, trasferendosi la continuità dagli uni agli altri, che prima erano proseguiti da altri archi ancora, oppure che finiscono in due luoghi geometrici del tutto distinti fra loro, senza essere collegati da alcuna continuità comune. Alcuni s'interrompono persino, ma in modo tale che, nell'istante in cui ha luogo l'interruzione, le linee continue si uniscono e vengono proseguite da altre, e i punti in cui avvengono le nuove connessioni – condotte per essi le tangenti, i raggi dei cerchi osculatori e quant'altro – dapprima si avvicinano fra loro oltre qualunque limite, e infine coincidono.

145. Ovunque, in casi del genere, rifulge lo straordinario zelo della geometria nel conservare la continuità, chiamando in aiuto, ove necessario, anche dei misteri, che ci accingeremo a sciogliere nuovamente nel quarto libro degli *Elementi*; ma se dovessimo trattare la questione quanto essa meriterebbe, non basterebbero neppure interi volumi. Ma accennavamo al rifulgere dello zelo della geometria. Infatti le figure che noi ci formiamo con i frammenti di semplici luoghi non conservano la continuità. Ma la geometria non ammette frammenti che terminano in tal modo; di conseguenza, si ha che le proprietà generali pertinenti a tali figure con più lati si possano sempre trasferire ad altre figure con più lati, in cui a un'intersezione fra due luoghi geometrici si sostituisce un'altra. Ciò vale anche laddove un lato di una figura tenda all'altra o nella direzione della parte finita oppure nella direzione opposta, cioè oltrepassando l'infinito, se si hanno gambe infinite. Ma qui, di nuovo, si offrirebbe una messe immensa, che non si mieterà né si coglierà mai abbastanza.

146. Qualcosa di simile accade quando facciamo forza alla geometria e andiamo contro la sua natura, sovvertendo e interrompendo la continuità che essa richiede. In tal caso vanno distrutte e si estinguono le quantità geometriche, essendone stata violata la natura. Così nella Figura 22, dove una retta perpendicolare a AB scorre per moto continuo, attraversando R_2, R_3, R_4, le ordinate R_2P_2, $R_2P'_2$[95], condotte al valore finito R_3E, si estinguono e diventano immaginarie, per quanto la geometria protesti. Essa richiede

[94] Nell'originale «VP», ma dev'essere «VO».
[95]* Nel testo originale «R_3P_3», ma è un refuso per «$R_2P'_2$».

l'avanzamento del punto P_2 dall'arco IE a EH, e del punto P'_2[96] da HE a EI, e invano chiama a sé una retta perpendicolare perché oscilli da una tangente all'altra, col cui avanzamento essa, spinta alla disperazione, per così dire in qualche modo abolisce la quantità interrotta. Perciò, il passaggio da stato reale a quantità immaginaria riguarda sempre due quantità contemporaneamente (poiché in realtà sono due anche $P_2P'_2$ e P'_2P_2, che si succederebbero l'un l'altra nell'avanzamento dei punti PP′), affinché vi siano quelle che possano succedersi a vicenda conservando la continuità. Ed è proprio come se – come abbiamo notato nella già citata dissertazione aggiunta al terzo volume dei nostri *Elementi* – l'estinguersi avvenisse sempre in modo che l'avvicinamento reciproco di quelle due quantità abbia luogo prima che esse s'incontrino, mentre la velocità relativa cresce o diminuisce all'infinito, così come anche la morte degli esseri animati avviene talvolta per un esagerato aumento della febbre, talvolta invece per debolezza a seguito del deperimento in vecchiaia.

147. Taluni trovano un salto anche nell'angolo fra il diametro e la circonferenza, quando l'angolo acuto, minore di un angolo retto, si avvicina all'angolo retto, senza tuttavia diventare mai uguale a esso. Ma questa difficoltà svanisce in virtù di ciò che abbiamo detto al n. 83, in quanto gli angoli mistilinei differiscono per specie da quelli rettilinei, e dev'esserci continuità fra quelli che non differiscono per specie. Anche in meccanica vi sono salti ammessi a partire da ipotesi che implicano il salto, che noi perciò riteniamo impossibili. Un salto del genere per un punto situato fuori da una superficie sferica e attratto verso tutti i suoi punti o verso un centro secondo l'inverso del quadrato delle distanze (punto che sia stato dapprima lanciato obliquamente e poi lasciato libero, esaurendosi il lancio), abbiamo fatto notare contro Eulero nella nostra dissertazione *Sul moto di un corpo attratto in un centro di forze*[97] in base a tale legge. In un altro salto simile Eulero inciampa[98] quando, nella *Meccanica*,[99] nota che, se la forza diminuisce secondo l'inverso del cubo delle distanze, un punto descrive una spirale logaritmica. In tal caso il punto dovrebbe arrivare al centro dopo un tempo finito, e poi o non essere più in alcun posto, come egli ritiene, o essere contemporaneamente in infiniti punti, come ci sembra possibile provare in base alla natura di quella spirale. Analogamente, ci sono moltissimi altri tipi di salto e moltissime altre assurdità, in cui le forze, al ridursi delle distanze, crescono all'infinito e sono attrattive. Come abbiamo già accennato, in natura non ammettiamo assolutamente forze del genere, e anzi sosteniamo che sono repulsive a distanze minime, affinché in natura nulla riesca infinito

---

[96]* Nel testo originale «P_3», ma è un refuso per «P'_2».

[97] R.G. Boscovich, *De motu corporis attracti in centrum immobile viribus decrescenti-bus in ratione reciproca duplicata in spatiis non resistentibus*, Komarek, Roma 1743, in particolare nn. 78-79.

[98]* Nell'originale «*obnit*», ma è un refuso di fine riga per «*obvenit*».

[99] Boscovich si riferisce in particolare a L. Euler, *Mechanica, sive motus scientia analytice exposita*, Petropoli. Ex typographia Academiae Scientarum, 1736, vol. I, Caput V, § 762 (ora in *Leonardi Euleri Opera Omnia*, Serie II, vol. I, Teubner, Leipzig-Berlin 1912, pp. 258-259).

in alcun luogo. Per illustrare tutte queste cose basterebbero appena interi volumi. In verità, in questi stessi casi, ovunque si tratti di quantità finite, la geometria, la meccanica e le discipline tutte ci mettono dovunque di fronte alla legge di continuità.

148. Certamente vi sono cose che sembrano richiedere un salto anche in grandezze finite e paiono sovvertire l'induzione. Generalmente esse si riducono a due classi. Nel primo tipo rientrano quelle in cui noi, attraverso un salto, assumiamo certe grandezze, trascurando quelle intermedie non perché non vi siano, ma perché nell'uso comune solitamente non vengono chiamate con quello stesso nome, oppure perché ce ne importa di meno. Nel secondo tipo rientrano quelle in cui il cambiamento avviene in un tempuscolo talmente piccolo da cadere appena o da non cadere affatto sotto i sensi.

149. Al primo tipo si riducono anche le quantità discrete, cioè i numeri. Chiamiamo numeri gli aggregati di unità, e in genere i non specialisti non prendono in considerazione quasi altro numero. Non abbiamo dato neppure un nome ad altri numeri, se non a quelli formati per addizione continua di unità. Se essi progrediscono per salto, ciò accade perché abbiamo trascurato le quantità intermedie, cioè tutti i numeri surdi e fratti[100], che colmano ogni vuoto fra due numeri vicini qualunque; infatti non vi è alcuna distanza in sé determinata, per quanto piccola, fra uno stesso numero fratto o surdo e un qualsiasi numero intero, tale che non esista una distanza minore per qualche altro numero fratto o surdo. Se si immaginano tutti i nomi possibili dei numeri – siano tali numeri generati da frazioni improprie, da espressioni di radicali o, nel caso degli irrazionali trascendenti, da altri segni ancora –, anche in essi si avrà una sequenza continua, e ciò che in geometria si ha attraverso linee a noi note, nell'algebra finita così come in quella infinitesimale si compie attraverso simboli e segni.

150. Riguardano ciò anche i casi in cui la quantità presa in considerazione abbia inizio e fine, e assumiamo due grandezze i cui inizi e le cui fini rispettivamente distino fra loro di un determinato intervallo, trascurando le grandezze intermedie. In casi di questo tipo è più facile cadere in errore se la fine della prima grandezza è in comune con l'inizio della grandezza seguente. Si abbia (Figura 25) una qualsiasi curva MN con asse AB. Prese due parti CQ, QE dell'asse e innalzate le ordinate CD, QP, EF, l'area

---

[100] I numeri fratti e quelli surdi corrispondono essenzialmente ai numeri razionali e agli irrazionali. Il seguente passo di Leibniz può fornire un chiarimento: «Infatti non è lecito sottrarre il maggiore dal minore, né in parecchi casi dividere esattamente un numero, per esempio un numero primo; né estrarre radici esattamente, se non da certi numeri, combinati moltiplicando un numero per se stesso. Tuttavia, si presentano i seguenti sostituti [*succedanea*]: quando la sottrazione è invalida [*irrita*] si presentano i numeri *negativi*; quando la divisione è invalida, i *fratti*; quando l'estrazione di radice è invalida, i *surdi*. Tali sostituti soddisfano secondo verità ed esattezza, e in natura possono anche venire esibiti in atto». (G.W. Leibniz, *Mathesis universalis*, aus den Manuscripten der königlichen Bibliothek zu Hannover, in *Leibnizens mathematische Schriften*, herausgegeben von C.I. Gerhardt, 2. Abtheilung, Band III, Schmidt, Halle 1863, p. 68; enfatizzato nell'originale).

PQEF appare succedere immediatamente all'area DCQP, dalla quale tuttavia differisce per una certa differenza finita, che si troverà tagliando da QP, EF rette uguali a CD, QP, e applicando ai loro estremi l'arco DP. Pertanto quella grandezza[101] varia per salto. Tale difficoltà si risolve facilmente notando che si ha una serie continua fra le quantità i cui inizi e le cui fini scorrono con moto continuo, non fra quelle i cui inizi e le cui fini si trovano a una qualche distanza determinata. Se accettiamo ciò, prendiamo due termini di una serie continua trascurando gli intermedi: ma gli intermedi si possono avere facilmente dividendo la distanza fra i due inizi e le due fini secondo una certa legge. Nel caso presente, se si immagina che il segmento *cq* avanzi di moto continuo, insieme con le sue ordinate *cd*, *qp*, dalla posizione CQ alla posizione QE, l'area *dcqp* passerà dalla grandezza DCQP alla grandezza PQEF passando attraverso tutte le grandezze intermedie senza alcun salto. Lo stesso accadrebbe se dovesse giungere a qualche altra grandezza il cui inizio fosse posto a una distanza a piacere dalla fine della precedente QP, e nel frattempo la stessa *cq* mutasse con una certa variazione continua, purché, trasferendosi *cd* all'inizio della grandezza successiva, *qp* si trasferisca alla sua fine. Data la curva MN, dati gli estremi di due aree che differiscono sempre fra loro per una certa differenza, data qualsiasi grandezza intermedia, i geometri potranno sempre trovare per *cq* una posizione che esprima l'area di questa grandezza.

151. Prendiamo dalla fisica due esempi di questo tipo. Il giorno, se calcolato da tramonto a tramonto del Sole, oppure da mezzogiorno a mezzogiorno, non è sempre della stessa misura; essa è diversa in periodi dell'anno differenti, benché il divario nel primo caso sia minore che nel secondo. Da ciò, il fatto che gli orologi, il cui utilizzo è comune agli astronomi di quasi tutta l'Europa, non possono essere sincronizzati precisamente con gli orologi in Italia, così come orologi qualunque non possono sincronizzarsi col Sole, se dotati di moto uniforme. Si immaginino due giorni contigui, che differiscano fra loro di 10 minuti secondi. Sembra che vi sia un salto: infatti si passa dal primo al secondo giorno, senza passare per grandezze intermedie. La risposta alla difficoltà è evidente da quanto abbiamo detto. L'inizio e la fine del secondo giorno distano rispettivamente dall'inizio e dalla fine del primo di una distanza determinata. Si troveranno grandezze intermedie dividendo gli intervalli secondo un qualche rapporto, in modo che gli inizi avanzino in modo continuo, così come le fini. Ciò avverrà se considereremo tutti i giorni relativi a posizioni poste sotto un medesimo parallelo verso ovest, fino a tornare alla nostra posizione, dopo aver percorso il globo terrestre. Ciascuna posizione ha i propri giorni, che costituiscono una serie continua che ha inizio nel nostro primo giorno e fine nel secondo. In quei giorni intermedi troveremo tutte le grandezze intermedie senza alcun salto, che hanno anch'esse il nome di giorni. Noi, tuttavia, non siamo soliti prendere in considerazione quelli che non ci riguardano. Vi sono anche altri termini intermedi che ci riguardano, ma che, di nuovo, non si suole prendere in considerazione. Divisi entrambi i giorni in ore e minuti, gli intervalli di tempo da una qualsiasi ora del primo giorno a una qualsiasi ora del secondo

[101] Nell'originale «*magnitu-*», ma è un refuso di fine riga per «*magnitudo*».

costituiscono anch'essi una serie continua di intervalli, per esempio dalla prima ora del primo giorno alla prima ora del secondo, dal primo quarto della prima ora del primo giorno al primo quarto della prima ora del secondo, ecc. Questi intervalli tendono, con variazione continua, dal primo al secondo giorno. Comunemente non si suole chiamarli giorni, ma talvolta li si definisce così; infatti si potrebbe dire che ha impiegato dieci interi giorni, chi avesse impiegato un tempo che va dalla sesta ora del primo giorno alla sesta dell'undicesimo.

152. Un secondo esempio assai simile a questo si può avere nelle oscillazioni dei pendoli. La seconda oscillazione differisce dalla prima talvolta di parecchi diti. Ma se la prima e la seconda venissero tagliate in un numero qualsiasi di parti che fosse lo stesso per entrambe, e si prendessero gli archi intercettati fra sezioni simili, essi costituiranno una serie continua di grandezze, i cui inizi e le cui fini passerebbero con moto continuo dall'inizio e dalla fine della prima oscillazione all'inizio e alla fine della seconda. In entrambi i casi e in altri casi del genere le cose vanno come per l'area *dcqp* della Figura 25.

153. La seconda classe [di cose che sembrano richiedere un salto] riguarda quantità in cui variazioni notevoli hanno luogo in un tempo estremamente piccolo e impercettibile. Di questo tipo è l'esplosione negli armamenti, che sembra aver luogo nello stesso istante in cui si avvicina il fuoco. E tuttavia le particelle devono certamente accendersi l'una dopo l'altra, l'aria deve dilatarsi, il che esige che vi sia un moto locale e perciò un tempo continuo, e che una palla acceleri partendo dalla quiete attraverso tutti i gradi di velocità. Analogamente, l'emissione di luce che un corpo reca ai nostri occhi appare avvenire in un istante, ma i fenomeni riguardanti i satelliti di Giove e le aberrazioni annuali delle stelle fisse mostrano che la propagazione avviene in successione temporale. In tale tempo, appunto, la luce percorre circa cento migliaia di miglia in mezzo quarto d'ora per arrivare dal Sole fino a noi. Del pari, si immagini una lamina elastica dotata di grande forza e compressa a contatto con una palla: una volta lasciata libera, essa sembra imprimere alla palla una notevole velocità determinata; tuttavia, anche in tal caso tutti gli studiosi di meccanica riconoscono con certezza che la palla accelera in un tempo brevissimo (ma pur sempre un intervallo di tempo), passando attraverso tutti i gradi di velocità. Ci sono centinaia di esempi del genere; ne sceglieremo due, che di solito vengono addotti come prove del contrario, mentre si accordano magnificamente con la legge di continuità o addirittura la confermano.

154. Il primo esempio è dato dalla riflessione e rifrazione della luce, che si dice avvenire in un unico punto, all'incontro del raggio con una nuova superficie; nella riflessione (primo caso) tutta la velocità perpendicolare alla superficie si estingue in un istante, e si produce una velocità uguale e contraria; nella rifrazione (secondo caso) la velocità cambia per salto. In verità, che tale inflessione non avvenga per salto in un punto, ma secondo una curvatura continua, è evidente dall'azione reciproca fra la luce e i corpi, che consiste nella diffrazione, scoperta dal nostro confratello, padre Grimaldi. In virtù di questa, a una certa distanza da una superficie un raggio comincia a piegarsi, mentre

per tale azione la componente perpendicolare della velocità varia passando per tutti i gradi intermedi. E appunto, che la luce non viene riflessa per l'impatto sulla superficie risulta sia da molte altre cose che Newton ha raccolto insieme nell'*Optice* sia dal fatto che qualsiasi superficie – per esempio, una superficie vitrea, che a noi appare estremamente levigata – possiede asperità e solchi prodotti da quella stessa polvere con cui vengono levigati i vetri. Tali asperità, assai considerevoli rispetto alle particelle di luce, perturberebbero la riflessione prodotta dall'impatto e diffonderebbero la luce in ogni direzione. Esse, invece, non disturbano in alcun modo la riflessione prodotta da una forza repulsiva che agisce a una certa distanza.

155. Infatti, si immagini (Figura 26) che P sia una particella di luce, IEKF una sfera, alla quale è estesa l'azione percepibile dei corpi sulla luce, AB una superficie che separa due mezzi. Finché la sfera è tutta nel primo mezzo, un raggio, ugualmente attratto o respinto da tutte le parti, prosegue in linea retta. Quando la sfera comincia a immergersi nel nuovo mezzo (vi si trovi, per esempio, la sua porzione CKD), ha luogo una differenza di azioni. Infatti, se GH dista dal centro quanto CD, le porzioni GEPFH e CEPFD, essendo uguali e immerse nello stesso mezzo, agiscono in modo uguale sulla particella P; invece, le porzioni GIH e CKD, essendo in due mezzi diversi, agiscono in maniera differente. Perciò, vi sarà una forza di attrazione diretta verso il piano AB o una forza di repulsione in direzione opposta, e tale forza incurverà la traiettoria. Essa, se la forza repulsiva l'avrà resa parallela alla superficie AB, verrà riflessa e descriverà un arco del tutto simile al precedente, che i nostri sensi percepiscono terminare in una retta dalla parte N, simile a quella lungo la quale il raggio era arrivato dalla parte M. Se la superficie CD fosse stata disuniforme e scabra, ma le difformità fossero state estremamente esigue in rapporto all'intera sfera e alla porzione CKD, non vi sarà alcuna perturbazione percepibile per la traiettoria MPN, in quanto la forza dipende da tutte le particelle collocate entro la porzione CKD, non dalla sola superficie prima. Inoltre, si ha perturbazione massima e dispersione di luce laddove le asperità sono maggiori. Accade lo stesso che sulla Terra, ove le asperità sono date da monti e valli. I gravi lanciati liberamente, se escludiamo la resistenza dell'aria, descrivono parabole; esse non subiscono alcuna perturbazione percepibile da parte dell'asperità del suolo, giacché la gravità dipende non dalla sola superficie, bensì dall'intera massa terrestre, rispetto alla quale l'effetto delle montagne è impercettibile. Ma se una gran quantità di sfere cadesse contemporaneamente sulla Terra e la gravità venisse meno completamente, e la superficie terrestre fosse elastica, tutte le sfere verrebbero riflesse e disperse nelle direzioni più diverse, determinate dai piani d'incidenza sui quali le singole sfere si fossero trovate a cadere.

156. Come secondo esempio, prendiamo dell'acqua che fluisce da un vaso. Si dice che, se il foro fosse al di sotto di una certa altezza, l'acqua ne uscirebbe immediatamente con la velocità che acquisterebbe scendendo da quella stessa altezza; di conseguenza, si pretende di ricavare che quella velocità venga generata tutta in un istante. In questo caso, però, moltissimi fra i migliori studiosi di meccanica dichiarano esplicitamente

di ritenere che quella stessa velocità venga acquisita non tutta in un istante, bensì gradualmente; ciò presupposto, ogni difficoltà svanisce. Invece, è per noi oltremodo evidente che tale difficoltà non sia dotata di alcuna forza per dimostrare che la continuità venga violata e che c'è salto, e giungiamo a ciò per duplice via. In primo luogo, è evidente che l'acqua non può uscire con una velocità maggiore di quella con cui viene tolto l'ostacolo che ostruiva il foro. La sua rimozione dipende dalla velocità impressagli dalla mano che lo rimuove, e tale velocità – come vedremo più sotto – viene impressa passando per tutti i gradi. Chi pretenda che quella rimozione avvenga dopo aver generato istantaneamente nell'ostacolo una velocità finita, agisce soltanto per *petitio principii*, e non ricava alcuna particolare difficoltà dalla velocità dell'acqua, che non può superare la velocità acquisita dall'ostacolo mentre viene rimosso.

157. Ma, si dirà, che accade se Dio in un istante distrugge l'ostacolo e apre il foro? Anzitutto risponderemo che noi qui ci formiamo la nostra induzione in base a ciò che avviene in natura, non in base a ciò che accadrebbe se Dio violasse le leggi di natura. Dunque, anche in tal caso riteniamo che risulta evidente che la velocità viene acquisita in un tempo brevissimo, che però è pur sempre in un intervallo di tempo, e passando per tutti i gradi di velocità, proprio come accadrebbe in una sfera scagliata con gran forza da una lamina elastica. Infatti, la forza che preme sull'acqua equivale al peso intero di una colonna d'acqua di pari base e pari altezza. Con tale peso la colonna è in equilibrio in un vaso di uguale larghezza ed è equivalente a esso, come facilmente si dimostra considerando vasi di altra forma. A nostro parere, la compressione fa avvicinare fra loro le particelle d'acqua per uno spazio impercettibile, tale però che una forza repulsiva è uguagliata[102] da quel peso, al quale per altro risulta esattamente proporzionale, e risulta anche proporzionale alla quota dello strato d'acqua superiore. Questa forza si oppone alla forza repulsiva esercitata dalla parete del vaso. Aperta istantaneamente quella parete, la forza accelera le particelle più vicine sino a farle allontanare da quelle che seguono attraverso tutto lo spazio in cui agisce la forza repulsiva. Perciò viene poi acquistata velocità, che è proporzionale alla radice quadrata della quota, poiché ove le forze agiscono fra loro lungo spazi uguali secondo un qualche rapporto costante, vengono acquistate velocità proporzionali alla radice quadrata delle forze, per il fatto stesso che in tempuscoli uguali le forze producono velocità proporzionali a loro stesse e al tempo; ma, se per una maggiore forza viene acquisita un'ancora maggiore velocità, nei singoli intervalli di spazio i tempuscoli sono più brevi, sicché la velocità cresce meno della forza. Questa economia regna sovrano sul tempo e su tutti i gradi intermedi delle grandezze. Perciò, in base a questo stesso effetto siamo spinti a formulare l'ipotesi più ardita per la successiva generazione di velocità, che sarà analoga a questa. Almeno questo è per noi evidente: non si può dimostrare in alcun modo che le cose non vadano appunto così, e la stessa induzione – se non avessimo nient'altro – ci imporrebbe di conciliare questo fenomeno con essa, in base a quanto abbiamo detto al n. 134.

[102]* Nell'originale «*aequatur*», ma dev'essere «*aequetur*».

158. Esposta e dimostrata la legge di continuità e dissipate le obiezioni che si suole e si può contrapporvi, ci resta da mostrare – in occasione della soluzione di un'altra obiezione, che emerge di solito nella collisione fra corpi – l'origine della nostra teoria, e da dimostrarla in base alla stessa legge di continuità. Ci eravamo proposti, all'inizio di questa dissertazione, di trattare più ampiamente questa stessa teoria; ma poiché la presente dissertazione si è già troppo accresciuta, siamo costretti a riservare questo argomento a un'altra dissertazione o a più d'una. Abbiamo esposto molte cose a essa pertinenti nella dissertazione *De viribus vivis* e molte di più all'inizio della seconda parte della dissertazione *De lumine*; ma una trattazione ancora più estesa è stata resa pubblica proprio in questi giorni dal padre Carlo Benvenuti, dottissimo studioso della nostra Compagnia (che conosce assai bene la nostra opinione su questa questione) in una breve dissertazione proposta alla pubblica discussione presso il Seminario Romano. In particolare, si tratta di problemi che riguardano la teoria delle forze che ora illustreremo e il suo utilizzo nell'intera fisica, che è evidentissimo. Tutto ciò è stato da lui sviscerato e rifinito in maniera alquanto accurata. Perciò accenneremo qui soltanto ai sommi capi di questa stessa teoria e la dimostreremo in base alla legge di continuità, una volta ammessa la quale la deduzione dell'intera teoria ci apparirà tanto evidente che nulla, se non mere sofisticherie, potrà essere prodotto per infirmarne la deduzione.

159. Ed ecco i sommi capi della nostra teoria. Anzitutto i corpi non arrivano mai a contatto immediato, ma alle minime distanze hanno una determinazione ad allontanarsi fra loro, che chiamiamo forza repulsiva. Essa, riducendosi all'infinito le distanze, aumenta oltre qualunque limite, in modo tale da uguagliare qualsiasi velocità grande a piacere che debba essere estinta; all'aumentare delle distanze essa diminuisce fino a svanire completamente e a trasformarsi poi in una determinazione all'avvicinamento, ossia in forza attrattiva, che dapprima aumenta e poi diminuisce, trasformandosi di nuovo in repulsiva. Ciò si ripete molte volte a piccole distanze, finché, infine, a distanze maggiori diviene forza attrattiva proporzionale, per i nostri sensi, all'inverso del quadrato delle distanze. Tutto ciò in base a una legge costante delle ordinate a una certa curva continua e semplice che all'origine delle ascisse (che esprimono distanze) abbia un asintoto parallelo alle ordinate; tagli l'asse in più punti, piegandosi al di qua e al di là di esso; infine, dalla parte dell'asse opposta alla prima gamba asintotica, essa abbia un'altra gamba asintotica, essendo ora l'asse stesso il suo asintoto e avvicinandosi la forma della gamba il più possibile alla forma di una gamba dell'iperbole avente ordinate proporzionali all'inverso del quadrato delle distanze. Da ciò concludiamo che la materia è costituita da punti assolutamente indivisibili, che distano fra loro di un qualche intervallo finito, e facciamo risalire solidità e coesione alla distanza del limite fra la repulsione a distanza minore e l'attrazione a distanza maggiore. Di conseguenza, non ammettiamo in alcun modo solidità ed estensione continua in senso matematico.

160. Ecco il complesso della nostra teoria. Passiamo ora alla sua deduzione dalla legge di continuità. Immaginiamo due corpi spinti nella medesima direzione, il primo dei quali abbia velocità di sei gradi, mentre il secondo di dodici. Quando il secondo corpo raggiunge il primo, posto che entrambi siano perfettamente rigidi, dovrebbe esserci una

variazione di velocità per salto in uno dei due o in entrambi, nello stesso istante in cui avviene il contatto. Ciò è oltremodo evidente se i corpi non possono compenetrarsi, come di fatto non possono in base al n. 134; infatti, in tal caso, il secondo verrebbe spinto oltre il primo e subentrerebbe al suo posto, se continuasse a muoversi con velocità maggiore in un tempuscolo piccolo a piacere. Ciò, ovviamente, lo ammettono tutti; ma in duplice modo s'imbattono nella difficoltà. Vi è chi ammette anche corpi duri: di questo tipo soltanto sono i primi elementi della materia ammessi dallo stesso Newton, che li volle perfettamente solidi, in modo che le loro parti possano aderire con contatto continuo per attrazione. Costoro non ritengono che dalla natura si debba escludere il salto, e fra loro MacLaurin per primo non trova in esso alcunché di assurdo. Ma la nostra intera dissertazione toglie forza alla loro concezione. Altri – primi fra tutti i leibniziani – escludono dalla natura ogni sorta di corpi rigidi; dichiarano, perciò, che tutti i corpi sono molli o elastici, cioè tali che le parti vadano a poco a poco verso l'interno e, mentre la forma muta, la differenza di velocità venga gradualmente eliminata, in accordo con la legge di continuità.

161. Quest'ultima risposta esclude sì che vi sia salto entro la massa di ciascun corpo considerato come un tutto, non però sulle superfici prime che sono a contatto, ove si esercita la forza d'impenetrabilità. Ad allontanarci da una risposta del genere è anzitutto la considerazione che, se nei corpi elastici non ammettiamo alcuna particella piccola a piacere assolutamente solida, dovremmo ammettere che vi è divisione attuale della materia all'infinito senza alcun limite, cosicché non vi sia alcuna parete ultima tale da essere del tutto priva di vuoto o della conformazione necessaria all'elasticità. E quanti misteri dell'infinito e assurdità vere e proprie ciò comporti, traspare in misura più che sufficiente da quanto abbiamo detto sopra circa l'infinito. Se lasciamo da parte ciò, qualunque corpo, per quanto composto da particelle divise all'infinito, è sempre dotato di superfici ultime che, se si arriva al contatto, si toccano immediatamente. Tali superfici sono limiti reali indivisibili dei corpi, secondo quanto detto al n. 16. Né si può dire, per le superfici, che possa essercene una solida, dotata di spessore infinitamente piccolo: infatti abbiamo dimostrato al n. 80 che non esistono quantità infinitesime in sé determinate; se ce ne fossero, le loro parti interne non potrebbero assolutamente appartenere al limite estremo, perciò alla superficie. La compressione, che muta la forma del corpo, non è altro che l'avvicinamento reciproco delle superfici ultime, come abbiamo mostrato con sufficiente chiarezza nella dissertazione *De viribus vivis*, aggiungendo anche uno schema che illustra in che modo essa agisce: la compressione consiste nel fatto che si ha avvicinamento delle superfici poiché la velocità della superficie precedente è minore di quella seguente[103].

162. Inoltre, le superfici fra le quali avvenisse il contatto dovrebbero cambiare velocità per salto. Infatti, se la prima superficie del secondo corpo, in un qualche intervallo di tempo divisibile, dopo che è stata eliminata ogni distanza fra loro, raggiunge lo stesso livello dell'ultima del primo corpo, vi sarà un istante successivo in cui l'una avrà una

[103] Vedi R.G. Boscovich, *De viribus vivis*, n. 46 e relativa Figura 9.

velocità di grado 11, l'altra una velocità fino ad allora più piccola di 11, poniamo 7; perciò, per tutto quell'intervallo di tempo[104], la superficie del secondo corpo avrebbe avuto velocità maggiore della superficie del primo corpo, di conseguenza avrebbe percorso più spazio, il che comporterebbe la compenetrazione di un certo numero di particelle del corpo.

163. È dunque evidente che in queste superfici non si può evitare il salto, fatta salva l'impenetrabilità, se si giunge a contatto con la differenza di velocità di cui si è detto. Perciò, le velocità dei corpi devono assolutamente mutare poco a poco – l'una diminuendo, l'altra aumentando – prima che vi sia contatto. Per tale ragione, dev'esserci una causa – qualunque essa sia – che produca decelerazione e accelerazione. Essa, poiché modifica lo stato dei corpi in ordine alla determinazione del moto e della quiete, dovrà chiamarsi forza; in quanto tende ad allontanare un corpo da un altro, si dovrà chiamare forza repulsiva, col qual nome è da intendersi la determinazione di qualsiasi particella di materia ad allontanarsi da qualsiasi altra particella, mentre viene spinta ad avvicinarsi a essa ancor prima del contatto. Inoltre, tale determinazione si sarà potuta avere, senza azione a distanza e senza che vi sia urto, o per la natura stessa di una materia, che richiede quell'allontanamento sotto la condizione di una sua particolare distanza da altra materia, oppure per libera legge di Dio, che stabilisce che per quella distanza vi è quell'allontanamento. In entrambi i modi si può spiegare altrettanto bene anche la forza attrattiva[105] a distanze maggiori, che dipende dalle distanze stesse, senza alcuna azione a distanza e senza che vi sia urto. L'idea di una tale determinazione è estremamente distinta e chiara. Per altro, fa meraviglia che alcuni trovino così difficile ammettere una determinazione del genere, che assume come condizione una distanza precisa, mentre tutti costoro ammettono assolutamente una determinazione simile a modificare lo stato quando la distanza sia pari a zero, determinazione sorta dall'impenetrabilità, che a loro parere agisce al contatto immediato. È forse più facile comprendere, una volta messi da parte i pregiudizi, una determinazione – provenga essa dalla natura di una materia oppure dalla libera volontà di Dio – che assume come condizione una distanza uguale a zero anziché una qualunque distanza determinata?

164. Inoltre, se le distanze divengono infinitamente piccole, la forza repulsiva deve aumentare all'infinito, in modo da essere in grado di estinguere qualunque velocità grande a piacere. Infatti, se in un caso – per esempio, in quello riportato – la differenza di velocità si estinguesse al contatto stesso, mentre in un altro caso il secondo corpo fosse dotato di velocità maggiore, si dovrebbe arrivare al contatto prima che l'intera differenza di velocità si estingua. Infatti, si constata che tutte le forze generano o estinguono velocità minori in tempi minori, e a una maggiore differenza di velocità corrisponde, fino al contatto, un tempo minore. Per tale ragione, affinché nel secondo caso non si abbia differenza di velocità e salto al contatto, nel primo caso l'intera differenza

[104]* Nell'originale «*illo pro tempore*», ma è un refuso per «*illo tempore*».
[105]* Nell'originale «*astractiva*», ma è un refuso per «*attractiva*».

deve estinguersi prima che si giunga al contatto immediato, mentre – com'è ovvio – nel secondo caso la maggiore differenza viene estinta completamente mediante la forza repulsiva esercitata nell'avvicinamento successivo. Poiché il medesimo ragionamento vale per qualsiasi differenza di velocità grande a piacere, è chiaro che la forza repulsiva debba essere tale che i corpi non arrivino mai al contatto immediato, che essa sia in grado di estinguere una velocità grande a piacere, e che perciò, a distanze infinitamente piccole, aumenti oltre qualunque limite all'infinito. E aumenterà in modo tale che una retta a essa proporzionale, innalzata su una retta che esprima le distanze, delimiti un'area infinita (infatti in meccanica si dimostra che il quadrato della velocità generata o distrutta è proporzionale a quell'area). Per l'infinità di tale area si richiede che la forza diminuisca almeno secondo un rapporto semplice con la distanza: è questo, infatti, il rapporto espresso da un'iperbole conica, che ha una superficie infinita compresa fra gli asintoti. Nell'intera famiglia delle iperboli, tutte quelle le cui ordinate crescono meno hanno area finita; quelle le cui ordinate crescono di più hanno anch'esse area infinita, ma infinitamente più infinita[106].

165. Ora, da qui si ricava che la materia è costituita da punti assolutamente indivisibili e privi di estensione, sempre separati fra loro da un intervallo. Infatti tale forza repulsiva, non essendo relativa in rapporto ai nostri sensi e non dipendendo dalla natura di un aggregato o di un tutto, per il n. 135 dev'essere attribuita a tutte le particelle della materia. Ne viene che nessuna parte di materia è composta da più particelle contigue, le quali, proprio per quella forza repulsiva che cresce all'infinito, dovrebbero subito separarsi le une dalle altre. Di conseguenza, le particelle prime di materia devono necessariamente essere tutte semplici, non composte, e perciò indivisibili nonché distanti l'una dall'altra. Esse, poiché non possono neppure avere estensione virtuale, in base al n. 26 saranno punti assolutamente indivisibili [107] e inestesi.

166. Poiché, inoltre, a distanze maggiori si ha una determinazione all'avvicinamento reciproco, come risulta evidente dalla gravità universale scoperta da Newton (che si estende nell'immensità e, per i nostri sensi, tende a essere proporzionale all'inverso del quadrato delle distanze) e dalla coesione dei corpi, in cui appunto quando la parte anteriore viene attratta, quella posteriore segue; è evidente che quella forza repulsiva, che a distanze ridotte al minimo cresce infinitamente e all'aumento di queste diminuisce, in qualche luogo diminuirà sino a svanire e poi, invertendo la direzione (come, stando al n. 112, abbiamo visto che spesso accade alle ordinate delle curve), si trasformi in attrattiva. Lì vi sarà necessariamente un limite fra repulsione e attrazione tale che, se alla distanza di quel limite si ponessero due punti materiali, essi rimarrebbero in quiete, non essendo attratti né respinti da alcuna forza. Però, riducendosi quanto si voglia tale distanza (agendo ora la forza repulsiva), i punti cercano ora di allontanarsi l'un l'altro, mentre aumentando la distanza (agendo ora la forza attrattiva)

---

[106] Vedi in proposito la nota **96** a p. **55** dell'Introduzione a questo volume.
[107]* Nell'originale «*pucta prorsus indivisibia*», ma è un refuso per «*puncta prorsus indi-vidibilia*».

cercano di avvicinarsi reciprocamente. Ne viene che, se posti a quella distanza, tendono a conservarla; mosso un punto verso l'altro, il secondo è obbligato spinto ad avanzare; trascinato il primo verso la parte opposta, l'altro è obbligato a seguirlo; invece, se si tenta di avvicinarli l'un l'altro o di allontanarli l'uno dall'altro, oppongono resistenza. La nozione di coesione e di solidità che possiamo acquisire attraverso i sensi non consiste in nient'altro che in tali fenomeni. Per tale motivo chiamiamo questi limiti *limiti di coesione*.

167. Abbiamo poi un'immagine sensibile di limiti del genere – cioè del passaggio da forza repulsiva a distanze minori a forza attrattiva a distanze maggiori – nelle pinze elastiche con cui, durante l'inverno, maneggiamo i carboni accesi. Le loro punte, se avvicinate più del dovuto, vengono determinate ad allontanarsi reciprocamente; se allontanate più del dovuto, vengono determinate ad avvicinarsi. Ma si devono ammettere anche limiti di altro tipo, in cui c'è passaggio da attrazione a repulsione all'aumentare delle distanze, come si osserva nelle particelle dell'acqua che aderiscono (perciò poste nel limite precedentemente descritto) e poi divengono vapore, le cui particelle tendono ad allontanarsi le une dalle altre con grandissima forza: in esse, dunque, alla repulsione alle distanze minime subentra l'attrazione a distanze un po' più grandi, poi nuovamente repulsione a distanze ancora maggiori e di nuovo attrazione alle massime distanze, over agisce la gravità reciproca. Che, anzi, passaggi e limiti siffatti siano moltissimi risulta dal fatto che molti corpi, dopo reiterate compressioni, perseverano in una quiete relativa, avendo appunto raggiunto nuovi e più adeguati limiti di coesione. Ma questo secondo tipo di limiti differisce moltissimo dal precedente, in quanto i due punti collocati alla distanza di quel limite sono in quiete, ma non appena questa venga di poco modificata, vengono obbligati ad allontanarsi ancora di più: infatti, al ridursi della distanza si ha la forza attrattiva che riduce la distanza ulteriormente, all'aumentare[108] di essa agisce la repulsione, che l'accresce ancora di più.

168. D'altra parte, simili alternanze e passaggi delle forze sono stati ammessi anche da Newton verso la fine delle Quaestiones dell'*Optice*, sebbene poi alle minime distanze abbia voluto un'ultima attrazione e il contatto, non la repulsione. Ma egli spiega i passaggi coll'esempio delle quantità positive e negative in algebra[109], ritenendo necessario in meccanica che, laddove la forza attrattiva cessi, cominci la forza repulsiva, come in algebra dove cessano le quantità positive devono cominciare quelle negative[110]. In verità bisogna notare che – come abbiamo dimostrato nella nostra Algebra,

---

[108] Nell'originale «*acta*», ma è un refuso per «*aucta*».
[109] Nell'originale «*Albegra*», ma è un refuso per «*Algebra*».
[110] Il riferimento è a I. Newton, *Optice*, Londinii: Impensis Sam. Smith & Benj. Walford, Regiae Societatis Typograph. ad Insignia Principis in Coemeterio D. Pauli, 1706, Quaestio 23, p. 338. Si veda per raffronto il testo latino: «Sicuti in *Algebra*, ubi *Quantitates affirmativae* evanescunt & desinunt, ibi *negativae* incipiunt; ita in *Mechanicis*, ubi *Attractio* desinit, ibi *Vis repellens* succedere debet» (enfasi nel testo originale; nell'edizione inglese

cui è dedicato il secondo tomo dei nostri *Elementi*[111], e come si evince anche da ciò che è stato detto al n. 112 – non è vero che, per il fatto stesso che una qualche quantità cessi di essere positiva, debba trasmigrare necessariamente in una quantità negativa e viceversa; infatti, talvolta una quantità, dopo essere arrivata a zero, torna indietro e non lo oltrepassa. Per altro, anche in ciò che abbiamo dimostrato nella nostra Algebra, c'è una regola generale in base a cui si può sapere se una stessa quantità debba passare per lo zero oppure tornare indietro. Ed eccola: se, quando sia giunta a zero, la sua grandezza diminuisce in rapporto precisamente uguale o infinitamente vicino a quello con cui diminuisce una qualsiasi potenza dispari della distanza da zero, passerà; se diminuisce in rapporto uguale o infinitamente vicino a quello con cui diminuisce una potenza pari, tornerà indietro. Infatti, modificando la distanza da zero e allontanandosi da lì, anche le potenze dispari della distanza cambiano da positive in negative o viceversa, mentre le potenze pari rimangono tali; perciò lo stesso deve accadere a una formula algebrica o a una qualsiasi quantità che abbia tale rapporto. A sua volta, tale regola è rispettata immancabilmente in geometria: infatti, una linea curva condotta fino a un asse lo deve tagliare e oltrepassare (se la direzione delle ordinate cambia) o toccare e tornare indietro (laddove la direzione delle ordinate si conserva), a seconda che le ordinate stiano esattamente nello stesso rapporto – o in un rapporto infinitamente vicino – con una potenza qualsiasi di grado dispari oppure pari della loro distanza dal punto in cui arrivano a zero e svaniscono.

169. Da qui segue pure che la forza, fatta passare in tal modo per lo zero e divenuta ora attrattiva ora di nuovo repulsiva, non è una forza molteplice che ha bisogno di più cause di quelle di cui necessiterebbe se fosse soltanto attrattiva. La sua legge sarà semplicissima, sia che essa rimanga sempre negativa sia che passi da positiva a negativa e la sua natura richieda quei passaggi, se essa fosse tale che in qualche posto, vicino ai luoghi in cui svanisce, segua il rapporto di una potenza dispari anziché di una pari. Essa potrà pure venire espressa da una semplicissima formula algebrica, il cui valore, al diminuire del valore della variabile che si riferisce alla distanza, cresca all'infinito e divenga negativo; poi, all'aumentare di esso, passi ora da negativo a positivo, ora da positivo a negativo, finché, cresciuto esso a sufficienza, sia sempre positivo e approssimi quanto si vuole l'inverso del quadrato delle distanze. Per tale ragione, la legge potrà essere espressa anche attraverso una curva algebrica[112] semplice che, all'origine delle ordinate, abbia un asintoto parallelo alle ordinate, che da quella parte crescono all'infinito e decrescono dalla parte opposta, finché la curva tagli

---

la Quaestio 23 corrisponde alla Query 31: vedi l'Introduzione a questo volume, nota **27** a p. **13**).

[111] Il riferimento è a R.G. Boscovich, *Elementorum universae matheseos tomus II. Continens Algebram finitam*, Salomoni, Roma 1754. Come il primo volume, anch'esso era stato pubblicato in prima edizione nel 1752 da Salomoni con il titolo *Elementorum matheseos ad usum studiosae juventutis tomi I pars altera, in qua Algebrae finitae elementa traduntur*.

[112]* Nell'originale «*Algegraicam*», ma è un refuso per «*Algebraicam*».

l'asse, e torni poi a tagliarlo quante volte si vuole e in punti qualunque a piacere; ma termini in una gamba infinita che abbia per asintoto l'asse stesso, giaccia dalla parte opposta a esso e si avvicini quanto si voglia alla forma di una gamba iperbolica le cui ordinate siano in rapporto inverso con il quadrato delle distanze. E proprio questa è la forma della curva con cui esprimiamo la nostra teoria delle forze. In verità, come una curva del genere può essere in sé semplicissima e di natura continua e costante, così anche la legge delle forze non sarà molteplice, bensì unica, e dipenderà o dall'unica natura dei punti materiali o dalla volontà, libera e unica, dell'Artefice divino[113].

170. È poi certamente straordinario come essa, benché unica, conduca alla spiegazione di tutte le proprietà generali e particolari dei corpi. Il primo ramo asintotico spiega l'impenetrabilità; l'ultimo, la gravità; i limiti intermedi, svariati tipi di coesione e la differenza fra corpi elastici e molli, solidi e fluidi e altre cose analoghe; i molti ripiegamenti, la fermentazione e l'infiammazione, l'emissione di vapori e di luce, sebbene la massa emittente sia coerente e non frantumata, ed essi spiegano in modo ammirevole un gran numero di altre cose del genere. Qui si scorge facilmente perché tutti i corpi si assomiglino così tanto in ciò che riguarda l'impenetrabilità, agente alle distanze minime, e nella gravità, che agisce a quelle più grandi, e altrettanto si differenziano in tutte le altre cose, da cui dipendono le operazioni chimiche, il processo di nutrizione e ogni altra opera mirabile e varia della natura. Ma di ciò abbiamo trattato abbondantemente, dimostrandolo nella già citata dissertazione *De lumine*, e tante altre cose – come abbiamo accennato – vengono presentate dal padre Carlo Benvenuti in questi stessi giorni.

171. Aggiungeremo qui solo una cosa, che riguarda l'idea di spazio in questa nostra concezione che esclude che i corpi abbiano estensione reale, matematicamente continua. Oltre ai punti reali della materia, noi ammettiamo modi reali di esistenza, mediante i quali i corpi si trovano là dove sono. Questo lo devono assolutamente ammettere coloro per i quali la posizione di un corpo è nell'ordine del coesistente; oppure costoro ammettono uno spazio reale affinché tutte le cose che esistono, ogni volta che esistono, abbiano il medesimo ordine o siano nella stessa porzione di spazio. Tali modi sono per noi posizioni reali e immobili dei punti; esse, laddove esistono, fondano una relazione reale di distanza fra sé e i punti della materia cui si riferiscono. La loro possibilità, da noi conosciuta in modo indefinito,[114] è per noi uno spazio immaginario continuo e infinito, perché – non essendo possibile che vi sia un punto di posizione così vicino a un altro che non possa essercene un altro più vicino o più lontano – nelle cose possibili, conosciute in modo indefinito, non c'è alcun intervallo vuoto, alcun termine, che nelle cose esistenti c'è sempre.

[113] Nell'originale «*Divinis*», ma dev'essere «*Divini*».
[114]* Nell'Errata Corrige dell'edizione Monaldini Boscovich emenda con una virgola: «*cognita, est*».

172. Inoltre, poiché quei modi reali di esistenza comportano una relazione reale di distanza, rispetto al caso della compenetrazione, che si avrebbe mediante altri modi di esistenza, distinti dai precedenti, costituiscono anzi un'estensione reale non continua, bensì discreta, in cui non c'è alcunché di assurdo: infatti, un continuo esteso non può essere costituito da inestesi; ciò, invece, non vale per un discreto nel senso sopra esposto, nel quale è evidentissimo che i fenomeni dell'estensione cui abbiamo accennato sopra, come li conosciamo attraverso i sensi, sarebbero gli stessi.

173. Alcuni potrebbero temere che nella nostra teoria non vi sia alcuna distinzione fra i nostri punti e gli spiriti, che – se venissero loro attribuite quelle stesse forze – formeranno una massa estesa nel nostro senso. Ma abbiamo due differenze fra la materia e gli spiriti, comunque essi ci siano noti. L'una è ritenuta priva di facoltà conoscitiva e dotata di impenetrabilità ed estensione; gli altri hanno facoltà conoscitiva e mancano di impenetrabilità ed estensione. Sono dunque privi di queste cose perché sono privi di quelle forze. Se avessero tali forze, si distinguerebbero ancora dai punti materiali per la capacità di conoscere, ma avrebbero impenetrabilità e formerebbero masse estese, nel qual caso stabilire se li si debba ancora chiamare sostanze spirituali costituirebbe una controversia sul nome.

174. Molto altro ci sarebbe da dire; ma, per mantenere fede alla parola data al n. 35, non dovremo assolutamente tralasciare quanto segue: secondo la nostra concezione, per lo stesso punto della materia o per una coppia di punti in natura non può mai esserci quiete dei punti, né ritorno alla stessa posizione o arrivo a una posizione in cui sia stato o si trovi un altro punto, cioè congiunzione di un unico punto di spazio con una serie continua di istanti di tempo o con istanti fra loro separati. La prima cosa è chiara dal fatto che, poiché le forze si riferiscono anche a distanze immense, le forze di tutti i punti devono variare rispetto al moto di un qualsiasi punto, sicché i punti sono ininterrottamente in moto. Le altre due cose, poi, si dimostrano facilmente in base a ciò: poiché è infinito il numero dei punti di spazio in qualsiasi retta, il numero di linee in qualsiasi piano, il numero di piani nell'intero spazio, mentre è finito il numero dei punti materiali, il numero di istanti riferiti alla materia e il numero di punti materiali in qualsiasi retta – c'è un'improbabilità infinita del terzo ordine per qualsiasi istante, per un determinato arrivo di qualsiasi punto materiale a qualunque punto di posizione nel quale esso si era trovato precedentemente o nel quale si era trovato o si trova un altro punto materiale; e c'è una probabilità infinita del secondo ordine per tutti gli istanti di tempo presi indefinitamente. Da ciò risulta quanto mancava nella dimostrazione al numero citato. Ma ora è tempo di ammainare le vele e fermarci.

Errata Corrige dall'edizione sovvenzionata dal libraio Venanzio Monaldini

Pag.	lin.	ERRATA	CORRIGE
Pag. 5	lin. 29	termini	terminus
16	14	quorum	quos
19	9	ſummum	ſummam
21	36	FP	FD
22	13	*Ce*, *Cf*	*Cf*, *Ce*
25	27	ADB'D	ADBD'
26	41	GE ... CG	GF ... CH
27	37	FD	ED
28	16	C, H	CH
30	34	V'V'	VV
	36	FV'G	FVG
	41	M'M'	MM'
32	9	O, O	O, O'
	35	OVO'	OV'O'
36	26	auctu	actu
39	5	VF', VF	VF, VF'
	6	P', P'	P, P'
	14	P', P'	P, P'
	37	MBE	MBD
40	11	FE*f*	FE*ef*
	38	fig. 13	fig. 15
42	16	nondum	nodum
48	25	cujuslibet	primæ
49	16	F'G	FG
	32	VR	PR
	42	R'P1	RP1
50	22	R4O	R4O'
52	39	AH	AR
53	3	R'C'	RP
	25	CDPE	CD, QE
56	6	aliam	alium
57	10	*pra*	*pro*
61	4	cadera	cadere
65	37	fig. 28	fig. 18
67	30	R3P3	R2P'2
	32	P3	P'2
68	13	obnit	obvenit
72	41	æquatur	æquetur
75	22	illo pro,	illo
	41	aſtractiva	attractiva
77	5	pucta indiviſibia	puncta indiviſibilia
78	3	acta	aucta
	9	Albegra	Algebra
79	4	Algegraicam	Algebraicam
	41	cognita eſt	cognita, eſt

INDICE DEI NOMI

Il seguente indice si riferisce unicamente ai nomi citati nel testo di Boscovich e il numero accanto a ogni nome è riferito al paragrafo in cui compare.

INDICE DELLE OPERE CITATE

Il numero dopo le parentesi quadre indica il paragrafo del testo di Boscovich in cui l'opera è citata direttamente o indirettamente.

ARISTOTELE

Categoriae, in *Aristotelis opera omnia, quae extant, Graece et Latine*, vol. I [authore Guillelmo Du Val, 2 voll., Lutetiae Parisiorum Typis Regiis, 1619], 6.

BOSCOVICH, RUGGIERO GIUSEPPE

De motu corporis attracti in centrum immobile viribus decrescentibus in ratione reciproca duplicata in spatiis non resistentibus [Komarek, Roma 1743], 147.

De Natura, et usu Infinitorum, et Infinite parvorum [Komarek, Roma 1741], 80, 89.

De transformatione locorum geometricorum, ubi de continuitatis lege, ac de quibusdam Infiniti mysteriis, in appendice a *Elementorum universae matheseos tomus III* [Salomoni, Roma 1754], 3, 59, 64, 67, 69, 71, 79, 89, 91, 92, 94, 112, 137, 146.

De viribus vivis dissertatio [Komarek, Roma 1745], 1, 35, 158, 161.

Dissertatio de maris aestu [Komarek, Roma 1747], 125.

Dissertationis de lumine, pars secunda, [Komarek, Roma 1748], 1, 158, 170.

Elementorum universae matheseos tomus I. Continens Geometriam planam, Arithmeticam vulgarem, Geometriam solidorum et Trigonometriam planam, et sphaericam [Salomoni, Roma 1754], 12.

Elementorum universae matheseos tomus II. Continens Algebram finitam [Salomoni, Roma 1754], 168.

Elementorum universae matheseos tomus III. Continens Sectionum conicarum elementa [Salomoni, Roma 1754], 3, 56, 71.

BERNOULLI, JOHANN (JEAN)
Discours sur les loix de la communication du mouvement, in *Opera Omnia, tam antea sparsim edita, quam hactenus inedita*, vol. III [Lousannae & Genevae, Sumptibus M.-M. Bousquet & Sociorum, 1742], 103, 104, 125.

CHATELET, ÉMILIE DU
Institutions de Physique [Prault, Paris 1740], 3.

CLAIRAUT, ALEXIS CLAUDE DE
Recherches sur les courbes à double courbure [Nyon, Didot et Quillot, Paris 1731], 107.

EULER, LEONHARD
Mechanica, sive motus scientia analytice exposita [Petropoli. Ex typographia Academiae Scientarum, 1736], 147.

LEIBNIZ, GOTTFRIED WILHELM
Lettre de M.L. sur un principe general utile à l'explication des loix de la nature par la consideration de la sagesse divine, pour servir de replique à la reponse du R.P. Malebranche, in *Nouvelles de la République de Lettres* [luglio 1687, art. VIII, pp. 744-753], 3, 100.

MAUPERTUIS, PIERRE LOUIS MOREAU DE
Essai de Cosmologie, in *Œuvres de Maupertuis*, vol. 1 [Bruyset, Lyon 1768], 104.

NEWTON, ISAAC
Optice: sive de Reflexionibus, Refractionibus, Inflexionibus & Coloribus Lucis libri tres [Londra 1706], 154, 168.

DE LEGE VIRIUM

IN NATURA EXISTENTIUM

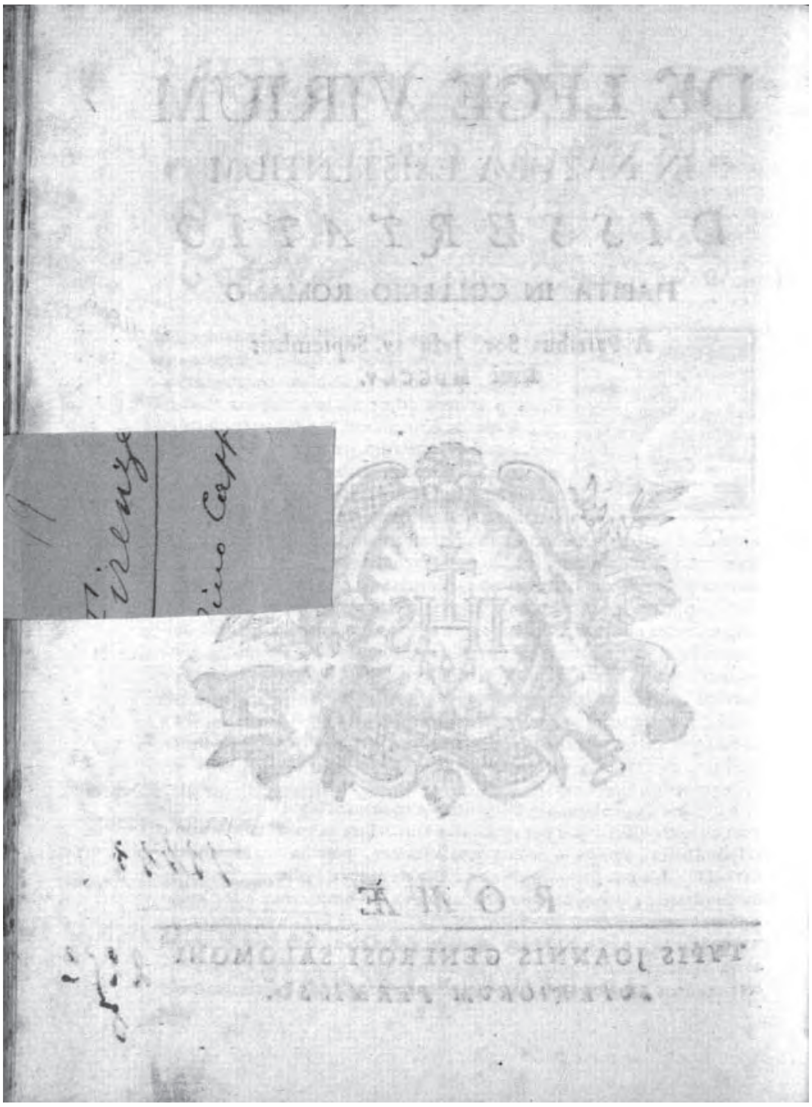
DISSERTATIO

HABITA IN COLLEGIO ROMANO

A Patribus Soc. Jesu IV. Septembris
anni MDCCLV.

ROMÆ

TYPIS JOANNIS GENEROSI SALOMONI
SUPERIORUM PERMISSU.


DE LEGE VIRIUM
IN NATURA EXISTENTIUM
DISSERTATIO
HABITA IN COLLEGIO ROMANO

ROMAE
TYPIS JOANNIS GENEROSI SALOMONI

SUPERIORE anno expoſuimus fundamentum potiſſimum noſtræ theoriæ virium in natura exiſtentium, qua novum quoddam continetur ſyſtema pertinens ad prima ipſa materiæ elementa, & motus omnes, qui in natura conſequuntur, quibus nimirum natura ipſa continetur univerſa. Theoriam primo protulimus in diſſertatione de Viribus vivis anno 1745., tum in diſſertatione de Lumine anno 1748. Eam innuimus in noſtra ſuperioris anni diſſertatione de Lege continuitatis, & eam uberius expoſuit in ſua Synopſi Phyſicæ Generalis, ac per omnia naturæ phænomena late deduxit P. Carolus Benvenutus e noſtra Soc. vir doctiſſimus. Præterea quæ ad metaphyſicas notiones ei ſyſtemati reſpondentes pertinent, abunde explicavimus hoc anno in adnotationibus noſtris, & ſupplemento operis ſane immortalis, Philoſophiæ nimirum recentis Benedicti Stay viri per omnem litterariam remp. celeberrimi. Fundamentum autem noſtrum continetur ipſa lege continuitatis, quam abunde, ni fallimur, & ex principiis metaphyſicis, & ex inductione comprobavimus, ac præcipua, quæ in contrarium opponi poſſent, partim nos ibi expoſuimus, partim Benvenutus in ea Synopſi pluribus explicavit.

2. Hoc anno aliquanto diligentius exponemus legem ipſam, nimirum curvam illam, quæ per ordinatas ſuas refert vires diſtantiis certis reſpondentes, ac ejus in primis ſimplicitatem, pluribus in locis indicatam hìc demum demonſtrabimus. Ubi de natura ejuſmodi curvæ ſatis conſtiterit, procedendum erit ad leges, e ſimplicibus hiſce compoſitas, quæ ad bina pertinent puncta, tum ad eas, quæ ad terna, vel quaterna; unde creſcente numero caſuum in infinitum, conjici aliquid poterit de reliquis, quæ ad maſſas e pluribus punctis compoſitas pertinent. Sed ea aliis diſſertationibus reſervabimus, contenti hìc

sola consideratione legis simplicissimæ ad mutuas pertinentis binorum punctorum vires; quam tamen antequam exponimus, attingemus brevissimè nonnulla etiam, quæ pertinent ad fundamentum illud, nimirum ad legem continuitatis.

3. Lex continuitatis, quam propugnamus, & qua utimur ad nostri systematis demonstrationem, in eo est sita, quod in quavis quantitatum mutatione ab una magnitudine ad aliam transitus fieri non possit, nisi transeundo per omnes intermedias magnitudines. In eo principio intelligendo sunt, qui plurimum errent ibi potissimum, ubi a positivis ad negativa fit gradus, putantes ibi saltum quendam committi. Si transitus fiat per nihilum(potest enim is in Geometria fieri etiam per infinitum), debet quantitas decrescere prius per omnes magnitudinis gradus usque ad nihilum, tum ex nihilo negativa emergere; nec in eo transitu per nihilum habetur saltus quispiam: quin immo saltus excludi non potest, ubi transitus is per infinitum non fiat, nisi fiat per nihilum. Ea de re pluribus egimus in nostra dissertatione de transformatione locorum geometricorum adjecta ad calcem tomi 3 nostrorum elementorum, & agemus infra; & quidem in Mechanica, in Physica, in ipsa humanæ vitæ institutione ejusmodi transitus per nihilum passim occurrunt, ubi saltus ab una magnitudine ad aliam, immediatus sine intermediis, habetur omnino nusquam.

Porro binis methodis ipsum id principium demonstratum a nobis fuit, ut supra innuimus. Primo quidem rationibus metaphysicis, tum inductione. Ratio autem metaphysica, huc redibat; quod nimirum cujuscumque seriei realis continuæ determinato tempore durantis debeat omnino haberi primus terminus, & ultimus, ut in linea finita primum, & ultimum punctum, in superficie prima, & ultima linea, in solido prima, & ultima superficies omnino haberi debent, quod ibidem & schemate apposito illustravimus. Porro inde deducebamus, si habeatur saltus, eo momento temporis, quod est limes indivisibilis inter tempus continuum præcedens, & subsequens, debere eodem illo momento haberi binos status (ut, si de velocitate per saltum mutata agitur, binas velocitates), alterum, qui sit ultimus finis seriei statuum præcedentium, alterum, qui sit primum initium statuum sequentium. Porro ubi bini status simul conjuncti repugnant, ut repugnant naturaliter binæ velocitates eodem momento temporis, binæ moles, binæ densitates ejusdem massæ, illud consequitur repugnare saltum ipsum. Atque ex hoc quidem capite ostendimus necessarium esse illud, ut ex uno loci puncto ad aliud deveniri non possit, nisi per lineam aliquam continuam, quæ nusquam abrumpatur, licet infinita sint linearum genera, per quas abiri possit. Quia nimirum eo momento temporis, quo iter abrumperetur, oporteret mobile esse & in ultimo pun-

punćto lineæ præcedentis, & in primo conſequentis, cum momentum temporis unicum indiviſibile ſit limes inter tempus præcedens, & ſubſequens ita, ut non poſſit momentum momento contiguum eſſe, ſine ullo tempore continuo intermedio, adeoque non poſſit uno momento abſolvi ſeries præcedens, altero immediate ſubſequenti inchoari ſeries ſubſequens. Deinde idem principium ex inductione etiam comprobavimus, quam & ex Geometria deſumpſimus, & ex naturæ indole ſane amplam. Sed ea ibidem fuſius.

5. Porro proferemus hìc bina exempla eorum, quæ viderentur noſtræ huic legi officere, quorum alterum e Geometria petitum eſt, & ſuperiore anno innuimus, alterum e Metaphyſica, ſed utrumque ſolutionem admittit admodum facilem, & ſolidam, quibus adjungemus aliud petitum ab humanæ libertatis natura.

6. Primo quidem videtur ſaltus quidam admitti maximus in primo exortu, vel ultimo interitu rerum, in creatione potiſſimum, in qua quidpiam tranſit ex nihilo, ad eſſe aliquid, & idem in interitu videtur contingere, in quo ſit tranſitus de eſſe ad non eſſe. Videtur ibi maximus committi ſaltus quidam, quo inductio perturbetur. Sed præterea videtur in maximum abſurdum nos debere incidere, ſi rationi illi metaphyſicæ libeat inſiſtere. Nam eo momento temporis, quod eſt limes inter tempus præcedens continuum, quo res non erat, & tempus ſubſequens, quo eſt, videtur ex noſtris principiis debere conſequi, ut res ſimul ſit, & non ſit. Series enim præcedens habebat non eſſe, ſubſequens habet eſſe; adeoque ſi conjungi debeat terminus ultimus ſeriei præcedentis, & primus ſequentis, videtur manifeſtum illud, debere eodem momento temporis haberi eſſe, & non eſſe.

7. Hæc quidem difficultas, quam a nemine nobis objectam, nos ipſi pervidimus, negotium nobis aliquandiu faceſſit, & erat quidem unica, quæ nobis aliquid habere difficultatis videretur. Sed Geometria duce facile inde evaſimus, & ipſam metaphyſicam rationem adepti ſumus, quæ totam theoriam noſtram ab ejuſmodi telo ſervavit illæſam.

8. Sit nimirum in fig. 1. circulus GM G'*m*, qui referatur ad datam rectam AB per ordinatas HM ipſi rectæ perpendiculares, uti itidem perpendiculares ſint binæ tangentes EGF, E'G'F'. Concipiatur igitur recta quædam indefinita ipſi rectæ perpendicularis, motu quodam continuo delata ab A ad B. Ubi ea habuerit poſitionem quamcumque CD, quæ præcedat tangentem EF, vel C'D', quæ conſequatur tangentem E'F'; ordinata ad circulum nulla erit, ſive erit impoſſibilis, &, ut Geometræ loquuntur, imaginaria. Ubicumque autem ea ſit, inter binas tangentes EGF, E'G'F', in HI, H'I' F. 1.

occur-

occurret circulo in binis punctis M, *m*; vel M', *m'*, & habebitur valor ordinatæ HM, H*m*, vel H'M', H'*m'*. Ordinata quidem ipsa respondet soli intervallo EE'; & si ipsa linea AB referat tempus, momentum E est limes inter tempus præcedens continuum AE, quo ordinata non est, & tempus continuum EE' subsequens, quo ordinata est; punctum E' est limes inter tempus præcedens EE', quo ordinata est, & subsequens E'B', quo non est. Vita igitur quædam ordinatæ est tempus EE', ortus habetur in E, interitus in E'. Quid autem in ipso ortu, & interitu? Habetur ne esse quoddam ordinatæ, an non esse? Habetur utique esse, nimirum EG, vel E'G', non autem non esse. Oritur tota finitæ magnitudinis ordinata EG, interit tota finitæ magnitudinis E'G'; nec tamen ibi conjugit esse, & non esse, nec ullum absurdum secum trahit. Habetur momento E primus terminus seriei sequentis, sine ultimo seriei præcedentis, & habetur momento E' ultimus terminus seriei præcedentis, sine primo termino seriei sequentis.

9. Quare autem id ipsum accidat, si Metaphysica consideratione rem perpendimus, statim patebit. Nimirum veri nihili nullæ sunt reales proprietates: entis realis reales proprietates sunt. Quævis realis series initium reale habere debet, & finem, sive primum, & ultimum terminum. Id quod non est, nullam habet realem proprietatem, nec proinde sui generis ultimum terminum, aut primum. Series præcedens ordinatæ nullius ultimum terminum non habet: series consequens non habet primum: series realis contenta intervallo EE', & primum habere debet, & ultimum. Hujus reales termini terminum illum nihili per sese excludunt, cum ipsum esse per se excludat non esse.

10. Atque id quidem manifestum fiet magis, si consideremus seriem aliquam præcedentem realem, quam exprimant ordinatæ ad lineam continuam PL*g*, quæ respondeat toti tempori AE ita, ut cuivis momento C ejus temporis respondeat ordinata CL. Tum vero si momento E debeat fieri saltus ab ordinata E*g* ad ordinatam EG, necessario ipsi momento E debent respondere binæ ordinatæ EG, E*g*. Nam in tota linea PL*g* non potest deesse solum ultimum punctum *g*; cum ipso sublato, debeat adhuc illa linea terminum habere suum, qui terminus esset itidem punctum; id vero punctum idcirco fuisset ante contiguum puncto *g*, quod est absurdum, ut in eadem dissertatione demonstravimus. Nam inter quodvis punctum, & aliud punctum linea aliqua interjacere debet; quæ si non interjaceat, jam illa puncta in unicum coalescunt. Quare non potest deesse nisi lineola aliqua *g*L, ita, ut terminus seriei præcedentis sit in aliquo momento C præcedente momentum E, & disjuncto ab eo per

per tempus quoddam continuum, in cujus temporis momentis omnibus ordinata sit nulla.

11. Patet igitur discrimen inter transitum a vero nihilo, nimirum a quantitate imaginaria, ad esse, & transitum ab una magnitudine ad aliam. In primo casu terminus nihili non habetur, habetur terminus uterque seriei veram habentis existentiam, & potest quantitas, cujus ea est series, oriri, vel occidere magnitudine finita, ac per se excludere non esse. In secundo casu necessario haberi debet utriusque seriei terminus, alterius nimirum postremus, alterius primus. Quamobrem etiam in creatione, & in annihilatione potest quantitas oriri, vel interire magnitudine finita, & primum, ac ultimum esse erit quoddam esse, quod secum non conjunget una non esse. Contra vero ubi magnitudo realis ab una quantitate ad aliam transire debet per saltum; momento temporis, quo saltus committitur, uterque terminus haberi deberet. Manet igitur illæsum argumentum nostrum metaphysicum pro exclusione saltus a creatione, & annihilatione, sive ortu, & interitu.

12. At hic illud etiam notandum est; quoniam ad ortum, & interitum considerandum Geometricas contemplationes assumpsimus, videri quidem prima fronte, aliquando realis etiam seriei terminum postremum esse nihilum; sed re altius considerata, non erit vere nihilum, sed status quidam itidem realis, & ejusdem generis cum præcedentibus, licet alio nomine insignitus.

13. Sit in fig. 2. linea AB, ut prius, ad quam linea quædam PL deveniat in G, & sive pergat ultra ipsam in GM, sive retro resiliat per GM'. Recta CD habebit ordinatam CL, quæ evanescet, ubi puncto C abeunte in E, ipsa CD abibit in EF, tum in positione ulteriori rectæ perpendicularis in HI vel abibit in negativam HM, vel retro positiva regredietur in HM'. Ubi linea altera cum altera coit, & punctum E alterius cum alterius puncto G congreditur, ordinata CL videtur abire in nihilum ita, ut nihilum, quemadmodum & supra innuimus, sit limes quidam inter seriem ordinatarum positivarum CL, & negativarum HM, vel positivarum CL, & iterum positivarum HM'. Sed si res altius consideretur ad Metaphysicum conceptum reducta; in situ EF non habetur verum nihilum. In situ CD, HI habetur distantia quædam punctorum CL, HM: in situ EF habetur eorundem punctorum compenetratio. Distantia est relatio quædam binorum modorum, quibus bina puncta existunt, compenetratio itidem est relatio binorum modorum, quibus ea existunt, quæ compenetratio est aliquid reale ejusdem prorsus generis, cujus est distantia, constitutum nimirum per binos reales existendi modos. F. 2.

14. To-

14. Totum diſcrimen eſt in vocabulis, quæ nos impoſuimus. Bini locales exiſtendi modi infinitas numero relationes poſſunt conſtituere, alii alias. Hæ omnes inter ſe & differunt, & tamen ſimul etiam plurimum conveniunt; nam reales ſunt, & in quodam genere congruunt, quod nimirum ſint relationes ortæ a binis localibus exiſtendi modis. Diverſa vero habent nomina ad arbitrium inſtituta, cum aliæ ex ejuſmodi relationibus, ut CL, dicantur diſtantiæ poſitivæ, relatio EG dicatur compenetratio, relationes omnes HM dicantur diſtantiæ negativæ. Sed quoniam ut a decem palmis diſtantiæ demptis 5 relinquuntur 5, ita demptis aliis quinque habetur nihil; non quidem verum nihil, ſed nihil in ratione diſtantiæ a nobis ita appellatæ, cum remaneat compenetratio: ablatis autem aliis 5, remanent 5 palmi diſtantiæ negativæ. Iſta omnia realia ſunt, & ad idem genus pertinent, cum eodem prorſus modo inter ſe differant diſtantia palmorum 10 a diſtantia palmorum 5, hæc a diſtantia nulla, ſed reali, quæ compenetrationem importat, & hæc a diſtantia negativa palmorum 5. Nam ex prima illa quantitate eodem modo devenitur ad haſce poſteriores per continuam ablationem palmorum 5. Eodem autem pacto infinitas ellipſes, ab infinitis hyperbolis unica interjecta parabola diſcriminat, quæ quidem unica nomen peculiare ſortita eſt, cum illas numero infinitas, & a ſe invicem admodum diſcrepantes unico vocabulo complectamur, licet altera magis oblonga ab altera minus oblonga plurimum itidem diverſa ſit.

15. Et quidem eodem pacto ſtatus quidam realis eſt quies, ſive perſeverantia in eodem modo locali exiſtendi; ſtatus quidam realis eſt velocitas nulla puncti exiſtentis, nimirum determinatio perſeverandi in eodem loco; ſtatus quidam realis puncti exiſtentis eſt vis nulla, nimirum determinatio retinendi præcedentem velocitatem, & ita porro: plurimum hæc diſcrepant a vero non eſſe. Caſus ordinatæ reſpondentis lineæ EF in fig. 2, plurimum differt a caſu ordinatæ circuli reſpondentis lineæ CD figuræ 1. In prima exiſtunt puncta, ſed compenetrata. In ſecunda alterum punctum impoſſibile eſt. Ubi in ſolutione problematum devenitur ad quantitatem primi generis, problema determinationem peculiarem accipit; ubi devenitur ad quantitatem ſecundi generis, problema evadit impoſſibile; uſque adeo in hoc ſecundo caſu habetur verum nihilum, omni reali proprietate carens; in illo primo habetur aliquid realibus proprietatibus præditum, quod ipſis etiam ſolutionibus problematum, & conſtructionibus veras ſufficit, & reales determinationes.

16. Firmum igitur manebit ſemper, & ſtabile, ſeriem realem quamcumque, quæ continuo tempore finito duret, debere habere

& pri-

& primum principium, & ultimum terminum realem, ſine ullo abſurdo, & ſine conjunctione ſui eſſe cum non eſſe, ſi forte duret eo ſolo tempore, dum ſi præcedenti etiam extitit tempore, habere debet & ultimum terminum ſeriei præcedentis, & primum ſequentis, qui debent eſſe unicus indiviſibilis communis limes, ut momentum eſt unicus indiviſibilis limes inter tempus continuum præcedens, & ſubſequens. Sed hæc de ortu, & interitu jam ſatis.

17. Altera difficultas, quam ſuperiore anno innuimus, & cujus ſolutionem dedimus, noſtro quidem judicio non ineptam, petitur a mutatione, quæ videtur haberi tangentis in curva, quæ cuſpidem habeat. Hic evidentius oſtendemus, eam noſtræ theoriæ nihil obeſſe. Sit in *fig*.3. curva ABCDEFG, quæ cuſpidem habeat in D. Ejus tangens in B ſit BI, in C ſit CL, in D ſit DN, in E videtur eſſe EP, in F eſſe FR. *F*.3.
Ibi igitur tangens a directione DN videtur ſaltu quodam per dimidiam circumferentiam facto abire in DM ita, ut DN ſit ultimus limes ſeriei præcedentis, & DM primus ſequentis. Reſpondimus ſuperiore anno directionem DN cum directione DM ipſi oppoſita congruere quodammodo, quod ex conſideratione geometrica infiniti circuli, & aliis pluribus geometricis exemplis curvarum in primis aſymptoticarum demonſtravimus, & noſtro quidem judicio ſummam vim habet, ac difficultatem per ſe ſatis ſolvit apud hominem, qui arcanis Geometriæ myſteriis initiatus ſit. Verum pronior adhuc reſponſio eſt hujuſmodi. Curva quidem per ſeſe omnino indifferens eſt ad utramlibet directionem, ut in C ad directionem CB, & CD, nec per ſe expoſcit, ut mobile, quod eam forte debeat percurrere, percurrat potius in unam plagam, quam in alteram. Quare & tangens ipſius in quovis puncto B non eſt ſola BI, ſed & BH; immo tota infinita HBI, & IBH eſt æque ejus tangens in puncto B, ac eodem pacto tota tam KCL, quam LCK, tota tam NDM, quam MDN, tota tam OEP, quam PEO, tota tam QFR, quam RFQ eſt ejus tangens.

18. Hinc in puncto D & eſt tangens NDM, & MDN, quarum prior eſt terminus communis inter tangentes HBI, KCL, & PEO, RFQ, poſterior inter tangentes IBH, LCK, & OEP, QFR. Nuſquam hic habetur is ſaltus, qui ex noſtra demonſtratione idcirco repugnat, quod ibi, ubi unica quantitas haberi deberet, habeantur binæ, & quod ab una magnitudine ad aliam tranſitus fiat ſine intermediis.

19. Saltus ejuſmodi haberetur, ſi curva ABCDEFG in D binas haberet tangentes, quarum altera ad alteram in angulo inclinaretur, non vero jacerent in directum. Ejuſmodi aliquid accideret in nodis, cujuſmodi unum exhibet *fig*.4. in curva ABCDEFG, quæ *F*.4.
in punctis EC invicem conjunctis, & compenetratis ſe ſecat, in ſe

regreſ-

regreſſa, & nodum CDE efformans. Ibi in C ſunt binæ tangentes KCL, OCP ad ſe invicem inclinatæ, & niſi adeſſet nodus CDE, per quem tangens KCL abiret in MDN, tum in OEP mutatione continua, tranſitus a tangente KCL ad PCO ſine ullo tranſitu per intermedias poſitiones ſaltum contineret quendam, & abſurdum.

20. Licet autem ibi quidem in tangentis mutatione haberetur ſaltus quidam; adhuc tamen, ſi ſolus arcus ABC conjunctus cum arcu CFG aliquam continuo tempore durantem quantitatis variabilis ſeriem exprimeret; ſaltus quidam geometricus haberetur, ſed ſaltus ille, cujus impoſſibilitatem ex metaphyſico principio demonſtravimus, hic nequaquam committeretur. Nam in fig. 5 ſi ejuſmodi curva referatur ad rectam PQ per ordinatas RB, SC, TF, mutaretur quidem lex in C, ſed ea mutatio ſaltum illum noſtrum non induceret. Eadem enim recta SC eſſet communis terminus & ſeriei præcedentis omnium RB, & conſequentis omnium TF, nec momento S binæ reſponderent ordinatæ, nec ab una magnitudine ad aliam iretur ſine intermediis. Atque id ipſum obtineretur, ſi lex aliqua variationis quantitatis variabilis exprimeretur per rectas, vel curvas quaſcumque coeuntes in angulum: noſtra demonſtratio contra ejuſmodi ſaltum pure geometricum non valeret; quoniam ibi haberetur communis terminus præcedentis, & conſequentis ſeriei, quem ſolum ea requirit demonſtratio.

F. 5.

21. Id quidem ſatis explicat illud, quo pacto libertas noſtra non violet principium continuitatis, licet interrumpat ſeriei præcedentis legem. Sed adhuc conſtabit illud, ubi ipſa libertas noſtra inducit mutationem aliquam, debere mutationem a nihilo per omnes finitarum magnitudinum gradus tranſire. Exprimat motum, velocitatem, denſitatem, vel aliud quidpiam ejuſmodi corporis cujuſcumque curva continua ABCEF'V'; nec ulla ſit cauſa libera, quæ agat. Pendebit curva illa a perenni lege neceſſaria, & habebit naturam ſuam determinatam a virium omnium in natura exiſtentium legibus continuis ita, ut dato quovis ejus arcu continuo utcumque exiguo, poſſit determinari totus reliquus ejus tractus, cum nullæ binæ curvæ determinatam a perennibus continuis legibus habentes naturam in ullo arcu continuo utcumque parvo congruere poſſint ſibi invicem. Momento temporis S incipiat libera voluntas agere, & auferat tempore ST quantitatem F'F. Si eam abſtulit per omnes magnitudinis gradus incipiendo ab S, pro curva CV' haberi poterit curva CFG, quæ non eſt continuatio prioris ABC; adhuc tamen in S habebitur unicus limes communis SC ſine ſaltu illo, quem noſtra ratio metaphyſica excludit.

22. At

22. At ſi concipiamus, in S liberam voluntatem producere momento temporis decrementum CH in ſe determinatum; curvæ ABC ſuccedet curva HFV, & habebitur ſaltus in S cum duabus magnitudinibus SC, SH eidem momento debitis, quod creata libertas præſtare non poteſt. Nam ad habendas eodem tempore binas diſtantias, requiritur replicatio: ad habendas binas denſitates, requiruntur binæ diſtantiæ, adeoque itidem replicatio: ad habendas binas velocitates, requiritur determinatio percurrendi eodem tempore bina ſpatia, nimirum acquirendi binas diſtantias, adeoque habendi replicationem; immo & ad habendam eodem momento temporis velocitatem nullam, & velocitatem aliquam requiritur determinatio perſeverandi in eodem loco, & acquirendi nova loca, quod æque replicationem requirit, quam ſolus naturæ Artifex præſtare poteſt. Hinc ipſe quidem præexiſtenti corpori vel quieſcenti, vel moto poterit momento temporis novam velocitatem finitam imprimere totam ſimul, non vero ulla creata potentia;

23. Patet hinc, liberam voluntatis actionem turbare quidem curvarum quantitates exprimentium ductus continuos, ſed ne ſaltus habeatur ille, quem excludimus, debere per gradus omnes agere magnitudinum in infinitum imminutarum, quod quidem in ſpontaneis etiam noſtris motibus deprehendimus. Sic ubi manu movemus aliquid, per omnes gradus creſcit vis, & actio, dum ſucco muſculorum fibræ per gradus utut celerrimè inflantur. Si nullam actionem liberam exerceret anima in corpus, & admitteretur Armonia præſtabilita Leibnitii; tum vero motus corporum omnes, & omnium punctorum materiæ, & mutationes omnes fierent in lineis continuis neceſſariis pendentibus a legibus naturæ generalibus. Sed nos ab ea ſententia plurimum abhorremus, ob rationes in primis, quas in Stayanis notis, & ſupplementis protulimus, Cum anima determinatione ſui determinet etiam motus quoſdam in ſuo corpore, determinationem inducit in omnia materiæ puncta, quæ nimirum in quacumque diſtantia ſint poſita, connectuntur per virium legem mutuam, ad quævis nimirum intervalla pertinentem. Hinc curvæ, quæ deſcribuntur, quæ quantitatum magnitudines exprimunt, ſunt curvarum genus non neceſſarium, nec ejuſmodi, ut ex exiguo arcu poſſit innoteſcere totus earum tractus, qui eſt indifferens ad omnes liberas tot animarum novas determinationes.

24. Hiſce præmiſſis, quæ pertinent ad generale principium continuitatis, videamus jam, quæ virium lex inde inferatur, ut ejus ſimplicitatem, & continuitatem demonſtremus.

25. Dicimus igitur inde deduci illud: in natura exiſtere vires tum attractivas, tum repulſivas, quæ quidem in magnis diſtantiis, in quibus nimirum Planetæ, ac Cometæ a ſe invicem diſtant, ſint attractivæ, in exiguis, jam attractivæ, jam repulſivæ, in minimis repulſivæ,

& eo

& eo majores, quo diſtantiæ in infinitum minores ſunt ita, ut poſſint extinguere velocitatem utcumque magnam. Hujus propoſitionis demonſtrationem nos dedimus ab excluſione ſaltus petitam in omnibus diſſertationibus, quas initio commemoravimus. Huc autem reducitur rationis caput, & præcipua vis.

26. Si corpus aliud cum 12 gradibus velocitatis currat poſt aliud præcedens cum 6, nec ulla vis agat in aliqua diſtantia ante contactum; momento temporis, quo diſtantia evaneſcet, debebit per ſaltum vel corpus præcedens, vel ſubſequens, vel utrumque ad aliam velocitatem migrare, vel illud ad 12, vel hoc ad 6, vel utrumque ad 8, vel 9, vel aliquid ejuſmodi, cum poſt contactum non poſſit ſequens præcedenti præire. Nullo alio pacto ſaltus in velocitatis mutatione evitabitur extincta 6 graduum differentia, niſi ante contactum incipiat alterum accelerari, alterum retardari per gradus. Dabitur igitur hæc acceleratio, & retardatio ante contactum, cujus cauſa dicetur vis, & quoniam aget in partes contrarias æqualiter, ut habeatur æqualitas actionis, & reactionis, tendet autem ad removendum corpus a corpore, dicenda erit vis repulſiva.

27. Porro hæc vis repulſiva debebit, diſtantià in infinitum imminutà, creſcere in infinitum, ut par ſit extinguendæ velocitati cuivis utcumque exiguæ. Id conſtat ex eo, quod ſi in caſu aliquo, ut in illo, vis ejuſmodi extingueret differentiam velocitatis in ipſo appulſu ad contactum, ubi deinde cum majori velocitate corpus ſubſequens adventaret, ut cum gradibus 20, eadem illa vis non poſſet hoc majus diſcrimen 14 graduum extinguere ante contactum; nam breviore potius ageret tempore, ob majus velocitatum diſcrimen, & vires agunt in ratione ſui, ac tempuſculi, quo agunt, ſi actio velocitatem gignens concipiatur. Quare ſaltus haberetur in hoc ſecundo caſu, qui, ut ibi evitari poſſit, oportet, in priore illo diſcrimen velocitatum extinctum ſit ante contactum, ut nimirum in hoc ſecundo vires ulteriores in majori adhuc acceſſu agentes poſſint totum hoc majus diſcrimen extinguere ante contactum. Cum igitur eadem ratio redeat pro quovis caſu, cujuſcumque utcumque magnæ velocitatum differentiæ; patet vires ejuſmodi repulſivas debere imminutis in infinitum diſtantiis ita creſcere in infinitum, ut pares ſint cuicumque utcumque magno velocitatum diſcrimini extinguendo.

28. Hinc autem deducimus colliſionem corporum, & impenetrabilitatem perfici ab ejuſmodi repulſiva vi; cumque eam debeamus agnoſcere in particulis omnibus materiæ, quarum aliæ incurrere poſſint in alias; ex principio inductionis, cujus vim definimus, & demonſtramus tam in ea diſſertatione de lege continuitatis, quam in Stayanis ſupplementis, ipſam extendimus ad omnes materiæ particulas; unde infe-

inferimus, prima materiæ elementa constare e punctis prorsus simplicibus, atque inextensis, cum nimirum ob vim repulsivam in infinitum auctam in distantiis in infinitum imminutis non possit ulla materiæ particula alteri sine intervallo conjungi, ut solidam, & continuam partem componat, unde fit, ut sine partibus esse debeant prima ejusmodi elementa.

29. Quoniam vero in distantiis multo majoribus deprehendimus gravitatem generalem, quæ in attractiva vi sita est; patet, debere haberi alicubi transitum à vi repulsiva ad vim attractivam, quem transitum dicimus limitem inter vires repulsivas, & attractivas. Immo quoniam in minoribus etiam distantiis plura corpora cohærent nulla vi ad sensum agente in eorum particulas, & alteram particulam promotam altera subsequitur, quod indicium attractionis est; in majoribus autem distantiis, ut ubi aqua in vapores abit, attractio ipsa in repulsionem mutatur; habemus jam tres limites, e repulsione in attractionem, ex attractione in repulsionem, & e repulsione iterum in attractionem generalis gravitatis. In aliis autem corporibus, quæ utcumque compressa mutatis admodum distantiis adhuc in æquilibrio sunt, plurimos ejusmodi transitus, sive limites haberi eruimus, unde patet & vicissitudo illa virium jam attractivarum, jam repulsivarum in exiguis distantiis, & repulsiva vis in infinitum crescens in minimis, & attractiva in majoribus illis Planetarum; nimirum tota proposita lex virium in natura existentium.

30. Jam vero ubi primum ejusmodi theoriam protulimus, vidimus sane argumentum nostrum nihil evincere pro tota massa corporum elasticorum, & mollium, quorum partes a contactu remotiores possint, dum per compressionem mutatur figura, velocitatem suam mutate per gradus; verum notavimus illud, argumentum redire in primis particulis, si ullæ particulæ solidæ omnino sunt, cujusmodi solidas particulas Nevvtonus admisit, & alii plures, vel saltem in primis illis superficiebus, vel punctis, quæ primo se contingunt, & in quibus exercetur impenetrabilitas. Ibi enim velocitas per saltum mutari deberet, quod quidem, si compenetratio excluditur, quæ inductionis argumento excludenda omnino est, tam est videns, quam quod evidentissimum.

31. Est autem, qui nostri argumenti vim eludere se posse arbitretur, dicendo, nullam esse particulam utcumque exiguam planè solidam, & compressionis incapacem, adeoque particulas omnes particularum comprimi, & velocitatem per gradus mutare. In primis autem superficiebus nullam mutationem fieri per saltum, cum in iis motus quantitas sit nulla. Nam motus quantitas a Mechanicis æstimatur a velocitate in massam ducta, quod quidem productum, ait, evanescere, ubi evanescit massa, quæ evanescit, ubi e tribus dimensionibus in longum, latum, & profundum una evanesçat, & corpus ad superficiem binarum tantummodo dimensionum reducatur.

32. At vero si admittatur communis sententia de continua extensione materiæ, nullo pacto intelligi potest, qui fieri possit, ut nullæ sint parti-

particulæ penitus duræ, ac ſolidæ. Neque enim intelligi poteſt, quo pacto particula materiæ comprimi poſſit, niſi intervalla adfuerint vacua, quæ minuantur, vel niſi eadem particula jam majus, jam minus ſpatium occupet totum. Hanc poſteriorem ſententiam excluſimus ſuperiore anno in diſſertatione de Lege continuitatis; prior illa requireret diviſione actualem in infinitum, & ſeriem actualem partium infinitarum numero diviſarum a ſe invicem per intervalla vacua, quarum tamen nulla eſſet ultima. Id ſane neque concipi omnino poteſt, præjudiciis utcumque ſepoſitis, & in Malebranchii vorticulis in infinitum continuatis jure irridet Mac-Laurinus. Si adſunt foramina, & pori, & adeſt externa ſuperficies aliqua; inter ſuperficiem, & foramen, quod primo occurrat, debebit eſſe intervallum aliquod ſine foramine, perfectè idcirco ſolidum. Quod nullum primo occurrat in poſſibilibus utcumque intelligitur, cum poſita quacumque quantitate habente ſuos terminos, facile concipiamus poſſe exiſtere quantitatem & majorem, & minorem. In actu exiſtentibus illud, quod nullum ſit primum, nec ultimum poſt datum terminum, ut poſt ſuperficiem, intelligi omnino non poteſt. Qui eo effugio ad ſuam ſententiam tuendam indigeat, myſteriis indiget, quæ qui evitet, jam eo ipſo potiore utitur jure.

33. Sed eo etiam omiſſo, vis argumenti ad ſuperficiem applicati per maſſæ evaneſcentiam, ex evaneſcente craſſitudine, nequaquam eluditur, niſi vocum inani ſono capiamur. Nam in primis quidquid ſit de motu, qui reſultat ex maſſa, & velocitate multiplicitatis, committeretur ſaltus in ipſa velocitate, quæ quidem quantitas quædam eſt, quæ ſuperficiei, & puncto etiam convenit: ſuperficiem autem, & punctum in communi ſententia de reali continua corporum extenſione eſſe, non quid imaginatione noſtra conceptum, ſed reales quantitatis corporeæ affectiones, nimirum terminos, ſuperiore anno in eadem diſſertatione demonſtravimus. Et quidem ſi idcirco, ſuperficiem, dicunt, nullum habere motum, quod motus coaleſcit ex maſſa, & velocitate invicem multiplicatis, & in ſuperficie maſſa evaneſcit; profecto velocitatem ipſi ſuperficiei non denegant. Ipſa quæ realis terminus eſt, reales habet proprietates, & realem extenſionem in longum, ac profundum in ea ſententia: habet itidem velocitatem realem. Velocitas puncti, lineæ, ſuperficiei paſſim apud Mechanicos occurrit, in quibus itidem ſaltus ille vitandus eſt.

34. Sed & motum habet ſuperficies, linea, punctum, non corpus tantummodo. Motus enim eſt ſucceſſiva loci mutatio, quæ iis etiam convenit. Hinc ſolemne eſt apud Geometras ipſos illud, motu puncti generari lineam, motu lineæ ſuperficiem, motu ſuperficiei ſolidum. Quod communiter dicatur quantitas motus coaleſcere ex maſſa in velocitatem ducta, & nomine maſſæ intelligatur quantitas materiæ ſolida, id quidem fit, quia accipi ſolet pro motu corporis. Cæterum eſt ſua maſſa, & ſuus motus in communi ſententia etiam ſuperficiei, lineæ, puncti. Ut in quantitate continuo extenſa habetur in communi ſententia ſolidum,

ſive

ſive corpus, quod concipitur generari motu continuo ſuperficiei, ſuperficies, quæ concipitur genita motu lineæ, linea, quæ concipitur genita motu puncti, & punctum, quod eſt omnis extenſionis principium, & origo; ita in maſſa, & motu, eſt maſſa corporea quantitas extenſa in longum, latum, & profundum; maſſa ſuperficialis, quantitas ſuperficiei extenſa in longum, & latum; maſſa linearis quantitas lineæ extenſa in longum; & maſſa punctorum, nimirum punctorum numerus. Eodem pacto quatuor erunt genera motuum, quæ coaleſcant ex hiſce quatuor maſſis ductis in ſuas velocitates. Quantitas ſolida, ubi dimenſio in profundum evadit nulla, fit nulla in genere ſolidi, non in genere ſuperficiei, ad quod devolvitur; niſi evaneſcant & reliquæ binæ dimenſiones, vel una ex iis, & idem de maſſa, ac motu dicendum eſt.

35. Si ſumantur tres numeri a, b, c, & ponatur $a = 10$, $b = 3$, $c = 2$, fiet $abc = 60$. Si fiat $c = 1$, fiet $abc = 30$. Si fiat $c = 0$, fiat $abc = 0$, ſed non idcirco fiet $ab = 0$; erit enim adhuc $= 30$. Idem prorſus accidit in caſu noſtro. Cæterum paſſim apud Mechanicos, & Phyſicos etiam, ut innuimus, occurrit motus puncti, lineæ, ſuperficiei. Centrum gravitatis eſt punctum; & tamen quam multa de motu centri gravitatis demonſtrantur ubique? Guldinus noſter regulam celebrem tradidit de menſura ſuperficiei, & ſolidi ex via centri gravitatis lineæ, & ſuperficiei generantis ducta in ipſam lineam, vel ſuperficiem. Si ſuperficies, linea, punctum in ſententia extenſionis continuæ ſunt reales termini extenſionis ipſius, ut ſuperiore anno demonſtravimus; luſum verbalem habet, qui ſaltum negat ex eo, quod deſit ſuperficiei maſſa, & proinde motus.

36. At in hac theoria habebimus congeriem quandam punctorum nullo vinculo cohærentium, non hæc noſtra corpora, quæ intuemur. Ejuſmodi difficultatem, quæ prima ſe menti objicit, tum etiam declinavimus, cum hanc ſententiam primo protulimus. Affirmamus enim per eos virium limites, in quibus a repulſione in minoribus diſtantiis fit tranſitus ad attractionem in majoribus, optime explicari cohæſionem, & tam varia cohæſionum genera, ac multo quidem melius, quam per attractionem in minimis diſtantiis auctam in infinitum. Dum nimirum bina materiæ puncta collocantur in ejuſmodi limite, ſi alterum alteri admoveas, ſtatim repulſione, quæ imminuta vi aget, propelletur illud alterum etiam; ſi primum a ſecundo removeas, attractionis vi agente jam in majore diſtantia hoc ſecundum conſequetur, quod præcipuum eſt cohæſionis munus, ut nimirum poſitio perſeveret; quod quidem fiet, ſi vel alterum ab altero non divellas majore vi, quam, qua ſe mutuo petunt, vel alteri motum tam celerem non imprimas, ut vires brevitate temporis ſatis agere non poſſint. Quo autem pacto per diverſam limitum naturam explicari poſſint cohæſionis diverſa genera, & diſcrimen inter corpora ſolida, ac fluida, inter elaſtica, ac mollia, atque alia plurima ejuſmodi, abunde in pluribus earum diſſertationum locis explicatum eſt, & in primis in Synopſi Phyſicæ Generalis ſuperius memorata.

37. At

37. At quibuſdam videtur illud, necquidquam in ſubſidium vocari repulſiones, cum attractivæ vires ad phœnomena explicanda ſint ſatis. Duo elementa adhiberi pro unico, ita nimirum contra Naturæ ſimplicitatem peccari. Præterea in ipſo tranſitu ab attractivis ad repulſivas quantitates per nihilum admitti illum ſaltum, quem maxime volumus evitare. Ubi autem attractivæ deſinant vires, ibi ut repulſivæ incipiant, aliam requiri cauſam priori oppoſitam, quæ oppoſitum priori exigat ſcopum. Demum tot illos tranſitus a repulſionibus ad attractiones, tot illos meatus curvæ per ordinatas ſuas exprimentis vires, dum hinc, & inde circa axem ſe contorquet, maximè implexos eſſe, & theoriam reddere multo magis compoſitam, quam requirat Naturæ ſimplicitas. Non eſſe unicam legem quandam, ſed plures temere diſpoſitas, tot nimirum, quot ſunt hinc, & inde ab ipſo axe incurvi arcus attractionibus reſpondentes, & repulſionibus.

38. Hiſce omnibus, ut faciamus ſatis, primo quidem illud notabimus, etiam ſi repulſiones, & attractiones eſſent diverſi generis vires, & duas diverſas leges, duo diverſa elementa temere conjuncta continerent; adhuc tamen ſi poſitiva ratione a nobis demonſtraretur illud, utramque in Natura exiſtere; nihil ſane eſſet, quo nos culpandos eſſe arbitrarentur. At earum exiſtentiam & Nevvtonus ſatis illam quidem ſolide in Optica ſua, quæſtione ultima, ex pluribus phœnomenis derivat, in primis ex vaporum vi expanſiva tanta, & ea multo, ni fallimur, ſolidius a nobis ex colliſione corporum, & excluſione ſaltus demonſtratur.

39. Accedit, quod qui attractiones ſolas admittunt, adhuc ipſi admittunt bina prorſus disjuncta principia, nimirum attractionem, a qua cohæſionis cauſam repetunt, & vim impenetrabilitatis, qua indigent ad corporum colliſiones in impactu, quæ utique per attractionem obtineri non poteſt. Quare cum nobis repulſio noſtra impenetrabilitatem, & colliſiones exhibeat; etiamſi ea eſſet diverſum ab attractione principium, jam adhuc non plura admitteremus in Natura explicanda principia, quam ipſi.

40. Verum illud omnino eſt falſum, duo eſſe diverſa quantitatis genera, attractivam vim, & repulſivam, ut etiam vim nullam, quæ itidem non eſt verum nihil, ſed a nobis ſecundum peculiarem quendam reſpectum habetur pro nihilo. Vis attractiva eſt determinatio binorum materiæ punctorum ad mutuo accedendum, vis repulſiva ad mutuo recedendum, vis nulla ad ſervandam diſtantiam, ſi nihil obſit; nimirum ad habendos ſequentibus momentis temporis certos quoſdam locales exiſtendi modos, in quo conveniunt omnes. Diſcrimen inter vim repulſivam, & attractivam eſt in directione ſola ſeriei eorundem localium modorum. Directio ejuſmodi mutat poſitiva in negativa, & viceverſa, quod aliud quantitatis genus non inducit. Nam poſitiva a negativis nihilo magis differunt, quam poſitiva inter ſe, & negativa inter ſe. Tam differunt decem gradus attractionis a duobus attractio-

nis

nis a duobus attractionis, quam duo attractionis a ſex repulſionis, quam ſex repulſionis, a quatuordecim repulſionis. Ea omnia ſibi invicem eodem pacto ſuccedunt per ſolam ablationem continuam graduum octo. Quamobrem attractiones & repulſiones non ſunt bina quantitatum diverſa genera, ſed unicum genus, & ad unicam eandem ſeriem pertinens. Nomina diverſa ſunt, ſed ad ejuſdem rei pertinent diverſos ſtatus ita, ut infinitis utrumque a nobis aptatum ſit caſibus, nihilo minus inter ſe diverſis, ſi rei naturam conſideremus, quam alter ex iis ab altero differt, vel ab eo, cui nomen impoſuimus vis nullius, qui quidem iis interjacet eodem prorſus modo, quo decem attractionis gradus interjacent inter omnes majores, & minores attractiones; licet nec attractio illa graduum decem, ſuum peculiare nomen adepta ſit, nec majores, ac minores attractiones ſua diſtincta nomina.

41. Hinc etiam illud facile patet, in tranſitu ab attractione ad repulſionem per vim nullam nullum haberi ſaltum. Nam ipſe ſtatus vis nullius, eſt limes communis inter omnes attractiones, & repulſiones eodem prorſus pacto, quo attractio graduum 10 eſt limes communis inter omnes attractiones majores, & attractiones minores. Acceditur ad ſtatum realem vis nullius, ſive ad determinationem realem retinendi velocitatem, quæ habetur per omnes virium hinc attractivarum, inde repulſivarum ſtatus, quin ullus ſit ultimus gradus attractionis, aut primus repulſionis, quo alius ipſi vi nulli propior non habeatur prorſus; ut ad attractionem graduum 10 acceditur hinc per omnes attractionum majorum, inde minorum gradus, quin ullus ſit proximus ex parte utralibet, quo propior non habeatur aliquis; in quo nimirum ſita eſt lex continuitatis, & excluſio ſaltus facta per mutationem continuam.

42. Quod autem additur de cauſa repulſionum, quæ diverſa eſſe debeat a cauſa attractionum, id vero omnino eſt falſum. Videmus ejus rei exemplum manifeſtum in lamina chalybea plicata, quam ſi magis comprimas, ſe expandit; ſi diſtrahas, ſe contrahit. Habemus ibi vim a diſtantia pendentem, quæ in minore diſtantia ſit repulſiva, in majore, attractiva, in quadam determinata diſtantia, nulla, & omnium earum virium cauſam in eadem laminæ elaſticitate ſitam eſſe.

43. Cæterum, quod ad cauſam attinet, ii, qui cauſas occaſionales volunt, ut Carteſiani in primis, omnino non videmus, quid habere poſſint difficultatis in eo (quod quidem etiam alibi adnotavimus), quod pro occaſione aſſumatur diſtantia quædam determinata, ut ipſi aſſumunt diſtantiam nullam. Eodem prorſus pacto, quo Deus ex conditione diſtantiæ nullius poteſt motum progignere in altero corpore, in altero adimere; poteſt itidem ex conditione tantæ diſtantiæ decernere, ut habeatur acceſſus mutuus, ex conditione autem alterius, mutuus receſſus; nimirum aſſumere pro conditione acceſſuum, & receſſuum totam diſtantiarum ſeriem ita, ut determinationes ejuſmodi, ac-

ceſſuum

cessuum mutuorum, vel recessuum; (quas vires attractivas, vel repulsivas arbitrario, & jam usitato, nec vero inepto nomine appellamus) secundum certam quandam legem, quam per analyticam formulam exprimere possimus, vel per geometricam figuram oculis subjicere, ipsis distantiis affixerit. Nec verò in ejusmodi arbitraria lege idem præstatur, quod si in universa Philosophia pro singulorum phænomenorum explicatione illud adhiberetur, id fieri, quia Deus ita voluit. Id quidem civilium exemplo legum optime explicatur.

44. Sunt pleræque leges a Republica ordinatæ ad certos fines, quæ aliter etiam ordinari possent, & generales quædam cujuscumque regiminis sunt leges, secundum quas ea ditio regitur. Interea plurima ab iis legibus pendent phænomena, damnantur Rei, publicantur bona, vel aliis adjudicantur, ac alia ejusmodi. Qui rationem eorum redditurus illud affirmet, ista evenire, quia sic Legislator voluerit, ordinarit Respublica, næ ille quidem inepte respondeat, & nihil dicat. Quod si e contrario leges ipsas generales inveniat, earum sensum explicet, ad peculiares casus applicet, & quid in quibusque circumstantiis consequi inde debeat, diligenter exponat; ille quidem Juris peritus appellatur, habetur in pretio, & Patriæ, & civibus est utilissimus, quibus in dubiis casibus prodest plurimum sæpe consultus. Eodem prorsus pacto, qui ad singula Naturæ phænomena illud respondeat, id ita fieri, quia sic Deus voluerit, ordinarit Natura, ineptissimè ille quidem philosophatur. Qui liberas etiam, si liberæ sint, Dei Naturæ conditoris leges, generales, & perennes, ex quibus phænomena pendent omnia, deprehendat, ac explicet; næ ille optimus Naturæ indagator censeri debet, & Naturæ peritissimus cognitor, atque ad ea omnia, ad quæ Naturæ leges ejusmodi utiles sunt, ut ad scientias excolendas, ad artes promovendas, ad ipsam vitæ rationem instituendam, utilissimus.

45. Qui autem malunt in ipsa rerum Natura, vel etiam in formis quibusdam, quæ rebus ipsis superadditæ sint, effectuum naturalium causas reponere, ii possunt in Natura punctorum materiæ, vel in accidenti ipsis superinducto agnoscere determinationem accessus mutui, vel recessus conditionatam, sub conditione tantæ determinatæ distantiæ. Ea determinatio dicetur vis attractiva, vel repulsiva, prout erit ad accessum, vel recessum, & fiet secundum certam legem pendentem a distantiis, & expressam per analyticam formulam, ac oculis subjectam per geometricam lineam. Eo casu quodvis punctum in se producet motum, directio autem, secundum quam eum producet, & magnitudo ipsius determinabitur a positione, & distantia alterius puncti. Nimirum illa unica indivisibilis Natura, vel, si libet, superaddita qualitas in quovis puncto producet motum, punctum alterum positione illa sua, & distantia, ubi ad ipsum devenerit directionem novi motus determinabit, & quantitatem. Quamobrem hoc aliud punctum physicè in illud primum non aget; aget tamen determinativè, ut adeo ipsi ob necessariæ exigentiæ determinationem effectus tribui debeat, & ipsum dicendum sit propellere, & loco movere illud aliud punctum, quod accessu suo, posita rerum Natura ad illum

motum

motum ipſum determinat. Eodem pacto apud Peripateticos gravitas deorſum urget corpora, & in iis producit motum, centri autem poſitio directionem ejus motus determinat. Porro evidens eſt illud, nihil obeſſe, quominus eadem indiviſibilis ſimpliciſſima, vel puncti, vel qualitatis ipſi ſuperadditæ natura requirat in una diſtantia unum acceſſum, in alia acceſſum majorem, in alia conſervationem diſtantiæ, in alia receſſum, ut eadem illa elaſticitas laminæ pro diverſis diſtantiis cuſpidum diverſos acceſſus, vel diſtantiæ conſervationem, vel receſſum requirit.

46. Atque hæc quidem de cauſa fuſius aliquanto iterum expoſuimus, ut innoteſcat generalem hanc noſtram theoriam conſentire cum quavis Philoſophorum ſecta de primis, vel ultimis effectuum cauſis diſputante, quas cum e phænomenis deprehendere non liceat (nam phænomena eodem modo contingunt, undecunque illa ipſa profluat virium lex), nequaquam inveſtigamus, contenti inveſtigatione legis ipſius, ſecundum quam vires exercentur, & habentur motus, ut Algebræ, Geometriæ, Mechanicæ ope, motuum leges inde, ac phænomenorum omnium generalem rationem, atque evolutionem derivemus.

47. Quod autem poſtremo loco fuerat propoſitum, nimis implexam eſſe, & ex pluribus legibus temere inter ſe conjunctis, ac arcubus curvarum plurium compactam theoriam noſtram, id enim vero eſt admodum falſum. Omnes enim ii tranſitus ab unica continua in ſe ſimpliciſſima analytica formula, & unica ſimplici continua linea curva exhibentur. Quod quidem quo evidentius pateat, præmittemus primo illud, ut certas quantitatum relationes volgus etiam per numeros exprimit, & inter ſe confert, vel per certas menſuras, nimirum lineas, oculis ſubjicit, ut ubi imagines ædium, camporumque depictas intuetur; ita etiam philoſophi, ac Mathematici generales quantitatum nexus exprimunt per valores quoſdam generales, & indeterminatos, quos literis exhibent, quæ quidem expreſſiones, cum Algebra Analyſeos nomine appellari ſoleat, analyticæ formulæ dicuntur. Eaſdem autem & exprimunt, & oculis exhibent per geometricas lineas, quarum tamen Naturam analyticis formulis complectuntur. Ex analyſeos autem regulis, & geometricis veritatibus tam multis jam demonſtratis, ubi ejuſmodi nexus ad analyticas ipſas formulas, & geometricas lineas deductus eſt, multo ſane facilius conſectaria deinde deducantur quam plurima, quæ ad phænomena pertinent e nexibus illis ipſis pendentia.

48. Porro illæ formulæ algebraicæ, illæ lineæ, quæ ejuſmodi nexum, & mutationem quantitatum variabilium exprimunt, illæ ipſæ oſtendunt, an, & quando fieri debeat, ut quantitas tranſeat e poſitiva in negativam, & quo pacto is tranſitus fiat, fit enim aliquando tranſeundo per nihilum, aliquando vero tranſeundo per infinitum. Fieri autem poteſt, ut quantitas ubi ad nihilum, vel infinitum devenerit, e poſitiva migret in negativam, vel viceverſa, & contra poſitiva remaneat, vel negativa, ut erat. Ea omnia multo fuſius pertractavimus, ac declaravimus in ſecundo noſtrorum elementorum tomo, quod attinet ad analyticas algebraicas formulas

§. 14, & quod pertinet ad lineas geometricas tomo tertio, in diſſertatione de transformationibus locorum geometricorum addita Sectionum Conicarum elementis. Aliqua hic breviſſimè innuemus.

49. Sit formula $10-x$, in qua pro x ponantur valores varii. Si ponatur $x=1$, fit formula $=9$; ſi $x=8$, fit $=2$; ſi $x=10$, fit $=0$; ſi $x=12$ fit $=-2$; ſi $x=19$, fit $=-9$. Abiit valor formulæ e poſitivo in negativum tranſeundo per zero. Sit $1000-300x+30x^2-x^3$ Pariter poſito $x=1$, fit $=729$; poſito $x=8$, fit $=8$; poſito $x=10$, fit $=0$; poſito $x=12$, fit $=-8$; poſito $x=19$, fit $=-729$. Abiit etiam hic valor e poſitivo in negativum per zero. Et quidem ſi ponatur quivis valor minor, quam 10 in utraque formula, habebitur quantitas poſitiva; ſi major, negativa. Quod ſi aſſumamus formulam $\frac{1}{10-x}$, vel $\frac{1}{1000-300x+30x^2-x^3}$ poſitis pro x valoribus 1, 8, 10, 12, 19, habebuntur valores $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{0}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{9}$, vel $\frac{1}{729}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{0}$, $-\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{729}$. Primi duo valores utrobique ſunt poſitivi, ultimi duo negativi, medius infinitus: nam fractio eo eſt major, quo denominator eſt minor, qui ſi ita decreſcit in infinitum, ut demum evadat omnino nullus, ipſa fractio evadit valoris abſolute infiniti. Tranſiit valor e poſitivo in negativum in prioribus formulis caſu appellendo ad zero, in his poſterioribus appellendo ad infinitum.

50. Quod ſi potius aſſumatur formula $100-20x+x^2$, & ponantur pro x valores illi iidem ſucceſſive alii poſt alios, nimirum 1, 8, 10, 12, 19, habentur valores 81, 4, 0, 4, 81 omnes poſitivi, & quicunque valor ſubſtituatur pro x, invenietur ſemper poſitivus valor. Formula nimirum ibi, ubi devenerit ad zero retro curſum reflectet, & non migrabit in negativam. Pariter idem accidet in formula $\frac{1}{100-20x+x^2}$, quæ formula poſito $x=10$ evadit infinita, poſito quovis alio valore, ſemper eſt poſitiva. Sunt autem formulæ, quarum valor pluribus etiam vicibus migrat e poſitivo in negativum, & viceverſa, idque vel tranſeundo per nihilum, vel tranſeundo per infinitum. Sumatur formula $x^3-21x^2+138x-280$. In ea ſi ponatur quivis numerus negativus pro x, vel zero, vel quivis numerus poſitivus minor 4, habetur valor formulæ negativus, ſi ponatur $x=4$, fit $=0$; ſi ponatur quivis valor inter 4, & 7, valor evadit poſitivus, primo quidem creſcens, tum decreſcens; ſi ponatur $x=7$, fit iterum $=0$;

ſi posi ponatur pro x quivis valor inter 7, & 10, fit valor formulæ iterum negativus, primo quidem crescens, tum decrescens; si ponatur valor $x=10$, fit valor formulæ $=0$; posito autem quovis valore pro x majore quam 10, habetur valor formulæ positivus, & crescens perpetuo in infinitum. Porro eodem pacto admodum facile est invenire formulas, quæ substitutis valoribus quotcumque, evadant $=0$, & ibi vel transeant e positivis in negativas, vel regrediantur retro; ac idem pariter de transitu per infinitum.

51. Quæ de formulis analyticis diximus eadem in lineis geometricis locum habent. Sit quædam recta, ut AB in *fig*.2, ad quam referatur linea *F. 2.*
quævis PEM, per rectas CL a quocumque ejus puncto ductas perpendiculariter ad AB, & dicatur, ut fieri solet, AC abscissa, CL ordinata, AB axis. Eæ duæ quantitates AC, & CL erunt inter se connexæ ita, ut, data illa curva, a magnitudine unius pendeat magnitudo alterius. Prout linea PEM accesserit ad axem, vel recesserit, ordinata CL minuetur, vel augebitur. Si ea advenerit ad axem AB, ordinata CL evadet $=o$; si ea axem transgressa abeat ad partes oppositas, uti figura exhibet, ordinata directionem mutabit, adeoque mutabitur e positiva in negativam. Quod si curva delata ad axem AB in E retro cursum reflectat per EM', tum ordinata CL, posteaquam evanuit in E, retro cursum reflectit in HM' iterum positiva. Fieri autem potest etiam, ut ordinata evadat infinita, & postea quam infinita evasit, redeat cum eadem directione ex infinito (quod accideret in *fig*.11 in curva LMN, quæ habeat asymptotum SM, & ex eadem asymptoti parte regrediatur) vel redeat cum directione opposita (quod accideret in *fig*.12, ubi arcus asymptotici LM, OP jacent ad partes oppositas), & hosce quidem, quib s hic indigemus, ac alios casus eodem pertinentes accuratè per simplicem Geometriam demonstravimus in eadem illa dissertatione adjecta Sectionibus Conicis, quæ quidem Geometris notissima sunt.

52. Porro iidem nexus, qui exhibentur per formulas illas analyticas, exhiberi etiam possunt per lineas, in quibus abscissa dicatur x, ordinata y, ut ex applicatione Algebræ ad Geometriam, & locorum geometricorum theoria notissimum est. Sic si sit in *fig*.2 AE $=10$, AC $=x$, CL $=y$, sit *F. 2.*
autem linea PEM recta, angulus CEP semirectus, adeoque CL $=$ CE, erit $y=10-x$, ut in prima e formulis analyticis propositis. Si autem sit PEM' parabola communis, cujus axis EF, tangens AEB, parameter $=1$, habebitur formula $100-20x+x^2=y$. Si vero esset PEM quædam alia parabola cubica, haberetur formula $1000-300x+30x^2-x^3=y$, ac ubique facta AC $=$ AE, sive $x=10$, evadit CL, sive $y=o$, sed in primo, & tertio casu, ubi abscissa AC abjerit in AH ultra AE, evadit ordinata y negativa HM, in secundo remanet positiva HM'.

53. Sic si habeatur quævis formula algebraica, quæ quocumque modo exhibeat relationem ordinatæ ad abscissam vel hoc modo separatæ, vel utcum-

cumque permixtæ, habetur ſemper linea, quæ exprimit relationem illam; quæ dicitur ejus gradus, ad quem aſſurgunt potentiæ ipſarum x, & y permixtæ ſimul. Ubi autem ipſæ nec ſunt permixtæ, nec aſſurgunt ultra primum gradum, linea quæ æquationi reſpondet eſt recta; ubi vel ſeorſum, vel ſimul aſſurgunt ad gradus ſuperiores, linea eſt curva, in ſecundo gradu ſemper una e ſectionibus conicis, quæ dicuntur curvæ primi generis, & in altioribus gradibus curvæ altiores ſunt, quæ, quo gradus aſſurgit magis, eo ſunt plures, & cito admodum in immenſum excreſcunt, quod e combinationum doctrina facile percipitur; cum nimirum 24 litterulæ diverſis modis combinatæ omnibus gentibus abunde voces tam multas ſuppeditent. Sunt autem & aliæ, quæ reſpondent non algebraicis hujuſmodi formulis, ſed infiniteſimalibus, quæ dicuntur tranſcendentes, & ſunt fortaſſe aliæ numero infinitæ, quæ ejuſmodi relationes exprimant, quas nulla huc uſque cognita algebra poſſit exprimere.

54. Jam vero quo altioris ſunt gradus curvæ lineæ, eo pluribus in punctis rectam lineam ſecare poſſunt, & poſſunt ſemper inveniri curvæ & quidem numero infinitæ, quæ per quotcumque data puncta tranſeant, adeoque ad rectam datam in quotcumque, & quibuſcumque datis punctis appellant, ibique eam vel ſecent, vel tangant, uti libuerit; ut & formulæ algebraicæ, quæ ejuſmodi curvarum ductum exprimant, ac in quotcumque valoribus ſubſtitutis pro variabili x exhibeat valorem $= o$, ac ibi vel tranſeant in negativas, vel retro regrediantur. Præterea habetur, ut ſuperiore anno innuimus in ipſa præcedenti ſerie quantitatum decreſcentium uſque ad zero determinatio ad tranſeundum, vel non tranſeundum in negativum. Si nimirum antequam evaneſcat ordinata CL, decreſcit in ratione alicujus potentiæ gradus paris diſtantiæ CE a nihilo, retro regreditur; ſi eſt in ratione potentiæ gradus imparis, tranſit. Ubi erat $y = 10 - x$, erat $=$ CE, ſive primæ potentiæ illius diſtantiæ; ubi erat $y = 100 - 20x + x^2$, erat æqualis quadrato CE, ſive valoris $10 - x$, ubi erat $y = 1000 - 300x + 30x - x^3$, erat æqualis cubo ipſius EC, ſive ejuſdem valoris. Idcirco in primo, & tertio caſu tranſiit in negativum, in ſecundo remanſit poſitivus valor.

55. Hiſce præmiſſis, ſi natura puncti, vel qualitas ipſi addita, vel libera Dei lex, virium legem ferat reſpondentem formulæ, quæ per zero tranſeat in negativam, vel curvæ, quæ axem ſecet; ipſæ vires neceſſario petente id ipſa illa lege, tranſibunt e poſitivis in negativas, ſive ex attractivis in repulſivas, & quoties illa curva ſecabit axem, toties hæc habebitur mutatio directionis virium. Saltus haberetur in eo caſu, ſi ubi ad nihilum deventum eſt, non abiretur ex attractione in repulſionem, & ad ſervandam Naturam legis requiritur ea mutatio, quæ ſi non haberetur, tum diverſæ leges temere inter ſe conjunctæ haberentur.

56. Cæterum ex iis, quæ diximus, & ex ipſa curvarum natura potius eruitur argumentum validiſſimum pro ſententia admittente non ſolas attractiones, ſed attractiones conjunctas cum repulſionibus. Nam virium

lex

lex quæcumque ea sit, debet posse per lineam aliquam exprimi. Concipiamus nos ignorare prorsus, cujusmodi eo curva esse debeat, & nullum habere argumentum pro parte utralibet, ac videamus, quid esse debeat magis probabile; ut habeantur solæ attractiones, an ut etiam repulsiones habeantur. In primo casu oportet illa linea, quæ legem exprimit, axem nusquam secet; in secundo oportet eam secet. Hoc posito consideremus an sit probabilius, haberi lineam, quæ axem non secet, an haberi lineam, quæ secet.

57. Recta quævis, ut ordiamur a lineis primi ordinis, secatur necessario ab omnibus rectis omnium directionum, præter solas sibi parallelas. Quare infinities plures sunt rectæ, quæ eam necessario secant, quam quæ non secant. Lineæ secundi ordinis, nimirum Sectiones Conicæ sunt ejusmodi, ut Ellipsim quidem infinitæ numero lineæ secent, infinitæ non secant, ac cujuscumque directionis lineæ omnes, quæ tangentibus interjacent, Ellipsim secant, quæ sunt extra, non secant; in Hyperbola autem e contrario, quæ sunt inter tangentes non secant, quæ extra secant. Parabolam, omnium directionum lineæ, quæ jacent a tangente ad alteram partem, non secant, quæ ad alteram secant. Hic igitur sumus pares. In curvis generis secundi, gradus tertii, sunt plurimæ, quæ ramis ita in partes oppositas excurrunt, ut nulla haberi possit linea recta, quæ ipsas non secet, & id in omnibus gradibus imparibus accidit. Infinities plures secant, quam non secent, & quo altius assurgunt, eo in pluribus punctis secare possunt.

58. Tum autem sic argumentari licet. Nulla est linea, quam infinitæ numero lineæ rectæ non secent; infinitæ numero sunt lineæ, quas recta quævis non secare non potest, & infinities plures sunt curvæ cum rectis combinatæ, quæ a rectis secentur, quam quæ non secentur. Igitur infinities probabilius est per ejusmodi curvam exprimi virium legem, quæ axem secet, quam per ejusmodi, quæ non secet. Rursum curvæ, quæ in exiguo punctorum numero secari possint a rectis, sunt in immensum pauciores, quam curvæ, quæ secari possunt in plurimis. Igitur in immensum probabilius est eam legem exprimi per curvam, quæ axem secare possit in plurimis punctis, quam quæ in paucioribus. Hæc quidem argumenta sunt, quæ favent sententiæ nostræ, si nihil nos scire concipiamus. Si oppositum positive probaretur, hoc præjudicium concideret; sed confirmatur admodum valide, cum nos positive probemus eam ipsam curvæ nostræ formam.

59. At præterea contra solam attractionem plures habentur difficultates, quæ per gradus crescunt. Nam in primis si eæ imminutis utcumque distantiis agant, augent velocitatem usque ad contactum, ad quem ubi deventum est, incrementum velocitatis ibi per saltum abrumpitur, & ubi maxima est, ibi perpetuo incassum nituntur partes ad ulteriorem effectum habendum, & necessario irritos conatus edunt.

60. Quod si in infinitum imminuta distantia, crescant in aliqua ratione distantiarum reciproca, multæ itidem difficultates habentur, quæ nostram oppo-

oppoſitam ſententiam confirmant. In primis in ea hypotheſi virium deveniri poteſt ad contactum, in quo vis, ſublata omni diſtantia, debet augeri in infinitum magis, quam eſſet in aliqua diſtantia. Porrò nos putamus accurate demonſtrari; nullas quantitates exiſtere poſſe, quæ in ſe infinitæ ſint, aut infinitè parvæ. Hinc autem ſtatim habemus abſurdum, quod nimirum ſi vires in aliqua diſtantia aliquid ſunt, in contactu debeant eſſe abſolute infinitæ.

61. Augetur difficultas, ſi debeat ratio reciproca eſſe major, quam ſimplex (ut ad gravitatem requiritur reciproca duplicata, ad cohæſionem adhuc major) & ad bina puncta pertineat. Nam illa puncta in ipſo congreſſu devenient ad velocitatem abſolute infinitam. Velocitas autem abſolute infinita eſt impoſſibilis, cum ea requirat ſpatium finitum percurſum momento temporis, adeoque replicationem, ſive extenſionem ſimultaneam per ſpatium finitum diviſibile, & quovis finito tempore requirat ſpatium infinitum, quod cum inter bina puncta interjacere non poſſit, requireret ex Natura ſua, ut punctum ejuſmodi velocitatem adeptum nuſquam eſſet.

62. Accedunt plurima abſurda, ad quæ ejuſmodi leges nos deducunt.
Fig.6 Tendat punctum aliquod in *fig.6* in centrum F in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, & ex A projiciatur directione AB perpendiculari ad AF, cum velocitate ſatis exigua: deſcribet Ellipſim ACDE, cujus focus erit F, & ſemper regredietur ad A. Decreſcat velocitas AB per gradus donec demum evaneſcat. Semper magis arctatur Ellipſis, & vertex D accedit ad focum F, in quem demum recidit abeunte ellipſi in rectam AF. Videtur igitur id punctum ſibi relictum debere deſcendere ad F, tum poſt acquiſitam ibi infinitam velocitatem, eam ſine ulla contraria vi convertere in oppoſitam, & retro regredi. At ſi id punctum tendat in omnia puncta ſuperficiei ſphæricæ, vel globi EGCH in eadem illa ratione, demonſtratum eſt a Nevvtono debere per AG deſcendere motu accelerato eodem modo, quo accelleraretur, ſi omnia ejuſmodi puncta ſuperficiei, vel ſphæræ compenetrarentur in F. At abrupta lege accelerationis in G, debere per GH ferri motu æquabili, viribus omnibus per contrarias actiones eliſis, tum per HI tantundem procurrere motu retardato, adeoque perpetuam oſcillationem peragere, velocitatis mutatione bis in ſingulis oſcillationibus per ſaltum interrupta.

63. In eo jam abſurdum quoddam videtur eſſe, ſed id quidem multo magis creſcit, ſi conſideretur, quid debeat accidere, ubi tota ſphærica ſuperficies, vel tota ſphæra abeat in unicum punctum F. Tum itidem corpus ſibi relictum, deveniet ad centrum cum infinita velocitate, ſed procurret ulterius uſque ad I, dum prius, ubi ellipſis evaneſcebat, debebat redire retro. Nos quidem pluribus in locis alibi demonſtravimus, in prima determinatione latere errorem, cum ellipſi evaneſcente, nullæ jam adſint omnes vires, quæ agunt per arcum ſitum ultra F ad partes D, quæ priorem velocitatem debebant extinguere, & novam producere ipſi æqualem. Verum adhuc habetur ſaltus quidam, a quo & Natura; & Geometria ubique

que repugnat. Nam donec utcumque parva eſt velocitas, habetur ſemper regreſſus ad A cum procurſu FD eo minore, quo velocitas eſt minor; facta autem velocitate nulla, procurſus immediate evadit FI, quin ulli intermedii minores adfuerint. Quod ſi quis priorem determinationem tueri velit, ut punctum quod agatur in centrum vi, quæ ſit in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, debeat e centro regredi retro; tum ſaltus habetur ſimilis, ubi prius in ſphæricam ſuperficiem, vel ſphæram tendat, quæ paullatim abeat in centrum. Donec enim aderit ſuperficies illa, vel ſphæra, habebitur ſemper is procurſus, qui abrumpetur in illo appulſu totius ſuperficiei ad centrum, quin habeantur prius minores procurſus.

64. Hæc quidem in ratione reciproca duplicata diſtantiarum; in reciproca triplicata habentur etiam graviora. Nam ſi cum debita quadam velocitate projiciatur per rectam AB *fig.*7 continentem angulum acutum cum *F. 7.*
AP mobile, quod urgeatur in P vi creſcente in ratione reciproca triplicata diſtantiarum, demonſtratur in Mechanica, ipſum debere percurrere curvam ACDEFGH, quæ vocatur ſpiralis logarithmica, quæ hanc habet proprietatem, ut quævis recta, ut PF, ducta ad quodvis ejus punctum, contineat cum recta ipſam ibidem tangente angulum æqualem angulo PAB; unde illud conſequitur, ut ea quidem ex una parte infinitis ſpiris circumvolvatur circa punctum P, nec tamen in ipſum unquam deſinat: ſi autem ducatur ex P recta perpendicularis ad AP, quæ tangenti AB occurrat in B, tota ſpiralis ACDEFGH in infinitum continuata, ad menſuram longitudinis AB accedat ultra quoſcumque limites, nec unquam ei æqualis fiat; velocitas autem in ejuſmodi curva in continuo acceſſu ad centrum virium P perpetuo creſcat. Quare finito tempore, & ſane breviore, quam ſit illud, quo velocitate initiali percurreret AB, deberet id mobile devenire ad centrum P; in quo bina graviſſima abſurda habentur. Primo quidem, quod haberetur tota illa ſpiralis, quæ in centrum deſineret, contra id, quod ex ejus Natura deducitur, cum nimirum in centrum cadere nunquam poſſit: deinde vero, quod elapſo eo finito tempore mobile illud nuſquam eſſe deberet. Nam ea curva, ubi etiam in infinitum continuata intelligatur, nullum habet egreſſum e P. Et quidem formulæ analyticæ exhibent ejus locum poſt id tempus impoſſibilem, ſive, ut dicimus, imaginarium; quo quidem argumento Eulerus in ſua Mechanica affirmavit illud, debere id mobile in appulſu ad centrum virium annihilari. Quanto ſatius fuiſſet inferre, eam legem virium impoſſibilem eſſe?

65. Quanto autem majora abſurda in ulterioribus potentiis, quibus vires alligatæ ſint, conſequentur? Sit globus ABE, & intra ipſum alius *Abe*, qui priorem contingat in A, ac in omnia utriuſque puncta agant vires decreſcentes in ratione reciproca quadruplicata diſtantiarum, vel majore, & quæratur ratio vis puncti conſtituti in concurſu A utriuſque ſuperficiei. Concipiatur uterque reſolutus in pyramides infinitè arctas, quæ prodeant ex communi puncto A, ut BAD, *bAd*. In ſingulis autem pyramidulis diviſis in partes totis proportionales ſint particulæ MN, *mn* ſimiles, & ſimiliter poſitæ. Quantitas materiæ in MN, ad quantitatem in *mn* erit, ut maſſa totius globi majoris ad totum minorem, nimirum ut cubus radii majoris ad cubum minoris. Cum igitur vis, qua trahitur punctum A, ſit, ut quantitas materiæ directè, & ut quarta poteſtas diſtantiarum reciproce, quæ itidem diſtantiæ ſunt, ut radii ſphærarum, erit vis in partem MN, ad vim in partem *mn* directè, ut tertia poteſtas radii majoris ad minorem, & reciprocè, ut quarta poteſtas ipſius. Quare manebit ratio ſimplex reciproca radiorum.

66. Minor erit igitur actio ſingularum particularum homologarum MN, quam *mn*, in ipſa ratione radiorum, adeoque punctum A minus trahetur a tota ſphærâ ABE, quam a ſphæra A*be*, quod eſt abſurdum, cum attractio in eam ſphæram minorem debeat eſſe pars attractionis in ſphæram majorem, quæ continet minorem, cum magna materiæ parte ſita extra ipſam uſque ad ſuperficiem ſpæræ majoris; unde concluditur eſſe partem majorem toto, maximum nimirum abſurdum. Et quidem in altionibus potentiis multo major eſt is error; nam generaliter ſi vis ſit reciprocè, ut R^m, poſito R pro radio, & *m* pro quovis numero ternarium ſuperante, erit attractio ſphæræ eodem argumento reciproce, ut R^{m-3}, quæ eo majorem indicat vim in ſphæram minorem reſpectu majoris ipſam continentis, quo numerus *m* eſt major.

67. Hoc quidem pacto inveniuntur plurima abſurda in variis generibes attractionum, quæ ſi repulſiones, in minimis diſtantiis habeantur pares extinguendæ velocitati cuilibet utcumque magnæ, ceſſant illico omnia, cum eæ repulſiones mutuum acceſſum, ac concurſum penitus impediant. Inde autem manifeſto iterum conſequitur, repulſiones in minimis diſtantiis præferendas potius eſſe attractioni, ex quarum variis generibus tam multa abſurda conſequuntur.

68. Hiſce aliquanto fuſius expoſitis veniamus jam ad curvam lineam, vel analyticam formulam, quæ debeat reſpondere in noſtra theoria legi virium in natura exiſtentium. Curvam ejuſmodi exhibet *fig.9*. Ejus axis

Fig.9 eſt C'C, abſciſſarum origo in A, unde prodit recta AB indefinita axi perpendicularis, cui ordinatæ debent eſſe parallelæ. Ipſum autem curvæ ductum exhibet hinc quidem DEFGHIKLMNOPQRSTV; inde vero D'E'F'G' &c. Ejus primus arcus ED ad partes D in infinitum accedet ad rectam AB, quin unquam cum ea congruat, quam idcirco habebit pro aſymptoto; verſus E autem perpetuo recedet ab ipſa BA, ac accedet ad axem, quem ſecabit alicubi in E, tum in aliis quamplurimis punctis G, I, L, N, P &c., hinc, & inde ſinuata per F, H, K &c., arcu quodam ſatis remoto TV fere coincidente cum quodam habente axem AC pro aſymptoto, & jacente ad partes oppoſitas reſpectu axis ipſius iis, ad quas jacet arcus aſymptoticus ED. Abſciſſæ, ut A*a*, A*c*, A*x*, A*e* exprimient diſtantias binorum punctorum a ſe invicem; ordinatæ *ag*, *x*X jacentes ad partes primi cruris aſymptotici ED exprimient vires repulſivas, ordinatæ autem jacentes ad partes oppoſitas *cu*, *eb*, exprimen vires attractivas. Ipſa debebit perpetuo recedere ab aſymptoto AB, ut nulli

nulli puncto axis correspondere possint ordinatæ plures, quemadmodum uni cuique distantiæ una tantummodo respondet vis. Primum crus debebit esse asymptoticum, ut decrescentibus in infinitum abscissis A*b*, A*a*, ordinatæ *bt*, *ag* in infinitum crescant, quemadmodum imminutis in infinitum distantiis crescunt vires repulsivæ in infinitum. Sed debebunt ordinatæ ejusmodi crescere in ratione abscissarum reciproca non minore quam simplici. Nam illud in sublimiore Geometria demonstratur, si ordinatæ crescant in ratione abscissarum minore quam reciproca simplici, ut in subduplicata, subtriplicata, & ita porro, esse aream BAED finitam; si autem crescant in simplici, vel majore, ut duplicata, triplicata, & ita porro, fore infinitam; illud autem in Mechanica, ubi abscissæ exprimunt spatia, ordinatæ autem vires, quæ agant in singulis eorum spatiorum punctis, aream, quam ordinatæ illæ veluti pertexunt, exprimere incrementum, vel decrementum quadrati velocitatis. Quare ut vires repulsivæ cruris asymptotici ED sint pares extinguendæ velocitati cuivis utcumque magnæ, debebit area asymptotica BAED esse infinita, quæ ut infinita sit, debebit ordinata decrescere in ratione reciproca non minore, quam simplici.

69. Succedet series arcuum EFG, GHI, IKL &c., quorum primus erit attractivus, secundus repulsivus, tertius attractivus, & ita porro alternatim, cum suis limitibus E, G, I, L &c., in quorum primo fiet transitus a vi repulsiva ad attractivam, in secundo ab attractiva ad repulsivam, in tertio iterum a repulsiva ad attractivam, & ita porro alternatim. Hi expriment illas vires in exiguis distantiis jam attractivas jam repulsivas.

70. Habebitur demum arcus quidam ex parte attractiva TV proxime accedens ad arcum hyperbolicum habentem ordinatas in ratione reciproca duplicata abscissarum, qui attractionem decrescentem exhibeat in ratione eadem reciproca duplicata distantiarum, qualem Keplerianæ leges Nevvtono exhibuerunt in Planetis, & Cometis. Dicimus autem proximè accedat ad ejusmodi arcum. Nam illud censemus gravitatem generalem non esse accuratè, sed tantum proximè in ratione reciproca duplicata distantiarum.

71. In eam sententiam nos adducit simplicitas summa, quam in primis elementis affectat Natura, quæ illud nobis suadet, unicam esse, & communem omnibus materiæ punctis virium legem. Simplicitatem esse id, quod Natura debeat sibi proponere in suis operibus, arbitramur nulla Metaphysica ratione evinci posse, quod facile sibi persuadebit, qui tantam in ea etiam Mundi particula, quæ nobis est nota, varietatem rerum intueamur. Indoles ejus ab ipsis ejus operibus exquirenda est. Ea vero nobis indicant ejusmodi ingenium, ut in elementis rerum primis summam simplicitatem affectet, in compositione varietatem summam. In quam pauca enim elementa resolvunt Chymici substantias adeo multas? Cum analysi per ignem potissimum instituta videamus deveniri ad principia adeo pauca, & inter se conformia; an non illud est pronum credere, si

 alia

alia præſidia ad ulteriorem analyſim perficiendam haberemus, ad ſimpliciora adhuc, & ad unicum etiam deveniri poſſe? Sic qui libri alicujus ſanguine conſcripti analyſim inſtituat, videbit componi ipſum ex certo vocum ſæpe etiam repetitarum numero, componi voces ex pauciore numero litterularum multo frequentius repetitarum, quæ licet nudo oculo videantur prorſus diſſimiles, adhuc tamen ope microſcopii apparerent conſtantes e rubicundis globulis ad ſenſum prorſus ſimilibus (ex quibus nimirum conſtat rubicunda ſanguinis ſubſtantia), & ſolum diverſo ordine diſpoſitis.

72. Hinc cenſemus unicam curvam lineam continuam exprimere ſimplicium elementorum vires, cujus ordinatæ cum in exiguis diſtantiis, uſque adeo abludant a ratione reciproca duplicata diſtantiarum, nuſquam habere eam poſſunt accuratè; cum nimirum binæ curvæ certa natura præditæ nullo utcumque exiguo arcu aut cum recta, aut inter ſe perfectè congruere poſſint. Poſſumus quidem concipere Hyperbolam illam, in qua ordinatæ ſint accuratè in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, tum aliam curvam, cujus ordinatæ conjunctæ cum ordinatis ipſius exhibeant ordinatas noſtræ curvæ, & noſtram in haſce duas reſolvere, ac dicere omnia materiæ puncta habere gravitatem accuratè decreſcentem in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, & præterea vim aliam quandam expreſſam per hanc novam curvam, quæ vis in magnis Planetarum diſtantiis eſſet ad ſenſum nulla, in minoribus, ubi noſtra curva habet attractiones, eſſet minor attractiva, vel etiam repulſiva; ubi noſtra habet repulſiones, eſſet repulſiva tanto major, quantum requirit illa gravitatis generalis attractio elidenda. Eodem pacto hæc nova curva poſſet reſolvi in duas, quarum altera ſoli impenetrabilitati ſatisfaceret, altera cum ea conjuncta priorem illam novam componeret, atque ita porro poſſent concipi plurimæ curvæ, in quas illa noſtra reſolveretur, & quarum alia gravitati, alia aliis affectionibus responderet; ut etiam curvæ, quæ ex conjunctione plurium punctorum in maſſulam conſequuntur, ſuis vocabulis nominari poſſent, ut haberetur ſua curva pro elaſticitate, ſua pro fluiditate, & ita porro. Sed iſta omnia ex noſtra conſideratione profluerent, & in ſimplicibus elementis unicum, ac ſimpliciſſimum haberetur principium, unica lex, per unicam curvam expreſſa, in qua vis attractiva nuſquam eſt accuratè in ratione diſtantiarum reciproca duplicata. Nec nos quidquam movent Keplerianæ leges, quæ proximè, non accuratè ſunt veræ, cum etiam a mutua Planetarum actione turbentur. Nec perfectio maxima quam in ratione reciproca duplicata diſtantiarum cenſuit haberi Maupertiſius, quod in ea particulæ, & globi integri eadem lege agant in ratione reciproca duplicata diſtantiarum a centris, & quam voluit fuiſſe cauſam, cur hanc potiſſium Deus legem voluerit. Nam cauſis finalibus pro determinatione legum Naturæ, nunquam inducere in animum poterimus, ut fidamus; & hic potiſſimum, ubi conſtat in Magneticis, in electricis, in elaſticis eam legem nequaquam ſervari, non videmus, cur ipſa pro una gravitate neceſſario fuerit ſeligenda.

73. Quid

73. Quid autem ulteriori arcui accidat ultra V, ignoramus. Fortaſſe is iterum in diſtantia Fixarum axem ſecat, ut eæ in limitibus quibuſdam conſtitutæ poſſint reſpectivè quieſcere. Nam ſi id crus vere aſymptoticum eſt, & in infinitum ex parte attractiva protenditur, materia omnis ad unionem tenderet, ad quam longo tempore omnino deveniret, niſi leges ſemel conſtitutæ violarentur, adeoque natura ipſa ita conſtituta eſſet, ut per ſe ad interitum ruerent ipſæ leges, quas ad ejus perennitatem a Divino Artifice conſtitutas eſſe arbitramur ita, ut, dum partes oriuntur, & pereunt, ipſa ſuis legibus perſtare poſſit.

74. De arcu D'E'F'G' ſito citra aſymptotum AB poſſemus parum eſſe ſoliciti, cum diſtantia punctorum ob primam vim, & aream repulſivam in infinitum auctam, nunquam in negativam abire poſſit. Sed quoniam ſi crus TV accedat in infinitum ad rationem reciprocam duplicatam diſtantiarum, debet ipſi ex parte altera reſpondere crus ſimile itidem attractivum (nam diſtantiarum quadrata poſitiva manent, & cruri aſymptotico ED omnino reſpondere debet ex lege continuitatis geometricæ crus aliud ex infinito regrediens vel ex eadem, vel ex oppoſita parte) ita noſtram determinabimus curvam, ut hinc, & inde ab aſymptoto AB ſit ſui ſimilis penitus, & æqualis.

75. Ut igitur jam deveniamus ad demonſtrandam ejus ſimplicitatem, ſit Prop. 1. Probl. *Invenire naturam curvæ, cujus abſciſſis exprimentibus diſtantias, ordinatæ exprimant vires mutatis diſtantiis utcumque mutatas, & in datis quotcumque limitibus tranſeuntes e repulſivis in attractivas, ac ex attractivis in repulſivas; in minimis autem diſtantiis repulſivas, & ita creſcentes, ut ſint pares extinguendæ cuicunque velocitati utcunque magnæ.* Quoniam poſuimus *mutatis diſtantiis utcumque mutatas*, complectitur propoſitio etiam rationem illam, quæ ad rationem reciprocam duplicatam diſtantiarum accedat, quantum libuerit in quibuſdam ſatis magnis diſtantiis, ac generalem exprimat gravitatem.

76. Porro hæ ſex conditiones requirentur, & ſufficient ad habendam curvam, quam quærimus. Primo ut ſit regularis, ac ſimplex, & non compoſita ex aggregato arcuum diverſarum curvarum. Secundo ut ſecet axem C'AC tantum in punctis quibuſdam datis ad binas diſtantias AF', AE; AG', AG, & ita porro, æquales hinc, & inde quotcumque. Tertio, ut ſingulis abſciſſis reſpondeant ſingulæ ordinatæ. Quarto, ut ſumptis abſciſſis æqualibus hinc, & inde ab A reſpondeant ordinatæ æquales. Quinto, ut habeant rectam AB pro aſymptoto, areâ aſymptotica BAED exiſtente infinitâ. Sexto, ut arcus binis quibuſcumque interſectionibus terminati poſſint variari, ut libuerit, & ad quaſcumque diſtantias recedere ab axe C'AC, ac accedere ad quoſcumque quarumcumque curvarum arcus quantum libuerit, eos ſecando,

do, vel tangendo, vel osculando, quocumque osculi genere in punctis earum datis quotcumque, & quibuscumque.

77. Ut hasce conditiones impleamus, formulam inveniemus algebraicam, quæ ipsam continebit legem nostram. Sed hìc elementa communia vulgaris Cartesianæ algebræ supponemus, ut nota, sine quibus res omnino confici nequaquam potest. Dicatur autem ordinata y, abscissa x, ac ponatur $xx = z$. Capiantur omnium AE, AG, AI &c. valores cum signo negativo, & summa quadratorum omnium ejusmodi valorum dicatur a, summa productorum e binis quibusque quadratis b, summa productorum e ternis c, & ita porro; productum autem ex omnibus dicatur f. Numerus eorundem valorum dicatur m. His positis ponatur $z^{m} + az^{m-1} + bz^{m-2} + cz^{m-3}$ &c. . . . . $+ f = P$. Si ponatur $P = o$, patet æquationis ejus omnes radices fore reales, & positivas, nimirum sola illa quadrata quantitatum AE, AG, AI &c., qui erunt valores ipsius z; adeoque cum ob $xx = z$, sit $x = \pm\sqrt{z}$, patet, valores x fore tam AE, AG, AI positivas, quam AE', AG' &c. negativas.

78. Deinde sumatur quæcunque quantitas data per z, & constantes quomodocumque, dummodo non habeat ullum divisorem communem cum P, & evanescente z, eadem evanescat, ac factâ x infinitesimâ ordinis primi, evadat infinitesima ordinis ejusdem, vel inferioris, ut erit quæcunque formula $z^{r} + gz^{r-1}\ bz^{r-2}$ &c. $+ l$, quæ posita $= o$ habeat radices quotcunque imaginarias, & quotcunque, & quascunque reales, (dummodo earum nulla sit ex iis AE, AG, AI &c. sive positiva, sive negativa), si deinde tota multiplicetur per z. Ea dicatur Q.

79. Si jam fiat $P - Qy = o$, dico hanc æquationem satisfacere reliquis omnibus hujus curvæ conditionibus, & rite determinato valore Q, posse infinitis modis satisfieri etiam postremæ conditioni expositæ sexto loco.

80. Nam in primis, quoniam valores P, & Q positi $= o$ nullam habent radicem communem, nullum habebunt divisorem communem. Hinc hæc æquatio non potest per divisionem reduci ad binas, adeoque non est composita ex binis æquationibus, sed simplex; & proinde simplicem quandam curvam continuam exhibet, quæ ex aliis non componitur. Quod erat primum.

81. Deinde curva hujusmodi secabit axem C'AC in iis omnibus, & solis punctis E, G, I &c., E', G', &c. Nam ea secabit axem C'AC solum in iis punctis, in quibus $y = o$, & secabit in omnibus. Porro ubi fuerit $y = o$, erit & $Qy = o$, adeoque ob $P - Qy = o$, erit $P = o$. Id autem continget solum in iis punctis, in qui-

in quibus z fuerit una e radicibus æquationis $P=0$; nimirum, ut supra vidimus, in punctis E, G, I, vel E', G' &c. Quare solum in his punctis evanescet y, & curva axem secabit. Secaturam autem in his omnibus patet ex eo, quod in his omnibus punctis erit $P=0$. Quare erit etiam $Qy=0$. Non erit autem $Q=0$, cum nulla sit radix communis æquationum $P=0$, & $Q=0$. Quare erit $y=0$, & curva axem secabit. Quod erat secundum.

82. Præterea cum sit $P-Qy=0$, erit $y=\frac{P}{Q}$. Determinata autem utcunque abscissa x, habebitur determinata quædam z, adeoque & P, Q erunt unicæ, & determinatæ. Erit igitur etiam y unica, & determinata; ac proinde respondebunt singulis abscissis x singulæ tantum ordinatæ y. Quod erat tertium.

83. Rursus sive x assumatur positiva, sive negativa, dummodo ejusdem longitudinis sit, semper valor $z=xx$ erit idem; ac proinde valores tam P, quam Q erunt semper iidem. Quare semper eadem y. Sumptis igitur abscissis x æqualibus hinc, & inde ab A, alterâ positivâ, alterâ negativâ, respondebunt ordinatæ æquales. Quod erat quartum.

84. Si autem x minuatur in infinitum, sive ea positiva sit, sive negativa, sempe, z minuetur in infinitum, & evadet infinitesima ordinis secundi. Quare in valore P decrescent in infinitum omnes termini præter y, quia omnes præter eum multiplicantur per z, adeoque valor P erit adhuc finitus. Valor autem Q qui habet formulam ductam in z totam, minuetur in infinitum, eritque infinitesimus ordinis secundi. Igitur $\frac{P}{Q}=y$ augebitur in infinitum, ita ut evadat infinita ordinis secundi. Quare curva habebit pro asymptoto rectam AB, & area BAED excrescet in infinitum, & si ordinatæ y positivæ assumantgr ad partes AB, & exprimant vires repulsivas, arcus asymptoticus ED jacebit ad partes ipsas AB. Quod erat quintum.

85. Patet igitur, utcunque assumpto Q cum datis conditionibus, satisfieri primis quinque conditionibus curvæ. Jam vero potest valor Q variari infinitis modis ita, ut adhuc impleat semper conditiones, cum quibus assumptus est. Ac proinde arcus curvæ intercepti intersectionibus poterunt infinitis modis variari ita, ut primæ quinque ipsius curvæ conditiones impleantur; unde fit, ut possint etiam variari ita, ut sextam conditionem impleant.

86. Si enim dentur quotcunque, & quicunque arcus, quarumcunque curvarum, modo sint ejusmodi, ut ab asymptoto AB perpetuo recedant, adeoque nulla recta ipsi asymptoto parallela eos arcus secet in pluribus, quam in unico puncto, & in iis assumantur puncta quotcunque;

cunque, utcunque inter ſe proxima, poterit admodum facile aſſumi valor P ita, ut curva per omnia ejuſmodi puncta tranſeat, & idem poterit infinitis modis variari ita, ut adhuc ſemper curva tranſeat per eadem illa puncta.

87. Sit enim numerus punctorum aſſumptorum quicunque $= r$, & a ſingulis ejuſmodi punctis demittantur rectæ parallelæ AB uſque ad axem C'AC, quæ debent eſſe ordinatæ curvæ quæſitæ, & ſingulæ abſciſſæ ab A uſque ad ejuſmodi ordinatas dicantur M1, M2, M3 &c., ſingulæ autem ordinatæ N'1, N'2, N'3 &c. Aſſumatur autem quædam quantitas $Az^{r} + Bz^{r-1} + Cz^{r-2} \dots + Gz$, quæ ponatur $= R$. Tum alia aſſumatur quantitas T ejuſmodi, ut evaneſcente z, evaneſcat quivis ejus terminus, & ut nullus ſit diviſor communis valoris P, & valoris $R+T$; quod facile fiet, cum innoteſcant omnes diviſores quantitatis P. Ponatur autem $Q = R+T$: & jam æquatio ad curvam erit $P - Ry - Ty = 0$. Ponantur in hac æquatione ſucceſſivè M1, M2, M3 pro x, & N1, N2, N3 &c. pro y. Habebuntur æquationes numero r, quæ ſingulæ continebunt valores A, B, C, ... G, unius tantum dimenſionis ſingulos, numero pariter r, & præterea datos valores M1, M2, M3 &c., N1, N2, N3 &c., ac valores arbitrarios, qui in T ſunt coefficientes ipſius z.

88. Per illas æquationes numero r admodum facile determinabuntur illi valores A, B, C, ..., G, qui ſunt pariter numero r, aſſumendo in prima æquatione, juxta methodos notiſſimas, & elementares, valorem A, & eum ſubſtituendo in æquationibus omnibus ſequentibus, quo pacto habebuntur æquationes $r-1$. Hæ autem ejecto valore B, reducentur ad $r-2$, & ita porro, donec ad unicam ventum fuerit, in qua determinato valore G, per ipſum ordine retrogrado determinabuntur valores omnes præcedentes, ſinguli in ſingulis æquationibus.

89. Determinatis hoc pacto valoribus A, B, C, ... G in æquatione $P - Ry - Ty = 0$, ſive $P - Qy = 0$, patet poſitis ſucceſſivè pro x valoribus M1, M2, M3 &c., debere valores ordinatæ y eſſe ſucceſſivè N1, N2, N3 &c.; ac proinde debere curvam tranſire per data illa puncta in datis illis curvis; & tamen valor Q adhuc habebit omnes conditiones præcedentes. Nam imminutâ z ultra quoſcunque limites, minuentur ſinguli ejus termini ultra quoſcunque limites, cum minuantur termini ſinguli valoris T, qui ita aſſumpti ſunt, & minuantur pariter termini valoris R, qui omnes ſunt ducti in z; & præterea nullus erit communis diviſor quantitatum P, & Q, cum nullus ſit quantitatum P, & $R+T$.

90. Porro

90. Porro ſi bina proxima ex punctis aſſumptis in arcubus curvarum ad eandem axis partem concipiantur accedere ad ſe invicem ultra quoſcumque limites, & tandem congruere, factis nimirum binis M æqualibus, & pariter æqualibus binis N; jam curva quæſita ibidem tanget arcum curvæ datæ; & ſi tria ejuſmodi puncta congruant, eam oſculabitur; quin immo illud præſtari poterit, ut coeant quotlibuerit puncta, ubi libuerit, & habeantur oſcula ordinis cujus libuerit, & ut libuerit ſibi invicem proxima; arcu curvæ datæ accedente, ut libuerit, & in quibus libuerit diſtantiis ad arcus, quos libuerit curvarum, quarum libuerit, & tamen ipſa curva ſervante omnes illas 6 conditiones requiſitas ad exponendam legem illam virium repulſivarum, ac attractivarum, & datos limites.

91. Cum verò adhuc infinitis modis variari poſſit valor T, infinitis modis idem præſtari poterit; ac proinde infinitis modis inveniri poterit curva ſimplex datis conditionibus ſatisfaciens. Q. E. F.

*Coroll.*1. Curva poterit contingere axem C'AC in quotlibuerit punctis, & contigere ſimul, ac ſecare in iiſdem, ac proinde eum oſculari quocumque oſculi genere. Nam ſi binæ quævis e diſtantiis limitum fiant æquales, curva continget rectam C'A, evaneſcente arcu inter binos limites; ut ſi punctum I abiret in L, evaneſcente arcu IKL, haberetur contactus in L, Repulſio per arcum HI perpetuo decreſceret, & in ipſo contactu IL evaneſceret, tum non tranſiret in attractionem, ſed iterum creſceret repulſio ipſa per arcum LM. Idem autem accideret attractioni, ſi coeuntibus punctis LN, evaneſceret arcus repulſivus LMN.

92. Si autem tria puncta coirent, ut LNP, curva contingeret ſimul axem C'AC, & ab eodem ibidem ſecaretur, ac proinde haberet in eodem puncto contactus flexum contrarium. Haberetur autem ibidem tranſitus ab attractione ad repulſionem, vel viceverſa, adeoque verus limes.

93. Eodem pacto poſſunt congruere puncta 4, 5, quotcumque; & ſi congruat numerus punctorum par, habebitur contactus, ſi impar contactus ſimul, & ſectio. Sed quo plura puncta coibunt; eo magis curva accedet ad axem C'AC in ipſo limite, eumque oſculabitur oſculo arctiore.

*Coroll.*2. In iis limitibus, in quibus curva ſecat axem C'AC, poteſt ipſa curva ſecare eundem in quibuſcumque angulis ita tamen, ut angulus quem efficit ad partes A arcus curvæ in perpetuo receſſu ab aſympto to apellens ad axem C'AC non ſit major recto; & ibidem poteſt aut axem, aut rectam axi perpendicularem contingere, aut oſculari, quocunque contactus, aut oſculi genere: nimirum habendo in utrolibet caſu radium oſculi magnitudinis cujuſcunque, & vel utcunque evaneſcentem, vel utcunque abeuntem in infinitum.

94. Nam pro illis punctis datis in arcubus curvarum quaruncunque, quas curva inventa poteſt vel contingere, vel oſculari quocunque oſculi genere, ex quibus definitus eſt valor R, poſſunt aſſumi arcus curvarum quaruncunque ſecantium axem C'AC in angulis quibuſcunque: ſolum quo-

E niam

niam ſemper arcus curvæ, ut $z'Nb$ debet ab aſymptoto recedere, non poterit punctum ullum z' præcedens limitem N jacere ultra rectam axi perpendicularem erectam ex N, vel punctum b ſequens ipſum N jacere citra; ac proinde non poterit angulus ANz', quem efficit ad partes A arcus $z'H$ in perpetuo receſſu ab aſymptoto appellens ad axem C'AC eſſe major recto.

95. Poſſunt autem arcus curvarum aſſumptarum in iiſdem punctis aut axem, aut rectam axi perpendicularem contingere, aut oſculari, quocunque contactus, aut oſculi genere, ut nimirum ſit radius oſculi magnitudinis cujuſcunque, & vel utcunque evaneſcens, vel utcunque abjens in infinitum. Quare idem accidere poterit, ut innuimus & arcui curvæ inventæ, quæ ad eos arcus poteſt accedere, quantum libuerit, & eos contingere, vel oſculari quocunque oſculi genere in iis ipſis punctis.

96. Solum ſi curva inventa tetigerit in ipſo limite rectam axi C'AC perpendicularem, debebit ſimul ibidem eandem ſecare; cum debeat ſemper recedere ab aſymptoto, adeoque debebit ibidem habere flexum contrarium.

Scholium 1. Corollarium 1. Eſt caſus particularis hujus corollarii ſecundi: ut patet: ſed libuit ipſum ſeorſum diverſa methodo, & faciliore prius eruere.

Coroll.3. Arcus curvæ etiam extra limites poteſt habere tangentem in quovis angulo inclinatam ad axem, vel ei parallelam, vel perpendicularem, cum iiſdem contactuum, & oſculorum conditionibus, quæ habentur in corollario 2.

97. Demonſtratio eſt prorſus eadem: nam arcus curvarum dati, ad quos arcus curvæ inventæ poteſt accedere ubicunque, quantumlibuerit, poſſunt habere ejuſmodi conditiones.

Coroll.4. Mutata abſciſſa per quodcunque intervallum datum, poteſt ordinata mutari per aliud quodcunque datum utcunque minus, vel majus ipſa mutatione abſciſſæ, & utcunque majus quantitate quacunque data: ac ſi differentia abſciſſæ ſit infiniteſima, & dicatur ordinis primi; poterit differentia ordinatæ eſſe ordinis cujuſcunque, vel utcunque inferioris, vel intermedii, inter quantitates finitas, & quantitates ordinis primi.

98. Patet primum ex eo, quod, ubi determinatur valor R', poteſt curva tranſire per quotcunque, & quæcunque puncta, adeoque per puncta, ex quibus ductæ ordinatæ ſint utcunque inter ſe proximæ, & utcunque inæquales.

99. Patet ſecundum: quia in curvis, ad quas accedit arcus curvæ inventæ, vel quas oſculatur quocunque oſculi genere, poteſt differentia abſciſſæ ad differentiam ordinatæ eſſe pro diverſa curvarum Natura in datis earum punctis in quavis ratione, quantitatis infiniteſimæ ordinis cujuſcunque ad infiniteſimam cujuſcunque alterius.

Scholium 2. Illud notandum, ubicunque fuerit tangens curvæ inventæ inclinata in angulo finito ad axem, fore differentiam abſciſſæ ejuſdem ordinis,

dinis, ac est differentia ordinatæ: ubi tangens fuerit parallela axi, fore differentiam ordinatæ ordinis inferioris, quam sit differentia abscissæ, & viceversa, ubi tangens fuerit perpendicularis axi.

100. Præterea notandum: si abscissa fuerit ipsa distantia limitis, quæ vel augeatur, vel minuatur utcunque; differentia ordinatæ erit ipsa ordinata integra: cum nimirum in limite ordinata sit nihilo æqualis.

*Coroll.*5. Arcus repulsionum, vel attractionum intercepti binis limitibus quibuscunque, possunt recedere ab axe, quantum libuerit, adeoque fieri potest, ut alii propiores asymptoto recedant minus, quam alii remotiores, vel ut quodam ordine eo minus recedant ab axe, quo sunt remotiores ab asymptoto, vel ut post aliquot arcus minus recedentes aliquis arcus longissimè recedat.

101. Omnia manifesto consequuntur ex eo, quod curva possit transire per quævis data puncta.

*Coroll.*6. Potest curva ipsum axem C'AC habere pro asymptoto ad partes C', & C ita, ut arcus asymptoticus sit vel repulsivus, vel attractivus; & potest arcus quivis binis limitibus quibuscunque interceptus abire in infinitum, ac habere pro asymptoto rectam axi perpendicularem, utcunque proximam utrilibet limiti, vel ab eo remotam.

102. Nam si bini postremi limites concipiantur coire, abeuntibus binis intersectionibus in contactum, tum ipsa distantia contactus concipiatur excrescere in infinitum; jam axis æquivalet rectæ curvam tangenti in puncto infinite remoto, adeoque ævadit asymptotus: & si arcus evanescens inter postremos duos limites coeuntes fuerit arcus repulsionis; postremus arcus asymptoticus erit arcus attractionis. Contra vero si arcus evanescens fuerit arcus attractionis.

103. Eodem pacto si quævis ordinata respondens puncto cuilibet, per quod debet transire curva, concipiatur abire in infinitum; jam arcus curvæ abibit in infinitum, & erit ejus asymptotus illa ipsa ordinata in infinitum excrescens.

Scholium 3. Quatuor modis potest accidere, ut arcus curvæ inventæ alicubi abeat in infinitum, & habeat asypmptotum parallelam priori asymptoto. Primo si vertex K ipsius arcus attractivi IKL recedat in infinitum ab I, & ex eadem parte redeat ad L, ut exhibet *fig.*10, ubi KSR est asymptotus, & uterque arcus asymptoticus LK, KL est attractivus. *Fig.*9 10

104. Secundo, ut eodem modo vertex M alicujus arcus repulsivi LMN figuræ *9*. recedat in infinitum ab L, & ex eadem parte redeat ad N, ut exhibet *fig.*11 ubi MSR est asymptotus, & uterque arcus asymptoticus LM, MN est repulsivus. *Fig.*9 11

105. Tertio ut pro aliquo limite N figuræ *9*, in quo ordinata sit nulla, & mutetur ordinatarum directio, atque expressio repulsionum in expressionem attractionum, transeundo per zero, succedat ordinata infinita, & mutatio directionis fiat in transitu per infinitum. Eo casu arcus LM, & PO non flecterent cursum versus axem, nec coirent in N, *Fig.*9 12

 sed

sed ut exhibet *fig.*12, ubi MNO est asymptotus, abiret uterque in infinitum, & arcui LM repulsivo post infinitam illam distantiam M succederet attractivus OP, quod in locis Geometricis continuitatem nequaquam turbat, tanquam si in illa infinita distantia puncta MO coirent, & recta linea infinita, esset quidam veluti infinitus circulus in se regrediens; atque id & in Hyperbolarum asymptoticis cruribus cernimus, quod infiniti mysterium etiam supra innuimus.

F.9. 106. Quarto ut eodem modo pro aliquo limite L figuræ 9, in quo arcus attractivus KL procedendo transit in repulsivum, succedat ordi-
13. nata infinita: quo casu, ut exhibet *fig.* 13 esset asymptotus MLK, & arcui asymptotico attractivo IK succederet repulsivus MN.

107. Porro priores tres modos censemus in Natura non posse existere; quia in iis posset deveniri ad asymptotum, ubi vis deberet esse absolutè infinita. Quantitates autem reales absolutè infinitas, censemus existere omnino non posse, de quo egimus in Dissertatione de natura, & usu infinitorum, atque infinitè parvorum, & plurima sane, quæ vel omnino sunt, vel saltem apparent maximè absurda, & quæ ex infinito,
F.10. vel infinitè parvo reali, absoluto, & in se determinato consequuntur,
11. exposuimus pluribus in locis. Quod autem ad asymptotum in iis casi-
12. bus deveniri possit, patet, quia si altero puncto existente in A, existat
13. alterum in *fig.*10 inter L, & S, continua attractione abibit ad S; idem accidet in *fig.*11, puncto existenti inter L, & S ob continuam repulsionem, idem in *fig.*12 existenti inter L, & N itidem ob repulsionem, & inter N, & P ob attractionem. Nisi forte juxta eum arcum asymptoticum, qui exprimit vires urgentes punctum versus asymptotum, arcus urgens ad partem oppositam recedat ab axe tam longe, ut possit extinguere omnem velocitatem ab aliis arcubus genitam, & impedire, ne punctum deveniat ad limitem, in quo arcus asymptoticus incipit, quo casu non sequeretur appulsus ad vim infinitam.

108. Solum in quarto casu in *fig.*13 punctum positum inter I, & L habet attractionem, inter N, & L habet repulsionem: ac proinde recedit ab L in utroque casu. Fieri quidem posset, etiam in hoc casu, ut punctum adhuc debeat appellere ad asymptotum in L, si area IKL, vel MLN, in infinitum producta, esset finita, quo casu per intervalla IL, NL non nisi finita tantum velocitas extingui posset. Idcirco ad hoc, ut hic casus possit existere, oportebit, ut ejusmodi area sit infinita, vel saltem major, quam summa reliquarum omnium arearum, quæ possent producere velocitates puncti appellentis ad L, vel ad N. Et eadem conditio necessaria est in *fig.*11 in area MLS, & in *fig.*10. in KLS, definitis ab arcubus exprimentibus vires repellentes punctum a limite; si ii casus debeant posse existere in Natura.

109. Illud autem notandum in omnibus hisce casibus, ubi aliqua ex quantitatibus datis ingredientibus æquationem abit in infinitum; ipsam æquationem posse reddi simpliciorem, omissis omnibus terminis, in quibus non invenitur illa quantitas infinita, & inter eos omnes, in quibus

eadem

eadem invenitur, si alibi ad aliam dignitatem elevata sit, omissis iis om-
nibus, in quibus non est elevata ad maximam dignitatem, tum reliquis
per eam divisis. Nam termini, qui per eam maximam dignitatem quanti-
tatis infinitæ non multiplicantur, respectu eorum qui multiplicantur eva-
nescunt, juxta notissimas, & elementares Algebræ regulas.

110. Ut autem, ubi binæ radices æquationis $P = o$ evaserint æquales
congruentibus in *fig.9* binis limitibus curva axem secat, sic itidem si eva-
dunt imaginariæ, fieri potest, ut alicubi dum ad axem tendit retro cursum
reflectat ut in *Ppqr*R. Sed hæc innuisse sit satis. Potius ad uberiorem ipsius
curvæ cognitionem considerabimus Naturam limitum, & motus qui con-
sequuntur.

*Propositio 2. Problema. Exponere diversam diversorum limitum Na-
turam, & motus, qui ex hujusmodi viribus consequi debent in binis
punctis.*

111. Limites superius perpellavimus ea puncta, in quibus curva se-
cat axem, in quibus nimirum nulla habetur ordinata, & in quibus ipsa
ordinata mutat directionem. Sunt autem alii quidam, qui pariter possunt
dici limites, in quibus vel ordinata est nulla, licet ibi ordinata non mutet
directionem, quod accidit, quando curva axem tangit coeuntibus binis li-
mitibus, & evanescente arcu inter ipsos binos limites; vel e contrario
ordinata mutat directionem, licet ibi non evanescat, sed abeat infinitum, F. 10
ut accidit in puncto N in *fig.12*, & L in *fig.13*, Omittimus illa puncta, in 11
quibus ordinata, nec mutat directionem, nec evanescit, sed abit in infini- 12
tum, ut in *fig.10*, ac 11 in S, quibus non utimur. 13

112. Hoc pacto limitum tres classes erunt, & in singulis classibus erunt
bina limitum genera. Primum genus limitum primæ classis erit id, ubi
aucta distantia, transitur a vi repulsiva ad attractivam, ut sunt in *fig.9* F. 9
E, I, N; secundum genus id, ubi transitur a vi attractiva ad repulsivam,
ut sunt G, L, P. Primum genus secundæ classis est id, ubi evanescit ar-
cus attractivus, ut IKL, coeuntibus I, L, in quo casu tam ante, quam
post contactum habebuntur vires repulsivæ: secundum genus id, ubi eva-
nescit arcus repulsivus, ut LMN, coeuntibus L, N, in quo casu tam an-
te, quam post contactum habebuntur vires attractivæ. Primum genus
tertiæ classis est illud, in quo transitur a vi repulsiva ad attractivam, ut
in *fig.12* in N, secundum est illud, in quo transitur a vi attractiva ad
repulsivam, ut in *fig.13* in L.

113. Incipiendo ab hisce postremis; limitum primi generis tertiæ clas-
sis nullus esse potest usus; cum id juxta Scholium 3, propos. præcedentis
vel non possit existere, vel si existit; punctum non possit deferri ad inter-
vallum LP *fig.12*. Secundi generis usus esse poterit maximus. Nam si ejus-
modi limes extiterit ullus, puncta posita intra limites AL, nunquam po-
terunt ex iis egredi, & puncta posita extra ejusmodi limites, nunquam po-
terunt eos ingredi. Cum enim tam accedendo ad A in infinitum exerceatur
vis repulsiva, quam accedendo ad L vis attractiva, utraque in infinitum
aucta, & utraque par extinguendæ cuicunque velocitati; puncta semel

conſtituta in diſtantia minore, quam ſit AL, & quibuſcunque utcunque magnis velocitatibus agitata, nunquam poterunt aut alterum per alterius locum tranſire deſtructa omni diſtantia, aut majorem diſtantiam acquirere quam ſit AL. Pariter utcunque magna velocitate alterum in alterum tendat, non poterit pervenire ad diſtantiam æqualem AL, vi repulſiva eum acceſſum impediente.

114. Si autem fuerint bini ejuſmodi limites, & bina puncta ponantur in diſtantia quavis minore, quam ſit diſtantia alterius a puncto A, & majore, quam ſit diſtantia alterius; eadem intra eoſdem diſtantiarum limites neceſſario debebunt perſeverare: ac ſi ſint binæ punctorum maſſæ ita conſtitutæ, ut ſingula alterius puncta ſint intra ejuſmodi diſtantiarum limites reſpectu punctorum alterius; poterunt quidem ſingularum maſſarum puncta habere motus alios quoſcunque inter ſe, ſed ſingularum puncta non poterunt egredi ex iis limitibus, nec una maſſa ad aliam accedere, vel ab ea recedere magis, quam pro iis ipſis limitibus, atque eo pacto poſſet per unicum punctum in maxima diſtantia ſitum maſſula quæpiam contineri ita, ut diſſolvi non poſſet ulla utcunque magna adhibita vi.

115. In limitibus ſecundæ claſſis ſi ponantur bina puncta, ut earum diſtantia ſit eadem, ac diſtantia ejuſmodi limitis a puncto A; quieſcent puncta ipſa, & eandem illam diſtantiam ſemper ſervabunt, niſi alia aliqua vi ab eadem diſtantia dimoveantur; ſed in primo genere reſiſtent imminutioni, in ſecundo genere augmento diſtantiæ, & in primo quidem ſi minima quavis vi augeatur diſtantia, in ſecundo autem minuatur, pergent puncta ſponte ibi quidem recedere, hic autem accedere motu accelerato: cum nimirum in primo caſu vel aucta, vel imminuta diſtantia habeatur repulſio, & in ſecundo attractio. Quin immo etiam vi utcunque parva impulſa in primo caſu in ſe invicem accedent, & in ſecundo a ſe invicem recedent, ſed extincta brevi velocitate retro reflectent curſum, & excurrent ultra eoſdem limites, ac deinde pergent ſponte in primo caſu recedere, & in ſecundo accedere motu accelerato.

116. In limitibus tertiæ claſſis ſi ponantur bina puncta in diſtantia limitis utriuslibet, quieſcent: ſed ſi limes ſit primi generis, ut ſi diſtantia ſit AN, tuebuntur illam diſtantiam; nam ſi cogantur accedere ad ſe invicem; ſtatim aget repulſio nz_1: ſi cogantur recedere ſtatim aget attractio *eb*; quamobrem ſtatim punctum conabitur recuperare diſtantiam priorem, & ad limitem ſuum regredi. Contra verò ſi limes fuerit ſecundi generis, ut L; imminuta diſtantia, aget vis attractiva: aucta eadem, aget vis repulſiva; adeoque in utroque caſu pergent puncta ſponte recedere a diſtantia limitis ejuſdem.

117. Porro ſi bina puncta ex diſtantia AL in *fig.9* limitis ſecundi generis deturbentur vi utcunque parva, ut ſi cogantur accedere ad ſe invicem, motus perpetuo accelerabitur per totum intervallum LI, tum ultra limitem I retardabitur, & ſi repulſiones per intervallum IG fuerint pares extinguendæ toti velocitati acquiſitæ in diſtantia AI; motus ſiſtetur in aliqua diſtantia *Ax*, & retro reflectetur per eoſdem gradus acceleratus

uſque

usque ad I, tum retardatus usque ad L, ubi jam habebit versus N eandem velocitatem, quam prius habuerat versus I, quæ perpetuo augebitur per LN, tum minuetur ultra N, & si attractiones per intervallum NP fuerint pares extinguendæ toti velocitati acquisitæ in distantia AN; motus sistetur in aliqua distantia A*e*, & vero reflectetur per eosdem gradus, & habebitur oscillatio quædam perpetua, motu jam accelerato, jam retardato. Si autem repulsiones IHG, vel attractiones NOP non fuerint pares extinguendæ velocitati, cum qua puncta deferuntur ad limites I, & N, excurretur ultra limites G, & P, adeoque etiam ultra E, & R, & oscillatio fiet major: ac poterit oscillatio ipsa esse etiam multo major ita, ut plurimos limites transgrediantur puncta ipsa; donec inveniant arcum curvæ longissimè recedentem ab axe repulsivum, dum ad se invicem accedunt, attractivum dum recedunt parem extinguendæ toti velocitati, & motui sistendo. Porro is arcus omnino invenietur, dum accedunt ad se invicem; si enim nullus alius occurrat, erit saltem ejusmodi arcus asymptoticus ED: dum autem recedunt, poterit occurrere arcus aliquis asymptoticus, & limes ex genere *fig.* 13, quo casu oscillatio intra certos limites perpetuo continebitur, quod idem præstare poterit arcus non asymptoticus, sed longissimè recedens, & maximam aream comprehendens.

118. Porro dum ejusmodi oscillatio peragitur, si externæ aliquæ vires agant in ea puncta, ut vis punctorum aliorum ita, ut ea distrahant a se invicem dum tendunt ad se, vel impellant a se invicem, dum recedunt, oscillatio minuetur, & fieri poterit, ut intra multo arctiores limites reducatur. Si vero e contrario in priore casu distrahantur a se invicem, & in posteriore in se invicem impellantur, oscillatio augebitur; quæ si aliqui arcus curvæ tam longe recedant ab axe, ut possint extinguere omnem velocitatem, quam possunt generare, omnes alii arcus curvarum omnium ad omnia puncta pertinentium, quod omnino accideret, si haberentur aliqui arcus asymptotici ejusmodi, ut exhibet *fig.* 13, adhuc oscillatio intra certos limites continebitur; & habebitur quidem motus quidam perpetuus perturbatus, & jam acceleratus, jam retardatus per vices; sed extra certos limites puncta egredi nequaquam poterunt: quod ipsum pariter accidet binis illis massis, de quibus egimus in limitibus primæ classis.

119. Si autem nulli arcus curvæ ejusmodi occurrerent in recessu; ubi oscillatio paullatim augetur externis viribus, si puncta deferantur ad extremos limites arcus maximè attractivi, & in repulsivum nonnihil excurrant; pergent porro perpetuo recedere motu jam accelerato, jam retardato; & si quis arcus repulsivus sit maximus, & vires

in ma-in majore diſtantia poſitæ ſint multo minores, ut ſi curva in majoribus diſtantiis haberet pro aſymptoto axem AC, vel ſaltem haberet arcum aliquem, ut STVO per immenſa intervalla extenſum, & ubique ipſi AC proximum, poterunt ea puncta recedere motu velociſſimo, & ad ſenſum æquabili ad immenſa intervalla; & in maſſa quadam illo perturbato motu vehementiſſimè agitata ita, ut ejus puncta ad eum limitem accedant alia poſt alia, ita effluent ſucceſſivè. Quoniam vero deinceps tranſire debent per omnes eoſdem arcus, eandem habebunt velocitatem ad ſenſum; niſi quatenus aliqua velocitatis inæqualitas habebitur; ex eo, quod dum oſcillatio augetur uſque ad eum limitem ita, ut ultra eum excurratur; non in omnibus punctis augmentum erit idem, & idem excurſus, ſed ea inæqualitas erit exigua; nam ea omnis debet eſſe minor, quam ſolum unicæ poſtremæ oſcillationis incrementum; cum nimirum in oſcillatione proximè præcedenti puncta ipſa non potuerint ad eum limitem pervenire. Ipſam tamen inæqualitatem augebunt etiam aliæ vires aliorum punctorum totius maſſæ, ſed pariter non ita multum; nam actio punctorum remotiorum omnium in datum punctum emiſſum e maſſa eo multo minor erit, quam actio ejus unici, reſpectu cujus devenitur ad arcum illum maximè repulſivum, & fere eadem erit omnium earum actionum ſumma in omnibus.

120. Hujuſmodi oſcillationes habebuntur etiam in limitibus primi generis primæ claſſis, ut in N; ſi vis externa agens in ipſa bina puncta fuerit ſatis magna, ut poſſit ſuperare intervalla NL, NP; aliter oſcillabitur quidem, ſed ad minimas diſtantias hinc, & inde ab ipſo limite. Hoc autem erit diſcrimen inter limites primi, & ſecundi generis hujus primæ claſſis. Puncta conſtituta in limitibus ſecundi generis, minima quavis vi ex iiſdem deturbabuntur, & ad id ſufficiet mutatio diſtantiæ utcumque exigua, ac ultro, citroque ad maximas diſtantias excurrent: in limitibus ſecundi generis requiretur vis multo major, oſcillatio fiet multo minor, & hanc poſitionem tuebuntur puncta, illam ſponte deſerent. Hinc limites primi generis dicimus limites cohæſionis.

121. Hæc quidem & alibi protulimus, in primis in diſſertatione de lumine parte 2. Sed idcirco hic iterum commemoramus, quod ad ipſam curvæ naturam intelligendam conducunt magis, cum ad limitum officia pertineant, & quidem etiam, ut ſolutionem exhibeamus difficultatis cujuſdam, quam noſtro ſyſtemati nonnulli objiciunt. Videtur iis illud conſequi, maſſas omnes debere ſemper ab invicem reſilire cum eadem velocitate, cum qua advenerant, ut bina etiam puncta reſiliunt, & poſteaquam plures etiam limites tranſgreſſa ſint, retro redeunt. Atque id eo magis videtur debere fieri, quod ad limitem

cohæ-

cohæſionis ſive accedendo, ſive recedendo advenitur motu accelerato, non retardato; nam in accedendo favet attractio, agens in majore diſtantia, in recedendo favet repulſio agens in minore.

122. At duplex eſt difficultatis ſolutio. Primo quidem ſi bina puncta moveantur in ea recta, quæ ipſa conjungit, & ſola ſint, quæ in ſe invicem agunt; tum quidem fieri non poteſt, ut in limite cohæſionis conſiſtant, ob eam rationem, quam nos difficultati nobis propoſitæ adjecimus. At ſi maſſæ punctorum adſint, quæ eorum motum exterius perturbent, fieri utique poteſt, ut externum aliquod punctum, vel punctorum maſſa in ea puncta inæqualiter agens, velocitatum diſcrimen iis extinguat in ipſo eorum appulſu ad limitem aliquem, tum citiſſimè aliorum remotiorum actione ſe ſubtrahat ita, ut deinde reſpectivum illorum ſtatum turbare non poſſit, quo caſu remanent in cohæſione, & in maſſis quidem integris id multo facilius conſequitur, in quibus æquilibrii caſus excreſcunt in immenſum. Sed ea de re ibi erit agendi locus, ubi de maſſarum compoſitis viribus, & æquilibrio erit ſermo.

123. Deinde notandum eſt illud, nos hic egiſſe de motu binorum punctorum in ea recta, quæ ipſa conjungit. At ſi non ſibi relinquantur, ſed projiciantur temere, nunquam ſane in ea projicientur recta linea, quæ ipſa puncta conjungit, & quæ eſt una e lineis numero infinitis, per quas projici poſſunt. In eo autem caſu motus ſunt longe alii. Curvam quandam deſcribet punctum utrumque, quæ circa punctum, quod in eorum medio concipiatur, & eſt commune ipſorum, gravitatis centrum, ſinuabitur, & erit concava, ubi vires fuerint attractivæ, convexa, ubi fuerint repulſivæ; ac data virium lege per curvam noſtram, & data projectionis velocitate, & directione, curva deſcribenda definitur per generalem methodum problematis inverſi virium centralium, quod quidem problema habetur paſſim in Elementis Mechanicæ, & nos ipſi diligenter expoſuimus in memoratis Stayanis ſupplementis §.19 lib.1. Porro curva ipſa pro variis velocitatibus, & directionibus projectionis admodum varia eſt, & infiniti numero habentur caſus, in quibus ea circa commune illud gravitatis centrum agatur in ſpiram, quo caſu bina etiam puncta ad ſe accedentia, non deinde recedunt, ſed cohærent ita, ut actio communis utrumque promoveat, vel retrahat, & hoc pacto fieri poteſt etiam adhærentia quædam punctorum unius maſſæ cum alterius punctis, & permixtio, abeuntibus punctis ipſis circa ſe invicem in gyrum.

124. Demum & illud huc pertinet, limites ipſos eſſe poſſe & multo validiores, & multo minus validos, ut in *fig.*9 in N, ſi curva admodum oblique ſecet axem arcu *d*N*f*, ut vires ſint exiguę *nd*, *ef*. limes adhæſionis erit debilis; ſi fere ad perpendiculum ipſum ſecet, ut *z*N*b*,

ut

& vires ſint ſatis validæ *nz'*, *eb*, limes erit admodum validus. Pariter & illud notandum maximè; ubi diſtantię exigue ſint, ut nimirum cadant in eos arcus, in quibus curva ſinuatur circa axem, exigua mutatio diſtantiæ, vim plurimum mutat, ut ſi pro diſtantia A*x* ſit diſtantia A*y*, vel AI, vel major, vis debeat eſſe repulſiva *x*X, vel *y*Y, vel nulla, vel etiam attractiva. Contra ubi diſtantia eſt ſatis magna, & curva jam exprimit gravitatem generalem in *zo*, tum vero patet, mutationem exiguam diſtantiæ parum admodum mutare vires. Nam ſi pro diſtantia A*m* habeatur diſtantia AZ pro vi *mo* habebitur vis Z*z* major ea, per quantitatem *lz* perquam exiguam. Id autem phænomenis maximè conſentaneum eſt, cum mutatio textus particularum, uſque adeo mutet vires in exigua diſtantia agentes, ut idcirco in nutritione, & in Chymicis effectibus tantum ſit inter particularum vires mutuas deſcrimen, aliis ſe magis attrahentibus, aliis minus, aliis nihil, in eadem etiam diſtantia particulæ a particula, cum mutato interno textu, mutentur diſtantiæ punctorum a punctis, & virium ſumma mutetur, dum e contrario gravitas in Terram vel Solem, quæ in tanto majore diſtantia agit in omnibus corporum particulis eodem loco ſit ejuſdem generis, reſpondens nimirum ſoli maſſæ, ſive punctorum numero, & nihil turbata a diſpoſitione diverſa punctorum, & textu. Sed de his jam ſatis.

F I N I S.

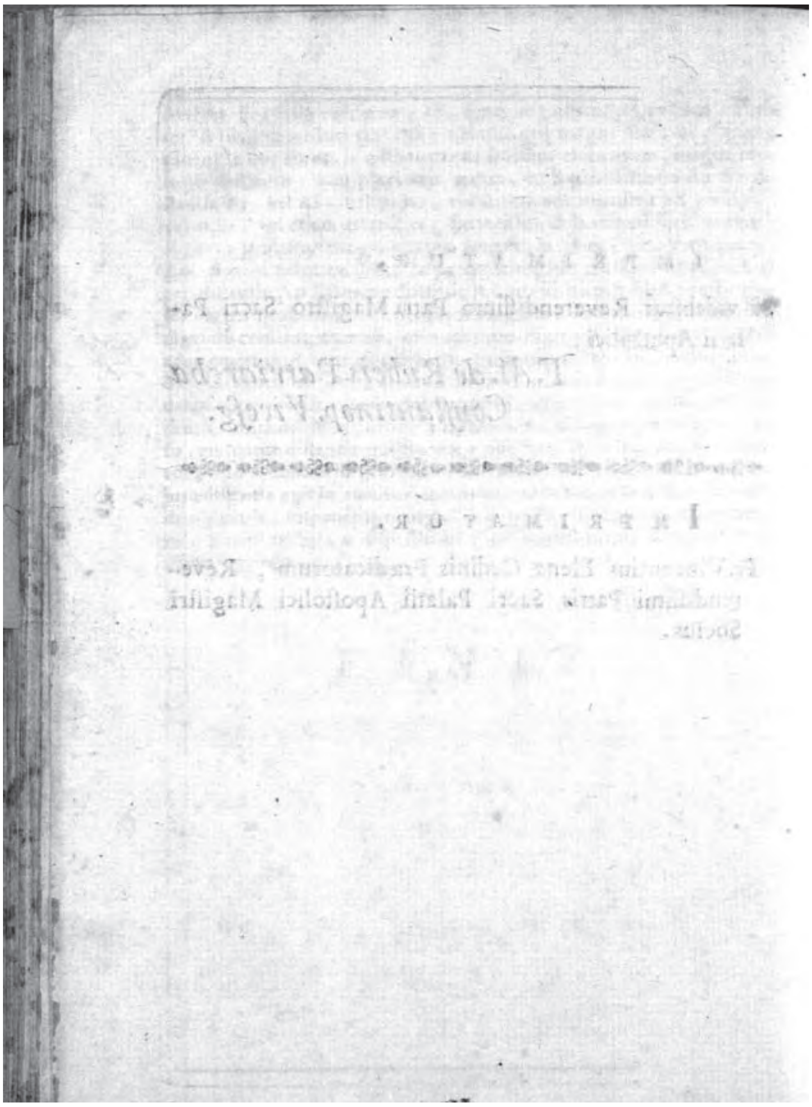
I M P R I M A T U R,

Si videbitur Reverendiſſimo Patri Magiſtro Sacri Palatii Apoſtolici.

F.M. de Rubeis Patriarcha
Conſtantinop. Viceſg.

I M P R I M A T U R.

Fr. Vincentius Elena Ordinis Prædicatorum, Reverendiſſimi Patris Sacri Palatii Apoſtolici Magiſtri Socius.



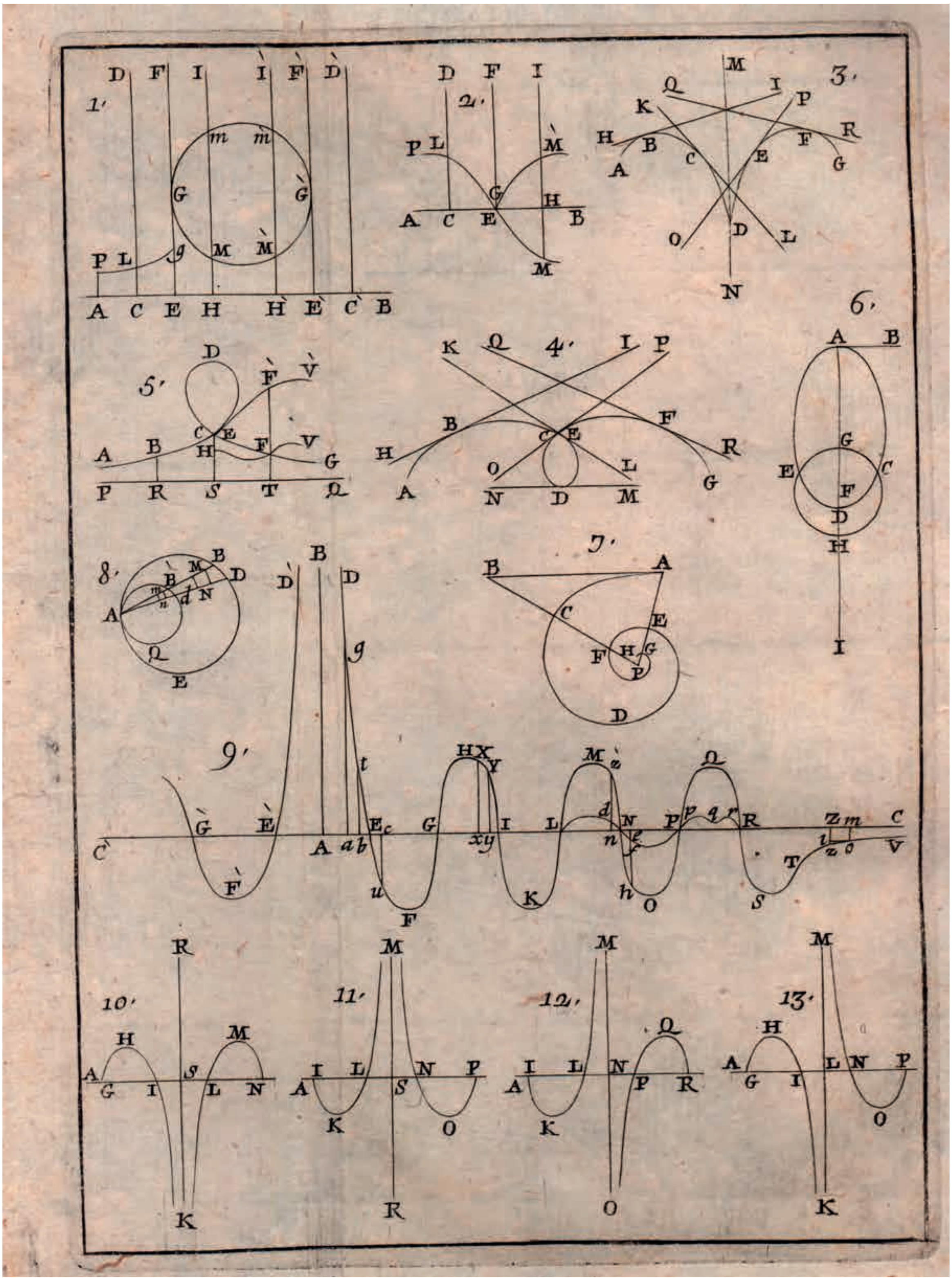
IMPRIMATUR,

Si videbitur Reverendissimo Patri Magistro Sacri Palatii Apostolici.

F. M. de Rubeis Patriarcha Constantinop. Vicesg.

IMPRIMATUR.

Fr. Vincentius Elena Ordinis Praedicatorum, Reverendissimi Patris Sacri Palatii Apostolici Magistri Socius.


1.
D F I Ì F̀ D̀
m m̀
G G̀
P L g M M̀
A C E H H̀ È C̀ B
2.
D F I
P L M̀
G H
A C E B
M
3.
M
Q I P
K R
H B F
A C E G
D
O L
N
4.
K Q I P
B F
H C E R
O L
A N D M G
5.
D
F̀ V̀
C E
A B H F V
G
P R S T Q
6.
A B
G
E C
F
D
H
I
7.
B A
C
E
F H G
P
D
8.
B
B̀ M D
m d N
A n
Q
E
9.
B
D̀ D
g
t
HXY
M̀
z
Q
G̀ È
E c G I L d N P p q r R Z m C
C̀ A a b x y n e f l z o V
T
F̀ u K h O S
F
10.
R
H M
A S
G I L N
K
11.
M
I L N P
A S
K O
R
12.
M
Q
I L N
A P R
K
O
13.
M
H
A L N P
G I
O
K

SULLA LEGGE DELLE FORZE ESISTENTI IN NATURA

Dissertazione

tenuta nel Collegio Romano
dai Padri della Compagnia di Gesù
il 4 settembre 1755

Roma
Per i tipi di Giovanni Generoso Salomoni
con il permesso dei superiori.

[altro frontespizio: «Dissertazione / del Padre Ruggiero Giuseppe Boscovich / della Compagnia di Gesù / pubblico professore di matematica presso il Collegio Romano» / Roma / Per i tipi di Giovanni Generoso Salomoni / Con il permesso dei superiori. / Presso la libreria di Venanzio Monaldini in via del Corso.][*]

---

[*] Da una copia custodita presso la Bayerische Staatsbibliothek München (collocazione: 4 Math.a. 39).

1. L'anno scorso abbiamo esposto soprattutto il il fondamento della nostra teoria delle forze esistenti in natura, nella quale è contenuto un nuovo sistema relativo ai primi elementi della materia e a tutti i moti che hanno luogo in natura, e dai quali l'intera natura è tenuta insieme. Abbiamo pubblicato la teoria dapprima nella dissertazione *De viribus vivis* (1745), quindi nella dissertazione *De lumine* (1748). Vi abbiamo pure accennato nella dissertazione sostenuta l'anno scorso, *De continuitatis lege*, e il padre Carlo Benvenuti, dottissimo membro della nostra Società, l'ha esposta nella sua *Synopsis Physicae Generalis*[1], deducendola estesamente per mezzo di tutti i fenomeni naturali. Abbiamo poi spiegato in misura più che sufficiente ciò che concerne i concetti metafisici corrispondenti a tale sistema nelle nostre note e nei *Supplementi* a un'opera certo immortale, cioè la *Philosophia recentior* di Benedetto Stay, membro assai celebrato della nostra Società per tutte le sue imprese letterarie. Il fondamento è pure contenuto nella legge di continuità stessa, che – se non ci sbagliamo – abbiamo abbondantemente dimostrato sia da principi metafisici sia per induzione, e le principali obiezioni che possono venir mosse sono state esposte in parte da noi nella dissertazione relativa, in parte (e in maggior numero) da Benvenuti nella sua *Synopsis*.

2. Quest'anno esporremo in maniera assai più particolareggiata tale legge, cioè la curva che nelle ordinate, in corrispondenza di certe distanze, riporta le forze; infine mostreremo qui la sua semplicità, che si rivela in non pochi luoghi. Una volta chiarita la natura della curva, si procederà a leggi composte da leggi semplici che riguardano coppie di punti, poi a leggi relative a terne e quaterne di punti; quindi, al tendere del numero dei casi all'infinito, potremo trarre qualche congettura circa la parte rimanente, che riguarda masse costituite da più punti. Tutto ciò, però, lo serberemo per altre dissertazioni, limitandoci qui a prendere in considerazione unicamente la legge semplicissima relativa a forze reciproche fra due punti. Ma, come abbiamo detto prima, accenneremo brevissimamente ad alcune cose attinenti al fondamento di cui abbiamo parlato, cioè alla legge di continuità.

3. La legge di continuità che sosteniamo, e che verrà utilizzata per la dimostrazione del nostro sistema, consiste in ciò: in qualsiasi mutamento di una quantità da una grandezza a un'altra il passaggio non può che avvenire attraverso tutte le grandezze intermedie. Alcuni sbagliano notevolmente nel comprendere tale principio, in particolare ritenendo che laddove vi sia un passaggio da quantità positive a negative sia stato compiuto un salto. Se il passaggio avviene attraverso lo zero [*nihilum*] (in verità, in geometria esso può avere luogo anche attraverso l'infinito), la quantità deve prima

---

[1] C. Benvenuti, *Synopsis Physicae Generalis quam in Seminario Romano ad disserendum proposuit D. Joseph Joachimus a Vereterra*, Romae, typis Antonii de Rubeis, 1754. [*Avvertenza generale*: questa e tutte le note seguenti sono state introdotte dal traduttore e dai curatori.]

diminuire attraverso tutti i gradi fino allo zero, poi dallo zero emergere come negativa; e in questo passaggio per lo zero non c'è alcun salto: ché anzi il salto non si può escludere nei casi in cui tale passaggio non sia avvenuto per l'infinito, se non è avvenuto nemmeno per lo zero. Di ciò abbiamo trattato parecchio nella nostra dissertazione *De transformatione locorum geometricorum*, aggiunta alla fine del terzo tomo dei nostri *Elementi*[2], e ne discuteremo più avanti; e certo in meccanica, in fisica, nell'ordinamento stesso della vita umana si presentano talvolta analoghi passaggi per lo zero, ove non si dà mai un salto da una quantità a un'altra, immediato e senza passaggi intermedi.

4. Inoltre, quello stesso principio è stato da noi dimostrato con due metodi, come abbiamo accennato sopra: dapprima con argomenti metafisici, poi per induzione. L'argomentazione metafisica portava a questo: per qualunque serie reale continua che perdura per un tempo determinato deve esserci un primo e un ultimo estremo, come in una linea finita deve certo esserci un primo e un ultimo punto, in una superficie una prima e un'ultima linea, in un solido una prima e un'ultima superficie; tutto ciò lo abbiamo illustrato con uno schema apposito in quella dissertazione [*De continuitatis lege*]. Inoltre, da lì abbiamo dedotto che se ci fosse un salto in quell'istante che è il limite indivisibile fra il tempo continuo precedente e quello successivo, devono esserci in quello stesso istante due stati (per esempio due velocità, se si tratta di velocità che cambia con un salto), l'uno che sarebbe l'ultimo estremo della serie degli stati precedenti, l'altro che sarebbe il primo inizio degli stati seguenti. Dunque, poiché due stati simultaneamente congiunti sono incompatibili – così come lo sono naturalmente due velocità nel medesimo istante di tempo, due moli, due densità di una medesima massa –, da ciò consegue che quei due stati sono pure incompatibili con il salto. In questo stesso capitolo abbiamo mostrato che non si può arrivare da un punto a un altro di un luogo se non per mezzo di una qualche linea continua, che non s'interrompe mai, benché i tipi di linea per le quali si può passare siano infiniti. Infatti, poiché nell'istante in cui il percorso venisse interrotto il mobile dovrebbe trovarsi sia nell'ultimo punto della linea precedente sia nel primo della successiva, essendo il limite fra il tempo precedente e il successivo un unico e indivisibile istante (sicché non può esserci istante contiguo a istante senza alcun tempo continuo intermedio), una serie precedente non può terminare in un istante e la serie seguente iniziare in quello immediatamente successivo. Abbiamo poi provato lo stesso principio [di continuità] anche per induzione, che abbiamo ampiamente tratto sia dalla geometria sia dal carattere della natura. Ma queste cose sono trattate più diffusamente appunto in quella dissertazione.

5. Qui presenteremo anche due esempi che apparentemente contrastano con la nostra legge, l'uno tratto dalla geometria (e vi abbiamo accennato l'anno scorso), l'altro dalla

---

[2] R.G. Boscovich, *De transformatione locorum geometricorum, ubi de continuitatis lege, ac de quibusdam Infiniti mysteriis*, in *Elementorum universae matheseos*, vol. 3, Salomoni, Roma 1754, pp. 297-468. Ora in *ENo*, II, pp. 709-1203.

metafisica; ma entrambi ammettono una soluzione facile e robusta. A essi ne aggiungeremo un altro tratto dall'essenza della libertà umana.

6. Anzitutto un salto enorme sembra essere ammesso al primo sorgere o al venir meno delle cose, soprattutto nella creazione, ove una certa cosa passa dal nulla a essere appunto qualcosa; lo stesso apparentemente accade nel venire meno delle cose, in cui si ha il passaggio dall'essere al non essere. Lì, a quanto pare, si compie un salto grandissimo, in cui l'induzione risulterebbe violata. Ma sembra anche che cadremo in un'assurdità altrettanto grande, qualora volessimo appoggiarci a tale argomentazione metafisica: poiché dai nostri principi seguirà certamente che, in quell'istante che è il limite fra il tempo continuo precedente in cui la cosa non c'era e il tempo successivo in cui c'è, una data cosa contemporaneamente è e non è. Infatti, la serie precedente aveva il non essere, la seguente ha l'essere; perciò, se dovessero congiungersi l'ultimo estremo della serie precedente e il primo della seguente, è evidente che si avranno essere e non essere nel medesimo istante.

7. Questa difficoltà, che abbiamo preso in considerazione autonomamente, senza che nessuno ce la opponesse, ci ha procurato per qualche tempo alcuni fastidi, ed era anche l'unica che ci sembrava fosse effettivamente una difficoltà. Ma con la guida della geometria ne siamo venuti fuori facilmente, e siamo giunti alla stessa argomentazione metafisica che ha conservato incolume da un'arma siffatta l'intera nostra teoria.

8. Si abbia dunque (Figura 1) il cerchio GMG´M, riferito alla retta data AB mediante le ordinate HM perpendicolari alla retta stessa; e perpendicolari a essa siano pure le due tangenti EGF, E´G´F´. Si immagini poi una retta indefinita, perpendicolare a quella stessa retta, condotta con moto continuo da A a B. Quando essa avrà occupato una qualunque posizione CD prima della tangente EF, ovvero C´D´ dopo la tangente E´F´, l'ordinata sul cerchio sarà nulla, ossia sarà impossibile e – come dicono i geometri – immaginaria. Ma ovunque si trovi, fra le due tangenti EGF, E´G´F´, in HI, H´I´ incontrerebbe il cerchio nei due punti M, *m*, ovvero M´, *m*´, e si avrà il valore dell'ordinata HM, H*m*, ovvero H´M´, H´*m*´. L'ordinata corrisponde al solo intervallo EE´; e, se la linea AB rappresenta il tempo, l'istante E è il limite fra il tempo continuo precedente AE, dove non c'è ordinata, e il tempo continuo seguente EE´, dove l'ordinata c'è; il punto E´ è il limite fra il tempo precedente EE´, dove l'ordinata c'è, e il successivo E´B, dove non c'è. Pertanto, la vita di tale ordinata è il tempo EE´: l'origine si trova in E, il suo venir meno in E´. Ma che cosa accade all'origine e al venir meno delle cose? Vi si trova forse l'essere oppure il non essere di una qualche ordinata? Vi si trova comunque l'essere – cioè EG ovvero E´G´ –, non invece il non essere. L'ordinata EG di grandezza finita sorge tutta intera, e l'ordinata E´G´ di grandezza finita viene meno tutta intera; tuttavia, in quel punto non vi è congiunzione di essere e non essere, e ciò non porta seco alcun assurdo. Nell'istante E si ha il primo estremo della serie seguente senza [che vi sia lì] l'ultimo della serie precedente; all'istante E si ha l'ultimo estremo della serie precedente senza [che vi sia lì] il primo estremo della serie seguente.

9. La ragione per cui ciò avvenga sarà immediatamente chiara non appena esamineremo la questione sulla scorta di considerazioni metafisiche. Il vero nulla non possiede proprietà reali: le proprietà reali pertengono a un ente reale. Qualunque serie reale deve avere inizio reale e fine reale, ossia un primo e un ultimo estremo. Ciò che non è non ha alcuna proprietà reale; di conseguenza non ha ultimo o primo estremo del suo genere. La serie precedente l'ordinata nulla non ha ultimo estremo; la serie seguente non ha primo estremo; una serie reale contenuta nell'intervallo EE´ deve avere un primo e un ultimo estremo. I suoi estremi reali escludono da sé quell'estremo del nulla, in quanto l'essere esclude di per sé il non essere.

10. Ciò sarà ancor più chiaro se consideriamo una qualche serie precedente reale, espressa dalle ordinate rispetto alla linea continua PL*g*, corrispondente all'intero tempo AE in modo che a un qualsiasi istante C del suo tempo corrisponda l'ordinata CL. Allora, se all'istante E deve avvenire un salto dall'ordinata E*g* all'ordinata EG, allo stesso istante E devono necessariamente corrispondere entrambe le ordinate EG, E*g*. Ora, in tutta la linea PL*g* non può mancare solo il punto *g*, in quanto, eliminato questo, quella linea deve avere ancora il suo estremo, e quell'estremo sarebbe un punto. Sicché, esso avrebbe dovuto trovarsi prima del contiguo al punto *g*, il che è assurdo, come abbiamo dimostrato nella dissertazione citata. Infatti, fra qualsiasi punto e qualsiasi altro deve giacere una qualche linea; se non vi giace, allora quei punti coincidono. Perciò, non può mancare che una qualche lineetta *g*L, in modo che l'estremo della serie precedente sia in un qualche istante C che precede l'istante E, e separato da esso da un tempo continuo, i cui istanti abbiano tutti ordinata nulla.

11. È dunque evidente la distinzione fra passaggio dall'autentico nulla – cioè una quantità immaginaria – all'essere, e il passaggio da una grandezza a un'altra. Nel primo caso non c'è un estremo del nulla; l'estremo c'è per l'una e l'altra serie che abbiano una vera esistenza, e la quantità di cui la serie è composta può sorgere o svanire con grandezza finita, e così escludere di per sé il non essere. Nel secondo caso deve necessariamente esserci un estremo dell'una e dell'altra serie, cioè l'ultimo estremo dell'una e il primo dell'altra. Perciò, anche nella creazione e nell'annichilimento una quantità può sorgere o venir meno con grandezza finita, e sia il primo sia l'ultimo essere saranno tali da non congiungersi con il non essere. Al contrario, qualora una grandezza reale dovesse passare da una quantità a un'altra con un salto, nell'istante in cui il salto si compie dovranno esserci entrambi gli estremi. Vien così fatto salvo il nostro argomento metafisico per l'esclusione del salto dalla creazione e dall'an-nichilimento, ossia dal sorgere e dal venir meno.

12. Vi è altresì da notare quanto segue: poiché abbiamo preso le mosse da speculazioni geometriche nel considerare il sorgere e il venir meno, sembrerebbe a tutta prima che talvolta un ultimo estremo di una serie reale sia nullo; tuttavia, considerando la cosa più approfonditamente, esso non sarà davvero nullo, bensì uno stato altrettanto reale e del medesimo genere dei precedenti, sebbene designato con altro nome.

13. Si abbia (come in Figura 2) una linea AB, come in precedenza, che venga intercettata in G da una linea PL, che prosegua oltre la stessa linea in GM, oppure torni repentinamente in GM´. Una retta CD avrà ordinata CL, che svanirà quando, spostandosi C in E, la stessa CD andrà in EF; poi, dall'altra parte di FG, giunta nella posizione della retta perpendicolare in HI, o andrà in HM (negativa), oppure tornerà indietro in HM´ (positiva). Ove una linea si unisce all'altra, e il punto E dell'una si incontra col punto G dell'altra, l'ordinata CL va evidentemente a finire nel nulla [ovvero lo zero], cosicché il nulla, come pure abbiamo accennato sopra, è un limite fra la serie delle ordinate positive CL e di quelle negative HM, oppure fra la serie delle ordinate positive CL e di quelle anch'esse positive HM´. Ma si consideri la cosa più a fondo, riconducendola al concetto metafisico: nella posizione EF non si trova un nulla vero e proprio. Nelle posizioni CD, HI si hanno certe distanze fra i punti CL, HM; nella posizione EF si ha compenetrazione di quegli stessi punti. La distanza è una relazione fra i due modi in cui esistono i due punti; la compenetrazione, analogamente, è una relazione fra i due modi in cui essi esistono, e tale compenetrazione è qualcosa di reale, dello stesso genere della distanza, che si è appunto costituito attraverso i due modi reali di esistenza.

14. La sola differenza è nelle parole che abbiamo utilizzato. Quei due modi locali di esistenza possono costituire un infinito numero di relazioni, e altrettanto vale per altri modi di esistenza. Tutti differiscono fra loro, eppure per lo più si accordano gli uni con gli altri; infatti sono reali e coincidono per genere, cioè per come siano le relazioni originate da due modi locali di esistere. In verità hanno nomi diversi, dati arbitrariamente: così alcune di tali relazioni – per esempio CL – vengono dette *distanze positive*, la relazione EG è chiamata *compenetrazione*, le relazioni HM vengono dette *distanze negative*. Ora, sottraendo 5 palmi[3] da dieci palmi di distanza ne rimangono ancora 5, sicché una volta sottratti gli altri cinque si trova il nulla – e tuttavia, non si tratta di un nulla vero e proprio, bensì di un nulla in rapporto alla distanza da noi così chiamata, rimanendo invece la compenetrazione: se sottraiamo altri 5 palmi, rimangono 5 palmi di distanza negativa. Tutti questi modi sono reali, e sono tutti dello stesso genere, in quanto la distanza di 10 palmi e la distanza di 5 palmi differiscono nel medesimo modo; altrettanto vale per la differenza con la distanza nulla (eppure reale) relativa alla compenetrazione, e per la distanza negativa di 5 palmi. Infatti da quella prima quantità si arriva allo stesso modo, per continua sottrazione di 5 palmi alla volta, alle quantità successive. Analogamente una sola parabola interposta separa infinite ellissi da infinite iperboli, sicché a essa è stato conferito un nome particolare; mentre ellissi e iperboli, in numero infinito e ognuna diversa dall'altra, vengono designate in entrambi i casi con uno stesso vocabolo, sebbene le curve differiscano fra loro per la forma più o meno allungata.

[3] Si tenga presente che un palmo romano è uguale a un quarto di piede, che corrisponde all'incirca a 7,41 cm.

15. Allo stesso modo la quiete è un certo stato reale, ossia il perseverare nel medesimo modo locale di esistenza; un certo stato reale è pure la velocità nulla di un punto esistente: la determinazione a perseverare nel medesimo luogo; un certo stato di un punto realmente esistente è la forza nulla, ovvero la determinazione a mantenere la velocità precedente, e così via: queste cose sono in palese contraddizione con il non essere vero e proprio. Il caso dell'ordinata corrispondente al tratto EF nella figura 2 è assai diverso dal caso dell'ordinata del cerchio corrispondente alla linea CD nella figura 1. Nel primo caso [Figura 2] esistono punti, ma compenetrati. Nel secondo [Figura 1] un altro punto è impossibile. Ove, nella risoluzione di problemi, si pervenga a una quantità del primo genere, il problema assume una determinazione particolare; ove si pervenga a una quantità del secondo genere, il problema riesce impossibile; così, in questo secondo caso si ha il nulla autentico, privo di ogni proprietà reale; nel primo caso, invece, si ha qualcosa dotato di proprietà reali, e ciò fornisce determinazioni vere e reali alle stesse soluzioni e costruzioni dei problemi.

16. Pertanto, rimarrà per sempre assodato che qualunque serie reale, che duri un tempo finito, debba avere sia un primo inizio sia un ultimo estremo reale, senza che ciò conduca ad alcuna assurdità, e senza che vi sia congiunzione dell'essere di quella serie col non essere, nel caso in cui essa sia limitata a quel tempo soltanto; mentre, se quella serie è esistita anche in un tempo precedente, deve esserci sia un ultimo estremo della serie precedente, sia un primo estremo di quella seguente, i quali devono essere il limite comune unico e indivisibile fra il tempo continuo precedente e quello successivo. Ma chiudiamo ora il discorso circa il sorgere e il venir meno delle cose.

17. Un'altra difficoltà, cui abbiamo accennato l'anno scorso e della quale abbiamo dato una soluzione a nostro avviso per niente banale, si ottiene dal cambiamento [di verso] che sembra interessare la tangente a una curva dotata di una cuspide. Qui mostreremo nel modo più evidente che essa non ostacola affatto la nostra teoria. Si abbia – come nella Figura 3 – la curva ABCDEFG con una cuspide in D. La sua tangente in B sia BI, in C sia CL, in D sia DN; in E sarà poi EP, mentre in F sarà FR. La tangente, con un salto di circa mezza circonferenza dalla direzione DN, sembra finire in DM, sicché DN diviene l'ultimo limite della serie precedente, DM il primo della successiva. L'anno scorso abbiamo risposto che la direzione DN è in qualche modo congruente alla direzione DM, a essa opposta, come abbiamo dimostrato dalla considerazione geometrica del cerchio infinito e da parecchi altri esempi geometrici di curve, in particolare quelle asintotiche; a nostro parere tale argomentazione è validissima, e basta quasi a risolvere la difficoltà per chi è iniziato agli arcani misteri della geometria. Ma ancora più opportuna è una risposta del tipo seguente. Una curva è di per sé del tutto indifferente a questa o quella direzione (per esempio, in C la curva è indifferente alle direzioni CB o CD), e di per sé non richiede che un mobile che la debba eventualmente percorrere segua l'un verso anziché l'altro. Sicché la tangente a essa in qualsiasi punto B non è soltanto BI ma anche BH; anzi, l'intera retta infinita HBI e IBH è in ugual modo sua tangente nel punto B; analogamente, sue tangenti sono tanto l'intera KCL

quanto LCK, tanto l'intera NDM quanto MDN, tanto l'intera OEP quanto PEO, tanto l'intera QFR quanto RFQ.

18. Perciò, nel punto D ci sono sia la tangente NDM sia MDN, di cui la prima è estremo comune fra le tangenti HBI, KCL, e PEO, RFQ, la seconda lo è fra le tangenti IBH, LCK, e OEP, QFR. Da nessuna parte qui si ha quel salto che contravviene alla nostra dimostrazione poiché laddove ci dovrebbe essere una sola quantità ce ne sarebbero due, e per il fatto che il passaggio da una grandezza all'altra avverrebbe senza gradi intermedi.

19. Un salto del genere si avrebbe se la curva ABCDEFG avesse in D due tangenti che fossero inclinate ad angolo anziché giacere allineate. Qualcosa di analogo accadrebbe nei nodi, nel modo in cui è mostrato dalla Figura 4 nella curva ABCDEFG. Essa interseca se stessa nei punti EC, congiunti l'uno coll'altro e compenetrantesi, tornando indietro e formando il nodo CDE. In C sono le due tangenti KCL, OCP, fra loro inclinate; se non ci fosse il nodo CDE, attraverso il quale la tangente KCL passasse in MDN e poi in OEP per cambiamento continuo [di posizione], il passaggio dalla tangente KCL a PCO senza transitare per posizioni intermedie conterrebbe un salto, il che è assurdo.

20. Ammesso, però, che nel cambiamento [di posizione] della tangente si abbia un salto (e tuttavia in questo senso: posto che il solo arco ABC congiunto con l'arco CFG esprima una qualche serie di una quantità variabile che dura per un tempo continuo), si avrebbe un salto geometrico; ma il salto, la cui impossibilità abbiamo dimostrato da un principio metafisico, qui non verrebbe affatto compiuto. Infatti (Figura 5), se una curva analoga venisse riferita alla retta PQ mediante le ordinate RB, SC, TF, in C ovviamente cambierebbe la legge, ma tale cambiamento non provocherebbe quel salto. Di fatto, la medesima retta SC costituirebbe un estremo comune sia della serie precedente di tutti gli RB sia della serie seguente di tutti i TF, e all'istante S non corrisponderebbero due ordinate né si passerebbe da una grandezza all'altra senza passaggi intermedi. E la stessa cosa si otterrebbe se una qualche legge di variazione di una quantità variabile venisse espressa con rette o curve qualunque che s'incontrano formando un angolo; contro un salto del genere, puramente geometrico, la nostra dimostrazione non varrebbe, poiché si avrebbe un estremo comune della serie precedente e di quella seguente: l'unica cosa che la dimostrazione richiede.

21. Ciò basta a spiegare sotto quale condizione la nostra libertà non violi il principio di continuità, benché interrompa la legge cui è sottoposta la serie precedente. Ma fin qui sarà evidente che, ove la nostra libertà induca un qualche mutamento, la variazione dal nulla dovrà passare per tutti i gradi delle grandezze finite. Esprima la curva continua ABCEF´V´ il moto, la velocità, la densità, o qualcos'altro di un qualsiasi corpo del genere, e non vi sia alcuna causa libera che agisca; se quella curva dipenderà da una legge eterna necessaria, la sua natura sarà pure determinata da leggi continue di tutte le forze esistenti, cosicché, dato un qualunque suo arco continuo, piccolo a piacere, se ne possa determinare per intero il tratto restante: infatti non esistono due

curve, la cui natura sia determinata da leggi continue eterne, che possano sovrapporsi perfettamente per un arco piccolo a piacere. All'istante S cominci ad agire la libera volontà, e sottragga nel tempo ST la quantità F´F. Se l'avrà sottratta passando per ogni grado a cominciare da S, al posto della curva CV´ si potrà avere la curva CFG, che non è la continuazione della precedente ABC; e tuttavia, in S ci sarà un unico limite comune SC, senza quel salto che la nostra ragione metafisica esclude.

22. Ma se immaginiamo che in S la libera volontà produca istantaneamente un decremento CH in sé determinato, alla curva ABC succederà la curva HFV, e si avrà in S un salto con due valori – SC, SH – dati nel medesimo istante, cosa che una libertà creata non può fare. Infatti, per avere contemporaneamente due distanze è necessaria una duplicazione; per avere due densità contemporaneamente occorrono due distanze, cioè di nuovo una duplicazione; per avere due velocità contemporaneamente si richiede la determinazione a percorrere nello stesso tempo due spazi, cioè ad acquisire due distanze contemporaneamente, sicché abbiamo anche qui una duplicazione; anzi, per avere nello stesso istante una velocità nulla e una velocità non nulla è necessaria una determinazione a permanere nella medesima posizione e a occupare nuove posizioni, il che pure richiede una duplicazione che solo l'artefice della natura può fornire. Da ciò si ricava che lui potrà imprimere in un istante a un corpo preesistente, sia esso in quiete o in moto, una velocità finita tutta quanta insieme – non lo potrà, invece, alcuna potenza creata.

23. Da questo risulta evidente che la libera azione della volontà perturba sì le quantità delle curve che esprimono traiettorie continue; ma essa, affinché non vi sia quel salto che abbiamo escluso, deve procedere per tutti i gradi di grandezze decrescenti all'infinito, come riconosciamo anche nei nostri movimenti involontari. Così, quando con la mano muoviamo qualcosa, la forza e l'azione crescono passando per tutti i gradi, mentre la linfa gonfia le fibre dei muscoli in maniera graduale eppure velocissima. Se l'anima non esercitasse alcuna azione libera nel corpo e si ammettesse l'armonia prestabilita di Leibniz, allora tutti i moti dei corpi e di tutti i punti della materia, nonché qualsiasi cambiamento, avverrebbero per linee continue, la cui necessità dipende da leggi di natura generali. Noi, però, avversiamo massimamente tale concezione, anzitutto per le ragioni che abbiamo presentato nelle note e nei *Supplementi* al poema di Stay. Poiché l'anima, per sua determinazione, determina anche certi moti nel proprio corpo, induce una determinazione in tutti i punti della materia, i quali, a qualunque distanza siano posti, vengono collegati attraverso la legge delle forze reciproche, che si riferisce a intervalli qualsiasi. Da ciò si ricava che le curve così descritte, che esprimono grandezze di quantità date, costituiscono un tipo di curve non necessariamente determinato [*non necessarium*] né tale che da un arco piccolissimo si possa conoscere l'intera traiettoria, che è indifferente a tutte le nuove libere determinazioni di più anime.

24. Premesse tutte queste cose, attinenti al principio generale di continuità, vediamo ora quale legge delle forze se ne possa dedurre, sì da esibirne le caratteristiche di semplicità e continuità.

25. Diciamo pertanto che da qui si deduce quanto segue: in natura esistono forze sia attrattive sia repulsive, che alle grandi distanze – quelle a cui si trovano pianeti e comete – sono attrattive; a brevi distanze sono ora attrattive ora repulsive; a distanze minime sono repulsive, e la loro intensità è tanto più grande quanto più le distanze diminuiscono all'infinito, in modo che possano estinguere una velocità grande a piacere. Abbiamo dato la dimostrazione di questa proposizione come derivata dall'esclusione del salto in tutte le dissertazioni ricordate all'inizio. A ciò è ricondotto il principio intrinseco dell'argomentazione e la sua singolare forza.

26. Si immagini che un corpo con 12 gradi di velocità insegua un secondo corpo con 6 gradi di velocità, e nessuna forza agisca a distanza prima del contatto; allora, nell'istante in cui la distanza svanisce, il corpo che viene prima o quello che insegue (o entrambi) dovranno passare con un salto da una velocità a un'altra: o l'uno a 12, o l'altro a 6, o entrambi a 8 o a 9, o qualcosa del genere, poiché dopo il contatto il corpo che insegue non può passare davanti al primo. Non c'è modo di evitare il salto nel cambiamento di velocità una volta estinta la differenza di 6 gradi, se non ammettere che prima del contatto l'uno cominci gradualmente ad accelerare e l'altro a decelerare. Si avranno dunque quest'accelerazione e questa decelerazione prima del contatto; la loro causa si chiama forza e, poiché agisce in maniera uguale e in direzioni contrarie (sicché si ha uguaglianza di azione e reazione), tendendo così ad allontanare i corpi gli uni dagli altri, dovrà chiamarsi forza repulsiva.

27. Diminuita la distanza all'infinito, questa forza repulsiva dovrà crescere all'infinito, per pareggiare qualunque velocità piccola a piacere che debba essere annullata. Ciò risulta dal fatto che, se in un qualche caso, come in quello citato, una forza del genere annullasse la differenza di velocità proprio nell'istante del contatto, qualora il corpo che insegue sopraggiungesse con la velocità maggiore – per esempio con 20 gradi di velocità –, quella stessa forza non potrebbe annullare tale maggior differenza di 14 gradi prima del contatto: infatti agirebbe in un tempo di gran lunga più breve a causa della maggior differenza di velocità e – concependo l'azione come generante la velocità – poiché le forze agiscono proporzionalmente a tale differenza e al tempuscolo in cui agiscono. Sicché in questo secondo caso vi sarebbe salto; perché lo si possa evitare, occorre che nel caso citato per primo la differenza di velocità venga annullata prima del contatto, affinché in questo secondo caso ulteriori forze agenti a minor distanza possano annullare interamente questa maggior differenza prima del contatto. E poiché lo stesso argomento ricorre in qualsiasi caso, per qualunque differenza di velocità grande a piacere, è chiaro che tali forze repulsive debbano crescere all'infinito al diminuire all'infinito delle distanze, in modo da compensare qualunque differenza di velocità grande a piacere che debba essere annullata.

28. Da qui si deduce pure che la collisione fra corpi e l'impenetrabilità sono effetto di tale forza repulsiva. La dobbiamo riconoscere comunque in tutte quelle particelle della materia che possano scontrarsi fra loro; per il principio d'induzione, la cui validità abbiamo definito e dimostrato sia nella dissertazione *De continuitatis lege* sia nei *Supplementi* all'opera di Stay, la estendiamo a tutte le particelle di materia. Da ciò inferiamo che i primi elementi della materia sono costituiti da punti assolutamente semplici e inestesi, poiché appunto nessuna particella della materia – per la forza repulsiva che cresce all'infinito a distanze infinitamente ridotte – può congiungersi a un'altra senza lasciare un intervallo, per comporre una parte solida e continua. Da ciò risulta che elementi primi di tal genere devono essere senza parti.

29. Poiché, invece, a distanze assai maggiori si osserva l'azione della gravità universale, la quale si colloca nella forza attrattiva, è evidente che in qualche luogo debba esserci un passaggio dalla forza repulsiva a quella attrattiva, che chiamiamo limite tra le forze repulsive e attrattive. Di più: poiché anche a distanze minori molti corpi aderiscono fra loro senza che alcuna forza sensibile che agisca sulle loro particelle, e senza che a una particella spinta avanti ne segua un'altra (il che è indizio di attrazione); poiché, tuttavia, a distanze più grandi – per esempio quando l'acqua si trasforma in vapore – è l'attrazione a mutarsi in repulsione: abbiamo allora tre limiti, da repulsione ad attrazione, da attrazione a repulsione, e di nuovo da repulsione all'attrazione della gravità universale. Ma in altri corpi che, comunque compressi, variate completamente le distanze, risultano ancora in equilibrio, si rivela la presenza di più passaggi o limiti del genere. Da tutto ciò risulta chiaro sia che vi è tale alternarsi di forze ora attrattive ora repulsive a piccole distanze, sia che la forza repulsiva cresce all'infinito alle minime distanze, sia che la forza è attrattiva alle distanze maggiori, tipiche dei pianeti – il che corrisponde all'intera legge delle forze esistenti in natura qui presentata.

30. Ora, quando per la prima volta abbiamo esposto una teoria di questo tipo, abbiamo constatato che la nostra argomentazione non dimostrava alcunché per l'intera massa dei corpi elastici e molli. In essi le parti più lontane dal contatto, mentre la forma di quei corpi si modifica per compressione, possono cambiare gradualmente la loro velocità. In realtà abbiamo notato che tale argomentazione riconduceva alle particelle prime – se in generale vi siano particelle solide, e quale sorta di particelle solide fossero ammesse da Newton e tanti altri – o almeno alle prime superfici o ai punti che dapprima si toccano e sui quali lavora l'impenetrabilità. Lì, infatti, la velocità dovrebbe mutare per salto, come del resto è chiarissimo (se si esclude la compenetrazione, da escludersi nel modo più assoluto per induzione).

31. C'è poi chi crede di poter eludere la forza della nostra argomentazione affermando che non esiste alcuna particella piccola a piacere completamente solida e impossibile da comprimere, e perciò che tutte le particelle di particelle vengono compresse e variano gradualmente la velocità. D'altra parte, nelle prime superfici non avviene alcun mutamento per salto, essendo in esse nulla la quantità di moto. Infatti in meccanica la quantità di moto si ricava dalla velocità moltiplicata per la massa, prodotto che – come

si dice – svanisce quando svanisce la massa; ed essa svanisce quando delle tre dimensioni (lunghezza, larghezza e profondità) ne svanisca una, ed il corpo si riduca a una superficie bidimensionale soltanto.

32. In verità, se si ammette la concezione comune dell'estensione continua della materia non si riesce a capire in alcun modo come possa essere che non vi siano particelle assolutamente dure e solide; e nemmeno si può capire in qual modo una particella di materia possa venire compressa, se non vi sono intervalli vuoti che si restringono o se una stessa particella non occupa completamente uno spazio ora maggiore ora minore. Quest'ultima concezione l'abbiamo esclusa l'anno scorso nella dissertazione sulla legge di continuità; anzitutto, essa richiederebbe una divisione attualmente infinita e una serie attuale di infinite parti separate fra loro da intervalli vuoti, delle quali tuttavia nessuna sarebbe l'ultima. Ciò risulta davvero completamente inconcepibile, messi comunque da parte i pregiudizi; e dei piccoli vortici di Malebranche, che continuano all'infinito, con buon diritto si fa beffe MacLaurin. Se ci sono aperture e pori e c'è una qualche superficie esterna, tra la superficie e l'apertura che s'incontra per prima dovrà esserci un qualche intervallo privo di aperture, perciò perfettamente solido. Che nel possibile si cominci con un nulla, in qualche modo lo si capisce perché, posta una qualunque quantità avente i propri estremi, è facile immaginare che possa esistere una quantità maggiore e una minore; ma in ciò che esiste in atto, il fatto che non vi sia un primo né un ultimo dopo un dato termine – per esempio dopo una superficie – non si può assolutamente comprendere. Chi abbia bisogno di quella via di scampo per difendere la propria concezione, ha bisogno di misteri; chi li evita per ciò stesso fa uso di un miglior giudizio.

33. Tralasciato anche questo, la forza dell'argomentazione applicata alla superficie non viene affatto vanificata dicendo che la massa viene meno a causa dello spessore, che scompare, se non ci facciamo catturare dal vacuo suono delle parole. Anzitutto, infatti, qualunque cosa capiti al moto risultante dalla massa e dalla velocità moltiplicate fra loro[4], si compirebbe un salto nella velocità stessa, la quale è ovviamente una certa quantità associata alla superficie e al punto; e l'anno scorso, nella medesima dissertazione [*De continuitatis lege*], abbiamo dimostrato che la superficie e il punto, nell'ordinaria concezione dell'estensione continua reale dei corpi, non sono qualcosa che viene concepito dalla nostra immaginazione, bensì sono attributi corporei reali, ovvero estremi reali, di una quantità. Sicché, quando si dice che una superficie non ha alcun moto – poiché il moto è l'effetto della massa moltiplicata per la velocità, e in una superficie la massa svanisce – non si nega certamente una velocità a quella superficie. Essa, che è un estremo reale, secondo tale concezione ha proprietà reali ed estensione reale in lunghezza e in profondità; analogamente ha velocità reale. Con la velocità di un punto, di una linea, di una superficie, capita di avere a che fare in meccanica, ove il salto è parimenti da evitare.

[4] Nell' originale «*multiplicitatis*», ma è un refuso per «*multiplicatis*».

34. Ma il moto ce l'hanno pure una superficie, una linea, un punto, non solamente un corpo. Il moto, infatti, è un cambiamento di posto che avviene in successione, il quale si addice anche a loro. Di qui il fatto che i geometri abitualmente dicono che dal moto di un punto si genera una linea; dal moto di una linea, una superficie; dal moto di una superficie, un solido. Che comunemente si affermi che la quantità di moto sia l'effetto di una massa moltiplicata per la velocità, e col nome di massa si intenda una quantità solida di materia, si deve al fatto che si suole considerarli in relazione al moto di un corpo. Del resto, per la concezione comune, c'è una massa e un moto anche per una superficie, una linea, un punto. Come in una quantità estesa in modo continuo si ha, nella concezione comune, il solido (ossia un corpo che si immagina generato dal moto continuo di una superficie), la superficie (che s'immagina generata dal moto di una linea), la linea (che s'immagina generata dal moto di un punto), e il punto (che è principio e origine di ogni estensione); così, nella massa e nel moto, la massa di un corpo è una quantità estesa in lunghezza, larghezza e profondità, la massa superficiale è una quantità di superficie estesa in lunghezza e larghezza; la massa lineare è una quantità di linea estesa in lunghezza; la massa dei punti, infine, non è altro che il numero dei punti. In questo senso, vi saranno quattro generi di moto che risulteranno da queste quattro masse moltiplicate per le loro velocità. Una quantità solida, la cui dimensione di profondità risulti nulla, diviene nulla nel genere solido, ma non nel genere superficie, al quale è assegnata; a meno che svaniscano le due dimensioni residue o una di esse. Ciò vale anche per massa e moto.

35. Se si prendono tre numeri a, b, c, ponendo $a = 10$, $b = 3$, $c = 2$, risulterà $abc = 60$. Se fosse $c = 1$, diverrebbe $abc = 30$. Se fosse $c = 0$, diverrebbe $abc = 0$, ma non per questo sarebbe $ab = 0$; infatti sarebbe ancora $ab = 30$. La stessa cosa accade appunto nel nostro caso. Del resto, come abbiamo accennato, in meccanica e persino in fisica capita d'imbattersi nel moto di un punto, di una linea, di una superficie. Il centro di gravità è un punto; e tuttavia, quante cose sul moto del centro di gravità vengono ovunque dimostrate? Il nostro Guldino ha tramandato la celebre regola per ricavare la misura di una superficie o di un solido dalla traiettoria seguita dal centro di gravità di una linea o di una superficie generatrici, moltiplicando la traiettoria per quella linea o per quella superficie[5]. Se, nella concezione dell'estensione continua, superficie, linea

[5] Le regole di Guldino possono venire così enunciate: «*Prima regola*: l'area del solido di rotazione descritto da un arco di curva piana γ che ruota attorno a una retta r, complanare a γ e che non la interseca, è il prodotto della lunghezza di γ per quella della circonferenza descritta dal baricentro di γ durante la rotazione. *Seconda regola*: il volume del solido di rotazione descritto da un arco di curva piana γ che ruota intorno a una retta r, complanare a γ e che non la interseca, è il prodotto dell'area della regione D – compresa fra γ, r e le proiezioni ortogonali degli estremi di γ su r – con la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro di D durante la rotazione». Per esempio, si immagini un toro generato dalla rotazione di una circonferenza γ attorno a un asse r, posto a distanza $R > r$ dal centro della circonferenza. La superficie del toro sarà data da $2\pi r(2\pi R)$, il volume da $\pi r^2(2\pi R)$. Vedi *Analisi matematica*, testi di F. Hurtado *et al.*, Giunti, Firenze 2001, pp. 84-85.

e punto sono estremi reali dell'estensione stessa, come abbiamo dimostrato l'anno scorso, gioca con le parole chi nega il salto per il fatto che la superficie sarebbe priva di massa, dunque di moto.

36. Per altro, in questa teoria avremo un insieme di punti senza alcun vincolo di coerenza anziché i corpi oggetto della nostra osservazione. Tale difficoltà, che per prima si oppone alla mente, l'abbiamo evitata anche quando per la prima volta abbiamo pubblicato questa idea. Affermiamo, infatti, che attraverso quei limiti delle forze in cui da repulsione alle distanze minori si passa ad attrazione a quelle maggiori, si spiega perfettamente la coesione (e svariati tipi di coesione), e certo in maniera assai migliore che con un'attrazione che cresce all'infinito alle minime distanze. Di fatto, quando due punti materiali sono collocati entro tale limite, se li si avvicina, si respingeranno istantaneamente l'un l'altro per la repulsione, che agirà con intensità ridotta; se il primo viene allontanato dal secondo, la forza di attrazione, agente ora a una distanza maggiore, trascinerà il secondo, poiché peculiarità della coesione è appunto far sì che la posizione permanga; e ciò avverrà senz'altro, se i due non verranno separati con una forza maggiore di quella con cui tendono l'un l'altro, oppure se all'uno non s'imprima un moto tanto veloce che le forze, per la brevità del tempo, non possano agire a sufficienza. D'altra parte in qual modo si possano spiegare, attraverso la differente natura dei limiti, i vari generi di coesione, la differenza fra corpi solidi e fluidi, elastici e molli, e come si possano fare molte altre distinzioni del genere, è stato abbondantemente spiegato in non pochi passi delle dissertazioni citate, e soprattutto nella *Synopsis Physicae Generalis* ricordata sopra.

37. A qualcuno, però, sembra che le repulsioni vengano chiamate in aiuto inutilmente, poiché basterebbero le forze attrattive per spiegare i fenomeni. Servirsi di due elementi al posto di uno è peccare contro la semplicità della natura. Inoltre, nello stesso passaggio da quantità attrattive a repulsive attraverso lo zero si ammette quel salto che vogliamo massimamente evitare. Ora, laddove cessino le forze attrattive, è necessaria – affinché abbiano inizio quelle repulsive – una seconda causa, opposta a quella precedente, che esegua un fine opposto a quello precedente. Appunto, tutti quei passaggi dalle repulsioni alle attrazioni, tutti quegli andirivieni della curva che, con le sue ordinate, esprime le forze, quando questa oscilla sull'asse, sarebbero massimamente intricati e renderebbero la teoria assai più complicata di quanto chieda la semplicità della natura. Non vi sarebbe un'unica legge, bensì parecchie leggi disposte a caso: tante quanti sono gli archi che s'incurvano da una parte e dall'altra di tale asse, corrispondenti alle attrazioni e alle repulsioni.

38. Per soddisfare a tutto ciò, noteremo anzitutto che anche se repulsioni e attrazioni fossero forze di genere diverso e due elementi differenti uniti in maniera casuale contenessero due leggi diverse, se tuttavia dimostrassimo con ragioni positive che in natura esistono l'una e l'altra, non vi sarebbe certo nulla di cui ritenerci colpevoli. Ma lo stesso Newton la deriva in maniera essenzialmente robusta nell'*Optice* (ultima Quaestio) da una molteplicità di fenomeni, a cominciare dalla notevole forza di espansione

dei vapori; e di essa, se non ci sbagliamo, noi diamo dimostrazione assai più robusta dalla collisione fra corpi e dall'esclusione del salto.

39. Si aggiunga che quanti ammettono le sole attrazioni, ammettono comunque due principi totalmente disgiunti, cioè l'attrazione, cui riconducono la causa della coesione, e la forza d'impenetrabilità, della quale hanno bisogno per le collisioni fra corpi nell'impatto e che in ogni caso non può essere ricavata coll'attrazione. Perciò, poiché la nostra repulsione ci fa vedere impenetrabilità e collisioni, anche se essa fosse un principio diverso dall'attrazione, non ammetteremo comunque un maggior numero di principi nella spiegazione della natura.

40. In verità è del tutto falso che vi siano due quantità di genere differente (forza attrattiva e forza repulsiva), così come è falso che vi sia una forza nulla, che parimenti non è un vero nulla, ma considerata nulla da noi, secondo un peculiare modo di considerarla. La forza attrattiva è la disposizione di due punti materiali ad avvicinarsi reciprocamente; la forza repulsiva è la disposizione ad allontanarsi reciprocamente; la forza nulla è la disposizione a conservare la distanza, se niente è contrario a ciò, cioè ad avere, in istanti successivi, certi modi locali di esistenza in cui tutti concordano. La differenza tra forza repulsiva e forza attrattiva sta soltanto nella direzione della serie dei loro modi locali. Tale direzione cambia da positiva a negativa e viceversa, il che non fa comparire quantità di genere diverso. Infatti cose positive non differiscono da quelle negative in niente più di quanto le positive si differenzino fra loro e le negative fra loro. Tanto differiscono dieci gradi di attrazione da due di attrazione, quanto due di attrazione da sei di repulsione, quanto sei di repulsione da quattordici di repulsione. Tutti questi gradi si succedono unicamente per sottrazione continua di otto gradi. Perciò, attrazioni e repulsioni non sono due quantità di genere differente, ma quantità di un solo genere, e appartenenti a una stessa, unica serie. I nomi sono diversi, ma si riferiscono a stati diversi di una medesima cosa, cosicché l'uno e l'altro vengano da noi adattati in infiniti casi, senz'altra differenza – se consideriamo la natura della cosa – di quella per cui l'uno si distingue dall'altro o da ciò cui abbiamo dato il nome di forza nulla, che [nell'esempio riportato sopra] sta fra loro proprio come un'attrazione di dieci gradi sta fra tutte le attrazioni maggiori e quelle minori [di tale soglia], sebbene né quell'attrazione di dieci gradi abbia ottenuto un suo nome particolare, né le attrazioni maggiori o minori siano state chiamate con nomi distinti.

41. Da qui è facile capire che nel passare da attrazione a repulsione attraverso la forza nulla (cioè uguale a zero) non si ha alcun salto. Infatti, lo stato di forza nulla è il limite comune fra tutte le attrazioni e le repulsioni, proprio come l'attrazione di dieci gradi è il limite comune fra tutte le attrazioni maggiori e minori [di tale soglia]. Ci si avvicina allo stato reale di forza nulla – ossia alla disposizione reale a conservare la velocità che si ha per tutti gli stati delle forze da una parte attrattive e dall'altra repulsive –, senza che vi sia un ultimo grado di attrazione né un primo di repulsione, dove non c'è un altro stato più direttamente vicino alla stessa forza nulla. Per esempio, all'attrazione di dieci gradi ci si avvicina da una parte percorrendo tutti i gradi di attrazione

maggiore, dall'altra tutti quelli di attrazione minore, sicché da ambo le parti non c'è un grado più vicino di tutti senza che vi sia un grado ancora più vicino. Appunto in ciò è insita la legge di continuità, e l'esclusione del salto si raggiunge per variazione continua.

42. Ma quanto si aggiunge circa la causa delle repulsioni, la quale dovrebbe essere diversa dalla causa delle attrazioni, è del tutto falso. Ne vediamo un esempio lampante in una lamina d'acciaio ripiegata, che si allarga quanto più la si comprime e si contrae quanto più la si distende. Abbiamo qui una forza che dipende dalla distanza, la quale è repulsiva a distanza minore, attrattiva a distanza maggiore, nulla a una distanza determinata; e la causa di tutte quelle forze è insita nella stessa elasticità della lamina.

43. Del resto, quanto alla causa, non vediamo quale difficoltà possano trovare coloro che, i Cartesiani *in primis*, parteggiano per le cause occasionali nel fatto che – come già abbiamo notato altrove – all'occasione si assuma una certa distanza determinata, come costoro assumono una distanza nulla. Proprio come dalla condizione di distanza nulla Dio può generare un moto in un corpo e sottrarlo in un altro, allo stesso modo egli può decidere, dalla condizione di una distanza grande a piacere, che vi sia avvicinamento reciproco; mentre dalla condizione di una distanza differente, che vi sia allontanamento reciproco; vale a dire può assumere, per la condizione di avvicinamento e allontanamento, l'intera sequenza delle distanze, cosicché egli avrà assegnato alle distanze stesse tali disposizioni all'avvicinamento e all'allontanamento reciproco (che noi, con un nome arbitrario e ormai abituale, e del resto non inadatto, chiamiamo forze attrattive e repulsive), in base a una certa legge che possiamo esprimere attraverso una formula analitica oppure porre dinanzi agli occhi attraverso una figura geometrica. Però, tale legge arbitraria non fa sì che, se ciò si applicasse alla filosofia intera per la spiegazione dei singoli fenomeni, questo o quello avvenga per volontà di Dio. Lo chiariremo al meglio utilizzando l'esempio delle leggi civili.

44. Ci sono parecchie leggi, disposte dalla Repubblica a certi scopi, che si potrebbero anche disporre altrimenti, e ci sono certe leggi generali in qualunque regime, secondo le quali si regge tale potere. Tuttavia, molti fenomeni dipendono da quelle leggi: si condannano i colpevoli, si confiscano i beni o li si assegna a terzi, e altro ancora. Chi, nel rendere ragione di ciò, affermasse che quelle cose avvengono per volontà del legislatore o per ordine della Repubblica, risponderebbe a sproposito senza dir nulla. Se invece trovasse leggi davvero generali, ne spiegasse il significato, le applicasse a casi particolari ed esponesse accuratamente ciò che ne debba conseguire in qualunque circostanza, costui verrebbe certamente salutato come esperto di diritto, verrebbe assai apprezzato e sarebbe utilissimo alla patria e ai cittadini, ai quali, consultato frequentemente, gioverebbe moltissimo nei casi dubbi. Analogamente, chi per i singoli fenomeni della natura risponda che quelle cose avvengono perché Dio così ha voluto, e perché ha ordinato la natura in quel modo, costui fa della pessima filosofia. Chi invece riconosca e spieghi le leggi libere (se libere sono), generali ed eterne del Dio creatore della natura, dalle quali dipendono tutti i fenomeni, egli dev'essere considerato ottimo

indagatore della natura, suo finissimo conoscitore, e oltremodo utile in tutto ciò a cui tali leggi di natura sono utili, come coltivare le scienze, promuovere le arti, persino fissare la condotta di vita.

45. D'altra parte, coloro che preferiscono collocare le cause degli effetti naturali nella natura stessa, o persino in forme aggiunte alle cose, possono riconoscere una disposizione condizionata all'avvicinamento o all'allontanamento reciproco nella natura dei punti materiali o in un accidente a essi sovrapposto, sotto la condizione di una distanza ben determinata. Questa disposizione è chiamata forza attrattiva o repulsiva, a seconda che si tratti di avvicinamento o di allontanamento, seguirà una certa legge che dipende dalle distanze e verrà espressa mediante formula analitica oppure messa sotto gli occhi con una linea geometrica. Nel caso in cui un qualsiasi punto effettuasse di per sé un moto, la direzione in cui il moto viene effettuato e la sua grandezza saranno determinati dalla posizione e dalla distanza di un secondo punto. Cioè, in qualunque punto la natura, unica e indivisibile – o, se si preferisce, la qualità aggiunta – produca un moto, un secondo punto determinerà la direzione e la quantità del nuovo moto per la sua stessa posizione e per la distanza a cui sarà giunto rispetto all'altro punto. Perciò, l'un punto non agisce fisicamente sull'altro; tuttavia, agisce in modo determinativo, sicché anzi gli si deve attribuire un effetto appunto perché determina un'esigenza necessaria. E si dovrà dire che esso spinge e fa cambiare posizione all'altro punto, poiché con il suo avvicinamento la natura stabilita lo determina ovvero lo dispone appunto a tale moto. Analogamente, i Peripatetici sostengono che la gravità spinge i corpi verso il basso e produce in essi un moto, ma che la posizione del centro determina la direzione di quel moto. Com'è inoltre evidente, nulla impedisce che la natura indivisibile e semplicissima del punto (o della qualità aggiunta a esso) esiga che a una certa distanza vi sia un determinato avvicinamento, a un'altra vi sia avvicinamento maggiore, a un'altra ancora vi sia conservazione della distanza, a un'altra, infine, vi sia allontanamento, così come l'elasticità della lamina in rapporto alle varie distanze delle punte esige avvicinamenti diversi, conservazione della distanza o repulsione.

46. Siamo tornati a esporre per la seconda volta e più estesamente queste cose circa la causa, perché si riconosca che questa nostra teoria concorda con qualsiasi scuola filosofica che discuta le cause prime o ultime degli effetti, le quali, non essendo possibile coglierle dai fenomeni (infatti i fenomeni avvengono allo stesso modo qualunque sia l'origine di quella legge delle forze), non indaghiamo in alcun modo, accontentandoci di indagare quella stessa legge secondo cui si esercitano le forze e si producono i moti, cosicché, con l'aiuto dell'algebra, della geometria e della meccanica, deriviamo le leggi dei moti così come la ragione generale e lo svolgersi di tutti i fenomeni.

47. Quanto a ciò che è stato avanzato da ultimo, che cioè la nostra legge sia eccessivamente intricata e tenuta assieme da svariate leggi collegate a caso fra loro e da archi di parecchie curve, si tratta di una totale falsità. Infatti, tutti i passaggi sono rivelati da un'unica formula analitica continua, in sé semplicissima, e da un'unica, semplice curva continua. Affinché ciò appaia più chiaramente premettiamo anzitutto questo:

come la gente comune esprime coi numeri certe relazioni fra quantità e le confronta fra loro, oppure le mette dinanzi agli occhi per mezzo di determinate misure – appunto le linee – come quando si osservano le immagini dipinte di edifici o di campi, così anche i filosofi e i matematici esprimono i nessi generali fra quantità attraverso certi valori generali e indeterminati che vengono indicati con le lettere dell'alfabeto; tali espressioni, poiché l'algebra suole riferirvisi col nome di analisi, sono dette formule analitiche. Ma matematici e filosofi esprimono le stesse cose e le pongono davanti agli occhi anche attraverso linee geometriche, la cui natura colgono tuttavia con formule analitiche. D'altra parte, dalle regole analitiche e da tante verità geometriche ormai dimostrate, ove è stato dedotto tale nesso con le formule analitiche stesse e con le linee geometriche, sarà certo assai più semplice dedurre quanti più corollari relativi a fenomeni dipendenti da quegli stessi nessi.

48. Inoltre le formule algebriche e le linee che esprimono tale nesso e modificazione di quantità variabili mostrano se e quando debba avvenire che una quantità passi da positiva a negativa e in qual modo avvenga il passaggio: cioè talvolta per lo zero, talvolta invece per l'infinito. Ma può anche capitare che una quantità, ove fosse arrivata a zero o all'infinito, si trasferisca dal positivo al negativo o viceversa, o al contrario rimanga positiva o negativa com'era. Abbiamo trattato di tutto ciò in maniera assai più estesa, mostrando, nel secondo tomo dei nostri *Elementi* (§ 14)[6], ciò che riguarda le formule analitiche algebriche, e nel terzo tomo – dissertazione *De transformatione locorum geometricorum*, aggiunta ai *Sectionum conicarum elementa*[7] – ciò che riguarda le linee geometriche. Di ciò diamo qui brevissimi cenni.

49. Sia la formula $10 - x$, nella quale vengano assegnati a x svariati valori. Se si pone $x = 1$, la formula diventa $= 9$; se $x = 8$, diventa $= 2$; se $x = 10$, diventa $= 0$; se $x = 12$, diventa $= -2$; se $x = 19$, diventa $= -9$. Il valore della formula passa da positivo a negativo transitando per lo zero. Si abbia $1000 - 300x + 30x^2 - x^3$. Analogamente, posto $x = 1$ la formula diventa $= 729$; posto $x = 8$ diventa $= 8$; posto $x = 10$, diventa $= 0$; posto $x = 12$, diventa $= -8$; posto $x = 19$, diventa $= -729$. Anche qui il valore passa da positivo a negativo attraverso lo zero. E se poniamo in entrambe le formule un qualsiasi valore minore di 10, otterremo senz'altro una quantità positiva; se, invece, ne poniamo uno maggiore, otterremo una quantità negativa. E se assumiamo la formula $\frac{1}{10-x}$ oppure $\frac{1}{1000-300x+30x^2-x^3}$, assegnando a x i valori 1, 8, 10, 12, 19 otterremo i valori $\frac{1}{9}, \frac{1}{2}, \frac{1}{0}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{9}$, o rispettivamente $\frac{1}{729}, \frac{1}{8}, \frac{1}{0}, -\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{729}$. I primi due valori da entrambe le parti sono positivi, gli ultimi due negativi, e

[6] R.G. Boscovich, *Elementorum universae matheseos tomus* II. *Continens algebram finitam*, Salomoni, Roma 1752, § 14, «De radicum limitibus, & mutationibus valoris formulae orti ex diversis substitutionibus factis pro quantitate incognita: ubi de methodo investigandi maxima, & minima» (il paragrafo è compreso in *ENo*, II, pp. 584-631).
[7] R.G. Boscovich, *De transformatione locorum geometricorum*, cit., n. 715, p. 327.

in mezzo abbiamo l'infinito: infatti una frazione è tanto maggiore quanto il denominatore è minore, e se questo decresce all'infinito tanto da essere pari al nulla, la stessa frazione dà un valore assolutamente infinito. Nel caso delle prime due formule il valore passa da positivo a negativo giungendo a zero, nelle ultime due giungendo all'infinito.

50. Se invece si assumesse la formula $100 - 20x + x^2$, e a *x* venissero via via assegnati quegli stessi valori nella medesima successione – cioè 1, 8, 10, 12, 19 – si otterrebbero i valori 81, 4, 0, 4, 81, tutti positivi, e qualunque valore si sostituisse a *x*, si troverebbe sempre un valore positivo. Giunta a zero, infatti, la formula invertirà la direzione e non passerà nel negativo. Analogamente, lo stesso accade per la formula $\frac{1}{100-20x+x^2}$: essa risulta infinita per $x = 10$, ma è sempre positiva per qualsiasi altro valore. Ci sono, però, formule il cui valore migra da positivo a negativo più volte alternativamente, e ciò capita o passando per il nulla oppure per l'infinito. Si prenda la formula $x^3 - 21x^2 + 138x - 280$. In essa, ponendo per *x* qualsiasi valore negativo o zero, o qualsiasi valore positivo minore di 4, si ottiene per la formula un valore negativo; ponendo $x = 4$, diventa $= 0$; ponendo qualunque valore compreso fra 4 e 7, il risultato sarà positivo, dapprima crescente, poi decrescente; ponendo $x = 7$, si ha nuovamente $= 0$; ponendo per *x* qualunque valore compreso fra 7 e 10, si ottiene di nuovo un risultato negativo, dapprima crescente, poi decrescente; ponendo $x = 10$, il valore della formula diventa $= 0$; ma posto per *x* qualunque valore maggiore di 10, si ha per la formula un valore positivo, che cresce via via all'infinito. Inoltre, allo stesso modo, è assai facile trovare formule che, qualunque valore si sostituisca, risultino $= 0$, e qui passino dal positivo al negativo o tornino indietro; lo stesso vale per il passaggio attraverso l'infinito.

51. Lo stesso di quanto si è detto per le formule analitiche ha luogo nelle linee geometriche. Si abbia una retta, per esempio AB nella Figura 2, alla quale venga riferita una qualsiasi linea PEM mediante rette CL, condotte da qualsiasi suo punto perpendicolarmente a AB, e si chiamino, come al solito, AC l'ascissa, CL l'ordinata, AB l'asse. Quelle due quantità AC e CL saranno connesse fra loro in modo che, data quella curva, la grandezza dell'una dipenda dalla grandezza dell'altra. A seconda che la linea PEM si avvicini all'asse o se ne allontani, l'ordinata CL diminuirà o aumenterà. Quando sarà giunta all'asse AB, l'ordinata CL risulterà $= 0$; se essa, attraversato l'asse, si allontana dalla parte opposta, come mostra la figura, l'ordinata muterà direzione, cambiando perciò da positiva a negativa. Se poi, una volta giunta in E, la curva riferita all'asse AB rivolge la traiettoria all'indietro in EM´, allora l'ordinata CL, dopo essersi annullata in E, pure rivolge la traiettoria all'indietro in HM´, nuovamente positiva. Ma potrebbe anche accadere che l'ordinata diventi infinita e, dopo che sarà risultata infinita, torni con la stessa direzione dall'infinito (come avviene nella Figura 11 per la curva LMN, che ha l'asintoto SM e ritorna dalla medesima parte dell'asintoto) oppure torni con direzione opposta (come avviene nella Figura 12, dove gli archi asintotici LM, OP giacciono da parti opposte); tutte queste cose, che qui ci sono necessarie,

nonché altri casi pertinenti, le abbiamo dimostrate accuratamente con semplice geometria nella stessa dissertazione unita a quella sulle sezioni coniche; esse sono indubbiamente assai note ai geometri.

52. I medesimi nessi che vengono esibiti attraverso formule analitiche si possono poi mostrare anche attraverso linee, ove sia x l'ascissa e y l'ordinata, come è ben noto dall'applicazione dell'algebra alla geometria e dalla teoria dei luoghi geometrici. Così, ponendo nella Figura 2 $\mathrm{AE} = 10$, $\mathrm{AC} = x$, $\mathrm{CL} = y$, e immaginando che la linea PEM fosse una retta e l'angolo CEP semiretto [ovvero di 45°], sicché $\mathrm{CL} = \mathrm{CE}$, sarà $y = 10 - x$, come nella prima delle formule analitiche proposte. Se, d'altra parte, PEM´ fosse una parabola ordinaria, il cui asse sia EF, AEB una tangente, il parametro = 1, si avrà la formula $100 - 20x + x^2 = y$. Se, invece, PEM fosse una differente parabola cubica, si avrebbe la formula $1000 - 300x + 30x^2 - x^3 = y$. E dove fosse $\mathrm{AC} = \mathrm{AE}$ (cioè $x = 10$), risulterebbe CL (ossia $y = 0$); ma nel primo e nel terzo caso, ove l'ascissa AC si allontani in AH oltre AE, l'ordinata y in HM risulta negativa, mentre nel secondo caso, in HM´, rimane positiva.

53. Così, se ci fosse una qualsiasi formula algebrica che in qualunque modo presenti una relazione fra l'ordinata e l'ascissa – separate nella maniera appena vista oppure mescolate in un modo o nell'altro –, si avrà sempre una linea che esprime quella relazione che viene detta il suo grado, a cui sono elevate le potenze delle x e delle yy mescolate insieme. Se non sono mescolate e non sono elevate oltre il primo grado, la linea che corrisponde all'equazione è una retta; quando separatamente o insieme sono elevate a gradi superiori, si ha una linea curva: al secondo grado è sempre una delle sezioni coniche, che vengono dette curve del primo genere; a gradi più elevati le curve sono più alte, e più il grado cresce più le curve sono alte, e crescono enormemente in maniera assai rapida, com'è facile capire dalla teoria delle combinazioni – sicché, per esempio, ventiquattro letterine, combinate in vari modi, forniscono in abbondanza a tutti i popoli un gran numero di parole. Ci sono poi altre curve che corrispondono a formule non algebriche, bensì infinitesimali, chiamate trascendenti, e ce ne sono forse infinite altre che esprimono relazioni tali che nessun'algebra finora conosciuta è in grado di rendere.

54. Ora, quanto più elevato è il grado di una curva, tanti più sono i punti in cui può intersecare una retta, e si possono sempre trovare curve (per altro in numero infinito) che passino per quanti punti dati si voglia, e si avvicinino alla retta in quanti e quali punti dati si voglia, fin là dove la intersecano o la toccano, come piacerà; lo stesso dicasi per le formule algebriche che esprimono l'andamento di curve del genere e, quanti che siano i valori sostituiti alla variabile yx, presentano un valore = 0, passando lì al negativo oppure tornando indietro. Inoltre, come abbiamo accennato l'anno scorso, nella stessa serie precedente di quantità decrescenti fino a zero c'è la disposizione a passare o a non passare al negativo. Se, infatti, l'ordinata CL, prima di svanire, diminuisce della distanza CE da zero in ragione di una qualche potenza di grado pari, torna indietro; se ciò avviene in ragione di una potenza di grado dispari, passa. Dov'era $y =$

$10 - x$, era = CE, ossia la prima potenza di quella distanza; dov'era $y = 100 - 20x + x^2$, era uguale al quadrato di CE, ossia del valore 10 – x, quando era $y = 1000 - 300x + 30x^2 - x^3$, era uguale al cubo dello stesso EC, ossia di quel medesimo valore. Perciò nel primo e terzo caso è passata al negativo, nel secondo ha conservato valore positivo.

55. Tutto ciò premesso, se la natura del punto – o la qualità a esso attribuita o la libera legge di Dio – produce una legge delle forze corrispondente a una formula che attraverso lo zero passa al negativo o a una curva che intersechi l'asse, quelle stesse forze, come necessariamente richiede tale legge, passeranno da positive a negative, ovvero da attrattive a repulsive, e tale cambiamento di direzione delle forze ci sarà tutte le volte che la curva intersecherà l'asse. Un salto ci sarà nel caso in cui, una volta arrivati a zero, non si passasse da attrazione a repulsione, e quel cambiamento è necessario per preservare la natura della legge; se essa non ci fosse, allora si avrebbero diverse leggi collegate casualmente fra loro.

56. Del resto, da quanto abbiamo detto, e ancor meglio dalla stessa natura delle curve, si ricava un argomento validissimo a favore dell'idea che ammette non le sole attrazioni, ma attrazioni unite a repulsioni. Infatti, una legge delle forze, qualunque essa sia, deve potersi esprimere attraverso una qualche linea. Immaginiamoci di ignorare completamente di quale tipo debba essere la curva, e di non avere alcun argomento che ci fa propendere per l'uno o l'altro partito, e vediamo che cosa debba essere più probabile perché vi siano solo attrazioni, e che cosa perché vi siano anche repulsioni. Nel primo caso occorre che la linea che esprime la legge non intersechi l'asse in nessun luogo; nel secondo, che lo intersechi. Ciò posto, consideriamo se sia più probabile che si abbia una linea che non intersechi l'asse, o che se ne abbia una che lo intersechi.

57. Per cominciare con le linee del primo ordine, qualsiasi retta è necessariamente intersecata da tutte le rette di tutte le direzioni, tranne le sole a essa parallele. Perciò, le rette che necessariamente la tagliano sono infinitamente di più di quelle che non la tagliano. Le linee del secondo ordine, cioè le sezioni coniche, sono tali che ci sono infinite linee che intersecano un'ellissi e infinite altre che non l'intersecano: tutte le linee di qualunque direzione che giacciano fra le tangenti intersecano l'ellisse, quelle che sono al di fuori non l'intersecano; al contrario, nell'iperbole quelle che stanno fra le tangenti non intersecano la curva, quelle al di fuori la intersecano. Per la parabola, linee di tutte le direzioni che giacciano da una parte della tangente non la intersecano, quelle che stanno dall'altra parte la intersecano. Pertanto qui siamo in parità. Fra le curve di secondo genere di terzo grado ce ne sono moltissime i cui rami si estendono da parti opposte, cosicché non può esserci alcuna retta che non le interseca, e ciò accade in tutti i gradi dispari. Le linee che intersecano sono infinitamente di più di quelle che non intersecano, e quanto più alto il grado della curva, tanto più sono i punti in cui possono intersecare.

58. Si può allora argomentare così. Non c'è alcuna linea che non sia intersecata da un numero infinito di rette; ci sono infinite linee che una qualsiasi retta non può non

intersecare, e le curve combinate con rette che vengono intersecate da rette sono infinitamente più numerose di quelle che non ne vengono intersecate. Pertanto è infinitamente più probabile che la legge delle forze sia espressa da una curva tale da intersecare l'asse anziché da una che non lo intersechi. D'altra parte, curve che possano venire intersecate da rette in pochi punti sono immensamente meno numerose di quelle che possono venire intersecate in molti punti. Sicché è immensamente più probabile che questa legge venga espressa da una curva che possa intersecare l'asse in molti punti anziché da una che lo intersechi in pochi punti. Sono indubbiamente questi gli argomenti a favore della nostra concezione, se immaginiamo di non sapere alcunché. Se venisse dimostrato affermativamente il contrario, questo giudizio preliminare crollerebbe; ma verrebbe confermato in in modo assai solido qualora provassimo positivamente la forma stessa della nostra curva.

59. Contro la sola attrazione vi sono poi parecchie difficoltà, che crescono gradualmente. Anzitutto, se quelle forze agissero a distanze piccole a piacere, produrrebbero un aumento di velocità sino al contatto; raggiunto quel punto, l'incremento di velocità s'interromperebbe con un salto, e qualora essa fosse massima, le parti tenderebbero di continuo a provocare un effetto ulteriore e darebbero inevitabilmente luogo a vani tentativi.

60. Ipotizziamo che a distanze infinitamente ridotte crescano secondo l'inverso delle distanze: analogamente vi sarebbero molteplici difficoltà, che confermano la nostra concezione, opposta a questa. In particolare, in tale ipotesi sulle forze si può giungere a un contatto in cui una forza, annullata ogni distanza, deve aumentare all'infinito più che ad altra distanza. Inoltre noi riteniamo che sia stato dimostrato in maniera esauriente che non possano esistere quantità che siano in sé infinite o infinitamente piccole. Da ciò si ricava immediatamente l'assurdo, cioè che se le forze a una qualche distanza sono determinate, al contatto dovrebbero essere assolutamente infinite.

61. La difficoltà cresce nel caso in cui la proporzionalità inversa sia maggiore di quella semplice (per esempio, per la gravità è necessario l'inverso del quadrato; e per la coesione un indice persino maggiore) e riguardi coppie di punti. Infatti, quei punti incontrandosi arriverebbero a una velocità assolutamente infinita. Ma una velocità assolutamente infinita è impossibile, giacché richiede che uno spazio finito venga percorso istantaneamente, e persino la duplicazione, ovvero l'estensione simultanea attraverso uno spazio finito divisibile, e per qualunque tempo finito richiede uno spazio infinito; esso, però, non potendo essere compreso fra due punti, richiederebbe per sua natura che non vi sia in alcun luogo un punto con tale velocità.

62. Emergono molteplici assurdità, cui ci conducono leggi del genere. Un punto si muova verso un centro F (come nella Figura 6) in maniera inversamente proporzionale al quadrato delle distanze; lo si spinga da A in direzione AB perpendicolare a AF, con velocità abbastanza piccola: descriverà l'ellisse ACDE, il cui fuoco sarà F, e ritornerà sempre in A. La velocità AB diminuisca fino ad annullarsi: l'ellisse si restringerà sempre di più e il vertice D si avvicinerà al fuoco F, col quale infine coinciderà, mentre

l'ellisse si ritirerà nella retta AF. Si vede quindi che quel punto, lasciato a se stesso, deve scendere fino a F, poi, acquisita lì una velocità infinita, deve convertirla nella velocità opposta (senza che vi siano forze contrarie), e tornare indietro. Ma s'immagini che quel punto si muova secondo quella stessa proporzionalità verso ogni punto di una superficie sferica, per esempio la sfera EGCH: è stato dimostrato da Newton che dovrebbe scendere lungo AG con moto accelerato uguale a quello che si avrebbe nel caso in cui tutti i punti della superficie o della sfera fossero concentrati in F. Se poi in G cessasse improvvisamente la legge di accelerazione, il punto dovrebbe spostarsi lungo GH con moto uniforme (eliminandosi tutte le forze per azioni contrarie), e poi con moto decelerato avanzare della stessa quantità lungo HI; quindi eseguire una continua oscillazione, interrompendo per salto la variazione di velocità due volte in ciascuna oscillazione.

63. Già in questo sembrano esservi assurdità; e l'assurdo aumenta notevolmente considerando che cosa debba accadere se l'intera superficie sferica o tutta quanta la sfera si trasformasse in un unico punto F. In tal caso, analogamente, un corpo lasciato a se stesso arriverebbe al centro con velocità infinita, proseguendo però fino a I, mentre prima, allo scomparire dell'ellisse, doveva tornare indietro. Noi abbiamo dimostrato altrove, in più occasioni, che l'errore si annida nella prima determinazione, poiché, scomparendo l'ellisse, si sono annullate tutte le forze che spingono lungo l'arco situato oltre F verso la parte di D, forze che dovevano estinguere la velocità precedente e produrne una nuova, uguale a quella. In realtà, qui si ha ancora un salto, con cui sono in contraddizione tanto la natura quanto la geometria. Infatti, finché si ha una velocità [AB] piccola a piacere, c'è sempre un ritorno in A, con avanzamento FD tanto minore quanto minore è la velocità; invece, fatta zero la velocità, l'avanzamento risulta immediatamente FI, a meno che vi siano state velocità intermedie minori. E se qualcuno volesse conservare la determinazione precedente, che un punto, spinto verso il centro da una forza proporzionale all'inverso del quadrato della distanza, debba tornare indietro dal centro: in tal caso vi sarebbe un salto simile laddove il punto tenda prima verso una superficie sferica, o una sfera, che a poco a poco collassi nel centro. Finché, infatti, sarà presente tale superficie o tale sfera, si avrà sempre questa prosecuzione, che s'interromperà all'arrivo dell'intera superficie al centro, a meno che prima non vi siano avanzamenti minori.

64. Ciò vale per l'inverso del quadrato delle distanze; per l'inverso del cubo si hanno difficoltà persino più gravi. Se, infatti, un mobile venisse lanciato con velocità assegnata lungo la retta AB che, come nella Figura 7, forma un angolo acuto con AP, e tale mobile venisse spinto verso P con una forza che cresce coll'inverso del cubo della distanza, si dimostra in meccanica che esso dovrà percorrere la curva ACDEFGH, chiamata spirale logaritmica, la quale è dotata della proprietà seguente: qualunque retta – per esempio PF – condotta verso qualsiasi suo punto forma con la retta tangente in quel punto un angolo uguale all'angolo PAB. Da ciò segue che essa si avvolge tutta da una parte, formando infinite spire attorno al punto P, e tuttavia non vi termina mai; che se da P si traccia una retta perpendicolare a AP che incontra in B la tangente AB,

prolungando all'infinito l'intera spirale ACDEFGH, essa si approssima indefinitamente alla lunghezza di AB senza mai eguagliarla; inoltre, che in una curva del genere la velocità cresce perpetuamente al continuo avvicinarsi al centro di forze P. Perciò il mobile dovrebbe arrivare al centro P in un tempo finito, certamente più breve di quello che impiega per percorrere AB con la velocità iniziale. Ma in questo ci sono due gravissime assurdità. Anzitutto ciò significherebbe che tutta quella spirale terminerebbe nel centro, contro ciò che si deduce dalla sua natura, poiché essa non può mai finire nel centro; in secondo luogo, trascorso quel tempo finito, quel mobile non dovrebbe essere in nessun luogo. Infatti quella curva, ove la si intenda anche proseguita all'infinito, non ha alcuna uscita da P. E le formule analitiche mostrano che, passato tale tempo, la sua posizione è impossibile, ossia, come si dice, immaginaria; con questo ragionamento Eulero, nella sua *Meccanica*, affermò che quel mobile, nel raggiungere il centro delle forze, si deve annichilire. Quanto sarebbe stato più soddisfacente inferire che tale legge delle forze è impossibile!

65. Ma quanto maggiori sarebbero le assurdità, se si vincolassero le forze a potenze di grado ancora maggiore! Si abbia una sfera ABE [vedi la Figura 8] che racchiuda una seconda sfera [AB´Q][8] tangente in A alla prima; in tutti i punti dell'una e dell'altra agiscano forze decrescenti secondo l'inverso del biquadrato (o anche una potenza più elevata) della distanza, e si cerchi il rapporto di forza di un punto determinato nell'entrare in contatto in A delle due superfici. Si immagini che entrambe si aprano in piramidi infinitamente sottili, che escano dal punto comune A, per esempio BAD, [B´A*d*][9]. Nelle singole piramidine, divise tutte in parti proporzionali, vi siano poi particelle MN, *mn* simili fra loro e disposte in maniera analoga. La quantità di materia in MN sta alla quantità in *mn* come la massa dell'intero globo maggiore sta a quella dell'intero globo minore, cioè come il cubo del raggio della sfera più grande sta al cubo del raggio della più piccola. Pertanto, poiché la forza da cui viene attratto il punto A è direttamente proporzionale alla quantità di materia e inversamente proporzionale alla quarta potenza delle distanze, che stanno fra loro come i raggi delle sfere, l'attrazione verso MN sarà proporzionale a quella verso *mn* in ragione diretta al cubo del rapporto fra il raggio della sfera maggiore e quello della sfera minore, e in ragione inversa al biquadrato del rapporto fra il primo raggio e il secondo. Di conseguenza, rimarrà il rapporto semplice reciproco fra i raggi.

66. Perciò, l'azione delle singole particelle omologhe MN sarà minore delle particelle *mn* nello stesso rapporto dei raggi, sicché il punto A verrà attratto dall'intera sfera ABE meno che dall'intera sfera [AB´Q], il che è assurdo, dato che l'attrazione verso la sfera minore deve far parte dell'attrazione verso la sfera maggiore, che contiene la minore, gran parte della materia essendo posta fuori di essa, fino alla superficie della sfera maggiore. Da ciò si conclude che una parte è maggiore del tutto, cioè si ricava una conclusione assurda. E questo errore è indubbiamente assai più grande alle potenze di

[8] Nel testo originale la seconda sfera è A*be*; ma qui il testo non collima con la figura.
[9] Nel testo originale la seconda piramide è *b*A*d*; ma qui il testo non collima con la figura.

grado più elevato; infatti, in generale, se la forza è inversamente proporzionale a R^m, dove R è il raggio e m un qualunque numero maggiore di 3, l'attrazione della sfera sarà inversamente proporzionale, per la stessa ragione, a R^{m-3}, che significa una maggior attrazione, al crescere di mm, verso la sfera più piccola rispetto a quella verso la sfera più grande, in cui quella piccola è contenuta.

67. In questo modo si scoprono moltissime assurdità in svariati generi[10] di attrazione, che svaniscono completamente se alle minime distanze si ammettono repulsioni capaci di estinguere una velocità grande a piacere, poiché le repulsioni impediscono completamente l'avvicinamento e l'urto reciproci. Com'è evidente, da ciò segue nuovamente che alle minime distanze si devono preferire le repulsioni alle attrazioni, dai cui vari generi vengono tante assurdità.

68. Esposto tutto ciò in maniera alquanto più dettagliata, veniamo ora alla curva – ovvero alla formula analitica – che nella nostra teoria dovrà corrispondere alla legge delle forze esistenti in natura. Tale curva è mostrata nella Figura 9. Il suo asse è C´C, l'origine delle ascisse è in A, da cui comincia la retta AB illimitata, perpendicolare all'asse, alla quale le ordinate saranno parallele. Il percorso seguito dalla curva è mostrato da una parte da DEFGHIKLMNOPQRSTV e dalla parte opposta da D´E´F´G´ ecc. Il primo arco ED, dalla parte di D, tenderà all'infinito alla retta AB, senza mai coincidere con essa e avendola quindi per asintoto; in direzione di E, invece, la curva continua ad allontanarsi dalla stessa BA avvicinandosi all'asse, che intersecherà in qualche punto in E nonché in moltissimi altri punti G, I, L, N, P e così via, incurvandosi da una parte e dall'altra in F, H, K ecc., mentre un certo arco TV, sufficientemente lontano, viene pressoché a coincidere con uno che abbia per asintoto l'asse AC e che giaccia, rispetto a tale asse, dalla parte opposta a quella in cui giace l'arco asintotico ED. Le ascisse – per esempio A*a*, A*c*, A*x*, A*e* – esprimono le distanze di due punti fra loro; le ordinate *ag*, *x*X, giacenti dalla parte della prima gamba [*cruris*] asintotica ED, esprimono le forze repulsive, mentre le ordinate giacenti dalla parte opposta, *cu*, *eb*, esprimono le forze attrattive. La curva dovrà allontanarsi incessantemente dall'asintoto AB, affinché a nessun punto dell'asse possano corrispondere più ordinate, in modo che a ciascuna distanza corrisponda solamente una forza. La prima gamba dovrà essere asintotica, perché, diminuendo all'infinito le ascisse A*b*, A*a*, le ordinate *bt*, *ag* crescano all'infinito, cosicché, diminuite le distanze all'infinito, le forze repulsive crescano all'infinito. Ma tali ordinate dovranno crescere, rispetto alle ascisse, con una proporzionalità inversa non inferiore a quella semplice. Infatti, come si dimostra in geometria sublime, se le ordinate crescessero rispetto alle ascisse con una proporzionalità inversa inferiore a quella semplice (per esempio in rapporto a una radice quadrata, cubica e così via) l'area BAED sarebbe finita; se invece crescono con proporzionalità semplice o maggiore (per esempio in rapporto a una quantità elevata al quadrato, al cubo e così via), l'area sarà infinita. Ma lo stesso accade in meccanica, dove le ascisse esprimono spazi mentre le ordinate esprimono forze agenti su singoli punti

[10] Nel testo originale: «*generibes*», ma è ovviamente «*generibus*».

di quegli spazi; l'area che quelle coordinate per così dire coprono esprimerà l'aumento o la diminuzione del quadrato della velocità. Perciò, affinché le forze repulsive del ramo asintotico ED corrispondano a qualsiasi velocità grande a piacere che debba essere estinta, l'area asintotica BAED dovrà essere infinita, e per essere infinita l'ordinata dovrà diminuire con una proporzionalità inversa non inferiore a quella semplice.

69. Seguirà la serie di archi EFG, GHI, IKL ecc., di cui il primo sarà attrattivo, il secondo repulsivo, il terzo attrattivo, e così via alternativamente, con i loro limiti E, G, I, L etc., nel primo dei quali si passi da forza repulsiva ad attrattiva, nel secondo da attrattiva a repulsiva, nel terzo di nuovo da repulsiva ad attrattiva, e così via alternativamente. Essi esprimeranno quelle forze alle piccole distanze, ora attrattive ora repulsive.

70. Ci sarà infine un certo arco TV dalla parte attrattiva , che approssima un arco iperbolico avente le ordinate inversamente proporzionali al quadrato delle ascisse. Tale arco presenterà un'attrazione decrescente secondo quella proporzionalità inversa rispetto al quadrato delle distanze che, grazie alle leggi di Keplero, si è rivelata a Newton nei pianeti e nelle comete.

71. A questa concezione ci conduce la semplicità estrema cui la natura aspira nei suoi primi elementi, la quale ci convince che c'è un'unica legge delle forze, comune a tutti i punti della materia. Riteniamo che non si possa ricavare da alcun argomento metafisico che la semplicità sia ciò che la natura debba proporsi nelle proprie opere, del che si convincerà facilmente chi, come noi, contemplerà tanta varietà in quella particella di mondo che ci è nota. Bisogna investigarne il carattere [*indoles*] dalle sue stesse opere. In realtà, esse rivelano un tipo d'ingegno che aspira a estrema semplicità nei primi elementi delle cose, a estrema varietà nella composizione. In qual piccolo numero di elementi, infatti, i chimici scompongono così tante sostanze! Specialmente con l'analisi intrapresa col fuoco vediamo che si giunge a un numero davvero piccolo di principi conformi fra loro; e non si è forse propensi a credere che, se avessimo avuto altre risorse per eseguire un'ulteriore analisi, saremmo potuti arrivare a principi ancora più semplici, e persino a un unico principio? Come chi intraprenda l'analisi di un qualche libro dedicato al sangue vedrà che esso si compone di un certo numero di voci, spesso anche ripetute, e che le voci sono composte da un più piccolo numero di caratteri ripetuti assai più frequentemente; allo stesso modo, cose che a occhio nudo sembrano del tutto differenti, tuttavia al microscopio appariranno costituite da globuli rossi (dai quali appunto è costituita la sostanza rossa del sangue), ai nostri sensi esattamente uguali, e diversi solo quanto all'ordine in cui sono disposti.

72. In base a ciò, sosteniamo che un'unica curva continua esprime le forze di elementi semplici, le cui ordinate, poiché alle piccole distanze non sempre concordano con l'inverso del quadrato delle distanze, non possono affatto avere quel rapporto esatto; infatti due curve dotate di una certa natura, dato un loro arco piccolo a piacere, non

possono essere perfettamente congruenti con una retta o tra loro. Possiamo ovviamente immaginare l'iperbole nella quale le ordinate sono esattamente proporzionali all'inverso del quadrato delle distanze, oppure un'altra curva, le cui ordinate, congiunte con le ordinate della stessa [cioè di quell'iperbole], presentino le ordinate della nostra curva, e scomporre la nostra in queste due, dicendo che tutti i punti della materia hanno una gravità che diminuisce in maniera esattamente proporzionale all'inverso del quadrato della distanza e di una certa altra forza, espressa mediante questa nuova curva – forza che alle grandi distanze, come quelle fra i pianeti, sarebbe nulla per i sensi; a distanze più piccole, ove la nostra curva ha attrazioni, sarebbe meno attrattiva o anche repulsiva; dove la nostra curva ha repulsioni, sarebbe tanto più repulsiva quanto lo richiede l'annullamento dell'attrazione determinata dalla gravità universale. Allo stesso modo questa nuova curva potrà risolversi in due, una delle quali soddisferà alla sola impenetrabilità, l'altra, congiunta con quella, formerà la precedente nuova curva, e così via si potranno immaginare moltissime curve in cui sarà risolta la nostra, l'una delle quali corrisponderebbe alla gravità, l'altra ad altre caratteristiche; così, curve che dall'unione di più punti danno luogo a un piccolo tratto potranno essere chiamate con nomi loro propri, come se ci fosse una curva per l'elasticità, una per la fluidità, e così via. Ma tutte queste cose seguirebbero dal nostro modo di considerare le cose, e negli elementi semplici si avrebbe un unico e semplicissimo principio, un'unica legge, espressa da un'unica curva in cui la forza attrattiva non è mai esattamente proporzionale all'inverso del quadrato delle distanze. Non ci fanno per nulla vacillare le leggi di Keplero, che sono vere in modo approssimato, non esattamente, essendo anche perturbate dall'azione reciproca dei pianeti. Né ci fa vacillare la perfezione massima che, a parere di Maupertuis, risiederebbe nell'inverso del quadrato delle distanze (poiché in essa particelle e sfere perfette agiscono in rapporto all'inverso del quadrato delle distanze dai centri) e che, secondo lui, sarebbe la causa per cui Dio ha voluto questa legge in particolare. Infatti, mai potremo indurci a credere nelle cause finali per la determinazione di leggi di natura; e soprattutto allorché risulta evidente che nei fenomeni magnetici, elettrici, elastici quella legge non viene affatto osservata, non vediamo perché essa avrebbe necessariamente dovuto venir scelta per la sola gravità.

73. Che cosa accada all'arco più lontano, al di là di V, non lo sappiamo. Forse esso interseca di nuovo l'asse alla distanza delle stelle fisse, in modo che esse, collocate in certi limiti, possano rimanere in quiete le une rispetto alle altre. Infatti, se quella gamba è davvero asintotica e procede all'infinito nella parte attrattiva, tutta la materia tenderebbe a unirsi, giungendovi completamente in lungo tempo; a meno che vengano violate le leggi dapprima stabilite, al punto che la natura stessa sarebbe formata in modo tale che le leggi, che riteniamo stabilite dall'Artefice Divino per la perenne conservazione della natura (sicché mentre le parti nascono e muoiono, essa possa perdurare con le proprie leggi), precipitino sino a distruggersi da sole.

74. Dell'arco D´E´F´G´, posto dietro l'asintoto AB, non abbiamo molto da preoccuparci, poiché la distanza dei punti, per la prima forza e per l'area repulsiva che cresce all'infinito, non può mai trasformarsi in negativa. Tuttavia, se la gamba TV si avvicina infinitamente all'inverso del quadrato delle distanze, a esso deve corrispondere una gamba della stessa forma, anch'essa attrattiva, dall'altra parte (infatti, i quadrati delle distanze rimangono positivi); inoltre, per la legge della continuità geometrica, alla gamba asintotica ED deve certamente corrispondere un'altra gamba che torna dall'infinito, o dalla stessa parte o dalla parte opposta[11]. Perciò, determineremo la nostra curva in modo tale che abbia la stessa forma e sia uguale da entrambe le parti dell'asintoto AB.

75. Pertanto, per arrivare ora a dimostrarne la semplicità, si abbia la Proposizione I, Problema: *Trovare la natura di una curva in cui, esprimendo le ascisse le distanze, le ordinate esprimano forze che variano in un qualsiasi modo al variare delle distanze, che passino da repulsive ad attrattive e da attrattive a repulsive in limiti dati (quale che sia il loro numero), le quali, però, siano repulsive alle distanze minime, divenendo via via più intense in modo che velocità qualunque, grandi a piacere, si estinguano a due a due*. Poiché abbiamo posto «che variano in un qualsiasi modo al variare delle distanze», nella proposizione è compreso anche un rapporto che approssimi l'inverso del quadrato delle distanze – a certe distanze sufficientemente grandi a piacere – ed esprima la gravità universale.

76. Inoltre, per avere la curva che cerchiamo saranno necessarie e sufficienti le seguenti sei condizioni. Primo: [la curva] sia regolare e semplice, e non composta da un aggregato di archi di curve diverse. Secondo: intersechi l'asse C´AC soltanto in certi punti dati, a coppie di distanze AE´, AE; AG´, AG, ecc., uguali da una parte e dall'altra e quale che sia il loro numero. Terzo: a ogni ascissa corrisponda una e una sola ordinata. Quarto: ad ascisse uguali prese da una parte e dall'altra di AB corrispondano ordinate uguali. Quinto: [le ordinate] abbiano la retta AB per asintoto, risultando l'area asintotica BAED infinita. Sesto: archi delimitati da intersezioni qualsiasi possano essere variati a piacere, e allontanarsi a distanze qualunque dall'asse C´AC, avvicinandosi a piacere a qualunque arco di qualsiasi curva, intersecandolo, toccandolo in un punto o osculandolo con qualsiasi tipo di osculazione, quali e quanti siano i punti dati di tali curve.

77. Per soddisfare a queste condizioni, troveremo una formula algebrica che conterrà la nostra legge; in ciò, però, daremo per conosciuti gli elementi generali dell'algebra cartesiana ordinaria, senza dei quali non c'è modo di portare a termine la cosa. Ora, si chiami y l'ordinata, x l'ascissa, e si ponga $xx = z$. Si prendano i valori di AE, AG, AI, ecc., tutti con segno negativo, e sia a la somma dei quadrati di tutti quei valori, b la somma dei prodotti di tutti quei quadrati presi a due a due, c la somma dei prodotti

[11] La parentesi nell'originale, in corrispondenza di questo punto, va probabilmente spostata sopra.

a terne, e così via; si indichi poi con f il prodotto di tutti questi. Il numero dei valori sia m. Ciò posto, si scriva:

$$z^m + az^{m-1} + bz^{m-2} + cz^{m-3} \text{ ecc } \ldots + f = \text{P}.$$

Se si pone $\text{P} = 0$, è chiaro che tutte le radici di questa equazione saranno reali e positive, cioè soltanto i quadrati delle quantità AE, AG, AI etc., che saranno i valori di z; perciò, dato che da $xx = z$ viene $x = \pm\sqrt{z}$, è evidente che i valori di x saranno tanto AE, AG, AI (quantità positive) quanto AE´, AG´, ecc. (quantità negative).

78. Si assumano poi una qualunque quantità data per mezzo di z e delle costanti in qualunque modo, purché tale quantità non abbia alcun divisore comune con P e svanisca allo svanire di z; inoltre, posta x infinitesima del primo ordine, la quantità risulti infinitesima del medesimo ordine o di ordine inferiore. Così vi sarà una qualunque formula

$$z^r + gz^{r-1} + hz^{r-2} \text{ ecc.} + l.$$

Se posta $= 0$, essa avrà quante radici immaginarie e reali si vogliano; e avrà radici reali di qualsiasi tipo (purché nessuna di esse sia uguale alle quantità AE, AG, AI ecc., sia positive sia negative), se la si moltiplica tutta per z. La si indichi con Q.

79. Se ora poniamo $\text{P} - \text{Q}y = 0$, dico che questa equazione soddisferà a tutte le rimanenti condizioni di questa curva e, determinato opportunamente il valore Q, potrà soddisfare in infiniti modi anche all'ultima condizione, esposta al punto sesto.

80. Infatti, in primo luogo, poiché i valori P e Q, posti = 0, non hanno alcuna radice in comune, non avranno neppure alcun divisore comune. Ne consegue che questa equazione non può essere ridotta a due per divisione; dunque non è composta da due equazioni, ma è semplice e – di conseguenza – rappresenta una qualche curva semplice continua, che non è composta da altre. Questa era la prima condizione.

81. Poi, una curva siffatta intersecherà l'asse C´AC in tutti e soli i punti E, G, I, ecc.; E´, G´, ecc. Infatti, essa intersecherà l'asse C´AC in tutti e soli i punti in cui $y = 0$. Inoltre, dove sarà $y = 0$, sarà anche $\text{Q}y = 0$; perciò, poiché $\text{P} - \text{Q}y = 0$, sarà $\text{P} = 0$. Ma ciò accade solo in quei punti in cui z sarà una delle radici dell'equazione $\text{P} = 0$, cioè – come abbiamo visto sopra – nei punti E, G, I, ovvero E´, G´, ecc. Perciò solo in questi punti y scomparirà e la curva intersecherà l'asse. D'altra parte, che intersecherà l'asse in tutti questi punti è evidente dal fatto che in tutti loro sarà $\text{P} = 0$. Perciò sarà anche $\text{Q}y = 0$. Non sarà, però, $\text{Q} = 0$, non essendovi alcuna radice in comune fra le equazioni $\text{P} = 0$ e $\text{Q} = 0$. Sicché sarà $y = 0$ e la curva intersecherà l'asse. Questa era la seconda condizione.

82. Inoltre, poiché $\text{P} - \text{Q}y = 0$, sarà $y = \frac{\text{P}}{\text{Q}}$. Del resto, per qualsiasi ascissa determinata x ci sarà una determinata z; perciò P e Q saranno univocamente determinate. Pertanto

anche y sarà univocamente determinata, sicché a ogni ascissa x corrisponderà una e una sola y. Questa era la terza condizione.

83. Di nuovo, se x viene presa sia positiva sia negativa, purché sia della medesima lunghezza, il valore $z = xx$ resterà lo stesso; perciò i valori tanto di P quanto di Q saranno sempre gli stessi. E per questo motivo y sarà la stessa. Assunte pertanto ascisse x uguali da una parte e dall'altra di A, l'una positiva e l'altra negativa, le ordinate corrispondenti saranno uguali. Questa era la quarta condizione.

84. Ora, al diminuire di x all'infinito – sia essa positiva o negativa –, anche z diminuirà all'infinito[12] e risulterà infinitesimo del secondo ordine. Per questo motivo, nel valore P diminuiranno all'infinito tutti i termini tranne f [13], poiché tutti i termini eccetto questo sono moltiplicati per z; perciò il valore P sarà ancora finito. Invece, il valore Q, che ha la formula interamente moltiplicata per z, diminuirà all'infinito e sarà infinitesimo del secondo ordine. Dunque la formula $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} = y$ aumenterà all'infinito, risultando infinita del secondo ordine. Per questo motivo la curva avrà per asintoto la retta AB, e l'area BAED aumenterà all'infinito; e se le ordinate y vengono prese positive dalle parti di AB ed esprimono forze repulsive, l'arco asintotico ED giacerà dalla stessa parte di AB. Questa era la quinta condizione.

85. Pertanto, è chiaro che, comunque venga preso Q alle condizioni date, le prime cinque condizioni per la curva saranno soddisfatte. Ora, il valore Q può venire variato in infiniti modi, tali che esso soddisfi sempre alle condizioni alle quali è stato assunto. Di conseguenza, gli archi di curva intercettati fra le intersezioni [con l'asse delle ascisse] potranno sottostare a infinite variazioni, tali da soddisfare alle prime cinque condizioni di della curva. Ne viene che possono essere variati anche in modo da soddisfare alla sesta condizione.

86. Infatti, se fossero dati quanti e quali archi si vogliano di qualsiasi curva, purché siano tali da allontanarsi incessantemente dall'asintoto AB (sicché nessuna retta parallela a quell'asintoto taglia quegli archi in più di un punto), e su di essi si prendano quanti punti si vogliano, posti a una distanza piccola a piacere fra loro, si potrà assumere assai agevolmente un valore P tale che la curva passi per tutti quei punti, ed esso potrà essere variato in infiniti modi, cosicché la curva passi ancora e sempre per quegli stessi punti.

87. Sia infatti un numero qualunque di punti presi $= r$, e da ciascuno di tali punti si conducano rette parallele a AB, fino all'asse C´AC, le quali devono essere le ordinate della curva cercata; le singole ascisse da A fino a tali ordinate siano dette M_1, M_2, M_3

---

[12] Nel testo originale: «sempe, z minuetur in infinitum», ma dev'essere «semper z minuetur in infinitum».

[13] Nel testo originale: «in valore P decrescent in infinitum omnes termini praeter y, quia omnes praeter eum multiplicantur per z». Ma osservando la formula che ha come valore P, il solo termine non moltiplicato per z è f.

ecc.; le singole ordinate N'_1, N'_2, N'_3 ecc. Si assuma inoltre una certa quantità $Az^r + Bz^{r-1} + Cz^{r-2} ... + Gz$ che sia posta $=$ R. Si prenda poi un'altra quantità T tale che allo svanire di z svanisca qualunque suo termine, e non vi sia alcun divisore comune tra il valore P e il valore $R + T$; ciò avverrà facilmente quando siano noti tutti i divisori della quantità P. Si ponga inoltre $Q = R + T$; allora l'equazione della curva sarà $P - Ry - Ty = 0$. In quest'ultima equazione si sostituiscano uno dopo l'altro M_1, M_2, M_3, ecc. per x; N_1, N_2, N_3, ecc. per y. Ci saranno r equazioni ciascuna delle quali conterrà i valori A, B, C, … G, tutti monodimensionali, anch'essi in numero r; ogni equazione conterrà inoltre i valori dati M_1, M_2, M_3, ecc., e N_1, N_2, N_3, ecc., nonché i valori arbitrari che in T sono i coefficienti di z stessa.

88. Per mezzo di tali equazioni, in numero r, verranno determinati assai facilmente quei valori A, B, C … G, che sono pure in numero r, prendendo nella prima equazione, secondo i ben noti metodi elementari, il valore A, e sostituendolo in tutte le equazioni seguenti: in tal modo si avranno $r - 1$ equazioni. Queste, d'altra parte, estratto un valore B, si ridurranno a $r - 2$, e così via, finché si sarà pervenuti a una sola equazione. In essa, determinato con ciò il valore G, si determineranno procedendo al contrario tutti i valori precedenti, ciascuno in ogni equazione.

89. Determinati in tal modo i valori A, B, C … G nell'equazione $P - Ry - Ty = 0$, ovvero $P - Qy = 0$, è chiaro che, sostituiti uno dopo l'altro i valori M_1, M_2, M_3, ecc. a x, i valori delle ordinate y devono essere in successione N_1, N_2, N_3, ecc.; di conseguenza, la curva deve passare per i punti dati nelle curve date; e tuttavia il valore Q soddisferà ancora a tutte le condizioni precedenti. Infatti, con z diminuita oltre qualunque limite, ogni suo termine diminuirà oltre qualunque limite, poiché, diminuendo ciascun termine del valore T (in accordo con l'assunzione fatta), diminuiranno in ugual misura i termini del valore R, che sono tutti moltiplicati per z. Inoltre, non vi sarà alcun divisore comune fra le quantità P e Q, non essendocene alcuno fra le quantità P e $R + T$.

90. E se, tra i punti presi sugli archi delle curve, se ne immaginano due vicinissimi fra loro, che dalla stessa parte dell'asse si avvicinino oltre ogni limite fino a coincidere – cioè rendendo uguali due valori M, e analogamente due valori N –, allora la curva cercata toccherà l'arco della curva data in quel punto. Se fossero tre di tali punti a coincidere, la osculerà; anzi, può darsi che un numero a piacere di punti coincida ove si voglia e che vi siano osculazioni di qualsiasi ordine piaccia. Esse potranno essere tanto vicine fra loro quanto si voglia, e un arco della curva data posto a qualsivoglia distanza potrà avvicinarsi in qualunque modo a archi qualsiasi di curve qualsiasi. E tuttavia, la stessa curva osserverà tutte e sei le condizioni richieste per stabilire la legge delle forze repulsive e attrattive, nonché i limiti dati.

91. Ora, poiché il valore T può essere variato in infiniti modi, ciò si può pure effettuare in infiniti modi; di conseguenza, ci saranno in infiniti modi per trovare una curva semplice che soddisfi alle condizioni date. C.V.D.

Corollario 1. La curva potrà toccare l'asse C´AC in quanti punti si voglia, o contemporaneamente toccarlo e tagliarlo negli stessi, perciò anche oscularlo con qualunque tipo di osculazione. Infatti, se due distanze qualunque fra i limiti divenissero uguali, la curva toccherebbe la retta C´A allo svanire dell'arco fra i due limiti; analogamente, se il punto I andasse in L, allo svanire dell'arco IKL, ci sarebbe contatto in L, la repulsione lungo l'arco HI diminuirebbe incessantemente e scomparirebbe al contatto IL; dopo di ciò non diverrebbe attrazione, ma la repulsione tornerebbe a crescere nuovamente lungo l'arco LM. D'altra parte, lo stesso accadrebbe all'attrazione se, coincidendo i punti LN, svanisse l'arco repulsivo LMN.

92. Se poi fossero tre punti a coincidere, per esempio LNP, la curva toccherebbe e contemporaneamente intersecherebbe l'asse C´AC; di conseguenza, nello stesso punto di contatto vi sarebbe una flessione contraria. In quel punto si avrebbe, dunque, un passaggio da attrazione a repulsione o viceversa, e perciò un limite vero e proprio.

93. Allo stesso modo possono coincidere quattro punti, o cinque, o qualsiasi numero di punti; e se a coincidere è un numero pari di punti avremo un contatto; se dispari, contatto e intersezione insieme. Ma quanti più punti coincideranno, tanto più la curva si avvicinerà all'asse C´AC in quel limite, e lo osculerà con osculazione più stretta.

Corollario 2. Nei limiti in cui la curva interseca l'asse C´AC, può intersecarlo secondo un angolo qualsiasi, ma in modo tale che l'angolo che l'arco di curva, nel suo continuo allontanarsi dall'asintoto, forma dalla parte di A mentre si avvicina all'asse C´AC, non sia maggiore di un angolo retto; e lì può toccare o osculare l'asse o una retta perpendicolare all'asse con qualunque tipo di contatto o di osculazione. Cioè in entrambi i casi l'osculazione può avere raggio qualsiasi, sia infinitamente piccolo sia infinitamente grande.

94. Infatti, come punti dati in archi di curve qualsiasi, che la curva trovata può toccare o osculare con qualsiasi tipo di osculazione e dai quali è definito il valore R, possiamo scegliere [i punti determinati da] archi di curve qualsiasi intersecanti l'asse C´AC ad angoli qualsiasi: solo che, poiché un arco di curva – per esempio *z*´N*h* – deve sempre allontanarsi dall'asintoto, nessun punto *z*´ che preceda il limite N può giacere oltre una retta innalzata da N perpendicolarmente all'asse, né alcun un punto *h* posto dopo N, può giacere al di qua. Di conseguenza, l'angolo AN*z*´, che l'arco *z*´H forma dalla parte A nell'allontanarsi continuamente dall'asintoto e avvicinandosi all'asse C´AC, non potrà essere maggiore di un angolo retto.

95. D'altra parte, gli archi delle curve scelte possono toccare o osculare, negli stessi punti, o l'asse o una retta perpendicolare all'asse con qualunque tipo di contatto o di osculazione, avendo appunto l'osculazione raggio qualunque, infinitamente piccolo o infinitamente grande. Perciò, lo stesso potrà accadere – come abbiamo accennato – anche a un arco della curva trovata, che può avvicinarsi a piacere a quegli archi e toccarli o oscularli in quegli stessi punti con qualunque tipo di osculazione.

96. Solo se la curva trovata avrà toccato in quello stesso limite la retta perpendicolare all'asse C´AC, la dovrà contemporaneamente intersecare in quel punto; e dovendo sempre allontanarsi dall'asintoto, in quel punto dovrà perciò flettere in direzione contraria.

Scolio 1. Il Corollario 1 è un caso particolare del secondo, com'è evidente. Ma ho preferito ricavarlo prima separatamente, con un metodo diverso e più semplice.

Corollario 3. Un arco di curva, anche posto fuori dai limiti, può avere una tangente inclinata con un angolo qualsiasi rispetto all'asse, o parallela a esso, o perpendicolare, con le stesse condizioni di contatto e di osculazione che si hanno nel Corollario 2.

97. La dimostrazione è identica: infatti, archi di curve dati, ai quali un arco della curva trovata può avvicinarsi ovunque e quanto piacerà, possono sottostare a condizioni analoghe.

Corollario 4. Cambiata l'ascissa di un qualunque intervallo dato, l'ordinata può cambiare di qualunque altro intervallo dato, minore o maggiore a piacere rispetto a tale cambiamento di ascissa, e maggiore a piacere di qualsiasi quantità data. Se la differenza di ascissa è infinitesima e la definiamo del primo ordine, la differenza di ordinata potrà essere di qualsiasi ordine, o inferiore a piacere, oppure intermedio fra quantità finite e quantità del primo ordine.

98. La prima cosa è evidente dal fatto che, ove venisse determinato il valore R, la curva può passare attraverso quanti e quali punti si vogliano, perciò attraverso punti dai quali le ordinate condotte siano vicine e disuguali a piacere fra loro.

99. La seconda cosa è evidente perché in curve alle quali si avvicina un arco della curva trovata o che esso oscula con qualsiasi tipo di osculazione, la differenza di ascissa e la differenza di ordinata, a seconda della diversa natura delle curve in dati punti di esse, possono stare fra loro in qualsiasi rapporto, che può essere un rapporto tra una quantità infinitesima di qualsiasi ordine e una quantità infinitesima di qualsiasi altro ordine.

Scolio 2. È da notare che, ovunque la tangente alla curva trovata sia inclinata secondo un angolo finito sull'asse, la differenza di ascissa sarà del medesimo ordine della differenza di ordinata. Dove la tangente sia parallela all'asse, la differenza di ordinata sarà di ordine inferiore rispetto alla differenza di ascissa; al contrario dove la tangente sia perpendicolare all'asse.

100. È inoltre da notare che se l'ascissa coinciderà con la distanza del limite, e questa venga aumentata o diminuita a piacere, la differenza di ordinata sarà l'ordinata stessa, giacché infatti al limite l'ordinata è uguale a zero.

Corollario 5. Archi di repulsione o di attrazione che sono intercettati fra due limiti qualunque possono allontanarsi quanto si vuole dall'asse; perciò può accadere che quelli più vicini all'asintoto si allontanino meno di quelli più lontani; oppure che, secondo un certo ordine, si allontanino dall'asse tanto meno quanto più sono lontani dall'asintoto; o ancora che, dopo un certo numero di archi che si allontanano di meno dall'asse, vi sia un qualche arco che se ne allontana moltissimo.

101. Evidentemente, tutto segue dal fatto che la curva può passare per qualsiasi punto dato.

Corollario 6. La curva può avere come asintoto l'asse C´AC dalla parte di C´ e C, in modo tale che l'arco asintotico possa essere tanto repulsivo quanto attrattivo; e qualsiasi arco intercettato fra due limiti qualunque può allontanarsi all'infinito e avere per asintoto una retta perpendicolare all'asse, vicina a piacere all'uno o all'altro limite, o distante a piacere dall'uno o dall'altro.

102. Infatti, se si immagina che i due limiti estremi coincidano non appena vengono a coincidere le due intersezioni, e poi si immagina che questa stessa distanza del punto di contatto cresca all'infinito; allora l'asse equivale a una retta tangente alla curva in un punto infinitamente remoto, costituendo così un asintoto. Se l'arco evanescente, compreso fra i due limiti estremi che verranno a coincidere, sarà un arco di repulsione, l'arco estremo asintotico sarà un arco di attrazione. Il contrario, invece, nel caso in cui l'arco evanescente dovesse essere un arco di attrazione.

103. Analogamente, se si immagina che una qualsiasi ordinata, corrispondente a un punto qualunque per il quale debba passare la curva, si allontani all'infinito, allora l'arco della curva si allontanerà all'infinito, e il suo asintoto sarà proprio quell'ordinata che cresce all'infinito.[14]

Scolio 3. In quattro modi può accadere che l'arco della curva trovata vada all'infinito da qualche parte e abbia un asintoto parallelo all'asintoto precedente. Nel primo modo, qualora il vertice K dello stesso arco attrattivo IKL si allontani all'infinito da I, tornando a L dalla stessa parte, come mostra la Figura 10, dove KSR è l'asintoto ed entrambi gli archi asintotici IK, KL sono attrattivi[15].

104. Nel secondo modo, quando analogamente il vertice M di un qualche arco repulsivo LMN della Figura 9 si allontani all'infinito da L tornando a N dalla stessa parte, come illustra la Figura 11, dove MSR è l'asintoto, ed entrambi gli archi asintotici LM, MN sono repulsivi.

105. Nel terzo modo, quando al posto di un qualche limite N della Figura 9 – in cui l'ordinata sia zero, la direzione delle ordinate s'inverta e l'espressione delle repulsioni divenga espressione delle attrazioni passando per lo zero – compaia un'ordinata infinita,

---

[14] Con questo paragrafo termina la parte inserita da Boscovich come Supplemento I alla prima edizione (1758) della *Theoria* ovvero come Supplemento III alla seconda edizione (1763). Quest'ultima versione, per altro, è arricchita con diciassette nuovi paragrafi (numerati come nn. 60-76).

[15] Errore nel testo originale: «uterque arcus asymptoticus LK, KL est attractivus», ma intende necessariamente «IK, KL».

e l'inversione della direzione avvenga passando per l'infinito. In tal caso, gli archi LM e PO non fletteranno verso l'asse né s'incontreranno in N, ma, come mostra la Figura 12, dove MNO è l'asintoto, si allontaneranno entrambi all'infinito, e all'arco LM repulsivo, dopo la distanza infinita M, seguirà l'arco attrattivo OP. Con ciò la continuità nei luoghi geometrici non viene mai meno, come se a quella distanza infinita i punti M e O coincidessero, e la retta infinita fosse una sorta di cerchio infinito che torna su se stesso. Lo stesso si vede nelle gambe asintotiche delle iperboli: un mistero dell'infinito cui abbiamo accennato anche sopra.

106. Nel quarto modo, quando analogamente al posto di un qualche limite L della Figura 9 – in cui, proseguendo, l'arco attrattivo KL diventa repulsivo – compaia un'ordinata infinita: in tal caso, come mostra la Figura 13, l'asintoto sarebbe MLK, e all'arco asintotico attrattivo IK succederebbe quello repulsivo MN.

107. Riteniamo, inoltre, che i primi tre modi non possano esistere in natura, poiché in essi si potrebbe giungere all'asintoto, nel qual caso la forza dovrebbe essere assolutamente infinita. A nostro parere, però, non possono affatto esistere quantità reali assolutamente infinite. Di ciò abbiamo trattato nella dissertazione *De natura, et usu infinitorum, et infinite parvorum*[16], mentre in svariati altri scritti abbiamo esposto parecchie cose che sono completamente assurde (o almeno appaiono massimamente assurde) e che seguono dall'infinito o dall'infinitamente piccolo [inteso come] reale, assoluto e in sé determinato. D'altra parte, che in tali casi si possa giungere all'asintoto è evidente dal fatto che se, dato un punto in A, ne esiste un altro (vedi la Figura 10) fra L e S, questo per attrazione continua andrà verso S; lo stesso accade nella Figura 11, per repulsione continua, a un punto giacente fra L e S; lo stesso nella Figura 12 a un punto che giace fra L ed N anche qui per repulsione, mentre a un punto che giace fra N e P per attrazione. A meno che accanto a quell'arco asintotico, che esprime le forze che spingono un punto verso l'asintoto, un arco che spinga verso la parte opposta si allontani dall'asse così tanto da poter estinguere ogni velocità generata da altri archi, e impedire che un punto giunga al limite in cui inizia l'arco asintotico: in tal caso non avremmo come conseguenza il raggiungimento di una forza infinita.

108. Solo nel quarto caso, presentato nella Figura 13, un punto che giace fra I e L subisce attrazione, fra N e L repulsione: sicché si allontana da L in entrambe le eventualità. Può certo accadere, anche in questo caso, che un punto debba avvicinarsi ancor più all'asintoto in L: [ciò capita] se, prolungandole all'infinito, le aree IKL o MLN fossero finite; in tal caso, solamente una velocità finita potrebbe venire estinta lungo gli intervalli IL, NL. Perciò, affinché questo [quarto] caso possa esistere [in natura], occorrerà che tali aree siano infinite, o almeno che ciascuna sia maggiore della somma di tutte

[16] R.G. Boscovich, *De natura, et usu infinitorum, et infinite parvorum dissertatio*, Komarek, Roma 1741; ora in *ENo*, I, pp. 59-74. Una traduzione inglese è data in appendice a F.A. Homann, *On Boscovich's* De Natura et usu infinitorum *and Other Mathematical Works*, in *R.J. Boscovich. Vita e attività scientifica – His Life and Scientific Work*, a cura di P. Bursill-Hill, Istituto della Enciclopedia Italiana, Roma 1993, pp. 422-436.

le altre aree capaci di produrre le velocità di un punto tendente a L o a N. La stessa condizione è necessaria anche nella Figura 11 per l'area MLS, nonché nella Figura 10 per l'area KLS, determinate da archi esprimenti forze che respingono un punto da un limite, qualora quei casi dovessero poter esistere in natura.

109. In tutti questi casi vi è poi da notare quanto segue: ove qualcuna delle quantità date, che entrano nell'equazione, vada all'infinito, l'equazione stessa può essere resa più semplice omettendo tutti i termini in cui tale quantità infinita non compare; e fra tutti quelli ove essa compare, se altrove non sia elevata ad altra potenza, si possono omettere tutti i termini in cui la quantità infinita non è elevata alla potenza massima e dividere per essa i rimanenti. Infatti, i termini che non vengono moltiplicati per la quantità infinita elevata a tale potenza massima sono trascurabili rispetto a quelli che si moltiplicano, secondo le ben note regole dell'algebra elementare.

110. Come la curva interseca l'asse dove le due radici dell'equazione $P = 0$ saranno risultate uguali ai due limiti congruenti nella Figura 9, così, se risultano immaginarie, può darsi che in qualche luogo, mentre tende all'asse, la curva volga indietro il proprio corso, come in P*pqr*R. Ma di ciò si è parlato a sufficienza. Piuttosto, per una più fruttuosa conoscenza di questa stessa curva considereremo la natura dei limiti e i moti che ne conseguono.

Proposizione 2. *Problema. Mostrare la diversa natura dei vari limiti e i moti che, per due punti, devono risultare da forze del genere.*

111. Sopra abbiamo chiamato limiti quei punti in cui la curva taglia l'asse, che hanno cioè ordinata nulla, e nei quali l'ordinata stessa cambia direzione. Ce ne sono altri, però, che possono venire chiamati anch'essi limiti, nei quali l'ordinata è nulla, pur non cambiando direzione. Ciò accade quando la curva è tangente all'asse mentre i due limiti coincidono e l'arco che giace fra di essi svanisce; oppure, al contrario, l'ordinata cambia direzione, sebbene in tal caso non svanisca, ma si allontani all'infinito, come accade nel punto N della Figura 12 e nel punto L della Figura 13. Tralasciamo quei punti in cui l'ordinata non cambia direzione né scompare, ma si allontana all'infinito, come in S della Figura 10 e della Figura 11, dei quali non facciamo uso.

112. Ci saranno così tre classi di limiti, e in ogni classe ci saranno due tipi. Il primo tipo della prima classe sarà quello in cui al crescere della distanza si passa da forza repulsiva a forza attrattiva, come nella Figura 9 i limiti E, I, N; il secondo tipo della prima classe quello in cui si passa da forza attrattiva a repulsiva, come i limiti G, L, P. Il primo tipo della seconda classe è quello in cui svanisce l'arco attrattivo, come IKL supposto che I e L coincidano: in tal caso, tanto prima quanto dopo il contatto si avranno forze repulsive; il secondo tipo della seconda classe è quello in cui svanisce l'arco repulsivo, come LMN supposto che L e N coincidano: in tal caso, tanto prima quanto dopo il contatto si avranno forze attrattive. Il primo tipo della terza classe è quello in cui si passa da forza repulsiva ad attrattiva, come in N nella Figura 12; il

secondo tipo della terza classe è quello in cui si passa da forza attrattiva a repulsiva, come in L nella Figura 13.

113. Cominciamo da questi ultimi: i limiti del primo tipo della terza classe non possono essere di alcuna utilità, in quanto – stando allo Scolio 3 alla proposizione precedente – o non può esistere alcunché del genere, oppure, se esiste, il punto non può essere riferito all'intervallo LP della Figura 12. L'utilità del secondo tipo della terza classe potrà essere grandissima. In verità, supposto che limiti del genere esistano, i punti che giacciono entro i limiti AL non potranno mai uscirne, e i punti che giacciono fuori da tali limiti non potranno mai entrarvi. Infatti, poiché tanto avvicinandosi a A si eserciterà all'infinito la forza repulsiva, quanto avvicinandosi a L la forza attrattiva – l'una e l'altra crescenti all'infinito e capaci di estinguere qualunque velocità si debba estinguere –, i punti, una volta collocati a distanza minore di AL e messi in moto con velocità grandi a piacere, non potranno mai oltrepassare l'uno la posizione dell'altro, annullata ogni distanza, né acquisire una distanza maggiore di AL. Analogamente, per quanto grande sia la velocità con cui uno si diriga verso l'altro, esso non potrà giungere a una distanza uguale a AL, tale avvicinamento essendogli impedito dalla forza repulsiva.

114. Se ci saranno due limiti del genere, e supposto che due punti si trovino a una qualsiasi distanza minore della distanza dell'un limite da A e maggiore di quella dell'altro limite dallo stesso A, i due punti dovranno necessariamente rimanere entro quegli stessi limiti delle distanze. Se ci fossero due masse di punti [*massae punctorum*], fatte in modo che i singoli punti dell'una fossero compresi in tali limiti delle distanze rispetto ai punti dell'altra, i punti di ciascuna massa potranno certamente avere moti diversi qualunque gli uni rispetto agli altri; ma i punti di ciascuna massa non potranno uscire da quei limiti, né una massa avvicinarsi all'altra o allontanarsene più di quanto quei limiti gli impongano. In questo modo qualche piccola massa potrebbe mantenersi unita grazie a un unico punto collocato alla massima distanza, cosicché nessuna forza grande a piacere possa scioglierla.

115. Quanto ai limiti della seconda classe: fissati due punti in modo che la loro distanza sia la stessa di un limite di tal genere dal punto A, quei punti saranno in quiete, e conserveranno sempre quella stessa distanza, a meno che una qualche altra forza li sposti da tale distanza. Ma se si tratta di limiti del primo tipo, i punti resisteranno alla diminuzione di distanza; se del secondo tipo, resisteranno all'aumento di distanza. Se poi, per quanto riguarda il primo tipo, la distanza venisse aumentata da una qualsiasi forza piccolissima, e – quanto al secondo –, venisse diminuita, i punti continueranno spontaneamente da una parte ad allontanarsi di moto accelerato, dall'altra ad avvicinarsi allo stesso modo, poiché nel primo caso, tanto a distanza aumentata quanto a distanza diminuita, sono sottoposti a repulsione, mentre nel secondo caso ad attrazione. Anzi, anche impressa una forza piccola a piacere, nel primo caso si avvicinano fra loro, nel

secondo si allontanano; estinta però la poca velocità, invertono la traiettoria e fuoriescono da quei limiti, proseguendo poi spontaneamente nel primo caso ad allontanarsi di moto accelerato, nel secondo ad avvicinarsi allo stesso modo.

116. Quanto ai limiti della prima classe[17], supposto che i due punti siano collocati alla distanza di uno qualsiasi dei due limiti, rimarranno in quiete; ma se il limite è del primo tipo – se, per esempio, la distanza è AN – conserveranno quella distanza. Infatti, qualora siano costretti ad avvicinarsi fra loro, subito agirebbe la repulsione *nz´*; qualora costretti ad allontanarsi, subito agirebbe l'attrazione *eh*; perciò, il punto cercherà immediatamente di recuperare la distanza precedente e ritornare al suo limite. Al contrario, invece, se il limite sarà del secondo tipo – per esempio L –, al diminuire della distanza agirà la forza attrattiva, mentre all'aumentare della stessa agirà la forza repulsiva; perciò, in entrambi i casi i punti continueranno spontaneamente ad allontanarsi dalla distanza di quel limite.

117. Inoltre, supposto che due punti (nella Figura 9) vengano allontanati dalla distanza AL del limite del secondo tipo in virtù di una forza piccola a piacere – per esempio se fossero costretti ad avvicinarsi fra loro –, il moto verrà accelerato incessantemente lungo tutto l'intervallo LI, rallentando oltre il limite I; e se le repulsioni nell'intervallo IG saranno state in grado di estinguere tutta la velocità acquisita nella distanza AI, il moto verrà arrestato a una qualche distanza A*z* e invertito, accelerando col medesimo valore fino a I, poi rallentando fino a L, dove ora avrà, in direzione di N, la medesima velocità che prima aveva avuto verso I, la quale continuerà a crescere lungo LN, poi a diminuire oltre N; e se le attrazioni nell'intervallo NP saranno state capaci di estinguere tutta la velocità acquisita alla distanza AN, il moto si arresterà a una qualche distanza A*e* e s'invertirà con i medesimi valori, e vi sarà una continua oscillazione con moto ora accelerato ora decelerato. Se, invece, le repulsioni IHG o le attrazioni NOP non saranno state in grado di estinguere la velocità con cui i punti vengono tratti ai limiti I e N, essi correranno oltre i limiti G e P, perciò anche oltre E e R, e l'oscillazione sarà maggiore. Questa potrà essere anche molto maggiore, in modo tale che quei punti oltrepasseranno parecchi limiti, sino a trovare un arco di curva che si allontani moltissimo dall'asse. L'arco sarà repulsivo quando i punti si avvicinano l'un l'altro, attrattivo quando si allontanano, e sarà in grado di estinguere tutta la velocità e arrestare il moto. Inoltre, quando i punti si avvicinano, quest'arco verrà certamente trovato; infatti, se non se ne presenta alcun altro, ci sarà almeno l'arco asintotico ED; invece, quando i punti si allontanano l'uno dall'altro, potrà presentarsi un qualche arco asintotico e un limite del tipo presentato nella Figura 13. In tal caso l'oscillazione verrà conservata per sempre entro certi limiti (lo stesso compito potrebbe essere svolto

---

[17] Nel testo originale: «*In limitibus tertiae classis*». Ma, per quanto detto al n. 112 (contro i limiti di primo tipo della terza classe) e al n. 111 (enumerazione dei vari tipi di limiti con rimando al diagramma della curva), dev'essere «*In limitibus primae classis*». Ciò concorda anche con l'ordine del discorso (Boscovich ha trattato i limiti della terza classe ai nn. 113-114 e quelli della seconda al n. 116.

da un arco non asintotico, ma tale che si allontani moltissimo e copra un'area vastissima).

118. Supposto che su quei punti agiscano forze esterne, come una forza esercitata da altri punti in virtù di cui essi tendano a separarsi mentre si dirigono l'uno verso l'altro o a urtarsi mentre si allontanano l'uno dall'altro[18], l'oscillazione diminuirà durante il suo stesso svolgersi, e potrà accadere che venga ricondotta entro limiti assai più stretti Se, invece, nel primo caso tendessero a urtarsi e nel secondo a separarsi, l'oscillazione aumenterà[19]. E se alcuni archi di curva si allontanano così tanto dall'asse da poter estinguere ogni velocità che tutti gli altri archi di tutte le curve relative a tutti i punti possono generare (cosa che accadrebbe certamente se ci fossero alcuni archi asintotici nel modo mostrato nella Figura 13), l'oscillazione verrà conservata entro certi limiti e si avrà un moto perpetuo perturbato, ora accelerato ora decelerato alternativamente. Ma i punti non potranno uscire in alcun modo da certi limiti; lo stesso vale per le due masse di punti di cui abbiamo trattato parlando dei limiti della terza classe[20].

119. Se poi in una curva del genere non vi sarà alcun arco che si allontana, qualora l'oscillazione venga aumentata a poco a poco da forze esterne: supposto che i punti vengano trasportati ai limiti estremi di archi massimamente attrattivi e fuoriuscissero un poco nella parte repulsiva, continueranno ad allontanarsi per sempre di moto ora accelerato ora decelerato. Supposto che vi sia un arco repulsivo massimo, e le forze poste a distanza maggiore siano assai più deboli (per esempio, se a distanze maggiori la curva avesse per asintoto l'asse AC, o almeno avesse un qualche arco come STVO, che si estende su intervalli immensi, ovunque vicinissimo a AC medesimo), i punti potranno allontanarsi per intervalli immensi di moto velocissimo e, per i nostri sensi, uniforme. E si pensi a una massa messa in moto in maniera assai violenta da tale moto perturbato, tanto che i suoi punti giungano uno dopo l'altro a tale limite: essi ne fuoriusciranno allo stesso modo in successione. Ma poiché subito dopo devono passare per tutti quegli stessi archi, per i nostri sensi avranno la medesima velocità; tuttavia, un'eventuale differenza di velocità potrà essere dovuta al fatto che, mentre l'oscillazione aumenta fino a quel limite in modo tale che esso venga superato, non in tutti i punti ci sarà lo stesso aumento e oltrepassamento. Tale differenza, però, sarà piccola; infatti essa dev'essere minore del solo incremento di quell'unica, ultima oscillazione, poiché nell'oscillazione immediatamente precedente i punti non avranno potuto raggiungere

---

[18] Nel testo originale: «*impellant a se invicem, dum recedunt*»; ma dev'essere: «*impellant* ad se *[oppure:* in se*] invicem, dum recedunt*».
[19] Nel testo originale: «*Si vero e contrario in priore casu distrahantur a se invicem, & in posteriore in se invicem impellantur*»; ma, per quanto detto nella frase precedente, dev'essere: «*Si vero e contrario in priore casu in se invicem impellantur, & in posteriore distrahantur a se invicem*».
[20] Nel testo originale: «*de quibus egimus in limitibus primae classis*»; ma, per quanto detto sopra (nn. 112-113, dev'essere: «*de quibs egimus in limitibus tertiae classis*».

quel limite. Tuttavia, quella stessa differenza verrà pure aumenata da altre forze esercitate da una massa di altri punti, ma – analogamente – non in misura troppo cospicua: infatti l'azione di tutti i punti più remoti su un dato punto emesso dalla massa sarà assai minore dell'azione del singolo punto rispetto al quale si arriva all'arco repulsivo massimo, e pressoché la stessa sarà la somma di tutte quelle azioni su tutti i punti.

120. Tali oscillazioni si avranno anche nei limiti del primo tipo della prima classe, per esempio in N, se la forza esterna agente sui due punti sarà stata abbastanza grande da poter superare gli intervalli NL, NP; altrimenti l'oscillazione ci sarà, ma a distanze minime da una parte e dall'altra del limite. Sarà questo a contraddistinguere, entro questa prima classe, i limiti del primo tipo rispetto a quelli del secondo. Punti situati nei limiti del secondo tipo saranno spostati da lì da una forza minima qualsiasi, e per questo è sufficiente una variazione piccola a piacere della distanza, sicché da una parte o dall'altra essi correranno alle massime distanze; nei limiti del primo tipo[21] sarà necessaria una forza assai maggiore, l'oscillazione diverrà molto minore, e i punti conserveranno questa posizione abbandonando spontaneamente quella. Perciò, i limiti del primo tipo sono detti limiti di coesione.

121. Abbiamo esposto queste cose pure altrove, in particolare nella dissertazione *De Lumine*, Parte seconda. Tuttavia, le ricordiamo qui ancora una volta perché, riguardando il ruolo svolto dai limiti, esse portano a una migliore comprensione della natura stessa della curva, e anche al fine di mostrare la soluzione di una difficoltà che alcuni obiettano al nostro sistema. Stando a costoro, da esso seguirebbe che tutte le masse [o aggregati di punti] debbano sempre balzare all'indietro una dall'altra con la stessa velocità con cui erano sopraggiunte, come si respingono anche due punti, tornando indietro dopo aver oltrepassato parecchi limiti. Ciò pare debba accadere tanto più perché, sia avvicinandosi al limite di coesione sia allontanandosi da esso, si giunge con moto accelerato anziché rallentato; infatti, l'avvicinamento è sostenuto dall'attrazione, che agisce a distanze maggiori, l'allontanamento dalla repulsione, che agisce a distanze minori.

122. Duplice è la soluzione della difficoltà. Anzitutto, se i punti si muovessero entrambi lungo la retta congiungente, e fossero i soli a interagire, allora non può certamente accadere che si arrestino al limite di coesione, per la ragione che abbiamo aggiunto alla difficoltà che ci è stata prospettata. Ma supposto che ci siano masse di punti che perturbino dall'esterno i loro moti, può senz'altro accadere che un qualche punto esterno, o una massa di punti agente in modo diseguale su quei punti, estingua la loro differenza di velocità mentre essi si avvicinano a un qualche limite, e poi si sottragga assai rapidamente all'azione di altri punti più lontani, in modo tale da non poter poi turbare il loro stato reciproco; in tal caso, i punti rimangono in coesione, e ciò si ottiene assai più facilmente in masse intere, ove i casi di equilibrio crescono a dismisura. Ma

[21] Nel testo originale: «in limitibus *secundi generis*»; ma, per quanto detto immediatamente dopo, dev'essere: «in limitibus *primi generis*».

il luogo appropriato per trattare di ciò sarà dove il discorso riguarderà la composizione delle forze nelle masse e l'equilibrio.

123. Bisogna poi osservare che qui abbiamo trattato il moto di due punti sulla retta congiungente. Ma supposto che essi non vengano lasciati a loro stessi, bensì lanciati a caso, certo non verranno mai lanciati lungo la loro retta congiungente, la quale è una delle infinite linee lungo le quali possono essere lanciati. D'altra parte, in tal caso i moti sono di gran lunga diversi. Ciascun punto descriverà una curva che si avvolgerà attorno a un punto che s'immaginerà a metà fra loro e costituisce il loro centro di gravità comune. Tale curva sarà concava ove le forze saranno attrattive, convessa ove queste saranno repulsive; e, date la legge delle forze attraverso la nostra curva, la velocità di lancio e la direzione, la curva che verrà descritta è definita mediante il metodo generale del problema inverso delle forze centrali, il quale è trattato diffusamente neimanuali di meccanica e che noi stessi abbiamo esposto in modo dettagliato nei già ricordati *Supplementi* al poema di Stay (Libro III, § 19)[22]. Inoltre, la curva stessa si differenzia notevolmente a seconda delle diverse velocità e direzioni di lancio, e ci sono infiniti casi in cui essa si avvolge a spirale attorno al centro di gravità comune; in tal caso, anche due punti in avvicinamento reciproco in seguito non si allontanano, bensì rimangono coesi in modo che un'azione comune spinga avanti o faccia retrocedere entrambi. In questo modo può anche aver luogo l'unione e la mescolanza fra i punti di una massa e i punti dell'altra, con i punti che ruotano gli uni attorno agli altri.

124. Infine, a ciò si riferisce pure che i limiti potrebbero essere molto più o molto meno robusti: per esempio in N (Figura 9), supposto che la curva intersechi l'asse assai trasversalmente con l'arco *d*N*f*, in modo che le forze *nd*, *ef* siano piccole, il limite di adesione sarà debole; supposto che lo tagli quasi perpendicolarmente, per esempio con *z*´N*h*, e posto che le forze *nz*', *eh* siano abbastanza intense, il limite sarà assai robusto. Nondimeno, è soprattutto da notare che, ove le distanze fossero tanto piccole da cadere appunto in quegli archi in cui la curva si piega attorno all'asse, una piccola variazione della distanza modifica moltissimo la forza: per esempio, se la distanza A*x* divenisse la distanza A*y* o AI o maggiore, la forza dovrebbe essere repulsiva (*x*X oppure *y*Y) o nulla oppure attrattiva. Al contrario, laddove la distanza è abbastanza grande e la curva esprime la gravità universale in *zo*, è evidente che una piccola variazione della distanza modifica pochissimo le forze. Infatti, se al posto della distanza A*m* fosse la distanza AZ, al posto della forza *mo* sarebbe la forza Z*z*[23], maggiore della quantità *lz* estremamente piccola. Ciò, d'altra parte, è nel massimo accordo coi fenomeni, giacché la modificazione della connessione fra le particelle modificherà a tal punto le forze agenti a piccola distanza che proprio per questo nella nutrizione e negli effetti chimici vi è differenza soltanto fra le forze reciproche delle particelle, alcune

---

[22] Nel testo originale: «§. 19 lib. I», ma è in realtà Tomo I, Libro III, § 19. Il richiamo compare anche (in modo corretto) in R.G. Boscovich, *Theoria philosophiae naturalis*, n. 200.

[23] Nell'originale «Z*e*», ma osservando la figura dev'essere «Z*z*».

che si attraggono maggiormente fra loro, altre meno, altre per niente, anche alla medesima distanza da particella a particella, poiché, mutata la connessione interna, mutano le distanze da punto a punto così come la somma delle forze. Al contrario, la gravità sulla Terra o sul Sole, che a distanza assai maggiore agisce su tutte le particelle dei corpi, in uno stesso luogo è dello stesso tipo, corrispondendo infatti alla sola massa, ovvero al numero dei punti, e non venendo affatto perturbata da una diversa disposizione dei punti e dalla loro connessione. Ma di tutto ciò abbiamo ormai trattato a sufficienza.

INDICE DEI NOMI

Il seguente indice si riferisce unicamente ai nomi citati nel testo di Boscovich e il numero accanto a ogni nome è riferito al paragrafo in cui compare.

INDICE DELLE OPERE CITATE

Il numero dopo le parentesi quadre indica il paragrafo del testo di Boscovich in cui l'opera è citata direttamente o indirettamente.

BENVENUTI, CARLO
Synopsis Physicae Generalis [De Rubeis, Roma 1754], 1, 36.

BOSCOVICH, RUGGIERO GIUSEPPE
De Natura, et usu Infinitorum, et Infinite parvorum, [Komarek, Roma 1741], 107.

De viribus vivis dissertatio [Komarek, Roma 1745], 1.

Dissertationis de lumine, pars prima [De Rubeis, Roma 1748]; *pars secunda*, [Komarek, Roma 1748], 1, 121.

De continuitatis lege et ejus consectariis pertinentibus ad prima materiae elementa eorumque vires [Salomoni, Roma 1754], 1, 4, 28, 33.

Elementorum universae matheseos tomus II. *Continens algebram finitam* [Salomoni, Roma 1754], 48.

De transformatione locorum geometricorum, ubi de continuitatis lege, ac de quibusdam Infiniti mysteriis, in *Elementorum universae matheseos tomus* III. *Continens sectionum conicarum elementa* [Salomoni, Roma 1754, pp. 297-468], 3, 48.

Supplementa a *Philosophiae recentioris a Benedicto Stay versibus traditae libri X, cum adnotationibus, et supplementis P. Rogerii Josephi Boscovich*, Tomus I [Roma 1755], 1, 23, 28, 123.

NEWTON, ISAAC
Optice: sive de Reflexionibus, Refractionibus, Inflexionibus & Coloribus Lucis libri tres [Londra 1706], 38.

EULER, LEONHARD
Mechanica sive motus scientia analytice exposita [2 voll., Pietroburgo, 1736], 64.