Université Paris-Dauphine
École Doctorale de Dauphine

Università degli Studi di Milano
Dipartimento di Matematica
"Federigo Enriques"



# Étude mathématique de modèles non linéaires issus de la physique quantique relativiste

## THÈSE

*Pour l'obtention du titre de*

Docteur en Sciences - Spécialité Mathématiques Appliquées
*(Arrêté du 7 Août 2006)*

*Présentée par*

**Simona ROTA NODARI**

*Soutenue publiquement le 6 juillet 2011 devant le jury composé de*

**Directeurs de thèse :** **Éric SÉRÉ**
Professeur, Université Paris-Dauphine
**Bernhard RUF**
Professeur, Università degli Studi di Milano

**Rapporteurs :** **Mathieu LEWIN**
Chargé de Recherche CNRS, Université de Cergy-Pontoise
**Gabriella TARANTELLO**
Professeur, Università di Roma "Tor Vergata"

**Examinateurs :** **Maria J. ESTEBAN**
Directrice de Recherche CNRS, Université Paris-Dauphine
**Boris BUFFONI**
Maître d'enseignement et de recherche, École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Université Paris-Dauphine
École Doctorale de Dauphine

Università degli Studi di Milano
Dipartimento di Matematica
"Federigo Enriques"

# Étude mathématique de modèles non linéaires issus de la physique quantique relativiste

## TESI DI DOTTORATO DI RICERCA

*Per il conseguimento del titolo di*

Dottore di Ricerca in Matematica
XXIV Ciclo

*Presentata da*

**Simona ROTA NODARI**
Matricola n. R08922 MAT/05

*Discussa pubblicamente il 6 luglio 2011 davanti alla commissione composta da*

**Relatori:** **Éric SÉRÉ**
Professeur, Université Paris-Dauphine
**Bernhard RUF**
Professore, Università degli Studi di Milano

**Referee:** **Mathieu LEWIN**
Chargé de Recherche CNRS, Université de Cergy-Pontoise
**Gabriella TARANTELLO**
Professoressa, Università di Roma "Tor Vergata"

**Esaminatori:** **Maria J. ESTEBAN**
Directrice de Recherche CNRS, Université Paris-Dauphine
**Boris BUFFONI**
Maître d'enseignement et de recherche, École Polytechnique Fédérale de Lausanne

*Coordinatore del dottorato:*
Marco M. PELOSO,
Professore, Università degli Studi di Milano

*Anno Accademico 2010/2011*

*A Maria e Adriano*

# Remerciements

Cette thèse est l'aboutissement de trois années de travaux de recherche durant lesquelles j'ai pu compter sur différentes personnes que je tiens ici à remercier.

Tout d'abord, je remercie très chaleureusement Éric Séré qui a dirigé cette thèse en France avec disponibilité et attention. Ses remarques et ses conseils m'ont permis d'obtenir les résultats contenus dans cette thèse.

Je remercie également mon directeur de thèse Bernhard Ruf qui m'a accueillie lors des mes séjours en Italie. Les discussions que nous avons eues m'ont beaucoup aidée à progresser dans mes travaux de recherche.

Je suis de même très reconnaissante envers les rapporteurs de cette thèse, Gabriella Tarantello et Mathieu Lewin. Un grand merci à Mathieu Lewin pour ses conseils, ses encouragements et pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail ; je le remercie aussi (ainsi que Maria J. Esteban) pour m'avoir donné la possibilité de participer au projet ANR-10-BLAN 0101. Je remercie également Gabriella Tarantello pour avoir accepté de rediger un rapport sur ma thèse.

Je souhaite remercier Maria J. Esteban pour le rôle important qu'elle a joué au début de ma carrière scientifique et pour avoir accepté de participer au jury. Grâce à elle je me suis intéressée aux modèles mathématiques issus de la physique quantique relativiste. J'espère que la collaboration que nous avons entamée dernièrement portera les résultats souhaités.

Merci également à Boris Buffoni qui a accepté de faire partie de mon jury de soutenance.

Je remercie Simone Secchi, Nils Berglund et Denis Bonheure pour l'intérêt montré pour mon travail et pour leurs invitations.

Je désire remercier aussi mes amis et collègues du CEREMADE, en particulier les thésards des bureaux C614 et C618 pour l'ambiance conviviale qu'ils ont su créer tout au long de ces trois années. Merci aussi aux thésards du département de mathématiques de l'Università degli Studi di Milano pour l'accueil sympathique lors des mes déplacements en Italie.

Merci beaucoup à Omar pour m'avoir toujours soutenue et encouragée.

Infine, un ringraziamento speciale va ai miei genitori, Maria e Adriano, che hanno sempre creduto in me ed hanno appoggiato le mie scelte. Nonostante la lontananza, mi hanno sostenuto e incoraggiato nei momenti di difficoltà con i loro preziosi consigli. Questa tesi di dottorato è dedicata a loro.

Simona

# Table des matières

# Riassunto

La presente tesi di dottorato è dedicata allo studio dal punto di vista matematico di alcuni modelli relativistici di fisica quantistica. L'obiettivo è di fornire una comprensione teorica di questi modelli poco studiati in modo rigoroso a causa delle difficoltà matematiche legate alla presenza degli effetti relativistici. Tuttavia, i modelli relativistici sono spesso utilizzati sia in ambito chimico che fisico; per questo motivo un'analisi teorica sembra essere necessaria: l'idea è di inserire questi modelli in un contesto matematico rigoroso, dimostrare l'esistenza di soluzioni e proporre una definizione soddisfacente dello stato fondamentale. I lavori qui presentati hanno apportato dei risultati interessanti in questa direzione.

Questa tesi è divisa in due parti indipendenti.

Nella prima parte, dedicata alle equazioni di Einstein–Dirac–Maxwell che descrivono l'interazione tra gravità, un campo di materia e un campo elettromagnetico, si dimostra l'esistenza delle soluzioni ottenute numericamente da F. Finster, J. Smoller e S.T. Yau in [FSY99b] e in [FSY99a]. Più precisamente, si prova rigorosamente l'esistenza di soluzioni delle equazioni di Einstein–Dirac–Maxwell per un sistema statico, sfericamente simmetrico di due fermioni in uno stato di singoletto, nel caso particolare di un'interazione elettromagnetica debole. Grazie alle simmetrie del modello, le equazioni di Einstein–Dirac–Maxwell possono essere scritte come un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine e le soluzioni di questo sistema si ottengono con un metodo perturbativo.

Nella seconda parte della tesi, viene studiato il modello di campo medio relativistico del nucleo atomico. Questo modello è un esempio di modello QHD (*Quantum Hadrodynamics*[1]) in un'approssimazione di campo medio e descrive il comportamento dei nucleoni all'interno del nucleo atomico. Dal punto di vista matematico, si tratta di un sistema di equazioni di Dirac non lineari che possono essere interpretate come le equazioni di Eulero–Lagrange di un funzionale d'energia. In questa tesi, si propone una condizione che garantisce l'esistenza di una soluzione di energia minimale di queste equazioni; in particolare, il nostro risultato associa l'esistenza di punti critici di un funzionale d'energia fortemente indefinito alle disuguaglianze strette del principio di concentrazione-compattezza di P.L. Lions ([Lio84a], [Lio84b]).

[1]La QHD è una teoria quantistica dei campi per un sistema nucleare a $N$ corpi dove i gradi di libertà sono di tipo adronico (si veda [SW97]).

In questa tesi di dottorato, tutti i modelli studiati sono non lineari e vengono utilizzati metodi matematici tipici dell'analisi non lineare e del calcolo delle variazioni. Per quanto riguarda la parte A, le dimostrazioni dei nostri risultati si basano sull'idea introdotta da H. Ounaies in [Oun00] (si veda anche [Gua08]); in questo articolo, le soluzioni di una classe di equazioni di Dirac non lineari sono costruite, utilizzando un metodo perturbativo, a partire dalle soluzioni di un'equazione di Schrödinger non lineare. Il metodo utilizzato da H. Ounaies è molto simile a quello sviluppato da C.A. Stuart; in particolare, si tratta di costruire delle soluzioni che biforcano dallo spettro essenziale dell'operatore. Per ulteriori dettagli il lettore potrà consultare l'articolo di C.A. Stuart [Stu97] e i riferimenti bibliografici riportati. Nella parte B, la dimostrazione del teorema principale si basa sul principio di concentrazione-compattezza di P.L. Lions ([Lio84a], [Lio84b]) e sulle idee descritte nell'articolo di D. Gogny e P.L. Lions ([GL86]), che contiene un'applicazione di questo principio alla fisica nucleare. Infine, per le proprietà dell'operatore di Dirac, si sono utilizzati dei risultati che il lettore potrà trovare negli articoli [ES99], [ES01] e [ELS08].

# Bibliografia


[ELS08] Esteban, M.J., Lewin, M., Séré, E. Variational methods in relativistic quantum mechanics. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 45(4), 535–593, 2008.

[ES99] Esteban, M.J., Séré, E. Solutions of the Dirac-Fock Equations for Atoms and Molecules. *Commun. Math. Phys.*, 203, 499–530, 1999.

[ES01] Esteban, M.J., Séré, E. Nonrelativistic Limit of the Dirac-Fock Equations. *Ann. Henri Poincaré*, 2, 941–961, 2001.

[FSY99a] Finster, F., Smoller, J., Yau, S.T. Particle-like solutions of the Einstein–Dirac–Maxwell equations. *Phys. Lett. A*, 259(6), 431–436, 1999.

[FSY99b] Finster, F., Smoller, J., Yau, S.T. Particlelike solutions of the Einstein-Dirac equations. *Phys. Rev. D*, 59, 1999.

[GL86] Gogny, D., Lions, P.L. Hartree-Fock theory in nuclear physics. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 20(4), 571–637, 1986.

[Gua08] Guan, M. Solitary Wave Solutions for the Nonlinear Dirac Equations, 2008. Preprint.

[Lio84a] Lions, P.L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1(2), 109–145, 1984.

[Lio84b] Lions, P.L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. II. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1(4), 223–283, 1984.

[Oun00] Ounaies, H. Perturbation method for a class of non linear Dirac equations. *Differential Integral Equations*, 13(4-6), 707–720, 2000.

[Stu97] Stuart, C.A. Bifurcation from the Essential Spectrum. In M. Matzeu, A. Vignoli, eds., *Topological Nonlinear Analysis II. Degree, Singularity and Variations*, volume 27 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. Birkhäuser, 1997.

[SW97] Serot, B.D., Walecka, J.D. Recent Progress in Quantum Hadrodynamics. *Int. J. Mod. Phys. E*, 6(4), 515–631, 1997.

# Introduction et présentation des résultats

Cette thèse est consacrée à l'étude mathématique de modèles relativistes issus de la physique quantique. L'objectif est d'avoir une compréhension théorique de ces modèles peu étudiés de façon rigoureuse à cause des difficultés mathématiques liées à la présence des effets relativistes. Cependant, les modèles relativistes sont souvent utilisés par les chimistes et les physiciens ; c'est la raison pour laquelle une analyse théorique semble nécessaire : il s'agit de donner un cadre mathématique rigoureux à ces modèles, de montrer l'existence de solutions et de proposer une définition satisfaisante de l'état fondamental. Les travaux présentés dans cette thèse ont apporté des résultats intéressants dans cette direction.

Cette thèse est divisée en deux parties indépendantes.

La première partie est consacrée aux équations d'Einstein–Dirac–Maxwell, qui décrivent l'interaction entre la gravité, un champ de matière et un champ électromagnétique. Nous démontrons l'existence de solutions obtenues numériquement par F. Finster, J. Smoller et S.T. Yau dans [FSY99b] et [FSY99a]. Plus précisément, nous prouvons de façon rigoureuse l'existence de solutions des équations d'Einstein–Dirac–Maxwell pour un système statique, à symétrie sphérique de deux fermions dans un état singulet et avec un couplage électromagnétique faible. Grâce aux symétries du modèle, nous pouvons écrire les équations d'Einstein–Dirac–Maxwell sous la forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre couplées et, par une méthode de perturbation, nous montrons l'existence de solutions de ce système.

Dans la seconde partie, nous étudions le modèle de champ moyen relativiste du noyau atomique. Il s'agit d'un modèle d'hadrodynamique quantique[2] (*Quantum Hadrodynamics* QHD) dans une approximation de champ moyen, qui décrit le comportement des nucléons à l'intérieur du noyau atomique. Du point de vue mathématique, nous sommes confrontés à un système d'équations de Dirac non linéaires qui peuvent être vues comme les équations d'Euler–Lagrange d'une fonctionnelle d'énergie. Nous proposons une condition qui garantit l'existence d'une solution d'énergie minimale de ces équations ; plus précisément, il s'agit

[2] L'hadrodynamique quantique est une théorie quantique des champs d'un système nucléaire à $N$ corps fondée sur les degrés de liberté hadroniques (voir [SW97]).

d'un résultat qui lie l'existence de points critiques d'une fonctionnelle d'énergie fortement indéfinie et les inégalités de concentration-compacité strictes.

Dans cette thèse, tous les modèles étudiés sont non linéaires et nous utilisons des méthodes d'analyse non linéaire et de calcul variationnel adaptées à cette difficulté. En ce qui concerne la partie A, les preuves de nos résultats sont basées sur l'idée introduite par H. Ounaies dans [Oun00] (voir aussi [Gua08]) ; dans ce papier, les solutions d'une classe d'équations de Dirac non linéaires sont construites, par une méthode de perturbation, à partir des solutions d'une équation de Schrödinger. La méthode utilisée par H. Ounaies est très proche de celle développée par C.A. Stuart ; plus précisément, il s'agit de construire une branche de solutions à partir du spectre essentiel de l'opérateur. Pour plus de détails le lecteur pourra consulter le review de C.A. Stuart [Stu97] et les références contenues dans celui-ci. Dans la partie B, la démonstration du théorème principal s'appuie sur l'argument de concentration-compacité de P.L. Lions ([Lio84a], [Lio84b]) ; le papier de D. Gogny et P.L. Lions ([GL86]) qui contient une application de cet argument à la physique nucléaire a également été très utile. Enfin, en ce qui concerne les propriétés de l'opérateur de Dirac, nous avons utilisé des résultats que le lecteur pourra trouver dans les papiers [ES99], [ES01] et [ELS08].

Pour mieux comprendre l'étude mathématique des modèles présentés, il est important d'avoir quelques connaissances générales du contexte physique dans lequel ces modèles ont été développés. La première section de cette introduction est dédiée à la description du lien entre mécanique quantique et relativité, et sert à introduire l'opérateur de Dirac. Dans la deuxième section, nous présentons le problème étudié dans la partie A de cette thèse. Nous montrons qu'il est possible de dériver les équations d'Einstein–Dirac–Maxwell à partir d'une intégrale d'action et nous écrivons ces équations dans le cas d'un système statique, à symétrie sphérique de deux fermions dans un état singulet ; ensuite, nous présentons les résultats obtenus et les perspectives futures. Dans la section 3, nous introduisons la théorie de champ moyen relativiste traitée dans la partie B. Après avoir décrit la dérivation des équations de champ moyen relativiste, nous présentons nos résultats et nos perspectives.

# 1. Mécanique quantique et relativité restreinte

Bien que la mécanique quantique, telle qu'elle a été développée jusqu'à environ 1925, soit une théorie extrêmement précise dans le domaine des basses énergies, elle n'est pas en accord avec la théorie de la relativité d'Einstein. Pour pouvoir rendre compte des phénomènes microscopiques de haute énergie, il a été donc nécessaire de formuler une théorie quantique en accord avec les principes de la relativité restreinte ; plus précisément les lois du mouvement valables dans un système inertiel de Lorentz doivent être vraies dans tous les systèmes inertiels de Lorentz et, du point de vue mathématique, cette nouvelle théorie quantique relativiste doit être formulée sous une forme covariante.

## 1.1. La mécanique quantique relativiste et l'équation de Dirac

La mécanique quantique relativiste est une théorie qui essaie d'unifier le principe de relativité restreinte et les postulats de la mécanique quantique afin de décrire la dynamique quantique d'une particule relativiste, c'est-à-dire d'une particule dont la vitesse n'est pas négligeable devant la vitesse de la lumière. Cette théorie est l'origine historique de l'équation de Dirac. Plus précisément, en mécanique quantique relativiste, l'équation de Schrödinger est généralisée par deux équations d'ondes relativistes : l'équation de Klein-Gordon, qui décrit une particule massive de spin 0, et l'équation de Dirac, qui décrit une particule massive de spin $\frac{1}{2}$ telle que l'électron, le proton ou le neutron.

### L'opérateur de Dirac libre

Pour la dérivation de l'opérateur de Dirac libre, nous suivons l'argument original de Paul Dirac (voir [Dir82], [Tha92], [BD64], [Mes95] pour une présentation plus détaillée).

Formellement, la transition de la mécanique classique à la mécanique quantique peut être réalisée en remplaçant les quantités classiques par des opérateurs appropriés. Plus précisément, pour l'énergie $E$ et l'impulsion $p$ d'une particule libre, nous utilisons la règle de correspondance de Schrödinger

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t},\ p \to -i\hbar\nabla \tag{1.1}$$

avec $\hbar$ la constante de Planck. Donc, en utilisant la relation classique d'énergie–impulsion

$$E = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}, \tag{1.2}$$

nous obtenons l'équation

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x) = \sqrt{-c^2\hbar^2\Delta + m^2c^4}\,\Psi(t,x) \tag{1.3}$$

où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ est l'opérateur laplacien. L'équation (1.3), même si elle prend en compte la relation entre l'énergie et l'impulsion exigée par la relativité, est encore insatisfaisante du point de vue de la théorie relativiste. L'asymétrie entre les cordonnées d'espace et de temps est telle que l'invariance relativiste et les propriétés qui en découlent n'y apparaissent pas clairement ; de plus, selon Dirac, cette équation ne peut pas être généralisée de façon relativiste en présence d'un champ électromagnétique.

Pour éviter ces difficultés, nous pouvons prendre comme point de départ la relation

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4 \tag{1.4}$$

et, en utilisant (1.1), nous obtenons l'équation suivante, dite équation de Klein-Gordon,

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(t,x) = \left(-c^2\hbar^2\Delta + m^2c^4\right)\Psi(t,x). \tag{1.5}$$

Nous remarquons que l'équation (1.3) et l'équation (1.5) ne sont pas équivalentes car, bien que toute solution de (1.3) soit une solution de (1.5), l'inverse n'est pas vrai. L'équation (1.5) est de même insatisfaisante. En effet, cette équation avec une fonction d'onde $\Psi(t,x)$ scalaire n'est pas adaptée à la description des particules avec spin différent de zéro comme les électrons ou, plus généralement, les fermions. De plus, l'équation d'évolution d'un système quantique doit être du premier ordre par rapport à $t$ (voir l'argument proposé par P. Dirac dans [Dir82, §27]). Finalement, pour pouvoir interpréter la fonction d'onde, il faut définir une densité de probabilité de présence $P$ et une densité de courant $j = (j_1, j_2, j_3)$ satisfaisant à l'équation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial t} P + \operatorname{div} j = 0. \tag{1.6}$$

Comme $\Psi$ et $\Psi^*$ vérifient l'équation (1.5), nous avons

$$\begin{aligned} \hbar^2 \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - c^2\hbar^2 \Psi^* \Delta \Psi + m^2 c^4 \Psi^* \Psi = 0, \\ \hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial t^2} \Psi - c^2\hbar^2 \Delta \Psi^* \Psi + m^2 c^4 \Psi^* \Psi = 0; \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\Psi^*\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}\Psi\right)\right] + \operatorname{div} \frac{\hbar}{2im}\left[\Psi^*(\nabla\Psi) - (\nabla\Psi^*)\Psi\right] = 0.$$

Nous voudrions donc interpréter $P = \left[\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\Psi^*\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}\Psi\right)\right]$ comme une densité de probabilté de présence mais cela n'est pas possible étant donné que la densité $P$ n'est pas définie positive.

En 1928, Dirac eut l'idée d'écrire la relation d'énergie–impulsion (1.2) sous la forme

$$E = c\sum_{i=1}^{3} \alpha_i p_i + \beta mc^2 = c\boldsymbol{\alpha} \cdot p + \beta mc^2 \tag{1.7}$$

où $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Les $\alpha_i$ et $\beta$ sont des matrices $n \times n$ hermitiennes définies de sorte que la relation (1.4) soit satisfaite. Plus précisément, en comparant (1.4) et (1.7), nous obtenons que les matrices $\alpha_i$ et $\beta$ doivent vérifier les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j &= 2\delta_{jk}\mathbb{1} \\ \beta\alpha_j + \alpha_j \beta &= 0 \\ \beta^2 &= \mathbb{1} \end{aligned} \tag{1.8}$$

pour $j, k = 1, 2, 3$ et avec $\delta_{jk}$ le symbole de Kronecker. Il est très aisé de voir que la dimension des matrices $\alpha_i$ et $\beta$ doit être paire et ne peut pas être égale 2 (voir [Tha92]) ; en dimension 4, les relations dans (1.8) sont satisfaites en choisissant

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

pour $k = 1, 2, 3$, avec

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

les matrices de Pauli ; cette représentation est celle introduite par Dirac.

Finalement, en utilisant la règle de correspondance (1.1), nous obtenons l'équation de Dirac

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x) = H_0^c\Psi(t,x) \tag{1.11}$$

avec

$$H_0^c = -i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta mc^2. \tag{1.12}$$

L'opérateur $H_0^c$ représente l'Hamiltonien d'une particule de spin $\frac{1}{2}$ libre et il agit sur des fonctions d'onde vectorielles, appelées spineurs,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4;$$

plus précisément $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$. Nous rappelons que le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ est donné par

$$(\Psi, \Phi) = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{4} \psi_i^*(x)\phi_i(x)\, d^3x$$

avec $\psi_i^*$ le complexe conjugué de $\psi_i$.

L'équation de continuité (1.6) est satisfaite en choisissant $P(t,x) = \sum_{i=1}^{4} \Psi_i^*\Psi_i$, $j = (j_1, j_2, j_3)$ et $j_k = c\Psi^*\alpha_k\Psi$ ; en particulier,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^3} \Psi(t,x)^*\Psi(t,x)\, d^3x = 0$$

ce qui signifie que la probabilité de présence $P$ est indépendant du temps.

L'opérateur de Dirac libre est un opérateur auto-adjoint sur le domaine $\mathcal{D}(H_0^c) = H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ ; son spectre est purement continu et il est donné par

$$\sigma(H_0^c) = (-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, +\infty)$$

(voir [Tha92]). Nous noterons $\Lambda_c^-$ (respectivement $\Lambda_c^+$) le projecteur associé à la partie négative (respectivement positive) du spectre de $H_0^c$, c'est-à-dire $\Lambda_c^- = \chi_{(-\infty,0)}(H_0^c)$ et $\Lambda_c^+ = \chi_{(0,+\infty)}(H_0^c)$.

Nous observons que le spectre de l'opérateur de Dirac $H_0^c$, qui est censé décrire l'énergie d'un particule de spin $\frac{1}{2}$ libre, contient une partie négative non bornée ; cela signifie que l'équation de Dirac autorise aussi bien des états d'énergie négative, plus petite que $-mc^2$, que positive, plus grande que $mc^2$. La question qui se pose est comment interpréter ces états d'énergie négative ? S'il était possible de découpler complètement les états d'énergie positive et les états d'énergie négative, nous pourrions simplement ignorer ces derniers. Malheureusement, tel n'est pas le cas ; en effet, il est théoriquement possible de provoquer une transition d'un état d'énergie positive à un état d'énergie négative, par exemple en soumettant un électron à un champ radioélectrique. Dans [Dir33], Dirac propose l'interprétation suivante pour les états d'énergie négative d'un électron : en accord avec le principe d'exclusion de Pauli[3], si l'électron se trouve nécessairement dans un état d'énergie positive, c'est que tous les états d'énergie négative sont déjà occupés par des particules virtuelles. Cela implique que le vide est en réalité composé d'une infinité de particules virtuelles qui occupent les énergies négatives de l'opérateur de Dirac libre ; cette infinité de particules d'énergie négative est appelée mer de Dirac. La mer de Dirac est supposée être complètement inobservable à cause de son uniformité. Par conséquent, le vide peut être modélisé par le projecteur spectral négatif $\Lambda_c^-$.

Cette description du vide a des conséquences très intéressantes. Sous l'action d'un champ électromagnétique, un électron de la mer de Dirac peut effectuer une transition à un état d'énergie positive et lorsque cette transition a lieu un « trou » apparaît dans le vide. Ce « trou » peut être interprété comme une particule de charge positive ayant la même masse que l'électron ; ces particules ont été observées expérimentalement : il s'agit des positrons. Le phénomène de création de paires positron–électron a également été observé expérimentalement. De la même façon, si un « trou » s'est produit dans la mer de Dirac, un électron peut effectuer une transition avec émission de photons d'un état d'énergie positive à cet état d'énergie négative inoccupé : il s'agit du phénomène d'annihilation d'une paire électron–positron observé expérimentalement. La découverte des positrons (appelés aussi antiélectrons) en 1933 par Carl Anderson confirme de façon étonnante la théorie de Dirac. L'équation de Dirac est valable pour les électrons mais aussi pour toute autre particule de spin $\frac{1}{2}$, comme par exemple les protons et les neutrons. Comme dans le cas de l'électron et du positron, nous pouvons supposer que toute particule décrite par l'équation de Dirac a une antiparticule ayant charge opposée mais même masse et même spin. Dans [Dir33], Dirac prédit l'existence de l'antiparticule du proton ; en 1955, en utilisant un nouvel accélérateur de particules, Emilio Segrè et Owen Chamberlain découvrent l'antiproton et, en 1956, Bruce Cork découvre l'antineutron, ouvrant la voie à la mise en évidence d'autres antiparticules.

### Forme covariante de l'équation de Dirac et rappels de calcul tensoriel

Dans cette sous-section, nous allons écrire l'équation de Dirac sous forme covariante car sous cette forme elle sera souvent utilisée dans la suite (voir [Mes95]). L'équation de Dirac sous forme covariante s'écrit dans un espace-temps à quatre dimensions : l'espace de Minkowski (Partie B) ou un espace-temps courbe avec une métrique lorentzienne si l'on est en présence d'un champ gravitationnel (Partie A). Ici, nous montrons comment écrire l'équation de Dirac dans un espace-temps plat comme l'espace de Minkowski ; nous verrons

[3]Deux particules ne peuvent pas occuper simultanément un même état quantique.

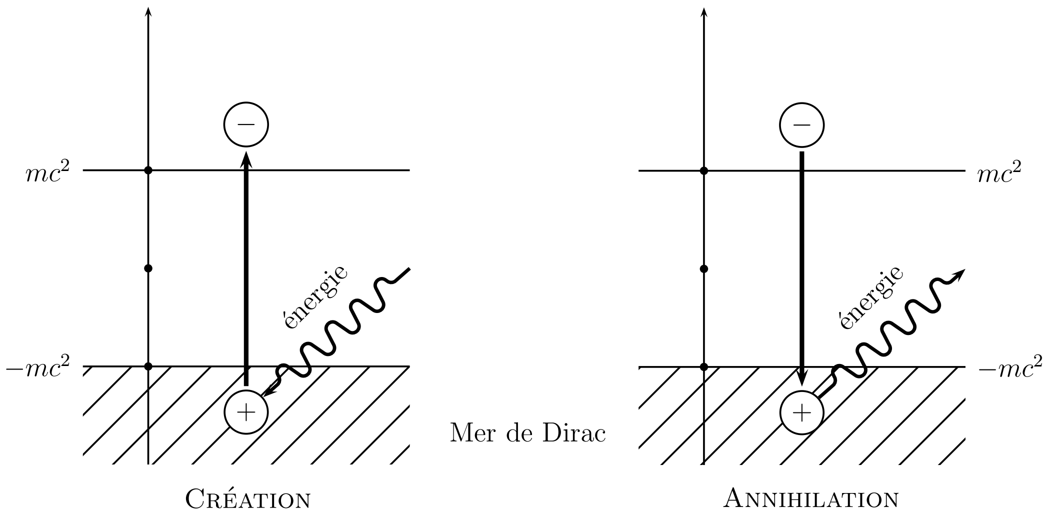


Figure 1 – Création et annihilation d'une paire positron-électron

brièvement dans la section 2 comment faire dans le cas d'un espace-temps courbe.

La métrique dans l'espace-temps de Minkowski est une métrique lorentzienne, c'est-à-dire une métrique pseudo-riemanienne sur une variété de dimension $n$ avec signature $(1, n-1)$ ou $(n-1, 1)$ selon la convention de signes, définie au moyen du tenseur métrique

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

La donnée d'un instant $t$ et d'un point $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ de l'espace ordinaire $\mathbb{R}^3$ définit un point de l'espace-temps que nous notons par $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ avec $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ et $x^3 = z$. Nous rappelons qu'il y a une distinction entre vecteurs covariants, qui se transforment comme $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, et vecteurs contravariants, qui se transforment comme $x^\mu$, et plus généralement dans le cas d'un tenseur entre composantes covariantes et contravariantes. Le vecteur covariant $x_\mu$ se déduit du vecteur contravariant $x^\mu$ par application du tenseur métrique en composantes covariantes ; plus précisément

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

où nous avons utilisé la convention de sommation d'Einstein. Dans ce cas, nous parlons d'opération d'abaissement des indices. L'opération d'élévation des indices se fait en appliquant le tenseur métrique inverse $g^{\mu\nu}$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu.$$

Nous rappelons que le tenseur métrique $g^{\mu\nu}$ en composantes contravariantes est l'inverse de $g_{\mu\nu}$, c'est-à-dire

$$g_{\mu\rho}g^{\rho\nu} = \delta_\mu^{\ \nu}$$

où $\delta_\mu^{\ \nu}$ est le symbole de Kronecker

$$\delta_\mu^{\ \nu} = \begin{cases} 1 \text{ si } \mu = \nu \\ 0 \text{ si } \mu \neq \nu \end{cases}.$$

Le produit scalaire de deux quadrivecteurs $a^\mu$, $b_\mu$ s'obtient en contractant les composantes contravariante de l'un avec les composantes covariantes de l'autre ; dans l'espace de Minkowski, nous avons

$$a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

avec $\boldsymbol{a} = (a^1, a^2, a^3)$, $\boldsymbol{b} = (b^1, b^2, b^3)$ et $\cdot$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$. Le carré de la pseudo-norme de $a^\mu$ est $a^\mu a_\mu$. Nous rappelons que un changement de référentiel de Lorentz, auquel nous sommes intéressés en relativité restreinte, est une transformation linéaire réelle des coordonnées qui conserve le carré de la pseudo-norme des intervalles entre le différents points de l'espace-temps (voir [Mes95]). Finalement, les quatre opérateurs de dérivation partielle $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ forment un vecteur covariant représenté par

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial ct}, \nabla\right).$$

où $\nabla$ est le gradient usuel dans $\mathbb{R}^3$. Le gradient contravariant dans l'espace de Minkowski est donné par

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu = \left(\frac{\partial}{\partial ct}, -\nabla\right).$$

Pour écrire l'équation de Dirac sous forme covariante, nous multiplions (1.11) par $\frac{\beta}{c}$ et nous introduisons la notation

$$\beta = \gamma^0, \quad \beta\alpha_i = \gamma^i \tag{1.14}$$

pour $i = 1, 2, 3$. Cela donne

$$i\hbar\left(\gamma^0\frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \gamma^2\frac{\partial}{\partial x^2} + \gamma^3\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\Psi - mc\Psi = (i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\,\Psi = 0. \tag{1.15}$$

Avec ces nouvelles matrices $\gamma^\mu$, les relation d'anti-commutation (1.8) peuvent être réécrites élégamment sous la forme

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \tag{1.16}$$

avec $g^{\mu\nu}$ le tenseur métrique de l'espace de Minkowski.

Il est utile de considérer l'équation de Dirac sous forme covariante pour montrer qu'elle est formellement invariante dans un changement de référentiel de Lorentz (pour plus des détails voir [BD64], [Mes95]).

Finalement, en analysant le comportement de fonctions d'onde de Dirac par rapport à une rotation de l'espace, il est possible de montrer que les fonctions d'onde de Dirac se transforment par rotation comme celles d'une particule de spin $\frac{1}{2}$ (voir [Mes95] chapitre XX-12). Par conséquent, nous pouvons affirmer que l'équation de Dirac décrit de façon naturelle le spin des particules de spin $\frac{1}{2}$.

**Notation.** Dans la suite, nous travaillons dans un système d'unités où

$$\hbar = c = 1,$$

sauf pour la description de la limite non relativiste des équations de champ moyen relativiste dans la sous-section 3.2. Dans ce système d'unités, l'opérateur de Dirac libre est $H_0 = -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m$.

### L'équation de Dirac avec potentiel non linéaire

Dans la partie B de cette thèse, nous nous intéressons à l'opérateur de Dirac avec un potentiel non linéaire ; en particulier, nous étudions un système d'équations de Dirac non linéaires où le potentiel $V$ contient des termes de type Yukawa, qui sont solution d'une équation de Klein-Gordon, et de type Coulomb, solution d'une équation de Poisson[4], le spineur étant lui même à la source de ces champs. À l'aide d'inégalités de type Hardy (voir le lemme 1.1 de [ES99]), nous pouvons montrer que, sous certaines conditions, l'opérateur $H = H_0+V$ est un isomorphisme auto-adjoint entre $H^{1/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ et son dual $H^{-1/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$. Dans la suite, nous sommes intéressés par l'étude des valeurs propres de l'opérateur $H$.

Dans la définition du vide donnée plus haut, les états d'énergie négative considérés sont ceux de la particule libre ; l'introduction d'un potentiel (par exemple d'un champ électromagnétique) modifie cet état de vide, ce dernier se comportant comme un milieu polarisable : nous parlons dans ce cas de polarisation du vide. Cet effet de polarisation crée donc un nouveau champ, qui devrait être pris en compte dans l'opérateur $H$, et le vide devrait être représenté par le projecteur

$$P = \chi_{(-\infty,0]}(H + V_{pol}) \tag{1.17}$$

où $V_{pol}$ est le potentiel créé par la polarisation du vide. Comme le potentiel $V_{pol}$ dépend lui-même du projecteur choisi, l'équation (1.17) est une équation auto-cohérente ; ce type d'équation a été étudiée du point de vue mathématique par C. Hainzl, M. Lewin et E. Séré dans [HLS05]. Dans ce papier, les auteurs considèrent le modèle Bogoliubov-Dirac-Fock (BDF) et montrent l'existence d'un unique minimiseur de l'énergie associée à ce modèle ; ce minimiseur est solution d'une équation de la forme (1.17) et représente le vide polarisé.

Dans le modèle de champ moyen relativiste considéré dans la partie B, nous négligeons la polarisation du vide ; dans ce cas la mer de Dirac est représentée par le projecteur $\chi_{(-\infty,0)}(H)$. Cette approximation semble raisonnable, étant donné que, avec un bon choix des paramètres du modèle, une grande partie de l'effet de la polarisation du vide est déjà prise en compte ([Rin96]).

[4] L'équation de Poisson est $-\Delta u = f$ avec $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction donnée.

### 1.2. Limitations de la mécanique quantique relativiste et théorie quantique des champs

La description du vide par la théorie des « trous » permet de concilier la théorie de Dirac avec les faits expérimentaux : non-existence des états d'énergie négative, existence des positrons, création et annihilation de paires. Cependant, elle rend difficile l'interprétation de la mécanique quantique relativiste comme une théorie quantique relativiste à une particule. En effet, la théorie des « trous » est une théorie à $N$ corps, décrivant des particules avec charge positive et négative ; les fonctions d'onde n'ont plus l'interprétation probabiliste simple exigée par une théorie quantique à une particule car on doit prendre en considération le phénomène de création et d'annihilation de paires électron-positron. D'autre part, la mécanique quantique relativiste offre une description très précise de l'atome d'hydrogène et prédit l'existence des antiparticules ; de plus, l'équation de Dirac est compatible avec la théorie de la relativité restreinte et elle décrit naturellement le spin de l'électron. Par conséquent, nous pouvons penser de retenir l'équation de Dirac et la théorie des « trous » et d'écarter l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde d'une particule. Ainsi, la théorie de Dirac peut être considérée comme une étape sur la voie de la compréhension de la théorie quantique des champs (*Quantum field theory* QFT).

La théorie quantique des champs résout les problèmes de la mécanique quantique relativiste que nous avons mis en évidence mais elle n'est exempte ni de difficultés ni même de contradictions. Il s'agit d'une théorie fondée sur la notion de champ quantique et non pas d'une théorie de particules individualisées. Dans cette thèse, nous ne rentrons pas dans les détails de cette théorie ; nous nous limitons à remarquer que la théorie de champ moyen relativiste présentée dans la section 3 est un exemple de théorie quantique des champs dans une approximation de champ moyen. Pour plus des détails concernant la théorie quantique des champs, le lecteur pourra se reporter à [BD65].

## 2. L'équation de Dirac et la relativité générale (Partie A)

Dans la partie A de cette thèse, nous nous intéressons à l'étude des équations d'Einstein–Dirac–Maxwell (EDM). Ces équations décrivent l'interaction entre la gravité, représentée par l'équation d'Einstein, un champ de matière, gouverné par l'équation de Dirac, et le champ électromagnétique.

Les équations d'Einstein–Dirac–Maxwell pour un système de $n$ particules s'écrivent sous la forme

$$R^i{}_j - \frac{1}{2}R\delta^i{}_j = -8\pi T^i{}_j \tag{2.1}$$

$$(D - m)\psi_a = 0 \tag{2.2}$$

$$\nabla_k F^{jk} = 4\pi e \sum_{a=1}^{n} \bar{\psi}_a \gamma^j \psi_a \tag{2.3}$$

où $\gamma^j$ sont les matrices associées à l'opérateur de Dirac, $D$ indique l'opérateur de Dirac, $\psi_a$ sont les fonctions d'ondes des fermions de masse $m$ et charge $e$, $R^i{}_j$ est le tenseur de courbure de Ricci, $R$ est la courbure scalaire, $F_{jk}$ est le tenseur électromagnétique et, finalement, $T^i{}_j$ est le tenseur d'énergie-impulsion.

Le tenseur électromagnétique est donné par

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu, \tag{2.4}$$

$\mathcal{A}$ étant le quadri-vecteur du potentiel électromagnétique.

Nous remarquons que le tenseur d'énergie-impulsion, qui est la source du champ gravitationnel dans les équations d'Einstein en relativité générale, décrit la repartition de masse et énergie dans l'espace-temps ; dans le cas des équations d'Einstein–Dirac–Maxwell, ce tenseur prend en consideration la présence des fermions et celle du champ électromagnetique. La définition du tenseur d'énergie-impulsion sera donnée par la suite.

En étant en présence d'un champ gravitationnel, nous devons écrire l'opérateur de Dirac dans un espace-temps courbe ; plus précisément, nous considérons l'opérateur de Dirac sur une variété lorentzienne quadridimensionnelle avec un tenseur métrique $g_{jk}$ de signature $(+ - - -)$. Pour la dérivation de l'opérateur de Dirac dans cet espace-temps, nous suivons l'argument proposé par F. Finster dans [Fin98] (voir aussi [Fin06]). Cet argument, qui est non standard, donne une formulation équivalente des spineurs dans un espace-temps courbe dans le cadre d'une théorie de jauge $U(2,2)$ ; pour une approche plus traditionnelle voir [Ble05]. Le lecteur qui n'est pas familier avec les notions de géométrie différentielle pourra consulter [Lan99].

Soit $M$ une variété différentielle quadridimensionnelle ; nous definissons le fibré spinoriel $SM$ comme le fibré vectoriel au-dessus de $M$ avec fibre $\mathbb{C}^4$. Les fibres sont dotées d'une forme hermitienne non dégénérée de signature $(2,2)$, que l'on appelle *spin scalar product*[5] et que l'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Les spineurs sont les sections du fibré spinoriel et en coordonnées locales sont représentés par des fonctions $\Psi(x)$ à valeurs dans $\mathbb{C}^4$. Étant donné $(e_\alpha)_{\alpha=1,\dots,4}$ une base pseudo-orthonormée des fibres, c'est-à-dire telle que $\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = s_\alpha \delta_{\alpha\beta}$ avec $s_1 = s_2 = 1$ et $s_3 = s_4 = -1$, les spineurs s'écrivent sous la forme $\Psi = \Psi^\alpha e_\alpha$ et le *spin scalar product* est donné par

$$\langle \Psi, \Phi \rangle(x) = \sum_{\alpha=1}^{4} s_\alpha \Psi^\alpha(x)^* \Phi^\alpha(x) = \bar{\Psi}(x)\Phi(x) \tag{2.5}$$

avec $\bar{\Psi} = \Psi^* \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$. Bien évidemment, la base dans $\mathbb{C}^4$ n'est pas unique ; pour chaque point de l'espace-temps, il existe une matrice $U$ de taille $4 \times 4$ telle que

$$e_\alpha \to \left(U^{-1}\right)^\beta_\alpha e_\beta.$$

L'application $U$ est une transformation unitaire par rapport au *spin scalar product* ; cela signifie que $U(x)$ appartient au groupe de Lie $U(2,2)$ et, plus précisément, $U$ est telle que

$$U^* \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

[5]Malgré cette appellation, il ne s'agit pas d'un produit scalaire car la forme n'est pas définie positive.

Dans ce changement de base les spineurs se transforment de la façon suivante

$$\Psi^\alpha(x) \to U^\alpha_\beta(x)\Psi^\beta(x);$$

dans le cadre d'une théorie de jauge, cette transformation est interprétée comme une transformation de jauge locale avec groupe de jauge $\mathcal{G} = U(2,2)$ et le choix d'une base des spineurs est une jauge.

Nous rappelons qu'une théorie de jauge est une théorie des champs basée sur un groupe de symétrie locale, appelé groupe de jauge. Plus précisément, le groupe de jauge $\mathcal{G}$ est un groupe de Lie arbitraire et les transformation de la forme

$$\Psi \to U(x)\Psi(x),$$

avec $U : M \to \mathcal{G}$ une fonction lisse, sont interprétées comme des transformations de jauge locale. Dans une théorie de jauge, les dérivées partielles des fonctions d'ondes $\Psi$ sont remplacées par des dérivées covariantes de jauge $\mathcal{D}_j$ telles que

$$\mathcal{D}_j\Psi \to U(x)\mathcal{D}_j\Psi(x). \tag{2.6}$$

Dans [Fin98], F. Finster propose une formulation de la théorie de Dirac sur un espace-temps courbe de manière que $U(2,2)$ soit un groupe de jauge.

L'opérateur de Dirac est un opérateur différentiel du premier ordre qui peut s'écrire, dans une carte et une jauge particulières, sous la forme

$$D = i\gamma^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j} + B(x) \tag{2.7}$$

où $B(x)$ et les matrices de Dirac $\gamma^j(x)$, pour $j = 0,1,2,3$, sont des matrices $4 \times 4$ qui dépendent du point de l'espace-temps $x$. De plus, les matrices de Dirac $\gamma^j(x)$ coïncident localement avec les matrices de Dirac dans l'espace-temps de Minkowski, c'est-à-dire qu'il existe une carte dans un voisinage de $x$ et une jauge $(e_\alpha)_{\alpha=1,\dots,4}$ telles que

$$\gamma^j(x) = \bar{\gamma}^j \tag{2.8}$$

où $\bar{\gamma}^j$, pour $j = 0,1,2,3$, sont les matrices de Dirac dans l'espace de Minkowski définies par (1.14). Par conséquent, à partir des matrices de Dirac et grâce aux relations d'anti-commutation (1.16), il est possible de définir une métrique lorentzienne sur la variété $M$,

$$g^{jk}(x) = \frac{1}{2}\left\{\gamma^j(x), \gamma^k(x)\right\} = \frac{1}{2}\left(\gamma^j(x)\gamma^k(x) + \gamma^k(x)\gamma^j(x)\right); \tag{2.9}$$

l'opérateur de Dirac induit donc une structure de variété lorentzienne. Réciproquement, nous remarquons que, étant donné une variété lorentzienne quadridimensionnelle avec un tenseur métrique $g_{jk}$, les matrices de Dirac doivent satisfaire (2.9) et être hermitiennes par rapport au *spin scalar product*.

Pour avoir une théorie de jauge complète, il est nécessaire de construire, à partir de l'opérateur de Dirac, des dérivées covariantes de jauge $\mathcal{D}_j$, que l'on appelle *spin derivatives*.

Cette construction révèle la structure de la matrice $B(x)$ qui dépend du choix des $\gamma^j(x)$, et permets de définir ce que l'on appelle opérateur de Dirac physique qui prend en compte la présence du champ gravitationnel et du champ électromagnétique.

Sur une variété lorentzienne, nous pouvons considérer la connexion de Levi-Civita et définir les dérivées covariantes des matrices de Dirac ; ces dérivées ne sont pas des dérivées covariantes de jauge mais, pour chaque point de l'espace-temps $x \in M$, il existe une jauge, que l'on appelle jauge normale autour de $x$, telle que

$$\nabla_k \gamma^j(x) = 0, \tag{2.10}$$

pour tout $k, j$ (voir [Fin98]). En analysant les transformations entre deux jauges normales, il est possible de fixer certains degrés de liberté de jauge et donner une expression explicite des *spin derivatives* $\mathcal{D}_j$. En coordonnées locales, $\mathcal{D}_j$ est définie par

$$\mathcal{D}_j = \partial_j - i\mathcal{E}_j(x) - ia_j \tag{2.11}$$

où les $\mathcal{E}_j(x)$ sont des matrices $4 \times 4$ qui dépendent des $\gamma^j(x)$ et des $\partial_k \gamma^j(x)$, et les $a_j$ sont des potentiels qui suivent la loi de transformation

$$a_j \to a_j + iU(\partial_j U^{-1}).$$

Les matrices $\mathcal{E}_j(x)$, appelées *spin coefficients*, ont une formulation explicite que l'on peut trouver dans [Fin98] ; plus précisément,

$$\mathcal{E}_j = \frac{i}{2}\rho(\partial_j \rho) - \frac{i}{16}\operatorname{tr}(\gamma^m \nabla_j \gamma^n)\gamma_m \gamma_n + \frac{i}{8}\operatorname{tr}(\rho \gamma_j \nabla_m \gamma^m)\rho \tag{2.12}$$

avec

$$\rho = \frac{i}{4!}\varepsilon_{ijkl}\gamma^i\gamma^j\gamma^k\gamma^l$$

où $\varepsilon_{ijkl}$ est le tenseur de Levi-Civita défini par $\varepsilon_{ijkl} = \sqrt{-g}\epsilon_{ijkl}$ avec $\epsilon_{ijkl}$ le symbole de Levi-Civita d'ordre 4 et $g$ le déterminant de la matrice qui définit la métrique. De plus, dans les jauges normales $\mathcal{E}_j(x) = 0$.

Finalement, pour chaque point $x \in M$ nous pouvons choisir une jauge autour de $x$ dans laquelle les dérivées covariantes des matrices de Dirac valent 0 ; de plus, en coordonnées normales[6] et en utilisant une transformation de jauge globale[7], nous avons $\gamma^j(x) = \bar{\gamma}^j$ et $\partial_j g_{kl}(x) = 0$. Par conséquent, les dérivées covariantes en $x$ sont des dérivées partielles et nous en déduisons que

$$\gamma^j(x) = \bar{\gamma}^j, \quad \partial_k \gamma^j(x) = 0. \tag{2.13}$$

En conclusion, l'opérateur de Dirac physique est un opérateur différentiel du premier ordre de la forme (2.7) tel que $\forall x \in M$, il existe une carte et une jauge telles que la condition

[6] Le système des cordonnées normales en un point $x$ sur une variété différentielle, munie d'une connexion affine symétrique, est un système de coordonnées locales dans un voisinage de $x$ obtenu en utilisant l'application exponentielle de l'espace tangent en $x$. Dans un système de coordonnées normales, les symboles de Christoffel de la connexion valent 0 au point $x$.

[7] C'est-à-dire constante.

(2.13) est satisfaite et $B(x) = 0$. Dans une carte et une jauge quelconque, cet opérateur s'écrit sous la forme
$$D = i\gamma^j \mathcal{D}_j = i\gamma^j \left(\partial_j - ia_j\right) + \gamma^j \mathcal{E}_j$$
avec les matrices $\mathcal{E}_j$ qui prennent en compte la présence du champ gravitationnel et les $a_j$ qui peuvent être identifiés avec les composantes du potentiel électromagnétique. En effet, le potentiel électromagnétique est habituellement introduit dans l'équation de Dirac par la procédure de couplage minimal, c'est-à-dire en remplacant $\partial_j$ par la quantité $\partial_j - ie\mathcal{A}_j$ (voir [BD64]). Cela implique que, en présence d'un champ électromagnétique, l'opérateur de Dirac est défini par
$$D = i\gamma^j(x)(\partial_j - ie\mathcal{A}_j) + B(x) \tag{2.14}$$
avec
$$B(x) = \gamma^j(x)\mathcal{E}_j(x). \tag{2.15}$$

Les équations d'Einstein–Dirac–Maxwell peuvent être écrites sous une forme variationnelle où l'intégrale d'action est définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int \sum_{a=1}^{n} \bar{\psi}_a (D-m)\psi_a \sqrt{-g}\, d^4x - \frac{1}{16\pi}\int F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\, d^4x + \frac{1}{16\pi}\int R\sqrt{-g}\, d^4x \\ &:= \int \left(\mathcal{L}_D + \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_G\right)\sqrt{-g}\, d^4x := \int \mathcal{L}\sqrt{-g}\, d^4x. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Nous observons que l'équation de Dirac pour chaque particule est obtenue à partir de $\mathcal{I}$ en considérant la variation de l'intégrale d'action par rapport à $\bar{\psi}_a$.

Ensuite, nous pouvons montrer que les équations de Maxwell sont les équations d'Euler-Lagrange de $\mathcal{L}$ par rapport à la variation de chaque composante du quadri-vecteur $\mathcal{A}$. Si nous considérons les équations d'Euler-Lagrange

$$\partial_k \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial(\partial_k \mathcal{A}_j)} - \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial \mathcal{A}_j} = 0,$$

nous obtenons les équations de Maxwell

$$\nabla_k F^{jk} = 4\pi e \sum_{a=1}^{n} \bar{\psi}_a \gamma^j \psi_a$$

avec $\nabla_k F^{jk}$ la dérivée covariante de $F^{jk}$ ; plus précisément, $\nabla_k F^{jk} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_k\left(F^{jk}\sqrt{-g}\right)$.

En conclusion, les équations du champ d'Einstein s'obtiennent à partir de $\mathcal{I}$ en considérant la variation de l'intégrale d'action par rapport à la métrique. En utilisant la définition et les propriétés de la courbure scalaire et du tenseur de Ricci ([ABS75]), nous avons

$$\delta \int \mathcal{L}_G \sqrt{-g}\, d^4x = \frac{1}{16\pi}\int G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d^4x$$

où $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein. Nous rappelons que

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}. \tag{2.17}$$

Ensuite, par un calcul direct, nous obtenons

$$\delta\int \mathcal{L}_E\sqrt{-g}\,d^4x = \frac{1}{8\pi}\int\left(F_\mu{}^kF_{k\nu} + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x;$$

nous notons $E_{\mu\nu}$ le tenseur d'énergie-impulsion dû au champ électromagnétique et donné par

$$E_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F_\mu{}^kF_{k\nu} + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\right). \tag{2.18}$$

Puis, nous définissons le tenseur $D_{\mu\nu}$ tel que

$$\delta\int \mathcal{L}_D\sqrt{-g}\,d^4x = \frac{1}{2}\int D_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x;$$

ce tenseur représente le tenseur d'énergie-impulsion lié à la présence des particules de Dirac. Finalement, le principe de moindre action par rapport à la métrique donne les équations d'Einstein ; en effet, $\delta\mathcal{I} = 0$ implique

$$\frac{1}{2}D_{\mu\nu} + \frac{1}{2}E_{\mu\nu} + \frac{1}{16\pi}G_{\mu\nu} = 0,$$

c'est-à-dire

$$G_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu}$$

avec

$$T_{\mu\nu} = D_{\mu\nu} + E_{\mu\nu}. \tag{2.19}$$

Dans la suite, nous considérons le cas d'un système statique, à symétrie sphérique de deux fermions dans un état singulet, c'est-à-dire avec spins opposés. En coordonnées polaires $(t, r, \vartheta, \varphi)$, la métrique de l'espace-temps est définie par

$$g_{ij} = diag\left(\frac{1}{T^2}, -\frac{1}{A}, -r^2, -r^2\sin^2\vartheta\right) \tag{2.20}$$

$$g^{ij} = diag\left(T^2, -A, -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\right) \tag{2.21}$$

où $A = A(r)$ et $T = T(r)$ sont des fonctions positives. Afin d'avoir un espace-temps asymptotiquement plat, nous supposons

$$\lim_{r\to\infty} T(r) = 1,$$
$$\lim_{r\to\infty} A(r) = 1.$$

De plus, nous imposons que les solutions aient une masse (ADM) finie, c'est-à-dire

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r}{2}(1 - A(r)) < \infty.$$

Finalement, nous cherchons des solutions des équations d'Einstein–Dirac–Maxwell qui s'écrivent sous la forme

$$\psi_a = e^{-i\omega t} r^{-1} T^{1/2} \begin{pmatrix} \Phi_1 u_a \\ i\Phi_2 \sigma^r u_a \end{pmatrix}, \tag{2.22}$$

pour $a = 1, 2$. La matrice $\sigma^r = (\bar{\sigma}^1 \cos\vartheta + \bar{\sigma}^2 \sin\vartheta\cos\varphi + \bar{\sigma}^3 \sin\vartheta\sin\varphi)$ est une combinaison linéaire des matrices de Pauli $\bar{\sigma}^i$, $\Phi_1(r)$, $\Phi_2(r)$ sont deux fonctions radiales à valeurs réelles, $u_1 = (1, 0)$ et $u_2 = (0, 1)$. Nous remarquons que la matrice $\sigma^r$ s'écrit sous la forme $\sigma^r = \bar{\sigma} \cdot e_r$ avec $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}^1, \bar{\sigma}^2, \bar{\sigma}^3)$ et $e_r$ le vecteur unitaire dans la direction radiale en coordonnées sphérique.

## 2.1. Solutions localisées des équations d'Einstein–Dirac

Dans le chapitre I, nous étudions les équations d'Einstein–Dirac pour un système statique, à symétrie sphérique de deux fermions dans un état singulet. En utilisant une méthode numérique, F. Finster, J. Smoller et S.T. Yau ont trouvé, dans [FSY99b], des solutions localisées des équations d'Einstein–Dirac ; dans cette thèse, nous donnons une démonstration rigoureuse de leur existence par une méthode de perturbation[8]. À cause de l'absence de l'interaction électromagnétique, cette configuration ne représente pas un système physique réel ; il s'agit, en revanche, d'un modèle qui permet de mieux comprendre les équations et leurs solutions. La méthode développée dans le chapitre I sera généralisée dans le chapitre II au cas plus intéressant du point de vue physique des équations d'Einstein–Dirac–Maxwell.

Premièrement, nous devons écrire l'opérateur de Dirac dans un espace-temps statique, à symétrie sphérique avec le tenseur métrique défini par (2.20). Comme dans [FSY99b], pour les matrices de Dirac nous choisissons une combinaison linéaire des matrices $\bar{\gamma}^i$, avec $\bar{\gamma}^i$ les matrices de Dirac dans l'espace-temps de Minkowski. Plus précisément,

$$\gamma^t = T\bar{\gamma}^0, \tag{2.23}$$

$$\gamma^r = \sqrt{A}\left(\bar{\gamma}^1 \cos\vartheta + \bar{\gamma}^2 \sin\vartheta\cos\varphi + \bar{\gamma}^3 \sin\vartheta\sin\varphi\right), \tag{2.24}$$

$$\gamma^\vartheta = \frac{1}{r}\left(-\bar{\gamma}^1 \sin\vartheta + \bar{\gamma}^2 \cos\vartheta\cos\varphi + \bar{\gamma}^3 \cos\vartheta\sin\varphi\right), \tag{2.25}$$

$$\gamma^\varphi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(-\bar{\gamma}^2 \sin\varphi + \bar{\gamma}^3 \cos\varphi\right). \tag{2.26}$$

En utilisant la définition (2.15) pour la matrice $B(x)$, nous pouvons écrire l'opérateur de

[8] Pendant l'écriture de ce manuscrit, nous avons découvert que le professeur David Stuart a obtenu et publié le même résultat sur les équations d'Einstein-Dirac, par des arguments très proches, indépendamment et simultanément ([Stu10]).

Dirac dans l'espace-temps considéré et nous obtenons

$$D = i\gamma^t \partial_t + \gamma^r \left( i\partial_r + \frac{i}{r}\left(1 - A^{-1/2}\right) - \frac{i}{2}\frac{T'}{T} \right) + i\gamma^\vartheta \partial_\vartheta + i\gamma^\varphi \partial_\varphi. \tag{2.27}$$

En utilisant (2.22), l'équation de Dirac devient un système de deux équations differentielles ordinaires

$$\begin{aligned}
\sqrt{A}\Phi_1' &= \frac{1}{r}\Phi_1 - (\omega T + m)\Phi_2,\\
\sqrt{A}\Phi_2' &= (\omega T - m)\Phi_1 - \frac{1}{r}\Phi_2.
\end{aligned}$$

En absence du champ électromagnétique, le tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ est défini à partir de la variation de l'action de Dirac

$$\int \sum_{a=1}^{2} \bar{\psi}_a (D - m)\psi_a \sqrt{-g}\, d^4x$$

par rapport à $\delta g^{\mu\nu}$. Étant donné $\delta g_{ij}$ une variation arbitraire du tenseur métrique, la variation des autres quantités est donnée par

$$\delta g^{ij} = -g^{ik} g^{jl} \delta g_{kl}, \tag{2.28}$$

$$\delta\gamma^j = -\frac{1}{2} g^{jk} (\delta g_{kl}) \gamma^l, \tag{2.29}$$

$$\delta\gamma_j = \frac{1}{2} (\delta g_{kl}) \gamma^k. \tag{2.30}$$

Ensuite, nous remarquons que, l'action étant réelle, il est suffisant de considérer la partie réelle de l'intégrande et, les fonctions d'onde $\psi_a$ étant solutions de l'équation de Dirac, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\delta \int \sum_{a=1}^{2} \bar{\psi}_a (D - m)\psi_a \sqrt{-g}\, d^4x &= \int \mathrm{Re} \sum_{a=1}^{2} \bar{\psi}_a \left( i(\delta\gamma^j)\partial_j + \delta B \right) \psi_a \sqrt{-g}\, d^4x\\
&= \int \mathrm{Re} \sum_{a=1}^{2} \bar{\psi}_a \left( i(\delta\gamma^j)\partial_j \right) \psi_a \sqrt{-g}\, d^4x.
\end{aligned}$$

En effet, pour deux fermions dans un état singulet, nous avons

$$\sum_{a=1}^{2} \bar{\psi}_a \delta B \psi_a = 0$$

([FSY99b]). Donc

$$\begin{aligned}
\delta \int \sum_{a=1}^{2} \bar{\psi}_a (D - m)\psi_a \sqrt{-g}\, d^4x &= \int \frac{1}{2} \mathrm{Re} \sum_{a=1}^{2} \bar{\psi}_a \left( i\gamma_\mu \partial_\nu \right) \psi_a \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, d^4x\\
= \int \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \mathrm{Re} \sum_{a=1}^{2} \bar{\psi}_a \left( i\gamma_\mu \partial_\nu + i\gamma_\nu \partial_\mu \right) \psi_a \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, d^4x
\end{aligned}$$

et

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\sum_{a=1}^{2}\bar{\psi}_a\left(i\gamma_\mu\partial_\nu + i\gamma_\nu\partial_\mu\right)\psi_a.$$

En conclusion, en utilisant (2.22) et (2.23-2.26), nous avons

$$\begin{aligned} T^i{}_j &= \frac{1}{r^2}diag\left(2\omega T^2|\Phi|^2, -2\omega T^2|\Phi|^2 + 4T\frac{1}{r}\Phi_1\Phi_2 + 2mT\left(\Phi_1^2 - \Phi_2^2\right),\right. \\ &\left. -2T\frac{1}{r}\Phi_1\Phi_2, -2T\frac{1}{r}\Phi_1\Phi_2\right). \end{aligned}$$

Le tenseur d'Einstein est défini par $G^i{}_j = R^i{}_j - \frac{1}{2}R\delta^i{}_j$ et, dans l'espace-temps considéré, est donné par

$$\begin{aligned} G^0{}_0 &= -\frac{1}{r^2} + \frac{A}{r^2} + \frac{A'}{r}, \\ G^1{}_1 &= -\frac{1}{r^2} + \frac{A}{r^2} - \frac{2AT'}{rT}, \\ G^2{}_2 = G^3{}_3 &= \frac{A'}{2r} - \frac{AT'}{rT} - \frac{A'T'}{2T} + \frac{2AT'^2}{T^2} - \frac{AT''}{T}, \\ G^i{}_j &= 0 \text{ si } i \neq j \end{aligned}$$

(voir [ABS75] pour plus de détails). Par conséquent, les équations de champ d'Einstein sont données par

$$\begin{aligned} &-16\pi\omega T^2|\Phi|^2 = rA' - (1-A), \\ &-16\pi\omega T^2|\Phi|^2 + 32\pi T\frac{1}{r}\Phi_1\Phi_2 + 16\pi mT\left(\Phi_1^2 - \Phi_2^2\right) = 2rA\frac{T'}{T} + (1-A), \\ &-16\pi T\frac{1}{r}\Phi_1\Phi_2 = A\left[r^2\frac{T''}{T} + r^2\frac{A'T'}{2AT} - 2r^2\left(\frac{T'}{T}\right)^2 - r\frac{A'}{2A} + r\frac{T'}{T}\right] \end{aligned}$$

avec $|\Phi|^2 = \Phi_1^2 + \Phi_2^2$.

En conclusion, les équations d'Einstein–Dirac s'écrivent sous la forme

$$\sqrt{A}\Phi_1' = \frac{1}{r}\Phi_1 - (\omega T + m)\Phi_2, \tag{2.31}$$

$$\sqrt{A}\Phi_2' = (\omega T - m)\Phi_1 - \frac{1}{r}\Phi_2, \tag{2.32}$$

$$rA' = 1 - A - 16\pi\omega T^2\left(\Phi_1^2 + \Phi_2^2\right), \tag{2.33}$$

$$2rA\frac{T'}{T} = A - 1 - 16\pi\omega T^2\left(\Phi_1^2 + \Phi_2^2\right) + 32\pi\frac{1}{r}T\Phi_1\Phi_2 + 16\pi mT\left(\Phi_1^2 - \Phi_2^2\right). \tag{2.34}$$

Nous observons que la dernière équation de champ d'Einstein est impliquée par ce système d'équations. Les solutions des équations (2.31-2.34) doivent satisfaire la contrainte de normalisation suivante

$$\int_0^\infty |\Phi|^2\frac{T}{\sqrt{A}}\,dr = \frac{1}{4\pi}. \tag{2.35}$$

Dans le chapitre I, nous prouvons, par une méthode de perturbation, l'existence des solutions des équations (2.1-2.2) qui s'écrivent sous la forme (2.22). En particulier, nous utilisons l'idée décrite par Ounaies dans [Oun00] (voir aussi [Gua08] pour une démonstration rigoureuse, basée sur l'argument de Ounaies, de l'existence de solitons de Dirac). Ounaies, par une méthode de perturbation, construit les solutions d'une équation de Dirac non linéaire à partir de celles d'une équation de Schrödinger non linéaire. De la même façon, nous construisons les solutions de nos équations à partir de celles de l'équation de Choquard non linéaire,

$$-\triangle u + 2mu - 4m^3 \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(y)|^2}{|x-y|} \, dy \right) u = 0$$

dans $H^1(\mathbb{R}^3)$ (voir [Lie77], [Lio80], [Len08] pour plus de détails sur l'équation de Choquard). Plus précisément, nous choisissons comme paramètre de perturbation la différence entre la masse $m$ du fermion et la fréquence temporelle $\omega$ de sa fonction d'onde (voir (2.22)).

Le résultat principal du chapitre I est le théorème suivant.

**Théorème 2.1.** *Étant donné $0 < \omega < m$ tel que $m - \omega$ soit assez petit, il existe une solution non triviale des équations (2.31-2.34).*

La condition $m-\omega$ petit signifie que nous considérons un régime faiblement relativiste.

## 2.2. Solutions localisées des équations d'Einstein–Dirac–Maxwell

Dans le chapitre II, nous généralisons le résultat décrit dans le chapitre I aux équations d'Einstein–Dirac–Maxwell et nous montrons, dans le cas particulier d'un couplage électromagnétique faible, l'existence des solutions obtenues numériquement par F. Finster, J. Smoller et S.T. Yau dans [FSY99a].

Comme dans le chapitre I, nous considérons un système statique, à symétrie sphérique de deux fermions dans un état singulet où la métrique est définie par (2.20) et nous cherchons des solutions qui s'écrivent sous la forme (2.22). Pour écrire les équations d'Einstein–Dirac–Maxwell dans ce contexte, nous modifions les équations d'Einstein–Dirac. Dans le cas statique, les fermions génèrent un champ qui est seulement électrique et donc nous pouvons supposer que le potentiel électromagnétique s'écrit sous la forme $\mathcal{A} = (-V, 0)$ avec $V$ le potentiel de Coulomb (voir [FSY99a]).

L'opérateur de Dirac est alors donné par

$$D = i\gamma^t(\partial_t + ieV) + \gamma^r \left( i\partial_r + \frac{i}{r}\left(1 - A^{-1/2}\right) - \frac{i}{2}\frac{T'}{T} \right) + i\gamma^\vartheta \partial_\vartheta + i\gamma^\varphi \partial_\varphi \tag{2.36}$$

et, la dépendance en temps des fonctions d'onde (2.22) étant de la forme $\exp(-i\omega t)$, il suffit de remplacer $\omega$ par la quantité $\omega - eV$. Par conséquent, les équations de Dirac sont données par

$$\sqrt{A}\Phi_1' = \frac{1}{r}\Phi_1 - ((\omega - eV)T + m)\Phi_2,$$
$$\sqrt{A}\Phi_2' = ((\omega - eV)T - m)\Phi_1 - \frac{1}{r}\Phi_2.$$

Ensuite, pour écrire les équations d'Einstein, nous devons prendre en considération la présence du champ électromagnétique dans la définition du tenseur d'énergie-impulsion. En particulier,

$$T_{\mu\nu} = D_{\mu\nu} + E_{\mu\nu}$$

avec

$$D_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\sum_{a=1}^{2} \bar{\psi}_a \left(i\gamma_\mu(\partial_\nu - ie\mathcal{A}_\nu) + i\gamma_\nu(\partial_\mu - ie\mathcal{A}_\mu)\right)\psi_a \tag{2.37}$$

et

$$E_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F_\mu^{\ k}F_{k\nu} + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\right). \tag{2.38}$$

Dans le cas que nous considérons, le tenseur électromagnétique est défini par

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & V' & 0 & 0 \\ -V' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et, par conséquent, le tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique est donné par

$$E^i_{\ j} = \frac{1}{8\pi} diag\left(AT^2\left(V'\right)^2, AT^2\left(V'\right)^2, -AT^2\left(V'\right)^2, -AT^2\left(V'\right)^2\right). \tag{2.39}$$

En ce qui concerne le tenseur d'énergie-impulsion des particules de Dirac, nous utilisons les définitions (2.22), (2.23-2.26) et (2.36), et nous obtenons

$$\begin{aligned} D^i_{\ j} =& \frac{1}{r^2} diag\Bigg(2(\omega - eV)T^2|\Phi|^2, -2(\omega - eV)T^2|\Phi|^2 + 4T\frac{1}{r}\Phi_1\Phi_2 + 2mT\left(\Phi_1^2 - \Phi_2^2\right), \\ & -2T\frac{1}{r}\Phi_1\Phi_2, -2T\frac{1}{r}\Phi_1\Phi_2\Bigg). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Donc les équations de champ d'Einstein sont données par

$$\begin{aligned} rA' + A - 1 =& -16\pi(\omega - eV)T^2(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) - r^2AT^2\left(V'\right)^2, \\ 1 - A + 2rA\frac{T'}{T} =& -16\pi(\omega - eV)T^2(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) + 32T\frac{1}{r}\Phi_1\Phi_2 + 16\pi mT\left(\Phi_1^2 - \Phi_2^2\right) \\ & + r^2AT^2\left(V'\right)^2 \end{aligned}$$

et

$$A\left[r^2\frac{T''}{T}+r^2\frac{A'T'}{2AT}-2r^2\left(\frac{T'}{T}\right)^2-r\frac{A'}{2A}+r\frac{T'}{T}\right]=-16\pi T\frac{1}{r}\Phi_1\Phi_2-r^2AT^2\left(V'\right)^2.$$

Finalement, grâce à la conservation du courant, les équations de Maxwell sont réduites à l'équation différentielle ordinaire du second ordre

$$\partial_r(F^{tr}\sqrt{-g})=4\pi e\sqrt{-g}\sum_{a=1}^{2}\bar{\psi}_a\gamma^t\psi_a$$

et, en utilisant les définitions (2.22), (2.23) et celle du tenseur électromagnétique, nous obtenons

$$\left(r^2\sqrt{A}TV'\right)'=-8\pi e\left(\Phi_1^2+\Phi_2^2\right)\frac{T}{\sqrt{A}}.$$

Pour résumer, les équations d'Einstein–Dirac–Maxwell pour un système statique, à symétrie sphérique de deux fermions dans un état singulet et avec un potentiel électromagnétique $\mathcal{A}=(-V,0)$ s'écrivent sous la forme

$$\sqrt{A}\Phi_1' = \frac{1}{r}\Phi_1-((\omega-eV)T+m)\Phi_2, \tag{2.41}$$

$$\sqrt{A}\Phi_2' = ((\omega-eV)T-m)\Phi_1-\frac{1}{r}\Phi_2, \tag{2.42}$$

$$rA' = 1-A-16\pi(\omega-eV)T^2\left(\Phi_1^2+\Phi_2^2\right)-r^2AT^2\left(V'\right)^2, \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}2rA\frac{T'}{T} = {} & A-1-16\pi(\omega-eV)T^2\left(\Phi_1^2+\Phi_2^2\right)+32\pi\frac{1}{r}T\Phi_1\Phi_2\\ & +16\pi mT\left(\Phi_1^2-\Phi_2^2\right)+r^2AT^2\left(V'\right)^2,\end{aligned} \tag{2.44}$$

$$r^2AV'' = -8\pi e\left(\Phi_1^2+\Phi_2^2\right)-\left(2rA+r^2A\frac{T'}{T}+\frac{r^2}{2}A'\right)V' \tag{2.45}$$

avec la condition de normalisation

$$\int_0^\infty |\Phi|^2\frac{T}{\sqrt{A}}\,dr=\frac{1}{4\pi}. \tag{2.46}$$

Finalement, nous supposons

$$\lim_{r\to\infty}V(r)=0$$

(voir [FSY99a]).

Dans le chapitre II, par une méthode de perturbation, nous montrons de manière rigoureuse l'existence de solutions des équations d'Einstein–Dirac–Maxwell pour un système statique, à symétrie sphérique de deux fermions dans un état singulet et dans le cas d'un couplage électromagnétique faible. Plus précisément, en utilisant de nouveau l'idée introduite par Ounaies pour une classe d'équations de Dirac non linéaires (voir [Oun00]) et adaptée dans le premier chapitre ([RN10]) aux équations d'Einstein–Dirac, nous obtenons le théorème suivant.

**Théorème 2.2.** *Étant donné $e, m, \omega$ tels que $e^2 - m^2 < 0$, $0 < \omega < m$ avec $m - \omega$ assez petit ; il existe une solution non triviale de (2.41-2.45).*

Les solutions des équations d'Einstein–Dirac–Maxwell sont construites à partir des solutions de l'équation de Choquard,

$$-\triangle u + 2mu - 4(m^2 - e^2)m \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(y)|^2}{|x-y|} \, dy \right) u = 0 \tag{2.47}$$

dans $H^1(\mathbb{R}^3)$, par une méthode de perturbation ; l'équation (2.47) est la limite non relativiste des équations d'Einstein–Dirac–Maxwell. La constante $\frac{e^2}{m^2}$ représente le rapport entre les constantes de couplage électrostatique (paramètre $e$) et gravitationnel (paramètre $m$). En supposant $m^2 > e^2$, l'attraction gravitationnelle domine la répulsion électrostatique et une solution des équations d'Einstein–Dirac–Maxwell peut être obtenue à partir d'une solution de (2.47). Nous remarquons cependant que les particules élémentaires connues vérifient $e^2 \gg m^2$.

### 2.3. Perspectives : analyse de la constante de couplage électromagnétique

Dans la section précédente, nous avons parlé de couplage électromagnétique faible car le rapport entre les constantes de couplage électromagnétique et gravitationnel est supposé être strictement inférieur à 1, c'est-à-dire $\frac{e^2}{m^2} < 1$, et nous avons démontré l'existence de solutions des équations d'Einstein–Dirac–Maxwell dans ce cas particulier. La question qui se pose naturellement est : existe-t-il des solutions des équations d'Einstein–Dirac–Maxwell pour $\frac{e^2}{m^2} \geq 1$ ? En effet, dans [FSY99a], les auteurs trouvent numériquement des solutions des équations d'Einstein–Dirac–Maxwell lorsque $\frac{e^2}{m^2} \geq 1$.

Comme nous le verrons dans le chapitre II, les solutions des équations d'Einstein–Dirac–Maxwell sont construites à partir des solutions de l'équation (2.47) dans $H^1(\mathbb{R}^3)$, par une méthode de perturbation. Si $e^2 - m^2 > 0$, le potentiel de (2.47) est répulsif et l'équation n'a pas de solutions non triviales dans $H^1(\mathbb{R}^3)$ ; de même, si $e^2 - m^2 = 0$, l'unique solution de l'équation (2.47) dans $H^1(\mathbb{R}^3)$ est $u = 0$. Cela signifie que, si $\frac{e^2}{m^2} \geq 1$, les équations d'Einstein–Dirac–Maxwell ne peuvent pas avoir de solutions dans la limite non relativiste ; en effet, cela est confirmé par les calculs numériques que l'on trouve dans [FSY99a]. Dans ce papier, les calculs numériques semblent indiquer l'existence de solutions des équations d'Einstein–Dirac–Maxwell fortement relativistes lorsque $\frac{e^2}{m^2}$ est égal à 1 ou légèrement supérieur. Nous aimerions pouvoir expliquer de façon rigoureuse les résultats numériques obtenus pour $\frac{e^2}{m^2} \geq 1$.

## 3. La théorie de champ moyen relativiste (Partie B)

Dans la partie B de cette thèse, nous étudions les équations de champ moyen relativiste du noyau atomique.

Bien que souvent utilisés dans la pratique, les modèles issus de la physique nucléaire ont été très peu abordés d'un point de vue mathématique. Certains modèles non relativistes de physique nucléaire ont été étudiés par D. Gogny et P.L. Lions dans un article de 1986 ([GL86]) ; en revanche, à notre connaissance, il n'existe pas d'études mathématiques rigoureuses de modèles relativistes issus de la physique nucléaire.

En physique nucléaire, la théorie de champ moyen relativiste (*Relativistic mean-field theory* RMFT) décrit les nucléons, protons et neutrons, comme un système de particules de Dirac qui interagissent via l'échange de particules virtuelles, appelées mésons, et de photons. Pendant les dernières années, la théorie de champ moyen relativiste a reçu une grande attention en raison de la description qu'elle offre de beaucoup de phénomènes nucléaires. Il a été montré que le modèle de champ moyen relativiste décrit efficacement la structure du noyau et donne une description naturelle de certains effets relativistes observés expérimentalement tels que l'interaction spin-orbite ; c'est la raison pour laquelle le modèle de champ moyen relativiste peut être considéré comme une généralisation de certains modèles non relativistes, tels que le modèle Hartree-Fock avec une interaction de Skyrme ou de Gogny, où les forces effectives, qui ne sont pas appropriées dans une formulation relativiste, sont remplacées par des potentiels moyens, qui représentent des degrés de liberté indépendants.

Le modèle de champ moyen relativiste est formulé sur la base de deux approximations : l'approximation de champ moyen et l'approximation *no-sea*. D'une part, grâce à l'approximation de champ moyen, les nucléons évoluent indépendamment les uns des autres sous l'influence d'un potentiel moyen créé par les champs des mésons et des photons qui sont considérés comme des champs classiques ; d'autre part, grâce à l'approximation *no-sea*, le rôle des états d'énergie négative appartenant à la mer de Dirac n'est pas pris en compte et le polarisation du vide est négligée.

La théorie de champ moyen relativiste est une théorie effective : le Lagrangien du modèle est un Lagrangien effectif par rapport aux approximations de champ moyen et *no sea*. Étant donné que l'on ne connait pas explicitement la transformation du Lagrangien de la théorie sans approximation au Lagrangien effectif, les paramètres du modèle doivent être ajustés sur des données expérimentales. Par conséquent, les effets de polarisation du vide ainsi que les effets de corrélations ne sont pas omis complètement mais ils sont pris en considération implicitement à travers l'ajustement des paramètres du modèle.

Dans le modèle de champ moyen relativiste décrit dans cette thèse, nous prenons en considération le potentiel créé par le méson $\sigma$ qui est responsable d'une interaction attractive de moyenne portée, par le méson $\omega$ qui définit une interaction répulsive de courte portée, par le méson $\rho$ qui décrit les effets dépendant de l'isospin[9] et par les photons qui caractérisent l'interaction électromagnétique (voir [Rei89], [GM96]).

[9] L'isospin (contraction de spin isotopique) est un nombre quantique lié à l'interaction forte. En 1932, Heisenberg observa que, mis à part leur différence de charge, le proton et le neutron ont des propriétés très similaires : leur masse est presque identique et ils se comportent de la même façon du point de vue de l'interaction forte. Ainsi, le proton et le neutron peuvent être considérés comme deux états de la même particule, le nucléon, associés à une projection d'isospin différente ([Gri87], [GM96]).

Le Lagrangien de la théorie de champ moyen relativiste s'écrit sous la forme

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{nucleons} + \mathcal{L}_{mesons} + \mathcal{L}_{coupling}. \tag{3.1}$$

Le Lagrangien pour les nucléons est donnés par

$$\mathcal{L}_{nucleons} = \sum_{\alpha=1}^{\Omega} w_\alpha \bar{\psi}_\alpha (i\,(\mathbb{1}_2 \otimes \gamma^\mu)\,\partial_\mu - m_b)\psi_\alpha \tag{3.2}$$

avec $w_\alpha$ le poids d'occupation de chaque orbitale, $\Omega$ le nombre d'orbitales, $m_b$ la masse d'un nucléon, $\gamma^\mu$ les matrices de Dirac et $\psi_\alpha$ la fonction d'onde d'un nucléon. Lorsque l'isospin des particules n'est pas fixé, $\psi_\alpha$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^4$ et $\bar{\psi}_\alpha = \psi_\alpha^*\,(\mathbb{1}_2 \otimes \gamma^0)$ avec $\mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De plus, les fonctions d'onde des nucléons doivent satisfaire la contrainte $\int_{\mathbb{R}^3} \psi_\alpha^*(t,x)\psi_\beta(t,x)\,d^3x = \delta_{\alpha\beta}$.

Le Lagrangien pour les champs de mésons est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mesons} &= \frac{1}{2}(\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma - m_\sigma^2\sigma^2) - \frac{1}{2}(\overline{\partial^\mu\omega^\nu}\partial_\mu\omega_\nu - m_\omega^2\omega^\mu\omega_\mu) \\ &\quad -\frac{1}{2}(\overline{\partial^\mu\boldsymbol{R}^\nu}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{R}_\nu - m_\rho^2\boldsymbol{R}^\mu\cdot\boldsymbol{R}_\mu) - \frac{1}{2}\overline{\partial^\mu A^\nu}\partial_\mu A_\nu \end{aligned} \tag{3.3}$$

où $\sigma$, $\omega^\mu$ et $\boldsymbol{R}^\mu$ décrivent respectivement les champs générés par le méson $\sigma$, $\omega$ et $\rho$, et $A^\mu$ indique le champ créé par les photons. De plus, une dérivée antisymétrique est définie par

$$\overline{\partial^\mu A^\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

Nous remarquons que si $A^\mu$ sont les composantes du quadri-vecteur du potentiel électromagnétique, alors

$$\frac{1}{2}\overline{\partial^\mu A^\nu}\partial_\mu A_\nu = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

où $F_{\mu\nu}$ est le tenseur électromagnétique défini par (2.4). Finalement, le Lagrangien pour le couplage s'écrit sous la forme

$$\mathcal{L}_{coupling} = -g_\sigma\sigma\rho_s - g_\omega\omega^\mu\rho_\mu - g_\rho\boldsymbol{R}^\mu\cdot\boldsymbol{\rho}_\mu - eA^\mu\rho_\mu^c - U(\sigma) \tag{3.4}$$

où $U(\sigma) = \frac{1}{3}b_2\sigma^3 + \frac{1}{4}b_3\sigma^4$ est une terme qui représente un auto-couplage non linéaire du méson $\sigma$. Lorsque $U(\sigma) = 0$, le couplage entre nucléons et mésons est linéaire ; ce modèle avec couplage linéaire reproduit correctement la propriété de saturation de la matière nucléaire et l'interaction spin-orbite, il s'agit donc d'un bon point de départ pour la théorie de champ moyen relativiste.

Les densités sont données par

$$\rho_s = \sum_{\alpha=1}^{\Omega} w_\alpha \bar{\psi}_\alpha \psi_\alpha, \tag{3.5}$$

$$\rho_\mu = \sum_{\alpha=1}^{\Omega} w_\alpha \bar{\psi}_\alpha \left(\mathbb{1}_2 \otimes \gamma_\mu\right) \psi_\alpha, \tag{3.6}$$

$$\boldsymbol{\rho}_\mu = \sum_{\alpha=1}^{\Omega} w_\alpha \bar{\psi}_\alpha \left(\hat{\boldsymbol{\tau}} \otimes \gamma_\mu\right) \psi_\alpha, \tag{3.7}$$

$$\rho^c_\mu = \sum_{\alpha=1}^{\Omega} w_\alpha \bar{\psi}_\alpha \left(\frac{1}{2}(\mathbb{1}_2 + \hat{\tau}_0) \otimes \gamma_\mu\right) \psi_\alpha. \tag{3.8}$$

Nous rappelons que $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{\rho}$ sont des vecteurs dans l'espace tridimensionnel d'isospin et $\cdot$ est le produit dans cette espace[10], et $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ est le vecteur des matrices de Pauli qui intervient dans la définition de l'opérateur d'isospin. Plus précisément, les trois composantes de l'opérateur d'isospin sont définies par $\hat{\boldsymbol{t}} = \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\tau}}$ et, en particulier, la troisième composante est donnée par

$$\hat{t}_0 = \frac{1}{2}\hat{\tau}_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

l'état de proton, représenté par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, est le vecteur propre de $\hat{\tau}_0$ associé à la valeur propre $\tau_0 = 1$ tandis que l'état de neutron, représenté par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, est le vecteur propre de $\hat{\tau}_0$ associé à la valeur propre $\tau_0 = -1$.

Nous remarquons que le modèle contient comme paramètres les masses des mésons $m_\sigma$, $m_\omega$ et $m_\rho$, et les constantes de couplage $g_\sigma$, $g_\omega$, $g_\rho$, $b_2$ et $b_3$. En revanche, la masse $m_b$ du nucléon est fixée.

La plupart des applications de la théorie de champ moyen relativiste s'intéressent à la description de l'état fondamental ou, plus généralement, des états stationnaires ; par conséquent, nous considérons les équations de champ moyen relativiste dans le cas statique et, afin d'écrire ces équations à partir du Lagrangien, nous introduisons quelques conditions supplémentaires.

Premièrement, nous supposons qu'en physique nucléaire l'état de chaque nucléon est un état pur d'isospin, c'est-à-dire qu'il s'agit ou bien d'un proton ou bien d'un neutron ; cela signifie que l'état de chaque nucléon est un vecteur propre de l'opérateur $\hat{\tau}_0$ et, par conséquent, il est suffisant de considérer seulement la troisième composante des vecteurs dans l'espace d'isospin, ce qui donne $R_{\pm 1\mu} = 0$ et $\rho_{\pm 1\mu} = 0$.

Deuxièmement, dans le cas statique, les dérivées temporelles et les composantes spatiales des densités et des champs valent zéro ; donc, seulement les champs $\sigma$, $\omega_0$, $R_{00}$ et $A_0$

[10]Nous utilisons ici la notation de [Rei89] où la troisième composante des vecteurs dans l'espace d'isospin est indiqué avec l'indice 0.

interviennent dans le Lagrangien.

Finalement, la fonction d'onde d'un nucléon est de la forme $\psi_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \psi_\alpha$ s'il s'agit d'un proton, et $\psi_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \psi_\alpha$ s'il s'agit d'un neutron. La fonction $\psi_\alpha$ est à valeurs dans $\mathbb{C}^4$ et peut s'écrire sous la forme

$$\psi_\alpha(t,x) = e^{-i\varepsilon_\alpha t}\psi_\alpha(x) \tag{3.9}$$

où $\varepsilon_\alpha > 0$ représente l'énergie de chaque particule.

En résumant, le Lagrangien de la théorie de champ moyen relativiste dans le cas statique est défini par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{static} = &\sum_{\alpha=1}^{\Omega} w_\alpha \bar{\psi}_\alpha(\varepsilon_\alpha \gamma^0 + i\gamma^j\partial_j - m_b)\psi_\alpha + \frac{1}{2}(\partial^j\sigma\partial_j\sigma - m_\sigma^2\sigma^2) - \frac{1}{2}(\partial^j\omega_0\partial_j\omega_0 - m_\omega^2\omega_0^2) \\ &- \frac{1}{2}(\partial^j R_{00}\partial_j R_{00} - m_\rho^2 R_{00}^2) - \frac{1}{2}\partial^j A_0\partial_j A_0 - g_\sigma\sigma\rho_s - g_\omega\omega_0\rho_0 - g_\rho R_{00}\rho_{00} \\ &- eA_0\rho_0^c - U(\sigma)\end{aligned}$$

avec $j$ un indice de sommation sur les composantes spatiales et $\bar{\psi}_\alpha = \psi_\alpha^*\gamma^0$.

En conclusion, en considérant la variation de l'action $S_{static} = \int \mathcal{L}_{static}\, d^3x$ par rapport aux fonctions d'onde conjuguées de chaque nucléon, aux champs des mésons et au champ électromagnétique, nous obtenons

$$\begin{aligned}\varepsilon_\alpha\gamma_0\psi_\alpha &= \Big[-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m_b + g_\sigma\sigma + g_\omega\omega_0\gamma_0 \\ &\quad + g_\rho R_{00}\gamma_0\tau_0 + \frac{1}{2}eA_0\gamma_0(1+\tau_0)\Big]\psi_\alpha, && (3.10)\\ (-\Delta + m_\sigma^2)\sigma + U'(\sigma) &= -g_\sigma\rho_s, && (3.11)\\ (-\Delta + m_\omega^2)\omega_0 &= g_\omega\rho_0, && (3.12)\\ (-\Delta + m_\rho^2)R_{00} &= g_\rho\rho_{00}, && (3.13)\\ -\Delta A_0 &= e\rho_0^c, && (3.14)\end{aligned}$$

avec $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$. Ce système d'équations et la définition des densités représentent un problème de champ moyen auto-cohérent qui peut être résolu numériquement en utilisant un schéma itératif (voir [Rei89], [BSM89]). Notons qu'il n'existe pas de preuve de convergence de cet algorithme.

## 3.1. Existence de solutions pour des équations de champ moyen relativiste

Dans le chapitre III, nous présentons un résultat qui concerne l'existence de solutions pour les équations de champ moyen relativiste dans un cas statique et en l'absence d'un auto-couplage non linéaire du méson $\sigma$.

Nous considérons le cas sans auto-couplage non linéaire du méson $\sigma$, c'est-à-dire $b_2 = b_3 = 0$, et nous choisissons une occupation fixe des orbitales ; cela signifie que les poids d'occupations $w_\alpha$ sont définis par

$$w_\alpha = \begin{cases} 1 & \alpha = 1, \ldots, A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.15}$$

avec $A$ le nombre de nucléons. Les équations (3.11-3.14) peuvent être, ainsi, résolues explicitement et nous obtenons

$$\sigma = -\frac{g_\sigma}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\sigma|\cdot|}}{|\cdot|} \star \rho_s\right), \tag{3.16}$$

$$\omega_0 = \frac{g_\omega}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\omega|\cdot|}}{|\cdot|} \star \rho_0\right), \tag{3.17}$$

$$R_{00} = \frac{g_\rho}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\rho|\cdot|}}{|\cdot|} \star \rho_{00}\right), \tag{3.18}$$

$$A_0 = \frac{e}{4\pi}\left(\frac{1}{|\cdot|} \star \rho_0^c\right). \tag{3.19}$$

Donc l'équation (3.10) devient

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha \psi_\alpha = & \left[H_0 - \beta \frac{g_\sigma^2}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\sigma|\cdot|}}{|\cdot|} \star \rho_s\right) + \frac{g_\omega^2}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\omega|\cdot|}}{|\cdot|} \star \rho_0\right)\right. \\ & \left. + \tau_0 \frac{g_\rho^2}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\rho|\cdot|}}{|\cdot|} \star \rho_{00}\right) + \frac{1}{2}(1+\tau_0)\frac{e^2}{4\pi}\left(\frac{1}{|\cdot|} \star \rho_0^c\right)\right]\psi_\alpha \end{aligned} \tag{3.20}$$

avec $H_0 = -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m_b$ l'opérateur de Dirac libre. En utilisant la convention $\tau_0 = 1$ pour les protons et $\tau_0 = -1$ pour les neutrons, les densités peuvent être écrites sous la forme

$$\rho_s = \sum_{k=1}^{A} \bar{\psi}_k \psi_k, \tag{3.21}$$

$$\rho_0 = \sum_{k=1}^{A} \psi_k^* \psi_k, \tag{3.22}$$

$$\rho_{00} = \sum_{k=1}^{Z} \psi_k^* \psi_k - \sum_{k=Z+1}^{A} \psi_k^* \psi_k, \tag{3.23}$$

$$\rho_0^c = \sum_{k=1}^{Z} \psi_k^* \psi_k \tag{3.24}$$

avec $Z$ le nombre de protons, $N = A - Z$ le nombre de neutrons et $\bar{\psi}_i = \psi_i^* \beta$ ; de plus, les équations de Dirac non linéaires sont données par

$$\begin{aligned} H_{p,\Psi}\psi_i &:= \left[H_0 - \beta\frac{g_\sigma^2}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\sigma|\cdot|}}{|\cdot|}\star\rho_s\right) + \frac{g_\omega^2}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\omega|\cdot|}}{|\cdot|}\star\rho_0\right)\right. \\ &\left. + \frac{g_\rho^2}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\rho|\cdot|}}{|\cdot|}\star\rho_{00}\right) + \frac{e^2}{4\pi}\left(\frac{1}{|\cdot|}\star\rho_0^c\right)\right]\psi_i = \varepsilon_i\psi_i \end{aligned} \tag{3.25}$$

si $1 \leq i \leq Z$, et

$$\begin{aligned} H_{n,\Psi}\psi_i &:= \left[H_0 - \beta\frac{g_\sigma^2}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\sigma|\cdot|}}{|\cdot|}\star\rho_s\right) + \frac{g_\omega^2}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\omega|\cdot|}}{|\cdot|}\star\rho_0\right)\right. \\ &\left. - \frac{g_\rho^2}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\rho|\cdot|}}{|\cdot|}\star\rho_{00}\right)\right]\psi_i = \varepsilon_i\psi_i \end{aligned} \tag{3.26}$$

si $Z+1 \leq i \leq A$, avec $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_Z, \psi_{Z+1}, \ldots, \psi_A)$ et sous les contraintes $\int_{\mathbb{R}^3}\psi_i^*\psi_j = \delta_{ij}$ pour $1 \leq i,j \leq Z$ et pour $Z+1 \leq i,j \leq A$.

Nous remarquons que les équations de Dirac non linéaires sont les équations d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle d'énergie

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\Psi) &= \sum_{j=1}^{A}\int_{\mathbb{R}^3}\psi_j^* H_0\psi_j - \frac{g_\sigma^2}{8\pi}\int\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\frac{\rho_s(x)\rho_s(y)}{|x-y|}e^{-m_\sigma|x-y|}\,dxdy \\ &+\frac{g_\omega^2}{8\pi}\int\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\frac{\rho_0(x)\rho_0(y)}{|x-y|}e^{-m_\omega|x-y|}\,dxdy \\ &+\frac{g_\rho^2}{8\pi}\int\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\frac{\rho_{00}(x)\rho_{00}(y)}{|x-y|}e^{-m_\rho|x-y|}\,dxdy \\ &+\frac{e^2}{8\pi}\int\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\frac{\rho_0^c(x)\rho_0^c(y)}{|x-y|}\,dxdy \end{aligned} \tag{3.27}$$

sous les contraintes $\int_{\mathbb{R}^3}\psi_i^*\psi_j = \delta_{ij}$ pour $1 \leq i,j \leq Z$ et pour $Z+1 \leq i,j \leq A$. Ici nous pouvons supposer que la matrice des multiplicateurs de Lagrange est diagonale car la fonctionnelle $\mathcal{E}(\Psi)$ est invariante par transformations de $(\psi_1, \ldots, \psi_A)$ de la forme

$$U = \begin{pmatrix} U_p & 0 \\ 0 & U_n \end{pmatrix}$$

avec $U_p$ (resp. $U_n$) une matrice unitaire de taille $Z \times Z$ (resp. $N \times N$). Dans la fonctionnelle d'énergie, nous remarquons que seul le méson $\sigma$ modélise une interaction attractive. En effet, si $f$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$,

$$\int\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\frac{f(x)f(y)}{|x-y|}e^{-\lambda|x-y|}\,dxdy = C\int_{\mathbb{R}^3}|\hat{f}(k)|^2\frac{1}{k^2+\lambda^2}\,dk$$

avec $C$ une constante positive et $\hat{f}$ la transformée de Fourier de $f$. Par conséquent, le terme

$$-\frac{g_\sigma^2}{8\pi}\int\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\frac{\rho_s(x)\rho_s(y)}{|x-y|}e^{-m_\sigma|x-y|}\,dxdy$$

est négatif et représente un phénomène de type attractif.

La fonctionnelle (3.27) étant non bornée inférieurement sous les contraintes $\int_{\mathbb{R}^3} \psi_i^* \psi_j = \delta_{ij}$, nous introduisons, en suivant l'idée suggérée dans [ES01] (voir aussi [ELS08]), le problème de minimisation suivant

$$\begin{aligned} I &= \inf \Big\{ \mathcal{E}(\Psi); \Psi \in (H^{1/2})^A \int_{\mathbb{R}^3} \psi_i^* \psi_j = \delta_{ij}, 1 \leq i,j \leq Z, Z+1 \leq i,j \leq A, \\ &\quad \Lambda^-_{p,\Psi}(\psi_1, \ldots, \psi_Z) = 0,\ \Lambda^-_{n,\Psi}(\psi_{Z+1}, \ldots, \psi_A) = 0 \Big\} \end{aligned} \tag{3.28}$$

avec sa généralisation

$$\begin{aligned} I(\lambda_1, \ldots, \lambda_A) &= \inf \Big\{ \mathcal{E}(\Psi); \Psi \in (H^{1/2})^A \int_{\mathbb{R}^3} \psi_i^* \psi_j = \lambda_i \delta_{ij}, 1 \leq i,j \leq Z, \\ &\quad Z+1 \leq i,j \leq A,\ \Lambda^-_{p,\Psi}(\psi_1, \ldots, \psi_Z) = 0, \\ &\quad \Lambda^-_{n,\Psi}(\psi_{Z+1}, \ldots, \psi_A) = 0 \Big\} \end{aligned} \tag{3.29}$$

où, pour $\mu = p, n$, $\Lambda^-_{\mu,\Psi} = \chi_{(-\infty,0)}(H_{\mu,\Psi})$ est le projecteur spectral négatif de l'opérateur $H_{\mu,\Psi}$,

$$\Lambda^-_{p,\Psi}(\psi_1, \ldots, \psi_Z) = (\Lambda^-_{p,\Psi}\psi_1, \ldots, \Lambda^-_{p,\Psi}\psi_Z) = \Lambda^-_{p,\Psi}\Psi_p$$

et

$$\Lambda^-_{n,\Psi}(\psi_{Z+1}, \ldots, \psi_A) = (\Lambda^-_{n,\Psi}\psi_{Z+1}, \ldots, \Lambda^-_{n,\Psi}\psi_A) = \Lambda^-_{n,\Psi}\Psi_n.$$

Le fait d'introduire une contrainte de la forme $\Lambda^-_{\mu,\Psi}\Psi_\mu = 0$, pour $\mu = p, n$, est dû à M.J. Esteban et E. Séré dans le cas des équations de Dirac–Fock (voir [ES01]). Cette contrainte a une interprétation physique ; plus précisément, en l'absence de polarisation du vide, le projecteur spectral négatif $\Lambda^-_{\mu,\Psi}$ représente la mer de Dirac. À cause de l'interprétation du spectre négatif et en accord avec le principe d'exclusion de Pauli, l'énergie $\varepsilon_i$ de chaque particule doit être strictement positive et, par conséquent, $\Psi_\mu$ doit appartenir au sous-espace spectral positif de $H_{\mu,\Psi}$ pour $\mu = p, n$. L'introduction de la contrainte $\Lambda^-_{\mu,\Psi}\Psi_\mu = 0$ est d'une part fondamentale car cela permet de transformer un problème fortement indéfini en un problème de minimisation ; d'autre part, la gestion de cette contrainte n'est pas évidente et constitue la difficulté principale des preuves des résultats qui suivent.

Dans le chapitre III de cette thèse, nous prouvons que si les constantes de couplage $g_\sigma, g_\omega, g_\rho$ et $e$ sont suffisamment petites, alors une solution des équations (3.25) et (3.26) peut être obtenue comme une solution du problème de minimisation (3.28).

**Théorème 3.1.** *Si les constantes $g_\sigma, g_\omega, g_\rho$ et $e$ sont suffisamment petites, alors un minimiseur de (3.28) est une solution des équations (3.25) et (3.26).*

De plus, en appliquant la méthode de concentration-compacité ([Lio84a], [Lio84b]), nous obtenons le théorème suivant qui est le résultat principal de cette partie de la thèse.

**Théorème 3.2.** *Si les constantes $g_\sigma, g_\omega, g_\rho$ et $e$ sont suffisamment petites, toute suite minimisante de (3.28) est relativement compacte à une translation près si et seulement si la condition suivante est satisfaite*

$$I < I(\lambda_1, \ldots, \lambda_A) + I(1-\lambda_1, \ldots, 1-\lambda_A) \tag{3.30}$$

*quels que soient $\lambda_k \in [0,1]$, $k = 1, \ldots, A$ tels que $\sum_{k=1}^{A} \lambda_k \in (0, A)$.*
*En particulier, si (3.30) est satisfaite, alors il existe un minimum de (3.28).*

Ce résultat est intéressant du point de vue mathématique et du point de vue physique parce qu'il donne une condition qui garantit l'existence d'une solution d'énergie minimale des équations (3.25) et (3.26). De plus, il s'agit du premier résultat qui fait un lien entre l'existence de points critiques d'une fonctionnelle d'énergie fortement indéfinie et les inégalités de concentration-compacité strictes.

La condition $g_\sigma, g_\omega, g_\rho$ et $e$ suffisamment petites signifie que l'on considère un régime faiblement relativiste. Dans notre démonstration des théorèmes 3.1 et 3.2, cette condition est nécessaire pour différentes raisons. Premièrement, si les constantes $g_\sigma, g_\omega, g_\rho$ et $e$ sont suffisamment petites, nous pouvons montrer que $H_{\mu,\Psi}$ est un isomorphisme auto-adjoint de $H^{1/2}$ à son dual $H^{-1/2}$ dont l'inverse est borné indépendamment de $\Psi$. Deuxièmement, nous avons besoin de cette condition pour prouver que toute suite minimisante de (3.28) est bornée dans $\left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^A$. Nous notons que les estimées sur $g_\sigma, g_\omega, g_\rho$ et $e$ sont explicites jusqu'à ce point. Finalement, dans la preuve des deux théorèmes, nous utilisons le théorème des fonctions implicites avec $g_\sigma, g_\omega, g_\rho$ et $e$ comme paramètres.

Ce résultat est différent de celui obtenu par Esteban–Séré pour les équations de Dirac-Fock (voir [ES99], [ES01]). Dans [ES99], par une méthode variationnelle sophistiquée, Esteban–Séré ont prouvé l'existence d'une infinité de solutions des équations de Dirac–Fock et, dans [ES01], ils ont montré que, dans un régime faiblement relativiste, la « première » solution des équations de Dirac–Fock trouvée en [ES99] minimise l'énergie de Dirac–Fock parmi toutes les configurations qui sont orthogonales à la mer de Dirac. Leur méthode variationnelle tire parti du fait que la fonctionnelle d'énergie de Dirac–Fock n'est pas invariante par translation : elle contient un terme d'attraction par le noyau qui tend à confiner les électrons. L'interaction non linéaire est en revanche purement répulsive ce qui fait que le recours à la concentration-compacité n'est pas nécessaire. Au contraire, la fonctionnelle d'énergie que nous considérons est invariante par translation et un des termes d'interaction non linéaire est attractif ; du fait de l'invariance par translation, nous sommes amenés naturellement à utiliser un argument de type concentration-compacité.

## 3.2. Perspectives : étude de la limite non relativiste

Le modèle de champ moyen relativiste est intéressant car il fournit une description naturelle de certains effets relativistes observés expérimentalement. Il est utile, pour mieux comprendre l'approche relativiste, d'étudier la limite non relativiste des équations de champ moyen relativiste car certaines propriétés qualitatives de ces équations, notamment la présence d'un terme d'interaction de spin-orbite, peuvent être déduite à partir de cette limite non relativiste. La dérivation de la limite non relativiste que nous proposons dans la suite est faite de façon informelle et s'inspire de la littérature physique, notamment du papier de Ring ([Rin96]). Notre objectif est de démontrer de façon rigoureuse les propriétés qualitatives des équations de champ moyen relativiste du noyau atomique en partant de leur limite non relativiste. Afin de simplifier la discussion à propos de la limite non relativiste, nous négligeons le champ généré par le méson $\rho$ et le champ électromagnétique. Ce modèle, appelé modèle $\sigma$-$\omega$, est le plus simple de la théorie de champ moyen relativiste (voir [Wal74], [Wal04]).

Premièrement, par un changement d'unités de mesure dans (3.20), nous introduisons la vitesse de la lumière $c$ et nous obtenons

$$\begin{aligned} \left[-ic\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+\beta(m_bc^2+S)+V\right]\psi_j &= (m_bc^2-\mu_j)\psi_j & (3.31)\\ \left[-\Delta+m_\sigma^2c^2\right]\sigma &= -g_\sigma c\rho_s & (3.32)\\ \left[-\Delta+m_\omega^2c^2\right]\omega_0 &= g_\omega c\rho_0 & (3.33)\end{aligned}$$

avec $S=g_\sigma\sigma$, $V=g_\omega\omega_0$ ; de plus, nous supposons $0\le\mu_j\ll m_bc^2$. Ensuite, en écrivant $\psi_j=\begin{pmatrix}\varphi_j\\ \chi_j\end{pmatrix}$, les densités sont définies par

$$\rho_s = \sum_{j=1}^{A}\left(|\varphi_j|^2-|\chi_j|^2\right) \tag{3.34}$$

$$\rho_0 = \sum_{j=1}^{A}\left(|\varphi_j|^2+|\chi_j|^2\right) \tag{3.35}$$

et l'équation (3.31) devient

$$\begin{cases} -ic\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\chi_j+(S+V)\varphi_j=-\mu_j\varphi_j,\\ -ic\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\varphi_j-(2m_bc^2+S-V-\mu_j)\chi_j=0,\end{cases} \tag{3.36}$$

avec $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ le vecteur des matrices de Pauli.

À partir du système (3.36), en supposant $2m_bc^2+S-V-\mu_j\ge 0$ et en inversant formellement l'opérateur de multiplication $2m_bc^2+S-V-\mu_j$, nous obtenons

$$\chi_j=\frac{-ic\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\varphi_j}{2m_bc^2+S-V-\mu_j}=\frac{-ic\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\varphi_j}{\left(2m_bc^2+S-V-\mu_j\right)_+}. \tag{3.37}$$

Pour écrire la limite non relativiste du système (3.36), nous devons développer le dénominateur de (3.37) par rapport à un paramètre petit lorsque $c$ tend vers l'infini. En physique atomique, on suppose souvent que la quantité $\frac{S-V-\mu_j}{2m_bc^2}$ est petite pour $c\to+\infty$ et donc on considère un développement par rapport à cette quantité ; en physique nucléaire, cette approximation n'est plus acceptable car expérimentalement la quantité $S - V$ est grande. En effet, pour $c \to +\infty$, nous pouvons écrire

$$S = -\frac{1}{c}\left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma}\right)^2 \left[\frac{-\Delta}{m_\sigma^2 c^2} + 1\right]^{-1} \rho_s = -\frac{1}{c}\left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma}\right)^2 \rho_s + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \tag{3.38}$$

$$V = \frac{1}{c}\left(\frac{g_\omega}{m_\omega}\right)^2 \left[\frac{-\Delta}{m_\omega^2 c^2} + 1\right]^{-1} \rho_0 = \frac{1}{c}\left(\frac{g_\omega}{m_\omega}\right)^2 \rho_0 + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \tag{3.39}$$

et, en accord avec les valeurs physiques des masses des mésons et des constantes de couplage (voir [Rei89], [Rin96]), nous pouvons supposer

$$\left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma}\right)^2 = \left(\frac{g_\omega}{m_\omega}\right)^2 + ac \tag{3.40}$$

$$\frac{1}{c}\left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma}\right)^2 = \vartheta m_b c^2 \tag{3.41}$$

avec $a > 0$ petit et $\theta > 0$. Par conséquent,

$$S + V = 2\vartheta m_b c^2 \sum_{j=1}^{A} |\chi_j|^2 - a\rho_0 + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \tag{3.42}$$

$$S - V = -2\vartheta m_b c^2 \sum_{j=1}^{A} |\varphi_j|^2 + a\rho_0 + O\left(\frac{1}{c^3}\right) \tag{3.43}$$

et, en supposant $\frac{a}{c^2}\rho_0 = O\left(\frac{1}{c^2}\right)$,

$$\chi_j = \frac{-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla\varphi_j}{2m_b c\left(1 - \vartheta \sum_{j=1}^{A} |\varphi_j|^2\right)_+} + O\left(\frac{1}{c^2}\right). \tag{3.44}$$

Ensuite, en remplaçant (3.44) dans la première équation de (3.36) et en écrivant $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_A)$, nous obtenons

$$-\frac{1}{2m_b}\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla\left(F(\Phi)\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla\varphi_k\right) + \frac{\vartheta}{2m_b} F(\Phi)^2 \sum_{j=1}^{A} |\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla\varphi_j|^2 \varphi_k - a\rho_\Phi\varphi_k = -\mu_k\varphi_k \tag{3.45}$$

avec $F(\Phi) = \frac{1}{(1-\vartheta\rho_\Phi)_+}$ et $\rho_\Phi = \sum_{j=1}^{A} |\varphi_j|^2$.

Pour rendre rigoureuse la dérivation de l'équation (3.45), il faut montrer des estimations à priori sur les solutions de (3.36) de manière que toutes les hypothèses faites soient vérifiées.

La caractéristique la plus importante de l'équation (3.45) est la présence du terme spin-orbite. En effet, selon la formule

$$\sigma_k\sigma_l = \delta_{kl}\mathbb{1} + i\varepsilon_{klm}\sigma_m$$

avec $\varepsilon_{klm}$ le symbole de Levi-Civita et $\delta_{kl}$ le symbole de Kronecker, nous avons

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\left(F(\Phi)\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\right) &= -\nabla\cdot\left(F(\Phi)\nabla\right)-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\nabla F(\Phi)\times\nabla\right)\\ &= -\nabla\cdot\left(F(\Phi)\nabla\right)-i\nabla F(\Phi)\cdot\left(\nabla\times\boldsymbol{\sigma}\right)\\ &= p\cdot\left(F(\Phi)p\right)+\nabla F(\Phi)\cdot\left(p\times\boldsymbol{\sigma}\right)\end{aligned}$$

où $\nabla F(\Phi)\cdot(p\times\boldsymbol{\sigma})$ représente l'interaction de spin-orbite et $p=-i\nabla$.

De plus, l'équation (3.45) peut être vue comme l'équation d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle d'énergie

$$J(\Phi)=\frac{1}{2m_b}\sum_{i=1}^{A}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\varphi_i|^2}{(1-\vartheta\rho_\Phi)_+}-\frac{a}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\rho_\Phi^2. \tag{3.46}$$

Malheureusement, avec ce choix de constantes de couplage, le théorème 3.2 ne peut pas être appliqué ; c'est la raison pour laquelle, nous nous intéressons à l'étude de la fonctionnelle (3.46). Plus précisément, nous cherchons les points critiques de la fonctionnelle $J(\Phi)$ sous les contraintes

$$\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_i^*\varphi_j=\delta_{ij}, 1\le i,j\le Z, Z+1\le i,j\le A.$$

De plus, nous aimerions pouvoir démontrer rigoureusement une propriété très intéressante concernant la forme des potentiels $S$ et $V$. Dans [Rin96] à la page 206, Ring affirme que, comme dans la matière nucléaire infinie, les champs $S$ et $V$ sont proportionnels à la densité scalaire $\rho_s$ et à la densité vectorielle $\rho_0$ respectivement ; dans les noyaux finis, $S$ et $V$ sont des potentiels ayant la même forme d'un potentiel de Woods-Saxon[11] : ils tendent vers zéro en dehors du noyau et ils sont plus ou moins constants à l'intérieur du noyau (expérimentalement $S\approx -400$ MeV et $V\approx 350$ MeV). Cette idée est confirmée par les résultats numériques dans le noyau du plomb 208 présentés dans [GM96] (Figure 2).

[11] Le potentiel de Woods-Saxon est un potentiel typique du modèle en couches du noyau atomique. Ce potentiel est défini par

$$V(r)=-\frac{V_0}{1+\exp\left(\frac{r-R}{a}\right)}$$

avec $R$ le rayon et $a$ l'épaisseur de peau du noyau ([GM96]).

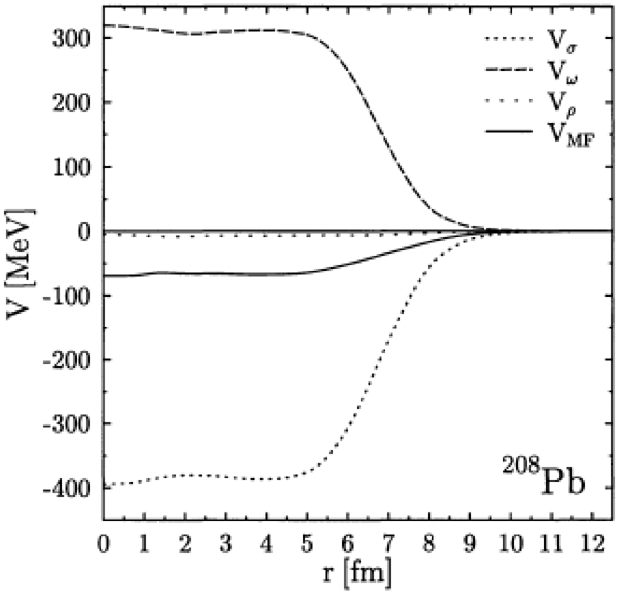


FIGURE 2 – [GM96, page 265] Plot of the individual mesonic potentials in the nucleus $^{208}$Pb for a typical parameter set. $V_{MF}$ is the total potential resulting from the near-cancellation of the $\sigma$ and $\omega$ terms.

# Bibliographie

[ABS75] Adler, R., Bazin, M., Schiffer, M. *Introduction to general relativity.* McGraw-Hill, 2nd edition, 1975.

[BD64] Bjorken, J.D., Drell, S.D. *Relativistic Quantum Mechanics.* McGraw-Hill, 1964.

[BD65] Bjorken, J.D., Drell, S.D. *Relativistic Quantum Fields.* McGraw-Hill, 1965.

[Ble05] Bleecker, D. *Gauge Theory and Variational Principles.* Dover Publications, 2005.

[BSM89] Bottcher, C., Strayer, M., McGrory, J., eds. *Nuclear and atomic physics at one gigaflop : proceedings of the Nuclear and Atomic Physics Conference at One Gigaflop, held at Oak Ridge, Tennessee, April 13–16, 1988.* Harwood Academic Publishers, 1989.

[Dir33] Dirac, P.A.M. Theory of electrons and positrons. Nobel Lecture, 1933.

[Dir82] Dirac, P.A.M. *The Principles of Quantum Mechanics (International Series of Monographs on Physics).* Oxford University Press, USA, 4 edition, 1982.

[ELS08] Esteban, M.J., Lewin, M., Séré, E. Variational methods in relativistic quantum mechanics. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 45(4), 535–593, 2008.

[ES99] Esteban, M.J., Séré, E. Solutions of the Dirac-Fock Equations for Atoms and Molecules. *Commun. Math. Phys.*, 203, 499–530, 1999.

[ES01] Esteban, M.J., Séré, E. Nonrelativistic Limit of the Dirac-Fock Equations. *Ann. Henri Poincaré*, 2, 941–961, 2001.

[Fin98] Finster, F. Local U(2,2) symmetry in relativistic quantum mechanics. *J. Math. Phys.*, 39(12), 6276–6290, 1998. doi :10.1063/1.532638.

[Fin06] Finster, F. *The Principle of the Fermionic Projector*, volume 35 of *AMS/IP studies in advanced mathematics*. International Press, 2006.

[FSY99a] Finster, F., Smoller, J., Yau, S.T. Particle-like solutions of the Einstein–Dirac–Maxwell equations. *Phys. Lett. A*, 259(6), 431–436, 1999.

[FSY99b] Finster, F., Smoller, J., Yau, S.T. Particlelike solutions of the Einstein-Dirac equations. *Phys. Rev. D*, 59, 1999.

[GL86] Gogny, D., Lions, P.L. Hartree-Fock theory in nuclear physics. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 20(4), 571–637, 1986.

[GM96] Greiner, W., Maruhn, J. *Nuclear Models*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Gri87] Griffiths, D. *Introduction to elementary particles*. John Wiley & Sons, 1987.

[Gua08] Guan, M. Solitary Wave Solutions for the Nonlinear Dirac Equations, 2008. Preprint.

[HLS05] Hainzl, C., Lewin, M., Séré, E. Existence of a Stable Polarized Vacuum in the Bogoliubov-Dirac-Fock Approximation. *Commun. Math. Phys.*, 257, 515–562, 2005.

[Lan99] Lang, S. *Fundamentals of Differential Geometry*. Springer, 1999.

[Len08] Lenzmann, E. Uniqueness of ground states for pseudo-relativistic Hartree equations, 2008. Preprint.

[Lie77] Lieb, E.H. Existence and Uniqueness of the Minimizing Solution of Choquard's Nonlinear Equation. *Stud. Appl. Math.*, 57, 93–105, 1977.

[Lio80] Lions, P.L. The Choquard equation and related questions. *Nonlinear Anal.*, 4(6), 1063–1073, 1980.

[Lio84a] Lions, P.L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1(2), 109–145, 1984.

[Lio84b] Lions, P.L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. II. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1(4), 223–283, 1984.

[Mes95] Messiah, A. *Mécanique quantique. Tome 2.* Dunod, Paris, 1995.

[Oun00] Ounaies, H. Perturbation method for a class of non linear Dirac equations. *Differential Integral Equations*, 13(4-6), 707–720, 2000.

[Rei89] Reinhard, P.G. The relativistic mean-field description of nuclei and nuclear dynamics. *Rep. Prog. Phys.*, 52, 439–514, 1989.

[Rin96] Ring, P. Relativistic Mean Field Theory in Finite Nuclei. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 37, 193–236, 1996.

[RN10] Rota Nodari, S. Perturbation method for particle-like solutions of the Einstein–Dirac equations. *Ann. Henri Poincaré*, 10(7), 1377–1393, 2010.

[Stu97] Stuart, C.A. Bifurcation from the Essential Spectrum. In M. Matzeu, A. Vignoli, eds., *Topological Nonlinear Analysis II. Degree, Singularity and Variations*, volume 27 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications.* Birkhäuser, 1997.

[Stu10] Stuart, D. Existence and Newtonian limit of nonlinear bound states in the Einstein–Dirac system. *J. Math. Phys.*, 51, 032501, 2010.

[SW97] Serot, B.D., Walecka, J.D. Recent Progress in Quantum Hadrodynamics. *Int. J. Mod. Phys. E*, 6(4), 515–631, 1997.

[Tha92] Thaller, B. *The Dirac Equation.* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1st edition, 1992.

[Wal74] Walecka, J.D. A theory of highly condensed matter. *Ann. Physics*, 83(2), 491 – 529, 1974.

[Wal04] Walecka, J.D. *Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics.* Imperial College Press and World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2nd edition, 2004.

# Partie A

# L'équation de Dirac et la relativité générale

# Chapitre I

# Perturbation method for particle–like solutions of the Einstein–Dirac equations

Ce chapitre reprend le texte intégral d'un article paru dans *Annales Henri Poincaré*, Volume 10 (2010), pages 1377-1393.

**Résumé.** Nous démontrons par une méthode de perturbation l'existence de solutions des équations d'Einstein-Dirac pour un système statique, à symétrie sphérique de deux fermions dans un état singulet. Nous montrons que la solution non dégénérée de l'équation de Choquard non linéaire génère une branche de solutions des équations d'Einstein–Dirac.

# Perturbation method for particle-like solutions of the Einstein-Dirac equations

Simona Rota Nodari

**Abstract**

The aim of this work is to prove by a perturbation method the existence of solutions of the coupled Einstein-Dirac equations for a static, spherically symmetric system of two fermions in a singlet spinor state. We relate the solutions of our equations to those of the nonlinear Choquard equation and we show that the non-degenerate solution of Choquard's equation generates solutions of the Einstein-Dirac equations.

## 1. Introduction

In this paper[1], we study the coupled Einstein-Dirac equations for a static, spherically symmetric system of two fermions in a singlet spinor state. Using numerical methods, F. Finster, J. Smoller and ST. Yau found, in [FSY99], particle-like solutions; our goal is to give a rigorous proof of their existence by a perturbation method [2].

The Einstein-Dirac equations take the form

$$(D - m)\psi = 0 \tag{1.1}$$

$$R^i_j - \frac{1}{2} R\delta^i_j = -8\pi T^i_j \tag{1.2}$$

where $D$ denotes the Dirac operator, $\psi$ is the wave function of a fermion of mass $m$, $R^i_j$ is the Ricci curvature tensor, $R$ indicates the scalar curvature and, finally, $T^i_j$ is the energy-momentum tensor of the Dirac particle.

In [FSY99], Finster, Smoller and Yau work with the Dirac operator into a static, spherically symmetric space-time where the metric, in polar coordinates $(t, r, \vartheta, \varphi)$, is given by

$$g_{ij} = diag\left(\frac{1}{T^2}, -\frac{1}{A}, -r^2, -r^2 \sin^2\vartheta\right) \tag{1.3}$$

[1]The final publication is available at www.springerlink.com, DOI 10.1007/s00023-009-0015-x.

[2]After completing this work, we learned from professor Joel Smoller that Erik J. Bird had proved the existence of small solutions of the Einstein-Dirac equations in his doctoral thesis in 2005 [Bir05]. His method is quite different from ours: he uses Schauder's fixed point theorem.

$$g^{ij} = diag\left(T^2, -A, -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\right) \tag{1.4}$$

with $A = A(r)$, $T = T(r)$ positive functions; so, the Dirac operator can be written as

$$D = i\gamma^t\partial_t + \gamma^r\left(i\partial_r + \frac{i}{r}\left(1 - A^{-1/2}\right) - \frac{i}{2}\frac{T'}{T}\right) + i\gamma^\vartheta\partial_\vartheta + i\gamma^\varphi\partial_\varphi \tag{1.5}$$

with

$$\gamma^t = T\bar{\gamma}^0 \tag{1.6}$$

$$\gamma^r = \sqrt{A}\left(\bar{\gamma}^1\cos\vartheta + \bar{\gamma}^2\sin\vartheta\cos\varphi + \bar{\gamma}^3\sin\vartheta\sin\varphi\right) \tag{1.7}$$

$$\gamma^\vartheta = \frac{1}{r}\left(-\bar{\gamma}^1\sin\vartheta + \bar{\gamma}^2\cos\vartheta\cos\varphi + \bar{\gamma}^3\cos\vartheta\sin\varphi\right) \tag{1.8}$$

$$\gamma^\varphi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(-\bar{\gamma}^2\sin\varphi + \bar{\gamma}^3\cos\varphi\right) \tag{1.9}$$

where $\bar{\gamma}^i$ are the Dirac matrices in Minkowski space (see [FSY99]).

Moreover, Finster, Smoller and Yau are looking for solutions taking the form

$$\psi = e^{-i\omega t}r^{-1}T^{1/2}\begin{pmatrix} \Phi_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ i\Phi_2\sigma^r\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

where $\sigma^r = (\bar{\sigma}^1\cos\vartheta + \bar{\sigma}^2\sin\vartheta\cos\varphi + \bar{\sigma}^3\sin\vartheta\sin\varphi)$ is a linear combination of the Pauli matrices $\bar{\sigma}^i$ and $\Phi_1(r)$, $\Phi_2(r)$ are radial real functions.

We remind also that the energy-momentum tensor is obtained as the variation of the classical Dirac action

$$S = \int \bar{\psi}(D-m)\psi\sqrt{|g|}\,d^4x$$

and takes the form

$$\begin{aligned} T^i_j &= \frac{1}{r^2}diag\Bigg(2\omega T^2|\Phi|^2, -2\omega T^2|\Phi|^2 + 4T\frac{1}{r}\Phi_1\Phi_2 + 2mT\left(\Phi_1^2 - \Phi_2^2\right), \\ &\quad -2T\frac{1}{r}\Phi_1\Phi_2, -2T\frac{1}{r}\Phi_1\Phi_2\Bigg) \end{aligned}$$

(see [FSY99] for more details).

In this case, the coupled Einstein-Dirac equations can be written as

$$\sqrt{A}\Phi_1' = \frac{1}{r}\Phi_1 - (\omega T + m)\Phi_2 \tag{1.11}$$

$$\sqrt{A}\Phi_2' = (\omega T - m)\Phi_1 - \frac{1}{r}\Phi_2 \tag{1.12}$$

$$rA' = 1 - A - 16\pi\omega T^2\left(\Phi_1^2 + \Phi_2^2\right) \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} 2rA\frac{T'}{T} &= A - 1 - 16\pi\omega T^2\left(\Phi_1^2 + \Phi_2^2\right) + 32\pi\frac{1}{r}T\Phi_1\Phi_2 \\ &\quad + 16\pi mT\left(\Phi_1^2 - \Phi_2^2\right) \end{aligned} \tag{1.14}$$

with the normalization condition

$$\int_0^\infty |\Phi|^2 \frac{T}{\sqrt{A}}\, dr = \frac{1}{4\pi}. \tag{1.15}$$

In order that the metric be asymptotically Minkowskian, Finster, Smoller and Yau assume that

$$\lim_{r\to\infty} T(r) = 1.$$

Finally, they also require that the solutions have finite (ADM) mass; namely

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r}{2}(1 - A(r)) < \infty.$$

In this paper, we will prove the existence of solutions of (1.1-1.2) in the form (1.10) by a perturbation method.
In particular, we follow the idea described by Ounaies in [Oun00] (see also [Gua08] for a rigorous existence proof of nonlinear Dirac solitons based on Ounaies' approach). Ounaies, by a perturbation parameter, relates the solutions of a nonlinear Dirac equation to those of a nonlinear Schrödinger equation. Imitating the idea of Ounaies, we relate the solutions of our equations to those of nonlinear Choquard's equation (see [Lie77], [Lio80] for more details on Choquard's equation) and we obtain the following result.

**Theorem 1.1.** *Given $0 < \omega < m$ such that $m - \omega$ is sufficiently small, there exists a non trivial solution of (1.11-1.14).*

In Section 2, we solve the Einstein-Dirac equations by means of the perturbation method suggested by Ounaies; in particular in the first subsection we describe a useful rescaling and some properties of the operators involved, whereas in the second subsection we prove the existence of solutions generated by the solution of the Choquard equation.

# 2. Perturbation method for the Einstein-Dirac equations

First of all, we observe that writing $T(r) = 1 + t(r)$ and using equation (1.13), the coupled Einstein-Dirac equations become

$$\sqrt{A}\Phi_1' = \frac{1}{r}\Phi_1 - (\omega + m)\Phi_2 - \omega t \Phi_2 \tag{2.1}$$

$$\sqrt{A}\Phi_2' = (\omega - m)\Phi_1 + \omega t \Phi_1 - \frac{1}{r}\Phi_2 \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} 2rAt' = {} & (A-1)(1+t) - 16\pi\omega(1+t)^3\left(\Phi_1^2 + \Phi_2^2\right) \\ & +32\pi\frac{1}{r}(1+t)^2\Phi_1\Phi_2 + 16\pi m(1+t)^2\left(\Phi_1^2 - \Phi_2^2\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

where

$$A(r) = 1 - \frac{16\pi\omega}{r} \int_0^r (1+t(s))^2 \left(\Phi_1(s)^2 + \Phi_2(s)^2\right) \, ds := 1 - \frac{16\pi\omega}{r} Q(r). \tag{2.4}$$

Furthermore, because we want $A(r) > 0$, we have that the following condition must be satisfied

$$0 \leq \frac{Q(r)}{r} < \frac{1}{16\pi\omega} \tag{2.5}$$

for all $r \in (0,\infty)$.

Now, to find a solution of the equations (2.1-2.3), we exploit the idea used by Ounaies in [Oun00]. In particular, we proceed as follow: in a first step we use a rescaling argument to transform (2.1-2.3) in a perturbed system of the form

$$\begin{cases} \sqrt{A(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)}\frac{d}{dr}\varphi - \frac{1}{r}\varphi + 2m\chi + K_1(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau) = 0 \\ \sqrt{A(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)}\frac{d}{dr}\chi + \frac{1}{r}\chi + \varphi - m\varphi\tau + K_2(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau) = 0 \\ A(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)\,\frac{d}{dr}\tau + \frac{8\pi m}{r^2}\int_0^r \varphi^2\,ds + K_3(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau) = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

where $\varphi, \chi, \tau : (0,\infty) \to \mathbb{R}$.
Second, we relate the solutions of (2.6) to those of the nonlinear system

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dr^2}\varphi + 2m\varphi - 16\pi m^3\left(\int_0^\infty \frac{\varphi^2}{\max(r,s)}\,ds\right)\varphi = 0 \\ \chi(r) = \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{r}\varphi - \frac{d}{dr}\varphi\right) \\ \tau(r) = 8\pi m\int_0^\infty \frac{\varphi^2}{\max(r,s)}\,ds. \end{cases} \tag{2.7}$$

We remark that $\varphi$ is a solution of (2.7) if and only if $u(x) = \frac{\varphi(|x|)}{|x|}$ solves the nonlinear Choquard equation

$$-\triangle u + 2mu - 4m^3\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|u(y)|^2}{|x-y|}\,dy\right)u = 0 \quad \text{in } H^1(\mathbb{R}^3). \tag{2.8}$$

To prove this fact it is enough to remind that for a radial function $\rho$,

$$\triangle\rho = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\rho\right)$$

and

$$\left(|\cdot|^{-1}\star\rho\right)(x) = 4\pi\left(\int_0^\infty \frac{s^2\rho(s)}{\max(r,s)}\,ds\right)$$

with $r = |x|$.
We observe also that if we write

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = r^{-1}\begin{pmatrix} \varphi(r)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ i\chi(r)\sigma^r\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

with $r = |x|$, $(\varphi, \chi)$ is a solution of (2.7) if and only if $(u(x), v(x))$ solves

$$-\triangle u + 2mu - 4m^3 \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(y)|^2}{|x-y|} \, dy \right) u = 0 \quad v = \frac{-i\bar{\sigma}\nabla u}{2m} \tag{2.9}$$

in $H^1(\mathbb{R}^3)$ where $\bar{\sigma}\nabla = \sum_{i=1}^3 \bar{\sigma}^i \partial_i$.
It is well known that Choquard's equation (2.8) has a unique radial, positive solution $u_0$ with $\int |u_0|^2 = N$ for some $N > 0$ given. Furthermore, $u_0$ is infinitely differentiable and goes to zero at infinity; more precisely there exist some positive constants $C_{\delta,\eta}$ such that $|D^\eta (u_0)| \leq C_{\delta,\eta} \exp(-\delta |x|)$ for $x \in \mathbb{R}^3$. At last, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ is a radial nondegenerate solution; by this we mean that the linearization of (2.8) around $u_0$ has a trivial nullspace in $L^2_r(\mathbb{R}^3)$. In particular, the linear operator $\mathcal{L}$ given by

$$\mathcal{L}\xi = -\triangle \xi + 2m\xi - 4m^3 \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u_0(y)|^2}{|x-y|} \, dy \right) \xi - 8m^3 \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\xi(y) u_0(y)}{|x-y|} \, dy \right) u_0$$

satisfies $\ker \mathcal{L} = \{0\}$ when $\mathcal{L}$ is restricted to $L^2_r(\mathbb{R}^3)$ (see [Lie77], [Lio80], [Len08] for more details).

The main idea is that the solutions of (2.6) are the zeros of a $\mathcal{C}^1$ operator $D : \mathbb{R} \times X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau \to Y_\varphi \times Y_\chi \times Y_\tau$. If we denote by $D_{\varphi,\chi,\tau}(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau)$ the derivative of $D(\varepsilon, \cdot, \cdot, \cdot)$, by $(\varphi_0, \chi_0, \tau_0)$ the ground state solution of (2.7) and we observe that $D_{\varphi,\chi,\tau}(0, \varphi_0, \chi_0, \tau_0)$ is an isomorphism, the application of the implicit function theorem (see [RR93]) yields the following result, which is equivalent to theorem 1.1.

**Theorem 2.1.** *Let $(\varphi_0, \chi_0, \tau_0)$ be the ground state solution of (2.7), then there exists $\delta > 0$ and a function $\eta \in \mathcal{C}((0, \delta), X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau)$ such that $\eta(0) = (\varphi_0, \chi_0, \tau_0)$ and $(\varepsilon, \eta(\varepsilon))$ is a solution of (2.6), for $0 \leq \varepsilon < \delta$.*

## 2.1. Rescaling

In this subsection we are going to introduce the new variable $(\varphi, \chi, \tau)$ such that $\Phi_1(r) = \alpha\varphi(\lambda r)$, $\Phi_2(r) = \beta\chi(\lambda r)$ and $t(r) = \gamma\tau(\lambda r)$, where $\Phi_1, \Phi_2, t$ satisfy (2.1-2.3) and $\alpha, \beta, \gamma, \lambda > 0$ are constants to be chosen later.

Using the explicit expression of $A$, given in (2.4), we have

$$\begin{aligned} A(\Phi_1, \Phi_2, t) &= 1 - \frac{16\pi\omega\alpha^2}{r} \int_0^r (1+\gamma\tau)^2 \left( \varphi^2 + \left( \frac{\beta}{\alpha}\chi \right)^2 \right) ds \\ &:= A_{\alpha,\beta,\gamma}(\varphi, \chi, \tau) \end{aligned} \tag{2.10}$$

It is now clear that if $\Phi_1, \Phi_2, t$ satisfy (2.1-2.3), then $\varphi, \chi, \tau$ satisfy the system

$$\begin{cases} \sqrt{A_{\alpha,\beta,\gamma}} \frac{\alpha\lambda}{\beta} \frac{d}{dr}\varphi - \frac{\alpha\lambda}{\beta} \frac{1}{r}\varphi + (m+\omega)\chi + \omega\gamma\tau\chi = 0 \\ \sqrt{A_{\alpha,\beta,\gamma}} \frac{d}{dr}\chi + \frac{1}{r}\chi + \frac{\alpha}{\beta\lambda}(m-\omega)\varphi - \frac{\alpha\gamma}{\beta\lambda}\omega\tau\varphi = 0 \\ 2A_{\alpha,\beta,\gamma} r \frac{d}{dr}\tau + K_{\alpha,\beta,\gamma} = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

with

$$K_{\alpha,\beta,\gamma}(\varphi,\chi,\tau) = \frac{16\pi\omega}{r}\frac{\alpha^2}{\gamma}\left(\int_0^r (1+\gamma\tau)^2\left(\varphi^2+\left(\frac{\beta}{\alpha}\chi\right)^2\right)ds\right)(1+\gamma\tau)$$
$$+16\pi\omega\frac{\alpha^2}{\gamma}(1+\gamma\tau)^3\left(\varphi^2+\left(\frac{\beta}{\alpha}\chi\right)^2\right) - 32\pi\frac{\lambda\alpha\beta}{\gamma}\frac{1}{r}(1+\gamma\tau)^2\varphi\chi$$
$$-16\pi m\frac{\alpha^2}{\gamma}(1+\gamma\tau)^2\left(\varphi^2-\left(\frac{\beta}{\alpha}\chi\right)^2\right).$$

By adding the conditions $\frac{\alpha}{\beta\lambda}(m-\omega)=1$, $\frac{\alpha\lambda}{\beta}=1$, $\frac{\alpha\gamma}{\beta\lambda}=1$, $\frac{\alpha^2}{\gamma}=1$ and $m-\omega\geq 0$, we obtain $\alpha=(m-\omega)^{1/2}$, $\lambda=(m-\omega)^{1/2}$, $\beta=m-\omega$ and $\gamma=m-\omega$.

Denoting $\varepsilon=m-\omega$, (2.11) is equivalent to

$$\begin{cases} \sqrt{A(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)}\frac{d}{dr}\varphi-\frac{1}{r}\varphi+2m\chi+K_1(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)=0 \\ \sqrt{A(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)}\frac{d}{dr}\chi+\frac{1}{r}\chi+\varphi-m\varphi\tau+K_2(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)=0 \\ A(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)\frac{d}{dr}\tau+\frac{8\pi m}{r^2}\int_0^r\varphi^2\,ds+K_3(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)=0 \end{cases} \tag{2.12}$$

where $A(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)$, $K_1(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)$, $K_2(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)$ and $K_3(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)$ are defined by

$$A(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)=1-\frac{16\pi(m-\varepsilon)\varepsilon}{r}\int_0^r(1+\varepsilon\tau)^2\left(\varphi^2+\varepsilon\chi^2\right)ds; \tag{2.13}$$
$$K_1(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)=-\varepsilon\chi+\varepsilon(m-\varepsilon)\tau\chi; \tag{2.14}$$
$$K_2(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)=\varepsilon\tau\varphi; \tag{2.15}$$

and

$$\begin{aligned} K_3(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau) \;=\;& \frac{8\pi m\varepsilon}{r^2}\int_0^r\chi^2\,ds+\frac{16\pi m\varepsilon}{r^2}\int_0^r\tau\left(\varphi^2+\varepsilon\chi^2\right)ds \\ &+\frac{8\pi m\varepsilon^2}{r^2}\int_0^r\tau^2\left(\varphi^2+\varepsilon\chi^2\right)ds \\ &-\frac{8\pi\varepsilon}{r^2}\left(\int_0^r(1+\varepsilon\tau)^2\left(\varphi^2+\varepsilon\chi^2\right)ds\right) \\ &+\frac{8\pi(m-\varepsilon)\varepsilon}{r^2}\left(\int_0^r(1+\varepsilon\tau)^2\left(\varphi^2+\varepsilon\chi^2\right)ds\right)\tau \\ &+16\pi m\varepsilon\frac{\chi^2}{r}+8\pi m\varepsilon(3\tau+3\varepsilon\tau^2+\varepsilon^2\tau^3)\frac{(\varphi^2+\varepsilon\chi^2)}{r} \\ &-8\pi\varepsilon(1+\varepsilon\tau)^3\frac{(\varphi^2+\varepsilon\chi^2)}{r}-16\pi\varepsilon(1+\varepsilon\tau)^2\frac{\varphi\chi}{r^2} \\ &-8\pi m\varepsilon(2\tau+\varepsilon\tau^2)\frac{(\varphi^2-\varepsilon\chi^2)}{r}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

For $\varepsilon = 0$, (2.12) becomes

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}\varphi - \frac{1}{r}\varphi + 2m\chi = 0 \\ \frac{d}{dr}\chi + \frac{1}{r}\chi + \varphi - m\varphi\tau = 0 \\ \frac{d}{dr}\tau + \frac{8\pi m}{r^2}\int_0^r \varphi^2\, ds = 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

that is equivalent to

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dr^2}\varphi + 2m\varphi - 16\pi m^3 \left(\int_0^\infty \frac{\varphi^2}{\max(r,s)}\, ds\right)\varphi = 0 \\ \chi(r) = \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{r}\varphi - \frac{d}{dr}\varphi\right) \\ \tau(r) = 8\pi m \int_0^\infty \frac{\varphi^2}{\max(r,s)}\, ds. \end{cases} \tag{2.18}$$

Then, we denote by $(\varphi_0, \chi_0, \tau_0)$ a solution of (2.18); in particular

$$\begin{aligned} \chi_0(r) &= -\frac{r}{2m}\frac{d}{dr}\left(\frac{\varphi_0}{r}\right) \\ \tau_0(r) &= 8\pi m \int_0^\infty \frac{\varphi_0^2}{\max(r,s)}\, ds. \end{aligned}$$

Now, to obtain a solution of (2.12) from $(\varphi_0, \chi_0, \tau_0)$, we define the operators $L_1 : \mathbb{R}\times X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau \to Y_\varphi$, $L_2 : \mathbb{R}\times X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau \to Y_\chi$, $L_3 : \mathbb{R}\times X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau \to Y_\tau$ and $D : \mathbb{R}\times X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau \to Y_\varphi \times Y_\chi \times Y_\tau$ by

$$\begin{aligned} L_1(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau) &= \sqrt{A(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\varphi - \frac{\varphi}{r^2} + 2m\frac{\chi}{r} + \frac{1}{r}K_1(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau) \\ L_2(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau) &= \sqrt{A(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\chi + \frac{\chi}{r^2} + \frac{\varphi}{r} - m\frac{\varphi}{r}\tau + \frac{1}{r}K_2(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau) \\ L_3(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau) &= A(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)\frac{d}{dr}\tau + \frac{8\pi m}{r^2}\int_0^r \varphi^2\, ds + K_3(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau) \end{aligned}$$

and

$$D(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau) = (L_1(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau), L_2(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau), L_3(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau))$$

where

$$\begin{aligned} X_\varphi &= \left\{\varphi : (0,\infty)\to\mathbb{R}\,\middle|\,\frac{\varphi(|x|)}{|x|}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in H^1\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2\right)\right\} \\ X_\chi &= \left\{\chi : (0,\infty)\to\mathbb{R}\,\middle|\,\frac{\chi(|x|)}{|x|}\sigma^r\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in H^1\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^2\right)\right\} \\ X_\tau &= \left\{\tau : (0,\infty)\to\mathbb{R}\,\middle|\,\lim_{r\to\infty}\tau(r) = 0, \frac{d}{dr}\tau \in L^1((0,\infty),dr)\right\} \\ Y_\varphi &= Y_\chi = L^2_r\left(\mathbb{R}^3\right) \\ Y_\tau &= L^1((0,\infty),dr). \end{aligned}$$

Furthermore we define the following norms:

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{X_\varphi} &= \left\| \frac{\varphi(|x|)}{|x|} \right\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}, \\
\|\chi\|_{X_\chi} &= \left\| \frac{\chi(|x|)}{|x|} \sigma^r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}, \\
\|\tau\|_{X_\tau} &= \left\| \frac{d}{dr}\tau \right\|_{L^1((0,\infty),dr)}.
\end{aligned}$$

It is well known that

$$\begin{aligned}
&H^1\left(\mathbb{R}^3\right) \hookrightarrow L^q\left(\mathbb{R}^3\right) \qquad 2 \le q \le 6 \\
&X_\tau \hookrightarrow L^\infty\left((0,\infty), dr\right).
\end{aligned}$$

Moreover, using Hardy's inequality

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f|^2}{|x|^2}\, dx \le 4 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla f|^2\, dx,$$

we get the following properties:

$$\begin{gathered}
\rho \in H^1\left((0,\infty), dr\right) \hookrightarrow L^\infty\left((0,\infty), dr\right) \\
\tfrac{\rho}{r} \in L^2\left((0,\infty), dr\right)
\end{gathered} \tag{2.19}$$

$\forall \rho \in X_\varphi, \forall \rho \in X_\chi$.

Since the operator $A(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau)$ must be strictly positive, we consider $B_\varphi$, $B_\chi$, $B_\tau$, defined as the balls of the spaces $X_\varphi, X_\chi, X_\tau$, and $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, depending on $m$ and on the radius of $B_\varphi, B_\chi, B_\tau$, such that

$$1 - \frac{16\pi(m-\varepsilon)\varepsilon}{r} \int_0^r (1+\varepsilon\tau)^2 \left(\varphi^2 + \varepsilon\chi^2\right)\, ds \ge \delta > 0$$

for all $(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau) \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \times B_\varphi \times B_\chi \times B_\tau$. The existence of $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ is assured by the fact that $\varphi, \chi, \tau$ are bounded; in particular, if $\varepsilon \ge 0$,

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{16\pi(m-\varepsilon)\varepsilon}{r} \int_0^r (1+\varepsilon\tau)^2 \left(\varphi^2 + \varepsilon\chi^2\right)\, ds \\
&\ge 1 - 20m\varepsilon \|\varphi\|_{X_\varphi}^2 - 8m\varepsilon^2 \left(5\|\tau\|_{X_\tau} \|\varphi\|_{X_\varphi}^2 + \|\chi\|_{X_\chi}^2\right) \\
&-4m\varepsilon^3 \|\tau\|_{X_\tau} \left(5\|\tau\|_{X_\tau} \|\varphi\|_{X_\varphi}^2 + 4\|\chi\|_{X_\chi}^2\right) - 8m\varepsilon^4 \|\tau\|_{X_\tau}^2 \|\chi\|_{X_\chi}^2,
\end{aligned}$$

then there exists $\varepsilon_2 > 0$ such that $A(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau) > 0$ for all $\varepsilon \in [0, \varepsilon_2)$. In the same way, if $\varepsilon < 0$,

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{16\pi(m-\varepsilon)\varepsilon}{r} \int_0^r (1+\varepsilon\tau)^2 \left(\varphi^2 + \varepsilon\chi^2\right) ds \\
&\geq 1 - 8m\varepsilon^2 \|\chi\|_{X_\chi}^2 - 8m|\varepsilon|^3 \|\chi\|_{X_\chi}^2 \left(1 + 2\|\tau\|_{X_\tau}\right) \\
&-8m\varepsilon^4 \|\chi\|_{X_\chi}^2 \|\tau\|_{X_\tau} \left(2 + 1\|\tau\|_{X_\tau}\right) - 8m|\varepsilon|^5 \|\tau\|_{X_\tau}^2 \|\chi\|_{X_\chi}^2,
\end{aligned}$$

then there exists $\varepsilon_1 > 0$ such that $A(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau) > 0$ for all $\varepsilon \in (-\varepsilon_1, 0)$.

**Lemma 2.2.**

$$L_1, L_2 \in \mathcal{C}^1\left((-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \times B_\varphi \times B_\chi \times B_\tau, Y_\varphi\right)$$

*and*

$$L_3 \in \mathcal{C}^1\left((-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \times B_\varphi \times B_\chi \times B_\tau, Y_\tau\right).$$

Before starting the proof of the lemma we observe that for a radial function $\rho$ such that $\frac{\rho}{r} \in H_r^1(\mathbb{R}^3)$ we have

$$|\rho(r)| \leq r^{1/2} \left\| \frac{d}{dr}\left(\frac{\rho(r)}{r}\right)\right\|_{L_r^2}. \tag{2.20}$$

We remind that $H_r^1(\mathbb{R}^3) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^3) \mid u \text{ is radial}\}$.

*Proof.* We begin with $L_3$; first of all, we have to prove that it is well defined in $Y_\tau = L^1((0,\infty), dr)$. We remark that

$$\begin{aligned}
|L_3(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau)| \;\leq\; & C_1\left|\frac{d}{dr}\tau\right| + \frac{C_2}{r^2}\int_0^r \left|\varphi^2 + \varepsilon\chi^2\right| ds + \frac{C_3}{r}\left|\varphi^2 + \varepsilon\chi^2\right| \\
& + \frac{C_4}{r^2}|\varphi\chi| + \frac{C_5}{r}\left|\varphi^2 - \varepsilon\chi^2\right|
\end{aligned}$$

where $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ are positive constants and, by definition, we have that $\frac{d}{dr}\tau \in L^1((0,\infty), dr)$.
Next, we have

$$\int_0^\infty \frac{1}{r^2}\int_0^r \left|\varphi^2 + \varepsilon\chi^2\right| ds\, dr = \int_0^\infty \frac{\left|\varphi^2 + \varepsilon\chi^2\right|}{s} ds < +\infty,$$

using Hölder's inequality, then $\frac{1}{r^2}\int_0^r \left|\varphi^2 + \varepsilon\chi^2\right| ds \in Y_\tau$. In the same way, we can conclude that $\frac{1}{r}\left(\varphi^2 + \varepsilon\chi^2\right), \frac{1}{r}\left(\varphi^2 - \varepsilon\chi^2\right) \in Y_\tau$.
Finally,

$$\int_0^\infty \frac{|\varphi|}{r}\frac{|\chi|}{r} dr \leq C \left\|\frac{\varphi}{r}\right\|_{L^2((0,\infty))} \left\|\frac{\chi}{r}\right\|_{L^2((0,\infty))} < +\infty$$

thanks to (2.19), then $\frac{1}{r^2}\varphi\chi \in Y_\tau$.
Now, we have to prove that $L_3(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)$ is $\mathcal{C}^1$; by classical arguments, it is enough to show that for $(h_1,h_2,h_3) \in B_\varphi \times B_\chi \times B_\tau$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(L_3(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)\right)h_1 \in Y_\tau,\\
&\frac{\partial}{\partial\chi}\left(L_3(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)\right)h_2 \in Y_\tau,\\
&\frac{\partial}{\partial\tau}\left(L_3(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)\right)h_3 \in Y_\tau.
\end{aligned}$$

We begin with $\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(L_3(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)\right)$,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(L_3(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)\right)h_1 = \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(A(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)\right)h_1\right)\frac{d}{dr}\tau\\
&+\frac{16\pi(m-\varepsilon)}{r^2}\left(\int_0^r(1+\varepsilon\tau)^2\varphi h_1\,ds\right)(1+\varepsilon\tau)\\
&+16\pi(m-\varepsilon)(1+\varepsilon\tau)^3\frac{\varphi h_1}{r} - 16\pi\varepsilon(1+\varepsilon\tau)^2\frac{h_1\chi}{r^2}\\
&-16\pi m(1+\varepsilon\tau)^2\frac{\varphi h_1}{r};
\end{aligned}$$

for $\frac{\partial}{\partial\chi}\left(L_3(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)\right)$,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\chi}\left(L_3(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)\right)h_2 = \left(\frac{\partial}{\partial\chi}\left(A(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)\right)h_2\right)\frac{d}{dr}\tau\\
&+\frac{16\pi(m-\varepsilon)\varepsilon}{r^2}\left(\int_0^r(1+\varepsilon\tau)^2\chi h_2\,ds\right)(1+\varepsilon\tau)\\
&+16\pi(m-\varepsilon)\varepsilon(1+\varepsilon\tau)^3\frac{\chi h_2}{r} - 16\pi\varepsilon(1+\varepsilon\tau)^2\frac{\varphi h_2}{r^2}\\
&-16\pi m\varepsilon(1+\varepsilon\tau)^2\frac{\chi h_2}{r}
\end{aligned}$$

and, finally,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\tau}\left(L_3\left(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau\right)\right)h_3=\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\left(A\left(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau\right)\right)h_3\right)\frac{d}{dr}\tau\\
&+A\left(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau\right)\frac{d}{dr}h_3\\
&+\frac{16\pi(m-\varepsilon)\varepsilon}{r^2}\left(\int_0^r(1+\varepsilon\tau)h_3\left(\varphi^2+\varepsilon\chi^2\right)\,ds\right)(1+\varepsilon\tau)\\
&+\frac{8\pi(m-\varepsilon)\varepsilon}{r^2}\left(\int_0^r(1+\varepsilon\tau)^2\left(\varphi^2+\varepsilon\chi^2\right)\,ds\right)h_3\\
&+24\pi(m-\varepsilon)\varepsilon(1+\varepsilon\tau)^2\frac{(\varphi^2+\varepsilon\chi^2)}{r}h_3-32\pi\varepsilon^2(1+\varepsilon\tau)\frac{\varphi\chi}{r^2}h_3\\
&-16\pi m\varepsilon(1+\varepsilon\tau)\frac{(\varphi^2-\varepsilon\chi^2)}{r}h_3.
\end{aligned}
$$

First of all, we remark that if $\varphi,h_1\in B_\varphi$, $\chi,h_2\in B_\chi$ and $\tau,h_3\in B_\tau$, then

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(A\left(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau\right)\right)h_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial\chi}\left(A\left(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau\right)\right)h_2$$

and

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(A\left(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau\right)\right)h_3$$

are bounded. So, we have that

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial L_3}{\partial\varphi}h_1\right| &\le C_1\left|\frac{d}{dr}\tau\right|+\frac{C_2}{r^2}\left(\int_0^r|\varphi h_1|\,ds\right)+C_3\frac{|\varphi h_1|}{r}+C_4\frac{|h_1\chi|}{r^2}\\
\left|\frac{\partial L_3}{\partial\chi}h_2\right| &\le C_5\left|\frac{d}{dr}\tau\right|+\frac{C_6}{r^2}\left(\int_0^r|\chi h_2|\,ds\right)+C_7\frac{|\chi h_2|}{r}+C_8\frac{|\varphi h_2|}{r^2}\\
\left|\frac{\partial L_3}{\partial\tau}h_3\right| &\le C_9\left|\frac{d}{dr}\tau\right|+C_{10}\left|\frac{d}{dr}h_3\right|+\frac{C_{11}}{r^2}\int_0^r\left|\varphi^2+\varepsilon\chi^2\right|\,ds+C_{12}\frac{|\varphi^2+\varepsilon\chi^2|}{r}\\
&\quad+C_{13}\frac{|\varphi\chi|}{r^2}+C_{14}\frac{|\varphi^2-\varepsilon\chi^2|}{r}
\end{aligned}
$$

with $C_i$ positive constants. With exactly the same arguments used above, we conclude that

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(L_3\left(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau\right)\right)h_1\right|\,dr<+\infty\\
&\int_0^\infty\left|\frac{\partial}{\partial\chi}\left(L_3\left(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau\right)\right)h_2\right|\,dr<+\infty\\
&\int_0^\infty\left|\frac{\partial}{\partial\tau}\left(L_3\left(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau\right)\right)h_3\right|\,dr<+\infty
\end{aligned}
$$

if $(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau) \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \times B_\varphi \times B_\chi \times B_\tau$, and $(h_1, h_2, h_3) \in B_\varphi \times B_\chi \times B_\tau$. Furthermore $\frac{\partial L_3}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial L_3}{\partial \chi}$ and $\frac{\partial L_3}{\partial \tau}$ are continuous; thus the proof for $L_3$.

We consider now $L_1$; first, we have to prove that it is well defined in $Y_\varphi$. We observe that

$$|L_1(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau)| \leq C_1 \left| \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \varphi \right| + \left| \frac{\varphi}{r^2} \right| + C_2 \left| \frac{\chi}{r} \right|$$

with $C_1, C_2$ positive constants then $L_1(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, thanks to conditions (2.19). Now, we have to prove that $L_1(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau)$ is $\mathcal{C}^1$; by classical arguments, it is enough to show that for $(h_1, h_2, h_3) \in B_\varphi \times B_\chi \times B_\tau$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} (L_1(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau)) h_1 &\in Y_\varphi, \\ \frac{\partial}{\partial \chi} (L_1(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau)) h_2 &\in Y_\varphi, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} (L_1(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau)) h_3 &\in Y_\varphi. \end{aligned}$$

By a straightforward computation, we find out

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1}{\partial \varphi} h_1 &= \frac{1}{2} A^{-1/2} \left( \frac{\partial A}{\partial \varphi} h_1 \right) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \varphi + A^{1/2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} h_1 - \frac{h_1}{r^2}, \\ \frac{\partial L_1}{\partial \chi} h_2 &= \frac{1}{2} A^{-1/2} \left( \frac{\partial A}{\partial \chi} h_2 \right) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \varphi + (2m - \varepsilon) \frac{h_2}{r} + \varepsilon(m - \varepsilon) \tau \frac{h_2}{r}, \\ \frac{\partial L_1}{\partial \tau} h_3 &= \frac{1}{2} A^{-1/2} \left( \frac{\partial A}{\partial \tau} h_3 \right) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \varphi + \varepsilon(m - \varepsilon) h_3 \frac{\chi}{r}; \end{aligned}$$

and, using the positivity of $A$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial L_1}{\partial \varphi} h_1 \right| &\leq C_1 \left| \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \varphi \right| + C_2 \left| \frac{1}{r} \frac{d}{dr} h_1 \right| + \left| \frac{h_1}{r^2} \right| \\ \left| \frac{\partial L_1}{\partial \chi} h_2 \right| &\leq C_3 \left| \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \varphi \right| + C_4 \left| \frac{h_2}{r} \right| \\ \left| \frac{\partial L_1}{\partial \tau} h_3 \right| &\leq C_5 \left| \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \varphi \right| + C_6 \left| \frac{\chi}{r} \right| \end{aligned}$$

with $C_i$ positive constants. Then, we can conclude that

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} (L_1(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau)) h_1 \right|^2 dx < +\infty \\ &\int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial}{\partial \chi} (L_1(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau)) h_2 \right|^2 dx < +\infty \\ &\int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial}{\partial \tau} (L_1(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau)) h_3 \right|^2 dx < +\infty \end{aligned}$$

if $(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau) \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \times B_\varphi \times B_\chi \times B_\tau$, and $(h_1, h_2, h_3) \in B_\varphi \times B_\chi \times B_\tau$.
Furthermore $\frac{\partial L_1}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial L_1}{\partial \chi}$ and $\frac{\partial L_1}{\partial \tau}$ are continuous; thus the proof for $L_1$ and with the same arguments for $L_2$.

□

## 2.2. Branches generated by the solution of Choquard's equation

In this subsection, we show that a solution $\phi_0 = (\varphi_0, \chi_0, \tau_0)$ of (2.7) can generate a local branch of solutions of (2.6).

First, we linearize the operator $D$ on $(\varphi, \chi, \tau)$ around $(0, \phi_0)$

$$D_{\varphi,\chi,\tau}(0, \phi_0)(h, k, l) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}h - \frac{h}{r^2} + 2m\frac{k}{r} \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}k + \frac{k}{r^2} + \frac{h}{r} - m\frac{h}{r}\tau_0 - m\frac{\varphi_0}{r}l \\ \frac{d}{dr}l + \frac{16\pi m}{r^2}\int_0^r \varphi_0 h\, ds \end{pmatrix}.$$

Now, if we prove that $D_{\varphi,\chi,\tau}(0, \phi_0)$ is an isomorphism, the implicit function theorem can be applied and we can find solutions of (2.6) near the ground state $\phi_0$.

**Lemma 2.3.** *We define the operator $V : X_\varphi \times X_\chi \to Y_\varphi \times Y_\chi$, by*

$$V(\varphi, \chi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\varphi - \frac{1}{r^2}\varphi + 2m\frac{1}{r}\chi \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\chi + \frac{1}{r^2}\chi + \frac{1}{r}\varphi \end{pmatrix},$$

*then $V$ is an isomorphism of $X_\varphi \times X_\chi$ onto $Y_\varphi \times Y_\chi$.*

This lemma is obvious if we remind that $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ can be written as the direct sum of partial wave subspaces and that the Dirac operator leaves invariant all these subspaces (see [Tha92]). So, thanks to Lemma 2.3 of [Oun00], we know that $\overline{V} : H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \times H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \to L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \times L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$ defined by

$$\overline{V}(u, v) = \begin{pmatrix} i\bar{\sigma}\nabla u + 2mv \\ -i\bar{\sigma}\nabla v + u \end{pmatrix}$$

is an isomorphism of $H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \times H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$ onto $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \times L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$ and then $\overline{V}$ is an isomorphism of each partial wave subspace. In particular, $V$ coincide with $\overline{V}$ on the partial wave subspace $X_\varphi \times X_\chi$.

**Lemma 2.4.** *We define the operator $W : X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau \to Y_\varphi \times Y_\chi \times Y_\tau$, by*

$$W(h, k, l) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}h - \frac{h}{r^2} + 2m\frac{k}{r} \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}k + \frac{k}{r^2} + \frac{h}{r} - m\frac{\varphi_0}{r}l \\ \frac{d}{dr}l \end{pmatrix},$$

*then $W$ is an isomorphism of $X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau$ onto $Y_\varphi \times Y_\chi \times Y_\tau$.*

*Proof.* First we prove that $W$ is one to one. We observe that $W(h,k,l)=0$ if and only if $(h,k,l)$ satisfies

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}h - \frac{h}{r^2} + 2m\frac{k}{r} = 0 \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}k + \frac{k}{r^2} + \frac{h}{r} - m\frac{\varphi_0}{r}l = 0 \\ \frac{d}{dr}l = 0 \end{cases}$$

in $Y_\varphi \times Y_\chi \times Y_\tau$. In particular, we must have $l \equiv 0$ and $(h,k)$ solution of

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}h - \frac{h}{r^2} + 2m\frac{k}{r} = 0 \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}k + \frac{k}{r^2} + \frac{h}{r} = 0 \end{cases}$$

that is equivalent to $V(h,k)=0$. So, thanks to Lemma 2.3, $h \equiv k \equiv 0$ and $W$ is one to one in $Y_\varphi \times Y_\chi \times Y_\tau$.

Secondly, we have to prove that for $f=(f_1,f_2,f_3) \in Y_\varphi \times Y_\chi \times Y_\tau$, there exists $(h,k,l) \in X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau$ such that $W(h,k,l)=f$. This means that the system

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}h - \frac{h}{r^2} + 2m\frac{k}{r} = f_1 \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}k + \frac{k}{r^2} + \frac{h}{r} - m\frac{\varphi_0}{r}l = f_2 \\ \frac{d}{dr}l = f_3 \end{cases}$$

has a solution in $X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau$ for all $(f_1,f_2,f_3) \in Y_\varphi \times Y_\chi \times Y_\tau$. We observe that $\forall f_3 \in L^1((0,\infty),dr)$ there exists $l^*(r) = -\int_r^\infty f_3\,ds$ such that $\frac{d}{dr}l^* = f_3$; furthermore $l^* \in X_\tau$. So, we have to show that

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}h - \frac{h}{r^2} + 2m\frac{k}{r} = f_1 \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}k + \frac{k}{r^2} + \frac{h}{r} = f_2 + m\frac{\varphi_0}{r}l^* \end{cases} \tag{2.21}$$

has a solution in $X_\varphi \times X_\chi$ for all $(f_1,f_2) \in Y_\varphi \times Y_\chi$.
Now, we remark that $\frac{\varphi_0}{r}l^* \in L^2(\mathbb{R}^3)$ and then, thanks to Lemma 2.3, (2.21) has a solution in $X_\varphi \times X_\chi$ for all $(f_1,f_2) \in Y_\varphi \times Y_\chi$.
In conclusion $W$ is an isomorphism of $X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau$ onto $Y_\varphi \times Y_\chi \times Y_\tau$.

□

Finally, we observe that $D_{\varphi,\chi,\tau}(0,\phi_0)(h,k,l)$ can be written as

$$D_{\varphi,\chi,\tau}(0,\phi_0)(h,k,l) = W(h,k,l) + S(h) \tag{2.22}$$

with

$$S(h) = \begin{pmatrix} 0 \\ -m\frac{h}{r}\tau_0 \\ \frac{16\pi m}{r^2}\int_0^r \varphi_0 h\,ds \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

**Theorem 2.5.** *Let $\phi_0$ be the ground state solution of (2.7), then there exists $\delta > 0$ and a function $\eta \in \mathcal{C}((0,\delta), X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau)$ such that $\eta(0)=\phi_0$ and $D(\varepsilon,\eta(\varepsilon))=0$ for $0 \le \varepsilon < \delta$.*

*Proof.* Since $D(0,\phi_0)=0$ and $D$ is continuously differentiable in a neighborhood of $(0,\phi_0)$, to apply the implicit function theorem we have to prove that $D_{\varphi,\chi,\tau}(0,\phi_0)$ is an isomorphism of $X_\varphi\times X_\chi\times X_\tau$ onto $Y_\varphi\times Y_\chi\times Y_\tau$.
We observe that $D_{\varphi,\chi,\tau}(0,\phi_0)(h,k,l)=0$ if and only if $(h,k,l)$ satisfies

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}h-\frac{h}{r}+2mk=0 \\ \frac{d}{dr}k+\frac{k}{r}+h-mh\tau_0-m\varphi_0 l=0 \\ \frac{d}{dr}l+\frac{16\pi m}{r^2}\int_0^r\varphi_0 h\,ds=0 \end{cases} \tag{2.24}$$

that means

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dr^2}h+2mh-16\pi m^3\left(\int_0^\infty\frac{\varphi_0^2}{\max(r,s)}\,ds\right)h-32\pi m^3\left(\int_0^\infty\frac{\varphi_0 h}{\max(r,s)}\,ds\right)\varphi_0=0 \\ \frac{d}{dr}h-\frac{1}{r}h+2mk=0 \\ l=16\pi m\int_0^\infty\frac{\varphi_0 h}{\max(r,s)}\,ds \end{cases} \tag{2.25}$$

Now, if we write $\xi(x)=\frac{h(|x|)}{|x|}$ and we remind that $\varphi_0(|x|)=|x|u_0(x)$ with $u_0$ solution of (2.8), we have that $(h,k,l)$ is a solution of (2.25) if

$$\begin{pmatrix}\xi(x)\\ \zeta(x)\end{pmatrix}=r^{-1}\begin{pmatrix} h(r)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ ik(r)\sigma^r\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

satisfies

$$\begin{cases} -\triangle\xi+2m\xi-4m^3\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|u_0(y)|^2}{|x-y|}\,dy\right)\xi-8m^3\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\xi(y)u_0(y)}{|x-y|}\,dy\right)u_0=0 \\ \zeta=\frac{-i\bar\sigma\nabla\xi}{2m} \end{cases} \tag{2.26}$$

and

$$l(x)=4m\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\xi(y)u_0(y)}{|x-y|}\,dy. \tag{2.27}$$

It is well known that the unique solution of the first equation of (2.26) in $H^1_r(\mathbb{R}^3)$ is $\xi\equiv 0$ (see [Len08] for more details) and that implies $\zeta\equiv l\equiv 0$. So the unique solution of (2.24) is $h\equiv k\equiv l\equiv 0$ and $D_{\varphi,\chi,\tau}(0,\phi_0)$ is one to one in $X_\varphi\times X_\chi\times X_\tau$.

Next, if we show that $S(h)$ is a compact operator, we have that $D_{\varphi,\chi,\tau}(0,\phi_0)$ is a one to one operator that can be written as a sum of an isomorphism and a compact operator and then it is an isomorphism.
First, we can easily see that $T(h)=\frac{1}{r^2}\left(\int_0^r\varphi_0 h\,ds\right)$ is a compact operator from $X_\varphi$ on $Y_\tau$; in particular, we use the fact that $H^1_r(\mathbb{R}^3)$ is compactly embedded in $L^q(\mathbb{R}^3)$, for $2<q<6$, to prove that for any bounded sequence $\{h_n\}\subset X_\varphi$, the sequence $\{T(h_n)\}\subset Y_\tau$ contains a Cauchy subsequence.
Second, we have to show that the operator $\frac{h}{r}\tau_0$ from $X_\varphi$ to $L^2(\mathbb{R}^3)$ is compact. If $\left\{\frac{h_n}{r}\right\}$ is

a bounded sequence in $H^1(\mathbb{R}^3)$ then $\left\{\frac{h_n}{r}\tau_0\right\}$ is precompact on $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$, thanks to compact Sobolev embedding and, since $\tau_0(r) \to 0$ when $r \to +\infty$, we can conclude that $\left\{\frac{h_n}{r}\tau_0\right\}$ is precompact on $L^2(\mathbb{R}^3)$.
So $S(h)$ is a compact operator from $X_\varphi$ on $Y_\varphi \times Y_\chi \times Y_\tau$ and $D_{\varphi,\chi,\tau}(0, \phi_0)$ is an isomorphism of $X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau$ onto $Y_\varphi \times Y_\chi \times Y_\tau$.

In conclusion, we can apply the implicit function theorem to find that there exists $\delta > 0$ and a function $\eta \in \mathcal{C}((0,\delta), X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau)$ such that $\eta(0) = \phi_0$ and $D(\varepsilon, \eta(\varepsilon)) = 0$ for $0 \le \varepsilon < \delta$.

□

## Acknowledgment

The author would like to thank professor Eric Séré for helpful discussions and useful comments.

# Bibliography

[Bir05] Bird, E.J. *A proof of existence of particle-like solutions of Einstein Dirac Equations.* Ph.D. thesis, University of Michigan, 2005.

[FSY99] Finster, F., Smoller, J., Yau, S.T. Particlelike solutions of the Einstein-Dirac equations. *Phys. Rev. D*, 59, 1999.

[Gua08] Guan, M. Solitary Wave Solutions for the Nonlinear Dirac Equations, 2008. Preprint.

[Len08] Lenzmann, E. Uniqueness of ground states for pseudo-relativistic Hartree equations, 2008. Preprint.

[Lie77] Lieb, E.H. Existence and Uniqueness of the Minimizing Solution of Choquard's Nonlinear Equation. *Stud. Appl. Math.*, 57, 93–105, 1977.

[Lio80] Lions, P.L. The Choquard equation and related questions. *Nonlinear Anal.*, 4(6), 1063–1073, 1980.

[Oun00] Ounaies, H. Perturbation method for a class of non linear Dirac equations. *Differential Integral Equations*, 13(4-6), 707–720, 2000.

[RR93] Renardy, M., Rogers, R.C. *An Introduction to Partial Differential Equations*, pp. 337–338. Springer, 1993.

[Tha92] Thaller, B. *The Dirac Equation.* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1st edition, 1992.

# Chapitre II

# Une méthode de perturbation pour les solutions localisées des équations d'Einstein–Dirac–Maxwell

Dans le chapitre I, par une méthode de perturbation, nous avons montré de manière rigoureuse l'existence de solutions des équations d'Einstein–Dirac pour un système statique, à symétrie sphérique de deux fermions dans un état singulet.

Dans ce chapitre, nous généralisons ce résultat aux équations d'Einstein–Dirac–Maxwell et nous montrons, dans le cas particulier d'un couplage électromagnétique faible, l'existence des solutions obtenues numériquement par F. Finster, J. Smoller et S.T. Yau dans [FSY99a].

Ce résultat a été publié dans une note aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série I,* intitulée "Perturbation method for particle-like solutions of the Einstein-Dirac-Maxwell equations", volume 348 (2010), pages 791-794.

## 1. Introduction

Les équations d'Einstein–Dirac–Maxwell pour un système de $n$ particules de Dirac s'écrivent sous la forme

$$R^i{}_j - \frac{1}{2} R \delta^i{}_j = -8\pi T^i{}_j \tag{1.1}$$

$$(D - m)\psi_a = 0 \tag{1.2}$$

$$\nabla_k F^{jk} = 4\pi e \sum_{a=1}^{n} \bar{\psi}_a \gamma^j \psi_a \tag{1.3}$$

où $\gamma^j$ sont les matrices de Dirac, $D$ indique l'opérateur de Dirac, $\psi_a$ sont les fonctions d'ondes des fermions de masse $m$ et charge $e$, $R^i{}_j$ est le tenseur de courbure de Ricci, $R$ est la courbure scalaire, $F_{jk}$ est le tenseur électromagnétique et, finalement, $T^i{}_j$ est le tenseur d'énergie-impulsion. Nous rappelons que, dans le cas des équations d'Einstein–Dirac–Maxwell, le tenseur d'énergie-impulsion prend en considération la présence des fermions et du champ électromagnétique.

Comme dans le chapitre précédent et dans [FSY99a], nous considérons un système statique, à symétrie sphérique de deux fermions dans un état singulet. La métrique, en coordonnées polaire $(t, r, \vartheta, \varphi)$, est donnée par

$$g_{ij} = diag\left(\frac{1}{T^2}, -\frac{1}{A}, -r^2, -r^2 \sin^2 \vartheta\right)$$
$$g^{ij} = diag\left(T^2, -A, -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta}\right)$$

avec $A = A(r)$, $T = T(r)$ fonctions positives ; de plus, en utilisant l'ansatz de [FSY99b] et du chapitre I, les spineurs de Dirac sont décrits par deux fonctions radiales à valeurs réelles $\Phi_1(r)$, $\Phi_2(r)$ et s'écrivent sous la forme

$$\psi_a = e^{-i\omega t} r^{-1} T^{1/2} \begin{pmatrix} \Phi_1 u_a \\ i\Phi_2 \sigma^r u_a \end{pmatrix},$$

pour $a = 1, 2$. Finalement, le potentiel électromagnétique est de la forme $\mathcal{A} = (-V, 0)$, où $V$ est le potentiel de Coulomb.

Dans ce cas, les équations d'Einstein–Dirac–Maxwell deviennent

$$\sqrt{A}\Phi_1' = \frac{1}{r}\Phi_1 - ((\omega - eV)T + m)\Phi_2 \tag{1.4}$$
$$\sqrt{A}\Phi_2' = ((\omega - eV)T - m)\Phi_1 - \frac{1}{r}\Phi_2 \tag{1.5}$$
$$rA' = 1 - A - 16\pi(\omega - eV)T^2\left(\Phi_1^2 + \Phi_2^2\right) - r^2 A T^2 (V')^2 \tag{1.6}$$
$$\begin{aligned} 2rA\frac{T'}{T} = {} & A - 1 - 16\pi(\omega - eV)T^2\left(\Phi_1^2 + \Phi_2^2\right) + 32\pi\frac{1}{r}T\Phi_1\Phi_2 \\ & +16\pi m T\left(\Phi_1^2 - \Phi_2^2\right) + r^2 A T^2 (V')^2 \end{aligned} \tag{1.7}$$
$$r^2 A V'' = -8\pi e\left(\Phi_1^2 + \Phi_2^2\right) - \left(2rA + r^2 A\frac{T'}{T} + \frac{r^2}{2}A'\right)V' \tag{1.8}$$

avec la condition de normalisation

$$\int_0^\infty |\Phi|^2 \frac{T}{\sqrt{A}}\, dr = \frac{1}{4\pi}. \tag{1.9}$$

Afin que la métrique soit asymptotiquement Minkowskienne et que les solutions aient une masse (ADM) finie, nous supposons

$$\lim_{r\to\infty} T(r) = 1,$$
$$\lim_{r\to\infty} \frac{r}{2}(1 - A(r)) < \infty.$$

Finalement, nous supposons aussi

$$\lim_{r\to\infty} V(r) = 0$$

([FSY99a]).

Il est clair que si $e = 0$, alors les équations (1.4-1.8) coïncident avec les équations d'Einstein–Dirac étudiées au chapitre I.

Dans ce chapitre, par une méthode de perturbation, nous montrons de manière rigoureuse l'existence de solutions des équations d'Einstein–Dirac–Maxwell pour un système statique, à symétrie sphérique de deux fermions dans un état singulet et dans le cas d'un couplage électromagnétique faible. Plus précisément, en utilisant l'idée introduite par Ounaies pour une classe d'équations de Dirac non linéaires (voir [Oun00]) et adaptée dans le premier chapitre ([RN10]) aux équations d'Einstein–Dirac, nous obtenons le théorème suivant.

**Théorème 1.1.** *Étant donné $e, m, \omega$ tels que $e^2 - m^2 < 0$, $0 < \omega < m$ avec $m - \omega$ assez petit ; il existe une solution non triviale de (1.4-1.8).*

La constante $\frac{e^2}{m^2}$ représente le rapport entre les constantes de couplage électrostatique (paramètre $e$) et gravitationnel (paramètre $m$). En supposant $m^2 > e^2$, l'attraction gravitationnelle domine la répulsion électrostatique et une solution des équations d'Einstein–Dirac–Maxwell peut être obtenue à partir d'une solution de l'équation de Choquard non linéaire,

$$-\triangle u + 2mu - 4(m^2 - e^2)m \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(y)|^2}{|x-y|} \, dy \right) u = 0$$

dans $H^1(\mathbb{R}^3)$, par une méthode de perturbation. Nous remarquons cependant que les particules élémentaires connues vérifient $e^2 \gg m^2$.

Dans la section 2, nous résolvons les équations d'Einstein–Dirac–Maxwell ; en particulier, dans la première sous-section, nous décrivons un changement d'échelle utile pour la démonstration du théorème 1.1 et nous analysons certaines propriétés des opérateurs concernés ; ensuite, dans la deuxième sous-section, nous démontrons l'existence de solutions générées par une solution de l'équation de Choquard.

# 2. Une méthode de perturbation pour les équations d'Einstein–Dirac–Maxwell

Premièrement, nous observons que l'équation (1.8) peut être récrite sous la forme

$$\left( r^2 \sqrt{A} T V' \right)' = -8\pi e \left( \Phi_1^2 + \Phi_2^2 \right) \frac{T}{\sqrt{A}}$$

et, en intégrant, nous obtenons

$$\sqrt{A} T V' = -\frac{8\pi e}{r^2} \int_0^r \left( \Phi_1^2 + \Phi_2^2 \right) \frac{T}{\sqrt{A}} \, ds.$$

Deuxièmement, en posant $T(r) = 1 + t(r)$ et en utilisant l'équation (1.6), nous remarquons que les équations d'Einstein–Dirac–Maxwell deviennent

$$\begin{aligned}
\sqrt{A}\Phi_1' &= \frac{1}{r}\Phi_1 - ((\omega - eV)(1+t) + m)\Phi_2 &(2.1)\\
\sqrt{A}\Phi_2' &= ((\omega - eV)(1+t) - m)\Phi_1 - \frac{1}{r}\Phi_2 &(2.2)\\
2rAt' &= (A-1)(1+t) - 16\pi(\omega - eV)(1+t)^3\left(\Phi_1^2 + \Phi_2^2\right)\\
&\quad +32\pi\frac{1}{r}(1+t)^2\Phi_1\Phi_2 + 16\pi m(1+t)^2\left(\Phi_1^2 - \Phi_2^2\right)\\
&\quad +r^2A(1+t)^3\left(V'\right)^2 &(2.3)\\
\sqrt{A}(1+t)V' &= -\frac{8\pi e}{r^2}\int_0^r \left(\Phi_1^2 + \Phi_2^2\right)\frac{(1+t)}{\sqrt{A}}\,ds. &(2.4)
\end{aligned}$$

où $A(r) = 1 + a(r)$ et

$$\begin{aligned}
a(r) &= -\frac{1}{r}\exp\left(-F(r)\right)\int_0^r \Big[16\pi(\omega - eV)(1+t)^2\left(\Phi_1^2 + \Phi_2^2\right) &(2.5)\\
&\quad +s^2(1+t)^2\left(V'\right)^2\Big]\exp\left(F(s)\right)ds
\end{aligned}$$

avec

$$F(r) = \int_0^r s(1+t)^2\left(V'\right)^2\,ds. \tag{2.6}$$

Pour trouver une solutions des équations (2.1-2.4), nous utilisons l'idée décrite dans [RN10] et dans le chapitre I.

Premièrement, par un changement d'échelle, nous transformons les équations d'Einstein–Dirac–Maxwell (2.1-2.4) en un système perturbé. Nous choisissons $\varepsilon = m - \omega$ comme paramètre de perturbation.

Deuxièmement, nous remarquons que, pour $\left(\frac{e}{m}\right)^2 < 1$, l'équation pour la variable $\varphi$ du système non perturbé, c'est-à-dire lorsque $\varepsilon = 0$, est l'équation de Choquard. Il est bien connu que l'équation de Choquard a une solution radiale positive. De plus, dans l'espace des fonctions radiales, cette solution est non dégénérée, dans le sens où le noyau de la linéarisation de l'équation contient seulement la fonction identiquement nulle. Nous appelons $\phi_0$ la solution du système non perturbé.

Ensuite, nous observons que le système perturbé s'écrit sous la forme $D(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta) = 0$ avec $D$ un opérateur non linéaire de classe $\mathcal{C}^1$, pour un bon choix d'espaces fonctionnels. Nous prouvons que cet opérateur satisfait les hypothèses du théorème des fonctions implicites. En particulier, nous montrons que la linéarisation de l'opérateur $D$ par rapport à $(\varphi, \chi, \tau, \zeta)$ en $(0, \phi_0)$, $D_{\varphi,\chi,\tau,\zeta}(0, \phi_0)$, est une injection, grâce à la non-dégénérescence de la solution de l'équation de Choquard, et s'écrit comme somme d'un isomorphisme et d'un opérateur compact ; donc $D_{\varphi,\chi,\tau,\zeta}(0, \phi_0)$ est un isomorphisme. En appliquant le théorème des fonctions implicites, nous déduisons que, pour $\varepsilon$ assez petit et $e^2 - m^2 < 0$, le système perturbé a une solution.

En conclusion, pour $e^2 - m^2 < 0$, $0 < \omega < m$ et $m - \omega$ assez petit (régime faiblement relativiste), les équations d'Einstein-Dirac-Maxwell possèdent une solution non triviale.

## 2.1. Changement d'échelle

Dans cette sous-section, nous introduisons les fonctions $\varphi, \chi, \tau$ et $\zeta$ telles que

$$\begin{aligned}\Phi_1(r) &= \varepsilon^{1/2}\varphi(\varepsilon^{1/2}r)\\ \Phi_2(r) &= \varepsilon\chi(\varepsilon^{1/2}r)\\ t(r) &= \varepsilon\tau(\varepsilon^{1/2}r)\\ V(r) &= \varepsilon\zeta(\varepsilon^{1/2}r)\end{aligned}$$

avec $(\Phi_1, \Phi_2, t, V)$ une solution des équations (2.1-2.4) et $\varepsilon = m - \omega$. En utilisant l'expression explicite de $a(r)$, donnée par (2.5), nous obtenons

$$\begin{aligned} a(\Phi_1, \Phi_2, t, V) &= -\frac{\varepsilon}{r}\exp\left(-F(\varepsilon, r)\right)\int_0^r \Big[16\pi(m - \varepsilon - \varepsilon e\zeta)(1 + \varepsilon\tau)^2\left(\varphi^2 + \varepsilon\chi^2\right)\\ &\quad +\varepsilon s^2(1 + \varepsilon\tau)^2\left(\zeta'\right)^2\Big]\exp\left(F(\varepsilon, s)\right)ds\\ &:= \varepsilon\alpha(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta) \end{aligned} \tag{2.7}$$

avec

$$F(\varepsilon, r) = \varepsilon^2\int_0^r s(1 + \varepsilon\tau)^2\left(\zeta'\right)^2\,ds. \tag{2.8}$$

Si $(\Phi_1, \Phi_2, t, V)$ est une solution des équations (2.1-2.4), alors $(\varphi, \chi, \tau, \zeta)$ est solution du système

$$\begin{cases} (1 + \varepsilon\alpha(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta))^{1/2}\frac{d}{dr}\varphi - \frac{1}{r}\varphi + 2m\chi + K_1(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta) = 0\\ (1 + \varepsilon\alpha(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta))^{1/2}\frac{d}{dr}\chi + \frac{1}{r}\chi + \varphi - m\varphi\tau + e\varphi\zeta + K_2(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta) = 0\\ (1 + \varepsilon\alpha(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta))\frac{d}{dr}\tau - \frac{\alpha(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau,\zeta)}{2r} + \frac{1}{2}K_3(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta) = 0\\ (1 + \varepsilon\alpha(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta))^{1/2}(1 + \varepsilon\tau)\frac{d}{dr}\zeta + \frac{8\pi e}{r^2}\int_0^r\varphi^2\,ds + K_4(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta) = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

où $K_1(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta)$, $K_2(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta)$, $K_3(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta)$ et $K_4(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta)$ sont définis par

$$K_1(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta) = -\varepsilon\chi - \varepsilon e\zeta\chi + \varepsilon(m - \varepsilon)\tau\chi - \varepsilon^2 e\zeta\tau\chi, \tag{2.10}$$

$$K_2(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta) = \varepsilon(\tau\varphi + e\varphi\zeta), \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} K_3(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta) &= -\varepsilon\frac{\alpha(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta)}{r}\tau + 16\pi(m - \varepsilon - \varepsilon e\zeta)(1 + \varepsilon\tau)^3\frac{(\varphi^2 + \varepsilon\chi^2)}{r}\\ &\quad - 32\pi\varepsilon(1 + \varepsilon\tau)^2\frac{\varphi\chi}{r^2} - 16\pi m(1 + \varepsilon\tau)^2\frac{(\varphi^2 - \varepsilon\chi^2)}{r}\\ &\quad - \varepsilon r(1 + \varepsilon\alpha)(1 + \varepsilon\tau)^3\left(\zeta'\right)^2, \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} K_4(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta) &= \frac{8\pi e}{r^2}\int_0^r\left(\varphi^2 + \varepsilon\chi^2\right)(1 + \varepsilon\tau)(1 + \varepsilon\alpha(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta))^{-1/2}\,ds\\ &\quad - \frac{8\pi e}{r^2}\int_0^r\varphi^2\,ds. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Nous rappelons que $\alpha$ dépend de $\varepsilon, \varphi, \chi, \tau$ et de $\zeta$ ; plus précisément, nous avons

$$\alpha(0, \varphi, \chi, \tau, \zeta) = -\frac{16\pi m}{r} \int_0^r \varphi^2 \, ds.$$

Pour $\varepsilon = 0$, le système (2.9) devient

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}\varphi - \frac{1}{r}\varphi + 2m\chi = 0 \\ \frac{d}{dr}\chi + \frac{1}{r}\chi + \varphi - m\varphi\tau + e\varphi\zeta = 0 \\ \frac{d}{dr}\tau + \frac{8\pi m}{r^2} \int_0^r \varphi^2 \, ds = 0 \\ \frac{d}{dr}\zeta + \frac{8\pi e}{r^2} \int_0^r \varphi^2 \, ds = 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

qui est équivalent au système

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dr^2}\varphi + 2m\varphi + 16\pi(e^2 - m^2)m \left( \int_0^\infty \frac{\varphi^2}{\max(r,s)} \, ds \right) \varphi = 0 \\ \chi(r) = \frac{1}{2m} \left( \frac{1}{r}\varphi - \frac{d}{dr}\varphi \right) \\ \tau(r) = 8\pi m \int_0^\infty \frac{\varphi^2}{\max(r,s)} \, ds \\ \zeta(r) = 8\pi e \int_0^\infty \frac{\varphi^2}{\max(r,s)} \, ds \end{cases} . \tag{2.15}$$

Nous remarquons que si $e^2 - m^2 < 0$, alors la première équation du système (2.15) est l'équation de Choquard

$$-\triangle u + 2mu - 4(m^2 - e^2)m \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(y)|^2}{|x-y|} \, dy \right) u = 0 \quad \text{dans } H^1(\mathbb{R}^3) \tag{2.16}$$

avec $u(x) = \frac{\varphi(|x|)}{|x|}$. Il est bien connu que l'équation de Choquard (2.16) a une unique solution radiale positive $u_0$ avec $\int |u_0|^2 = N$ pour $N > 0$ donné. De plus, $u_0$ est une fonction lisse et tend vers zéro à l'infini ; plus précisément il existe une constante positive $C_{\delta,\eta}$ telle que $|D^\eta(u_0)| \leq C_{\delta,\eta} \exp(-\delta|x|)$ pour $x \in \mathbb{R}^3$. Finalement, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ est une solution non dégénérée dans l'espace des fonctions radiales ; cela signifie que le noyau dans $L^2_r(\mathbb{R}^3)$ de la linéarisation de (2.16) en $u_0$ contient seulement la fonction identiquement nulle. Plus precisément, l'opérateur linéaire $\mathcal{L}$ défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\xi \quad = \quad & -\triangle\xi + 2m\xi - 4(m^2 - e^2)m \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u_0(y)|^2}{|x-y|} \, dy \right) \xi + \\ & -8(m^2 - e^2)m \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\xi(y)u_0(y)}{|x-y|} \, dy \right) u_0 \end{aligned}$$

satisfait $\ker \mathcal{L} = \{0\}$ lorsque l'on considère la restriction de $\mathcal{L}$ à $L^2_r(\mathbb{R}^3)$ (voir [Lie77], [Lio80], [Len08] pour plus de détails).

Soit donc $(\varphi_0, \chi_0, \tau_0, \zeta_0)$ une solution de (2.15) ; en particulier,

$$\begin{aligned}
\chi_0(r) &= -\frac{r}{2m}\frac{d}{dr}\left(\frac{\varphi_0}{r}\right), \\
\tau_0(r) &= 8\pi m \int_0^\infty \frac{\varphi_0^2}{\max(r,s)}\, ds, \\
\zeta_0(r) &= 8\pi m \int_0^\infty \frac{\varphi_0^2}{\max(r,s)}\, ds.
\end{aligned}$$

Pour obtenir une solution de (2.9) à partir de $(\varphi_0, \chi_0, \tau_0, \zeta_0)$, nous définissons les opérateurs

$$\begin{aligned}
L_1 &: \mathbb{R} \times X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau \times X_\zeta \to Y_\varphi \\
L_2 &: \mathbb{R} \times X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau \times X_\zeta \to Y_\chi \\
L_3 &: \mathbb{R} \times X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau \times X_\zeta \to Y_\tau \\
L_4 &: \mathbb{R} \times X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau \times X_\zeta \to Y_\zeta
\end{aligned}$$

et $D : \mathbb{R} \times X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau \times X_\zeta \to Y_\varphi \times Y_\chi \times Y_\tau \times Y_\zeta$ par

$$\begin{aligned}
L_1(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau,\zeta) =& (1+\varepsilon\alpha(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau,\zeta))^{1/2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\varphi - \frac{\varphi}{r^2} + 2m\frac{\chi}{r} + \frac{1}{r}K_1(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau,\zeta) \\
L_2(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau,\zeta) =& (1+\varepsilon\alpha(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau,\zeta))^{1/2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\chi + \frac{\chi}{r^2} + \frac{\varphi}{r} - m\frac{\varphi}{r}\tau + e\frac{\varphi}{r}\zeta + \\
& + \frac{1}{r}K_2(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau,\zeta) \\
L_3(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau,\zeta) =& (1+\varepsilon\alpha(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau,\zeta))\frac{d}{dr}\tau - \frac{\alpha(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau,\zeta)}{2r} + \frac{1}{2}K_3(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau,\zeta) \\
L_4(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau,\zeta) =& (1+\varepsilon\alpha(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau,\zeta))^{1/2}(1+\varepsilon\tau)\frac{d}{dr}\zeta + \frac{8\pi e}{r^2}\int_0^r \varphi^2\, ds + K_4(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau,\zeta)
\end{aligned}$$

et

$$D(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau,\zeta) = \begin{pmatrix} L_1(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau,\zeta) \\ L_2(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau,\zeta) \\ L_3(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau,\zeta) \\ L_4(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau,\zeta) \end{pmatrix}$$

avec

$$
\begin{aligned}
X_\varphi =& \left\{ \varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{\varphi(|x|)}{|x|} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in H^1\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right) \right\}, \\
X_\chi =& \left\{ \chi : (0,\infty) \to \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{\chi(|x|)}{|x|} \sigma^r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in H^1\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2\right) \right\}, \\
X_\tau =& \left\{ \tau : (0,\infty) \to \mathbb{R} \,\middle|\, \lim_{r\to\infty} \tau(r) = 0, \frac{d}{dr}\tau \in L^1((0,\infty), dr) \right\}, \\
X_\zeta =& \left\{ \zeta : (0,\infty) \to \mathbb{R} \,\middle|\, \lim_{r\to\infty} \zeta(r) = 0, \frac{d}{dr}\zeta \in L^1((0,\infty), dr) \cap L^2((0,\infty), rdr) \right\}, \\
Y_\varphi =& Y_\chi = L^2_r\left(\mathbb{R}^3\right), \\
Y_\tau =& L^1((0,\infty), dr), \\
Y_\zeta =& L^1((0,\infty), dr) \cap L^2((0,\infty), rdr).
\end{aligned}
$$

Les espaces $X_\varphi, X_\chi, X_\tau, X_\zeta, Y_\varphi, Y_\chi, Y_\tau$ et $X_\zeta$ sont munis des normes suivantes :

$$
\begin{aligned}
\|\varphi\|_{X_\varphi} &= \left\| \frac{\varphi(|x|)}{|x|} \right\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}, \\
\|\chi\|_{X_\chi} &= \left\| \frac{\chi(|x|)}{|x|} \sigma^r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}, \\
\|\tau\|_{X_\tau} &= \left\| \frac{d}{dr}\tau \right\|_{L^1((0,\infty),dr)}, \\
\|\zeta\|_{X_\zeta} &= \max\left( \left\| \frac{d}{dr}\zeta \right\|_{L^1((0,\infty),dr)}, \left\| \frac{d}{dr}\zeta \right\|_{L^2((0,\infty),rdr)} \right), \\
\|f\|_{Y_\zeta} &= \max\left( \|f\|_{L^1((0,\infty),dr)}, \|f\|_{L^2((0,\infty),rdr)} \right).
\end{aligned}
$$

Nous rappelons que

$$
\begin{aligned}
& H^1\left(\mathbb{R}^3\right) \hookrightarrow L^q\left(\mathbb{R}^3\right) \qquad 2 \le q \le 6 \\
& X_\tau \hookrightarrow L^\infty\left((0,\infty), dr\right), \\
& X_\zeta \hookrightarrow L^\infty\left((0,\infty), dr\right)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{gathered}
\rho \in H^1\left((0,\infty), dr\right) \hookrightarrow L^\infty\left((0,\infty), dr\right) \\
\tfrac{\rho}{r} \in L^2\left((0,\infty), dr\right)
\end{gathered}
\tag{2.17}
$$

$\forall \rho \in X_\varphi, \forall \rho \in X_\chi$.

Étant donné que la fonction $A$ doit être strictement positive, nous considérons $B_\varphi$, $B_\chi$, $B_\tau$, $B_\zeta$ les boules des espaces $X_\varphi, X_\chi, X_\tau, X_\zeta$, et deux nombres réels positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, dépendants de $m, e$ et des rayons de $B_\varphi, B_\chi, B_\tau, B_\zeta$, tels que

$$
1 + \varepsilon\alpha(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta) \ge \delta > 0
$$

quel que soit $(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta) \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \times B_\varphi \times B_\chi \times B_\tau \times B_\zeta$. L'existence de $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ est garantie du fait que $\varphi, \chi, \tau$ et $\zeta$ sont des fonctions bornées et $\zeta' \in L^2((0,\infty), rdr)$ ; en effet, $\alpha(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta)$ est bornée et donc il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tels que $A(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta) > 0$ pour tout $\varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

**Lemme 2.1.**

$$\begin{aligned}
&L_1, L_2 \in \mathcal{C}^1\left((-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \times B_\varphi \times B_\chi \times B_\tau \times B_\zeta, Y_\varphi\right), \\
&L_3 \in \mathcal{C}^1\left((-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \times B_\varphi \times B_\chi \times B_\tau \times B_\zeta, Y_\tau\right), \\
&L_4 \in \mathcal{C}^1\left((-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \times B_\varphi \times B_\chi \times B_\tau \times B_\zeta, Y_\zeta\right)
\end{aligned}$$

*Démonstration.* Nous commençons par $L_4$ ; premièrement, nous devons montrer que l'opérateur est bien défini dans $Y_\zeta = L^1((0,\infty), dr) \cap L^2((0,\infty), rdr)$. Nous remarquons que

$$|L_4(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau)| \le C_1 \left|\frac{d}{dr}\zeta\right| + \frac{C_2}{r^2}\int_0^r \left|\varphi^2 + \varepsilon\chi^2\right| ds$$

avec $C_1, C_2$ constantes positives et $\frac{d}{dr}\zeta \in L^1((0,\infty), dr) \cap L^2((0,\infty), rdr)$. Ensuite, nous savons déjà que $\frac{1}{r^2}\int_0^r |\varphi^2 + \varepsilon\chi^2|\, ds \in L^1((0,\infty), dr)$ (voir [RN10] et le lemme 2.2 du chapitre I) et nous voyons facilement que

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{r^2}\int_0^r \left|\varphi^2 + \varepsilon\chi^2\right| ds\right)^2 r\, dr \le C \int_0^\infty \frac{1}{r^2}\int_0^r \left|\varphi^2 + \varepsilon\chi^2\right| ds\, dr < +\infty.$$

Donc, nous pouvons conclure que $\frac{1}{r^2}\int_0^r |\varphi^2 + \varepsilon\chi^2|\, ds \in Y_\zeta$.

Deuxièmement, nous devons démontrer que $L_4(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ ; par des arguments classiques, il est suffisant de montrer que pour $(h_1, h_2, h_3, h_4) \in B_\varphi \times B_\chi \times B_\tau \times B_\zeta$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(L_4(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta)\right) h_1 \in Y_\zeta, \\
&\frac{\partial}{\partial\chi}\left(L_4(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta)\right) h_2 \in Y_\zeta, \\
&\frac{\partial}{\partial\tau}\left(L_4(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta)\right) h_3 \in Y_\zeta, \\
&\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(L_4(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta)\right) h_4 \in Y_\zeta.
\end{aligned}$$

Par définition,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L_4}{\partial \varphi} h_1 =& \frac{\varepsilon}{2}(1+\varepsilon\alpha)^{-1/2}(1+\varepsilon\tau)\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} h_1\right)\frac{d}{dr}\zeta + \frac{16\pi e}{r^2}\int_0^r \varphi h_1(1+\varepsilon\tau)(1+\varepsilon\alpha)^{-1/2}\,ds \\
&- \frac{4\pi e\varepsilon}{r^2}\int_0^r \left(\varphi^2+\varepsilon\chi^2\right)(1+\varepsilon\tau)(1+\varepsilon\alpha)^{-3/2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} h_1\right)ds, \\
\frac{\partial L_4}{\partial \chi} h_2 =& \frac{\varepsilon}{2}(1+\varepsilon\alpha)^{-1/2}(1+\varepsilon\tau)\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \chi} h_2\right)\frac{d}{dr}\zeta + \frac{16\pi e\varepsilon}{r^2}\int_0^r \chi h_2(1+\varepsilon\tau)(1+\varepsilon\alpha)^{-1/2}\,ds \\
&- \frac{4\pi e\varepsilon}{r^2}\int_0^r \left(\varphi^2+\varepsilon\chi^2\right)(1+\varepsilon\tau)(1+\varepsilon\alpha)^{-3/2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \chi} h_2\right)ds, \\
\frac{\partial L_4}{\partial \tau} h_3 =& \frac{\varepsilon}{2}(1+\varepsilon\alpha)^{-1/2}(1+\varepsilon\tau)\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \tau} h_3\right)\frac{d}{dr}\zeta + \varepsilon(1+\varepsilon\alpha)^{1/2} h_3\frac{d}{dr}\zeta \\
&+ \frac{8\pi e\varepsilon}{r^2}\int_0^r \left(\varphi^2+\varepsilon\chi^2\right) h_3(1+\varepsilon\alpha)^{-1/2}\,ds \\
&- \frac{4\pi e\varepsilon}{r^2}\int_0^r \left(\varphi^2+\varepsilon\chi^2\right)(1+\varepsilon\tau)(1+\varepsilon\alpha)^{-3/2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \tau} h_3\right)ds
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L_4}{\partial \zeta} h_4 =& \frac{\varepsilon}{2}(1+\varepsilon\alpha)^{-1/2}(1+\varepsilon\tau)\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \zeta} h_4\right)\frac{d}{dr}\zeta + (1+\varepsilon\alpha)^{1/2}(1+\varepsilon\tau)\frac{d}{dr}h_4 \\
&- \frac{4\pi e\varepsilon}{r^2}\int_0^r \left(\varphi^2+\varepsilon\chi^2\right)(1+\varepsilon\tau)(1+\varepsilon\alpha)^{-3/2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \zeta} h_4\right)ds.
\end{aligned}
$$

Premièrement, grâce à un simple calcul, nous remarquons que si $\varphi, h_1 \in B_\varphi$, $\chi, h_2 \in B_\chi$, $\tau, h_3 \in B_\tau$ et $\zeta, h_4 \in B_\zeta$, alors $\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}h_1$, $\frac{\partial \alpha}{\partial \chi}h_2$, $\frac{\partial \alpha}{\partial \tau}h_3$ et $\frac{\partial \alpha}{\partial \zeta}h_4$ sont bornées. Par conséquent, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial L_4}{\partial \varphi} h_1\right| &\leq C_1\left|\frac{d}{dr}\zeta\right| + \frac{C_2}{r^2}\int_0^r |\varphi h_1|\,ds + \frac{C_3}{r^2}\int_0^r \left|\varphi^2+\varepsilon\chi^2\right| ds \\
\left|\frac{\partial L_4}{\partial \chi} h_2\right| &\leq C_4\left|\frac{d}{dr}\zeta\right| + \frac{C_5}{r^2}\int_0^r |\chi h_2|\,ds + \frac{C_6}{r^2}\int_0^r \left|\varphi^2+\varepsilon\chi^2\right| ds \\
\left|\frac{\partial L_4}{\partial \tau} h_3\right| &\leq C_7\left|\frac{d}{dr}\zeta\right| + \frac{C_8}{r^2}\int_0^r \left|\varphi^2+\varepsilon\chi^2\right| ds \\
\left|\frac{\partial L_4}{\partial \zeta} h_4\right| &\leq C_9\left|\frac{d}{dr}\zeta\right| + C_{10}\left|\frac{d}{dr}h_4\right| + \frac{C_{11}}{r^2}\int_0^r \left|\varphi^2+\varepsilon\chi^2\right| ds
\end{aligned}
$$

avec $C_i$ des constantes positives. Ensuite, avec les mêmes arguments que ceux utilisés précédemment, nous pouvons déduire que $\frac{\partial L_4}{\partial \varphi}h_1$, $\frac{\partial L_4}{\partial \chi}h_2$, $\frac{\partial L_4}{\partial \tau}h_3$ et $\frac{\partial L_4}{\partial \zeta}h_4$ appartiennent à $Y_\zeta$, si $(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau\zeta) \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \times B_\varphi \times B_\chi \times B_\tau \times B_\zeta$ et $(h_1, h_2, h_3, h_4) \in B_\varphi \times B_\chi \times B_\tau \times B_\zeta$. De plus, $\frac{\partial L_4}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial L_4}{\partial \chi}$, $\frac{\partial L_4}{\partial \tau}$ et $\frac{\partial L_4}{\partial \zeta}$ sont des opérateurs continus ; cela conclut la démonstration pour $L_4$.

Nous considérons maintenant $L_3$ ; premièrement, nous devons montrer que l'opérateur est bien défini dans $Y_\tau = L^1((0,\infty), dr)$. Nous remarquons que

$$\begin{aligned} |L_3(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau)| &\leq C_1\left|\frac{d}{dr}\tau\right| + C_2\frac{|\alpha|}{r} + C_3\frac{|\varphi^2+\varepsilon\chi^2|}{r} + C_4\frac{|\varphi\chi|}{r^2} + C_5\frac{|\varphi^2-\varepsilon\chi^2|}{r} \\ &\quad + C_6 r\left|\frac{d}{dr}\zeta\right|^2 \end{aligned}$$

où les $C_i$ sont des constantes positives et, par définition, nous avons $\frac{d}{dr}\tau$, $r\left|\frac{d}{dr}\zeta\right|^2 \in L^1((0,\infty), dr)$. Ensuite, avec les mêmes arguments que ceux utilisés dans la démonstration du lemme 2.2 du chapitre I, nous déduisons que $\frac{(\varphi^2+\varepsilon\chi^2)}{r}$, $\frac{(\varphi^2-\varepsilon\chi^2)}{r}$, $\frac{\varphi\chi}{r^2} \in Y_\tau$. Finalement,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{|\alpha|}{r}\,dr &\leq C_1\int_0^\infty \frac{1}{r^2}\int_0^r \left|\varphi^2+\varepsilon\chi^2\right| ds\,dr + C_2\int_0^\infty \frac{1}{r^2}\int_0^r s^2\left|\frac{d}{ds}\zeta\right|^2 ds\,dr \\ &\leq \tilde{C}_1 + C_2\int_0^\infty s\left|\frac{d}{ds}\zeta\right|^2 ds < +\infty. \end{aligned}$$

Puis, nous devons prouver que $L_3(\varepsilon,\varphi,\chi,\tau,\zeta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ ; pour cela, il est suffisant de remarquer que pour tout $(h_1,h_2,h_3,h_4) \in B_\varphi \times B_\chi \times B_\tau \times B_\zeta$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{r}\left|\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi}h_1\right| dr &\leq C_1\int_0^\infty \frac{1}{r^2}\int_0^r |\varphi h_1|\,ds\,dr < +\infty, \\ \int_0^\infty \frac{1}{r}\left|\frac{\partial\alpha}{\partial\chi}h_2\right| dr &\leq C_2\int_0^\infty \frac{1}{r^2}\int_0^r |\chi h_2|\,ds\,dr < +\infty, \\ \int_0^\infty \frac{1}{r}\left|\frac{\partial\alpha}{\partial\tau}h_3\right| dr &\leq C_3\int_0^\infty \frac{|\alpha|}{r}\,dr + C_4\int_0^\infty \frac{1}{r^2}\int_0^r \left|\varphi^2+\varepsilon\chi^2\right| ds\,dr \\ &\quad + C_5\int_0^\infty \frac{1}{r^2}\int_0^r s^2\left|\frac{d}{ds}\zeta\right|^2 ds\,dr < +\infty, \\ \int_0^\infty \frac{1}{r}\left|\frac{\partial\alpha}{\partial\zeta}h_4\right| dr &\leq C_6\int_0^\infty \frac{|\alpha|}{r}\,dr + C_7\int_0^\infty \frac{1}{r^2}\int_0^r \left|\varphi^2+\varepsilon\chi^2\right| ds\,dr \\ &\quad + C_8\int_0^\infty \frac{1}{r^2}\int_0^r s^2\left|\frac{d}{ds}\zeta\frac{d}{ds}h_4\right| ds\,dr < +\infty \end{aligned}$$

et, pour les autres termes, utiliser les observations faites précédemment et dans la démonstration du lemme 2.2 du chapitre I. En conclusion,

$$\int_0^\infty \left|\frac{\partial L_3}{\partial \varphi} h_1\right| dr < +\infty$$
$$\int_0^\infty \left|\frac{\partial L_3}{\partial \chi} h_2\right| dr < +\infty$$
$$\int_0^\infty \left|\frac{\partial L_3}{\partial \tau} h_3\right| dr < +\infty$$
$$\int_0^\infty \left|\frac{\partial L_3}{\partial \zeta} h_4\right| dr < +\infty$$

si $(\varepsilon, \varphi, \chi, \tau, \zeta) \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \times B_\varphi \times B_\chi \times B_\tau \times B_\zeta$ et $(h_1, h_2, h_3, h_4) \in B_\varphi \times B_\chi \times B_\tau \times B_\zeta$. De plus, $\frac{\partial L_3}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial L_3}{\partial \chi}$, $\frac{\partial L_3}{\partial \tau}$ et $\frac{\partial L_3}{\partial \zeta}$ sont des opérateurs continus ; cela conclut la démonstration pour $L_3$.

Finalement, pour $L_1$ et $L_2$, nous pouvons facilement généraliser la preuve du lemme 2.2 du chapitre I en utilisant le fait que les fonctions dans l'espace $X_\zeta$ sont des fonctions bornées.

□

## 2.2. Branches générées par la solution de l'équation de Choquard

Dans cette sous-section, nous montrons que une solution $\phi_0 = (\varphi_0, \chi_0, \tau_0, \zeta_0)$ de (2.15) génère une branche locale de solutions de (2.9).

Premièrement, nous linéarisons l'opérateur $D$ par rapport à $(\varphi, \chi, \tau, \zeta)$ en $(0, \phi_0)$ et nous obtenons

$$D_{\varphi,\chi,\tau,\zeta}(0, \phi_0)(h, k, l, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}h - \frac{h}{r^2} + 2m\frac{k}{r} \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}k + \frac{k}{r^2} + \frac{h}{r} - m\frac{h}{r}\tau_0 - m\frac{\varphi_0}{r}l + e\frac{h}{r}\zeta_0 + e\frac{\varphi_0}{r}z \\ \frac{d}{dr}l + \frac{16\pi m}{r^2}\int_0^r \varphi_0 h\, ds \\ \frac{d}{dr}z + \frac{16\pi e}{r^2}\int_0^r \varphi_0 h\, ds \end{pmatrix}.$$

Si nous montrons que $D_{\varphi,\chi,\tau,\zeta}(0, \phi_0)$ est un isomorphisme, alors nous pouvons appliquer le théorème des fonctions implicites et trouver des solutions de (2.9) proches de $\phi_0$.

**Lemme 2.2.** *Nous définissons l'opérateur* $W : X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau \times X_\zeta \to Y_\varphi \times Y_\chi \times Y_\tau \times Y_\zeta$ *par*

$$W(h, k, l, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}h - \frac{h}{r^2} + 2m\frac{k}{r} \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}k + \frac{k}{r^2} + \frac{h}{r} - m\frac{\varphi_0}{r}l + e\frac{\varphi_0}{r}z \\ \frac{d}{dr}l \\ \frac{d}{dr}z \end{pmatrix},$$

*$W$ est un isomorphisme de $X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau \times X_\zeta$ dans $Y_\varphi \times Y_\chi \times Y_\tau \times X_\zeta$.*

*Démonstration.* Ce lemme est évident si nous pensons à la démonstration du lemme 2.4 du chapitre I. Il est suffisant d'observer que l'opérateur $\frac{d}{dr}$ est un isomorphisme de $X_\zeta$ dans $Y_\zeta$ et que $\frac{\varphi_0}{r} z \in Y_\varphi$ quel que soit $z \in X_\zeta$.

□

Finalement, nous observons que $D_{\varphi,\chi,\tau,\zeta}(0,\phi_0)(h,k,l,z)$ peut être écrit sous la forme

$$D_{\varphi,\chi,\tau,\zeta}(0,\phi_0)(h,k,l,z) = W(h,k,l,z) + S(h) \tag{2.18}$$

avec

$$S(h) = \begin{pmatrix} 0 \\ -m\frac{h}{r}\tau_0 + e\frac{h}{r}\zeta_0 \\ \frac{16\pi m}{r^2}\int_0^r \varphi_0 h\, ds \\ \frac{16\pi e}{r^2}\int_0^r \varphi_0 h\, ds \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

**Théorème 2.3.** *Soit $e^2 - m^2 < 0$ et $\phi_0$ une solution de (2.15), alors il existe $\delta > 0$ et une fonction $\eta \in \mathcal{C}((0,\delta), X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau \times X_\zeta)$ telles que $\eta(0) = \phi_0$ et $D(\varepsilon, \eta(\varepsilon)) = 0$ pour $0 \le \varepsilon < \delta$.*

*Démonstration.* Puisque $D(0,\phi_0) = 0$ et $D$ est de classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage de $(0,\phi_0)$, pour appliquer le théorème des fonctions implicites il reste à montrer que $D_{\varphi,\chi,\tau,\zeta}(0,\phi_0)$ est un isomorphisme de $X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau \times X_\zeta$ dans $Y_\varphi \times Y_\chi \times Y_\tau \times Y_\zeta$.

Nous observons que $D_{\varphi,\chi,\tau}(0,\phi_0)(h,k,l,z) = 0$ si et seulement si $(h,k,l,z)$ est solution du système

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}h - \frac{h}{r} + 2mk = 0 \\ \frac{d}{dr}k + \frac{k}{r} + h - mh\tau_0 - m\varphi_0 l + eh\zeta_0 + e\varphi_0 z = 0 \\ \frac{d}{dr}l + \frac{16\pi m}{r^2}\int_0^r \varphi_0 h\, ds = 0 \\ \frac{d}{dr}z + \frac{16\pi e}{r^2}\int_0^r \varphi_0 h\, ds = 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

qui est équivalent à

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2m}\left(\frac{h}{r} - \frac{d}{dr}h\right), \\ l &= 16\pi m \int_0^\infty \frac{\varphi_0 h}{\max(r,s)}\, ds, \\ z &= 16\pi e \int_0^\infty \frac{\varphi_0 h}{\max(r,s)}\, ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -\frac{d^2}{dr^2}h + 2mh - 16\pi(m^2 - e^2)m\left(\int_0^\infty \frac{\varphi_0^2}{\max(r,s)}\, ds\right) h & \\ -32\pi(m^2 - e^2)m\left(\int_0^\infty \frac{\varphi_0 h}{\max(r,s)}\, ds\right)\varphi_0 = 0. & \end{aligned} \tag{2.21}$$

Or, si nous posons $\xi(x) = \frac{h(|x|)}{|x|}$ et nous nous rappelons que $\varphi_0(|x|) = |x|u_0(x)$ avec $u_0$ solution de (2.16), alors $h$ est une solution de (2.21) si et seulement si $\xi(x)$ est solution de

$$-\triangle\xi + 2m\xi - 4(m^2 - e^2)m \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u_0(y)|^2}{|x-y|}\, dy \right) \xi \\ -8(m^2 - e^2)m \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\xi(y) u_0(y)}{|x-y|}\, dy \right) u_0 = 0. \tag{2.22}$$

Il est bien connu que si $e^2 - m^2 < 0$, alors l'unique solution de (2.22) dans $H^1_r(\mathbb{R}^3)$ est $\xi \equiv 0$ (voir [Len08] pour plus de details) et cela implique $h \equiv 0$. Donc l'unique solution du système (2.20) est $h \equiv k \equiv l \equiv z \equiv 0$ et $D_{\varphi,\chi,\tau,\zeta}(0, \phi_0)$ est une injection dans $X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau \times X_\zeta$.

Enfin, si nous montrons que $S(h)$ est un opérateur compact, alors $D_{\varphi,\chi,\tau,\zeta}(0, \phi_0)$ est un opérateur injectif qui s'écrit comme la somme d'un isomorphisme et d'un opérateur compact et donc nous pouvons conclure que $D_{\varphi,\chi,\tau,\zeta}(0, \phi_0)$ est un isomorphisme.

Premièrement, nous savons que $T(h) = \frac{1}{r^2}\left(\int_0^r \varphi_0 h\, ds\right)$ est un opérateur compact de $X_\varphi$ dans $Y_\tau$ et, de la même façon, nous pouvons facilement montrer que $T(h)$ est un opérateur compact de $X_\varphi$ dans $Y_\zeta$.

Deuxièmement, comme $\zeta_0$ a les mêmes propriétés que $\tau_0$, les opérateurs $\frac{h}{r}\tau_0$, $\frac{h}{r}\zeta_0$ de $X_\varphi$ dans $L^2_r(\mathbb{R}^3)$ sont des opérateurs compacts (voir la preuve du théorème 2.5 du chapitre I).

Finalement, $S(h)$ est un opérateur compact de $X_\varphi$ dans $Y_\varphi \times Y_\chi \times Y_\tau \times Y_\zeta$ et $D_{\varphi,\chi,\tau,\zeta}(0, \phi_0)$ est un isomorphisme de $X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau \times X_\zeta$ dans $Y_\varphi \times Y_\chi \times Y_\tau \times Y_\zeta$.

Donc, grâce à l'application du théorème des fonctions implicites, nous pouvons conclure qu'il existe $\delta > 0$ et une fonction $\eta \in \mathcal{C}((0, \delta), X_\varphi \times X_\chi \times X_\tau \times X_\zeta)$ telles que $\eta(0) = \phi_0$ et $D(\varepsilon, \eta(\varepsilon)) = 0$ pour $0 \leq \varepsilon < \delta$.

□

# Bibliographie


[FSY99a] Finster, F., Smoller, J., Yau, S.T. Particle-like solutions of the Einstein–Dirac–Maxwell equations. *Phys. Lett. A*, 259(6), 431–436, 1999.

[FSY99b] Finster, F., Smoller, J., Yau, S.T. Particlelike solutions of the Einstein-Dirac equations. *Phys. Rev. D*, 59, 1999.

[Len08] Lenzmann, E. Uniqueness of ground states for pseudo-relativistic Hartree equations, 2008. Preprint.

[Lie77] Lieb, E.H. Existence and Uniqueness of the Minimizing Solution of Choquard's Nonlinear Equation. *Stud. Appl. Math.*, 57, 93–105, 1977.

[Lio80] Lions, P.L. The Choquard equation and related questions. *Nonlinear Anal.*, 4(6), 1063–1073, 1980.

[Oun00] Ounaies, H. Perturbation method for a class of non linear Dirac equations. *Differential Integral Equations*, 13(4-6), 707–720, 2000.

[RN10] Rota Nodari, S. Perturbation method for particle-like solutions of the Einstein–Dirac equations. *Ann. Henri Poincaré*, 10(7), 1377–1393, 2010.

# Partie B

# La théorie de champ moyen relativiste

# Chapitre III

# The relativistic mean-field equations of the atomic nucleus

Ce chapitre reprend le texte intégral d'un article soumis à *Communication in Mathematical Physics.*

**Résumé.** En physique nucléaire, la théorie de champ moyen relativiste décrit le noyau comme un système de particules de Dirac qui interagissent via des champs de mésons. Dans le cas statique et en l'absence d'un auto-couplage non linéaire du méson $\sigma$, les équations de champ moyen relativiste s'écrivent sous la forme d'un système d'équations de Dirac non linéaires où le potentiel est donné par les champs de mésons et de photons. L'objectif de ce travail est de prouver l'existence de solutions de ces équations. Nous considérons un problème de minimisation avec des contraintes qui incluent les projecteurs spectraux négatifs et nous appliquons le lemme de concentration-compacité pour trouver un minimiseur de ce problème. Nous montrons que ce minimiseur est une solution des équations de champ moyen relativiste considérées.

# The relativistic mean-field equations of the atomic nucleus

Simona Rota Nodari

**Abstract**

In nuclear physics, the relativistic mean-field theory describes the nucleus as a system of Dirac nucleons which interact via meson fields. In a static case and without nonlinear self-coupling of the $\sigma$ meson, the relativistic mean-field equations become a system of Dirac equations where the potential is given by the meson and photon fields. The aim of this work is to prove the existence of solutions of these equations. We consider a minimization problem with constraints that involve negative spectral projectors and we apply the concentration-compactness lemma to find a minimizer of this problem. We show that this minimizer is a solution of the relativistic mean-field equations considered.

## 1. Introduction

In this paper, we present the first mathematically rigorous result concerning the existence of solutions of the relativistic mean-field equations of the atomic nucleus in a static case and without nonlinear self-coupling of the $\sigma$ meson.

In nuclear physics, the relativistic mean-field RMF theory describes the nucleus as a system of Dirac nucleons which interact in a relativistic covariant manner via meson fields. During the last years, the relativistic mean-field theory has received wide attention due to its successful description of lots of nuclear phenomena. The relativistic mean-field model is considered to be the relativistic generalization of the nonrelativistic models such as the Skyrme force or the Gogny force Hartree-Fock theory, using effective mesonic degrees of freedom rather than instantaneous forces. The relativistic model describes successfully the single-particle structure of nuclei as the nonrelativistic ones and provides a natural explanation of some relativistic effects as the spin-orbit force (see [Rei89],[GM96],[Rin96],[MTZ+06]).

The model is formulated on the basis of two approximations, the mean-field and the no-sea approximation. Thanks to the mean-field approximation, the fields for the mesons and the photons are treated as classical fields and the nucleons behave as noninteracting particles moving in these mean fields. This implies that the nucleon field operator can be expanded in single-particle states $\psi_\alpha(x^\mu)$,

$$\psi = \sum_\alpha \psi_\alpha(x^\mu)\,\hat{a}_\alpha \tag{1.1}$$

where $\hat{a}_\alpha$ is the annihilation operator for a nucleon in the state $\alpha$, while the densities become simple bilinear sums over the $\psi_\alpha$. The no-sea approximation corresponds to neglecting the vacuum polarization, that means that we have a number of occupied single-particle orbitals $\psi_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, \Omega$, which determines the densities. We remind that when the isospin[1] of the particles is not fixed, $\psi_\alpha(x^\mu) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^4$. Moreover, the single-particle wave functions have to satisfy the constraint $\int_{\mathbb{R}^3} \psi_\alpha^*(t,x)\psi_\beta(t,x)\, d^3x = \delta_{\alpha\beta}$.

The Lagrangian density of the RMF theory can be written as

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{nucleons} + \mathcal{L}_{mesons} + \mathcal{L}_{coupling}. \tag{1.2}$$

The free Lagrangian for the nucleons is

$$\mathcal{L}_{nucleons} = \sum_{\alpha=1}^{\Omega} w_\alpha \bar{\psi}_\alpha (i\,(\mathbb{1}_2 \otimes \gamma^\mu)\,\partial_\mu - m_b)\psi_\alpha \tag{1.3}$$

where $m_b$ denotes the nucleon mass, $\gamma^\mu$ are the Dirac matrices, $w_\alpha$ are occupation weights, $0 \leq w_\alpha \leq 1$, and $\bar{\psi}_\alpha = \psi_\alpha^*\,(\mathbb{1}_2 \otimes \gamma^0)$ with $\mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

The Lagrangian for the free meson fields is

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mesons} &= \frac{1}{2}(\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma - m_\sigma^2\sigma^2) \\ &\quad -\frac{1}{2}(\overline{\partial^\mu\omega^\nu}\partial_\mu\omega_\nu - m_\omega^2\omega^\mu\omega_\mu) \\ &\quad -\frac{1}{2}(\overline{\partial^\mu\boldsymbol{R}^\nu}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{R}_\nu - m_\rho^2\boldsymbol{R}^\mu\cdot\boldsymbol{R}_\mu) \\ &\quad -\frac{1}{2}\overline{\partial^\mu A^\nu}\partial_\mu A_\nu \end{aligned} \tag{1.4}$$

where $\sigma$, $\omega^\mu$ and $\boldsymbol{R}^\mu$ describe respectively the $\sigma$, $\omega$ and $\rho$ meson field, and $A^\mu$ stands for the photon field. Moreover, an antisymmetrized derivative is defined via

$$\overline{\partial^\mu A^\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

We remind that the $\sigma$ meson is an isoscalar scalar meson which provides a medium range attractive interaction, the $\omega$ meson is an isoscalar vector meson leading to a short range repulsive interaction, the $\rho$ meson is an isovector vector meson needed for a better description of isospin-dependent effects in the nuclei, and the photon describes the electromagnetic interaction.

Finally, the Lagrangian for the coupling is

$$\mathcal{L}_{coupling} = -g_\sigma\sigma\rho_s - g_\omega\omega^\mu\rho_\mu - g_\rho\boldsymbol{R}^\mu\cdot\boldsymbol{\rho}_\mu - eA^\mu\rho_\mu^c - U(\sigma) \tag{1.5}$$

[1]Isospin (contraction of isotopic spin) is a quantum number related to the strong interaction. Isospin was introduced by Heisenberg in 1932; he observed that the neutron is almost identical to the proton, apart from the fact that it carries no charge. In particular, their masses are close and they are indistinguishable under the strong interactions. So, the proton and the neutron appear to be two states of the same particle, the nucleon, associated with different isospin projections ([Gri87],[GM96]).

where $U(\sigma) = \frac{1}{3}b_2\sigma^3 + \frac{1}{4}b_3\sigma^4$ represents a nonlinear self-coupling of the $\sigma$ meson. Note that in Reinhard's paper [Rei89] the coupling constant for the $\rho$ meson is $2g_\rho$.
The densities are

$$\rho_s = \sum_{\alpha=1}^{\Omega} w_\alpha \bar{\psi}_\alpha \psi_\alpha, \tag{1.6}$$

$$\rho_\mu = \sum_{\alpha=1}^{\Omega} w_\alpha \bar{\psi}_\alpha \left(\mathbb{1}_2 \otimes \gamma_\mu\right) \psi_\alpha, \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{\rho}_\mu = \sum_{\alpha=1}^{\Omega} w_\alpha \bar{\psi}_\alpha \left(\hat{\boldsymbol{\tau}} \otimes \gamma_\mu\right) \psi_\alpha, \tag{1.8}$$

$$\rho_\mu^c = \sum_{\alpha=1}^{\Omega} w_\alpha \bar{\psi}_\alpha \left(\frac{1}{2}(\mathbb{1}_2 + \hat{\tau}_0) \otimes \gamma_\mu\right) \psi_\alpha. \tag{1.9}$$

We remind that $\boldsymbol{R}$ and $\boldsymbol{\rho}$ are vectors in isospin space and $\cdot$ denotes the vector product therein, and $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ is the vector of the Pauli matrices which occurs in the definition of the isospin operator. More precisely, the three components of the isospin operator are defined by $\hat{\boldsymbol{t}} = \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\tau}}$ and, in particular, the third component is given by

$$\hat{t}_0 = \frac{1}{2}\hat{\tau}_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

the proton state, represented by the vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, is the eigenstate of $\hat{\tau}_0$ associated with the eigenvalue $\tau_0 = 1$ and the neutron state, represented by the vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, is the eigenstate of $\hat{\tau}_0$ associated with the eigenvalue $\tau_0 = -1$.

The model contains as free parameters the meson masses $m_\sigma$, $m_\omega$ and $m_\rho$, as well as the coupling constants $g_\sigma$, $g_\omega$, $g_\rho$, $b_2$ and $b_3$. For the nucleon mass $m_b$ the free value is usually employed.

Most applications of the relativistic mean-field model are concerned with stationary states; then, like in [Rei89], we want to derive the field equations for the static case. Moreover, we remark that it is generally true that proton and neutron states do not mix, that means that the single-particle states are eingenstates of the operator $\hat{\tau}_0$. As a consequence, only the components with isospin projection 0 appear, i.e. $R_{0\mu}$ and $\rho_{0\mu}$.
Stationarity implies that all time derivatives and also the spatial components of densities and fields vanish; only the fields $\sigma$, $\omega_0$, $R_{00}$ and $A_0$ remain and they are independent of time. Furthermore, the single-particle wave functions can be written as $\psi_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \psi_\alpha$ for protons, and $\psi_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \psi_\alpha$ for neutrons. Each function $\psi_\alpha$ may be separated as

$$\psi_\alpha(t, x) = e^{-i\varepsilon_\alpha t}\psi_\alpha(x) \tag{1.10}$$

where the $\varepsilon_\alpha$ are the single-particle energies and $\varepsilon_\alpha > 0$.

Varying the action integral $S = \int \mathcal{L}\, d^4x$ with respect to the wave functions and to the fields with all the above simplifications inserted yields

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha \gamma_0 \psi_\alpha &= \Big[-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m_b + g_\sigma \sigma + g_\omega \omega_0 \gamma_0 \\ &\qquad + g_\rho R_{00}\gamma_0 \tau_0 + \frac{1}{2} e A_0 \gamma_0 (1+\tau_0)\Big] \psi_\alpha, &(1.11)\\ (-\Delta + m_\sigma^2)\sigma + U'(\sigma) &= -g_\sigma \rho_s, &(1.12)\\ (-\Delta + m_\omega^2)\omega_0 &= g_\omega \rho_0, &(1.13)\\ (-\Delta + m_\rho^2) R_{00} &= g_\rho \rho_{00}, &(1.14)\\ -\Delta A_0 &= e\rho_0^c, &(1.15)\end{aligned}$$

with $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$. This set of equations, together with the definition of the densities, constitutes a self-consistent field problem that can be solved numerically using an iterative scheme (see [Rei89], [BSM89]).

In this paper, we consider the case without nonlinear self-coupling of the $\sigma$ meson, i.e. $b_2 = b_3 = 0$, and we choose a fixed occupation, that means that the occupation weights $w_\alpha$ are defined as

$$w_\alpha = \begin{cases} 1 & \alpha = 1, \ldots, A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1.16}$$

where $A$ is the nucleon number.
In this case, the equations (1.12-1.15) can be solved explicitly and we obtain

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{g_\sigma}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\sigma|\cdot|}}{|\cdot|} \star \rho_s\right), &(1.17)\\ \omega_0 &= \frac{g_\omega}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\omega|\cdot|}}{|\cdot|} \star \rho_0\right), &(1.18)\\ R_{00} &= \frac{g_\rho}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\rho|\cdot|}}{|\cdot|} \star \rho_{00}\right), &(1.19)\\ A_0 &= \frac{e}{4\pi}\left(\frac{1}{|\cdot|} \star \rho_0^c\right). &(1.20)\end{aligned}$$

Hence, the equation (1.11) becomes

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha \psi_\alpha = &\left[H_0 - \beta \frac{g_\sigma^2}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\sigma|\cdot|}}{|\cdot|} \star \rho_s\right) + \frac{g_\omega^2}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\omega|\cdot|}}{|\cdot|} \star \rho_0\right)\right. &(1.21)\\ &\left. + \tau_0 \frac{g_\rho^2}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\rho|\cdot|}}{|\cdot|} \star \rho_{00}\right) + \frac{1}{2}(1+\tau_0)\frac{e^2}{4\pi}\left(\frac{1}{|\cdot|} \star \rho_0^c\right)\right] \psi_\alpha \end{aligned}$$

where $H_0 = -i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta m_b$ is the free Dirac operator,

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

for $k = 1, 2, 3$, with

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

The operator $H_0$ acts on 4-spinors, i.e. functions $\psi \in \mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$. It is self-adjoint on $\mathcal{H}$, with domain $H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ and form-domain $E := H^{1/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$. Moreover, it is defined to ensure

$$H_0^2 = -\Delta + m_b^2.$$

The spectrum of $H_0$ is $(-\infty, -m_b] \cup [m_b, +\infty)$, and the projector associated with the negative (resp. positive) part of the spectrum of $H_0$ will be denoted by $\Lambda^-$ (resp. $\Lambda^+$). Finally, we endow the space $E$ with the norm $\|\psi\|_E^2 := (\psi, |H_0|\,\psi)_{L^2}$.

Using the convention $\tau_0 = 1$ for the protons and $\tau_0 = -1$ for the neutrons, the densities can be written as

$$\rho_s = \sum_{k=1}^{A} \bar{\psi}_k \psi_k, \tag{1.22}$$

$$\rho_0 = \sum_{k=1}^{A} \psi_k^* \psi_k, \tag{1.23}$$

$$\rho_{00} = \sum_{k=1}^{Z} \psi_k^* \psi_k - \sum_{k=Z+1}^{A} \psi_k^* \psi_k, \tag{1.24}$$

$$\rho_0^c = \sum_{k=1}^{Z} \psi_k^* \psi_k \tag{1.25}$$

with $Z$ the number of protons, $N = A - Z$ the number of neutrons and $\bar{\psi}_i = \psi_i^* \beta$; furthermore, the nonlinear Dirac equations are given by

$$\begin{aligned} H_{p,\Psi}\psi_i := & \left[ H_0 - \beta \frac{g_\sigma^2}{4\pi} \left( \frac{e^{-m_\sigma|\cdot|}}{|\cdot|} \star \rho_s \right) + \frac{g_\omega^2}{4\pi} \left( \frac{e^{-m_\omega|\cdot|}}{|\cdot|} \star \rho_0 \right) \right. \\ & \left. + \frac{g_\rho^2}{4\pi} \left( \frac{e^{-m_\rho|\cdot|}}{|\cdot|} \star \rho_{00} \right) + \frac{e^2}{4\pi} \left( \frac{1}{|\cdot|} \star \rho_0^c \right) \right] \psi_i = \varepsilon_i \psi_i \end{aligned} \tag{1.26}$$

if $1 \leq i \leq Z$, and

$$\begin{aligned} H_{n,\Psi}\psi_i := & \left[ H_0 - \beta \frac{g_\sigma^2}{4\pi} \left( \frac{e^{-m_\sigma|\cdot|}}{|\cdot|} \star \rho_s \right) + \frac{g_\omega^2}{4\pi} \left( \frac{e^{-m_\omega|\cdot|}}{|\cdot|} \star \rho_0 \right) \right. \\ & \left. - \frac{g_\rho^2}{4\pi} \left( \frac{e^{-m_\rho|\cdot|}}{|\cdot|} \star \rho_{00} \right) \right] \psi_i = \varepsilon_i \psi_i \end{aligned} \tag{1.27}$$

if $Z+1 \leq i \leq A$, with $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_Z, \psi_{Z+1}, \ldots, \psi_A)$ and under the constraints $\int_{\mathbb{R}^3} \psi_i^* \psi_j = \delta_{ij}$ for $1 \leq i, j \leq Z$ and for $Z + 1 \leq i, j \leq A$.

In what follows, $V_{p,\Psi}$ and $V_{n,\Psi}$ denote the potentials of the nonlinear Dirac equations, namely $V_{\mu,\Psi} = H_{\mu,\Psi} - H_0$ for $\mu = p, n$.

Note that the scalars $\varepsilon_i$ can be seen as Lagrange multipliers; indeed, the nonlinear Dirac equations are the Euler-Lagrange equations of the energy functional

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\Psi) \quad = \quad & \sum_{j=1}^{A} \int_{\mathbb{R}^3} \psi_j^* H_0 \psi_j - \frac{g_\sigma^2}{8\pi} \int\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{\rho_s(x)\rho_s(y)}{|x-y|} e^{-m_\sigma|x-y|}\, dxdy \qquad (1.28)\\ & + \frac{g_\omega^2}{8\pi} \int\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{\rho_0(x)\rho_0(y)}{|x-y|} e^{-m_\omega|x-y|}\, dxdy \\ & + \frac{g_\rho^2}{8\pi} \int\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{\rho_{00}(x)\rho_{00}(y)}{|x-y|} e^{-m_\rho|x-y|}\, dxdy \\ & + \frac{e^2}{8\pi} \int\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{\rho_0^c(x)\rho_0^c(y)}{|x-y|}\, dxdy\end{aligned}$$

under the constraints $\int_{\mathbb{R}^3} \psi_i^* \psi_j = \delta_{ij}$ for $1 \leq i,j \leq Z$ and for $Z+1 \leq i,j \leq A$. Here we can suppose that the matrix of Lagrange multipliers is diagonal because of the fact that $\mathcal{E}(\Psi)$ is invariant under the transformations of $(\psi_1, \ldots, \psi_A)$ of the form

$$U = \begin{pmatrix} U_p & 0 \\ 0 & U_n \end{pmatrix}$$

where $U_p$ (resp. $U_n$) is a $Z \times Z$ (resp. $N \times N$) unitary matrix. In the energy functional, we remark that only the $\sigma$ meson provides an attractive interaction. Indeed, if $f$ is a real function,

$$\int\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{f(x)f(y)}{|x-y|} e^{-\lambda|x-y|}\, dxdy = C \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{f}(k)|^2 \frac{1}{k^2+\lambda^2}\, dk$$

with $C$ a positive constant and $\hat{f}$ the Fourier transform of $f$. As a consequence, the term

$$-\frac{g_\sigma^2}{8\pi} \int\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{\rho_s(x)\rho_s(y)}{|x-y|} e^{-m_\sigma|x-y|}\, dxdy$$

is negative and describes an attractive interaction.

Since the functional (1.28) is not bounded from below under the constraints $\int_{\mathbb{R}^3} \psi_i^* \psi_j = \delta_{ij}$, as in [ES01] (see also [ELS08]), we introduce the following minimization problem

$$\begin{aligned} I \quad = \quad \inf \Big\{ & \mathcal{E}(\Psi); \Psi \in (H^{1/2})^A, \int_{\mathbb{R}^3} \psi_i^* \psi_j = \delta_{ij}, 1 \leq i,j \leq Z, Z+1 \leq i,j \leq A, \\ & \Lambda_{p,\Psi}^-(\psi_1, \ldots, \psi_Z) = 0,\ \Lambda_{n,\Psi}^-(\psi_{Z+1}, \ldots, \psi_A) = 0 \Big\} \end{aligned} \qquad (1.29)$$

together with its extension

$$\begin{aligned} I(\lambda_1, \ldots, \lambda_A) \quad = \quad \inf \Big\{ & \mathcal{E}(\Psi); \Psi \in (H^{1/2})^A, \int_{\mathbb{R}^3} \psi_i^* \psi_j = \lambda_i \delta_{ij}, 1 \leq i,j \leq Z, \\ & Z+1 \leq i,j \leq A,\ \Lambda_{p,\Psi}^-(\psi_1, \ldots, \psi_Z) = 0, \\ & \Lambda_{n,\Psi}^-(\psi_{Z+1}, \ldots, \psi_A) = 0 \Big\} \end{aligned} \qquad (1.30)$$

where, for $\mu = p, n$, $\Lambda^-_{\mu,\Psi} = \chi_{(-\infty,0)}(H_{\mu,\Psi})$ is the negative spectral projector of the operator $H_{\mu,\Psi}$,

$$\Lambda^-_{p,\Psi}(\psi_1, \ldots, \psi_Z) = (\Lambda^-_{p,\Psi}\psi_1, \ldots, \Lambda^-_{p,\Psi}\psi_Z) = \Lambda^-_{p,\Psi}\Psi_p$$

and

$$\Lambda^-_{n,\Psi}(\psi_{Z+1}, \ldots, \psi_A) = (\Lambda^-_{n,\Psi}\psi_{Z+1}, \ldots, \Lambda^-_{n,\Psi}\psi_A) = \Lambda^-_{n,\Psi}\Psi_n.$$

The idea of using a constraint of the form $\Lambda^-_{\mu,\Psi}\Psi_\mu = 0$, for $\mu = p, n$, is due to M.J. Esteban and E. Séré in the case of the Dirac-Fock equations (voir [ES01]). This constraint has a physical meaning; more precisely, if we neglect the vacuum polarization, the Dirac sea is represented by the negative spectral projector $\Lambda^-_{\mu,\Psi}$. According to the interpretation of the negative part of the spectrum and to the Pauli exclusion principle, the single-particle energies $\varepsilon_i$ should be strictly positive and, as a consequence, $\Psi_\mu$ should be in the positive spectral subspace of $H_{\mu,\Psi}$ for $\mu = p, n$. On the one hand, the use of the constraint $\Lambda^-_{\mu,\Psi}\Psi_\mu = 0$ is very helpful since it transforms a strongly indefinite problem into a minimization problem; on the other hand, dealing with this constraint is the main difficulty of the proof of our results.

In this paper, we prove that, for $g_\sigma, g_\omega, g_\rho$ and $e$ sufficiently small, a solution of the equations (1.26) and (1.27) can be obtained as a solution of the minimization problem (1.29).

**Theorem 1.1.** *If $g_\sigma, g_\omega, g_\rho$ and $e$ are sufficiently small, a minimizer of (1.29) is a solution of the equations (1.26) and (1.27).*

Moreover, the application of the concentration-compactness method ([Lio84a], [Lio84b]) to the minimization problem (1.29) yields the following theorem which is our main result.

**Theorem 1.2.** *If $g_\sigma, g_\omega, g_\rho$ and $e$ are sufficiently small, any minimizing sequence of (1.29) is relatively compact up to a translation if and only if the following condition holds*

$$I < I(\lambda_1, \ldots, \lambda_A) + I(1 - \lambda_1, \ldots, 1 - \lambda_A) \tag{1.31}$$

*for all $\lambda_k \in [0, 1]$, $k = 1, \ldots, A$, such that $\sum_{k=1}^{A} \lambda_k \in (0, A)$.*
*In particular, if (1.31) holds, there exists a minimum of (1.29).*

This result is relevant both from mathematical and physical point of view since it provides a condition that ensures the existence of a ground state solution of the equations (1.26) and (1.27). Furthermore, this is the first result relating the existence of critical points of a strongly indefinite energy functional to strict concentration-compactness inequalities.

The condition $g_\sigma, g_\omega, g_\rho$ and $e$ sufficiently small means that we are in a weakly relativistic regime. In our proof of theorems 1.1 and 1.2, this condition is required for several reasons. First of all, if $g_\sigma, g_\omega, g_\rho$ and $e$ are sufficiently small, we can show that $H_{\mu,\Psi}$ is a self-adjoint isomorphism between $H^{1/2}$ and its dual $H^{-1/2}$, whose inverse is bounded independently of $\Psi$. Moreover, we need this condition to prove that a minimizing sequence of (1.29) is bounded in $\left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^A$. We remark that the estimates on $g_\sigma, g_\omega, g_\rho$ and $e$ are explicit up to this point. Finally, in both theorems, we have to apply the implicit function theorem with $g_\sigma, g_\omega, g_\rho$ and $e$ as parameters.

This result is different from that obtained by Esteban–Séré on the Dirac–Fock equations (see [ES99], [ES01]). In [ES99], by a more sophisticated variational method, Esteban–Séré found a infinite sequence of solutions of the Dirac-Fock equations and, in [ES01], they showed that, in a weakly relativistic regime, the "first" solution of the Dirac–Fock equations found in [ES99] can be viewed as an electronic ground state in the sense that it minimizes the Dirac–Fock energy among all electronic configurations which are orthogonal to the Dirac sea. Their variational method takes advantage of the fact that the Dirac–Fock energy functional is not translation invariant: it contains an attractive interaction term, due to the nucleus, which confines the electrons. The nonlinear interaction is rather purely repulsive so that the use of concentration-compactness is not necessary. On the contrary, the energy functional that we consider is invariant under translations and one of the nonlinear interaction terms is attractive; because of the translation invariance, we are naturally led to use the concentration-compactness argument.

In section 2, we introduce some useful properties of the potential $V_{\mu,\Psi}$ and of the operator $H_{\mu,\Psi}$ for $\mu = p, n$. In section 3, we show how we can apply the concentration-compactness argument to the minimization problem (1.29). Finally, in section 4, we prove theorem 1.1.

# 2. Properties of the potential $V_{\mu,\Psi}$

In this section, we describe some useful properties of the potential $V_{\mu,\Psi}$ and we give a condition on the parameters $(g_\sigma, g_\omega, g_\rho, e, N, Z)$ which implies that $H_{\mu,\Psi}$ is a self-adjoint isomorphism and its inverse is bounded independently of $\Psi$.

**Lemma 2.1.** *For any* $\Psi \in \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^A$,

$$\begin{aligned} V_{p,\Psi} &\in L^r(\mathbb{R}^3), \quad 3 < r < \infty \\ V_{n,\Psi} &\in L^r(\mathbb{R}^3), \quad 1 \le r < \infty. \end{aligned}$$

*Proof.* The proof of this lemma is an application of Young's inequality : if $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^3)$, then

$$\|f \star g\|_{L^r} \le \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

with $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $1 \le p, q, r \le \infty$.

We remark that if $\Psi \in \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^A$, then $\rho_s$, $\rho_0$, $\rho_{00}$ and $\rho_0^c$ are in $L^p(\mathbb{R}^3)$ for $1 \le p \le \frac{3}{2}$.
Furthermore, using the definition of the Gamma function, we can show that, for any $\lambda > 0$, $\frac{e^{-\lambda|x|}}{|x|} \in L^q(\mathbb{R}^3)$ for $1 \le q < 3$.
Finally, we observe that $\frac{1}{|x|}$ can be written as $\frac{1}{|x|} = h_1(x) + h_2(x)$ with $h_1 \in L^\alpha(\mathbb{R}^3)$ for $1 \le \alpha < 3$ and $h_2 \in L^\beta(\mathbb{R}^3)$ for $3 < \beta \le \infty$, where $h_1(x) = \frac{1}{|x|}$ for $|x| \le 1$, $h_1(x) = 0$ otherwise.

Hence,

$$\begin{aligned} V_{p,\Psi} &= \underbrace{-\beta\frac{g_\sigma^2}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\sigma|\cdot|}}{|\cdot|}\star\rho_s\right)+\frac{g_\omega^2}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\omega|\cdot|}}{|\cdot|}\star\rho_0\right)+\frac{g_\rho^2}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\rho|\cdot|}}{|\cdot|}\star\rho_{00}\right)}_{\in L^1(\mathbb{R}^3)\bigcap L^{r_c}(\mathbb{R}^3)} \\ &\quad + \underbrace{\frac{e^2}{4\pi}\left(h_1(x)\star\rho_0^c\right)}_{\in L^1(\mathbb{R}^3)\bigcap L^{r_c}(\mathbb{R}^3)} + \underbrace{\frac{e^2}{4\pi}\left(h_2(x)\star\rho_0^c\right)}_{\in L^r(\mathbb{R}^3),\ 3<r\le r_c} \in L^r(\mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

for $3 < r \le r_c$ with $r_c = \frac{9-3\varepsilon}{\varepsilon}$ for any $\varepsilon > 0$, and

$$V_{n,\Psi} = -\beta\frac{g_\sigma^2}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\sigma|\cdot|}}{|\cdot|}\star\rho_s\right)+\frac{g_\omega^2}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\omega|\cdot|}}{|\cdot|}\star\rho_0\right)-\frac{g_\rho^2}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\rho|\cdot|}}{|\cdot|}\star\rho_{00}\right) \in L^r(\mathbb{R}^3)$$

for $1 \le r \le r_c$.

□

For reader's convenience, let us remind the following lemma which lists some properties of $H_0$ and coulombic potential $V(x) = \frac{1}{|x|}$.

**Lemma 2.2** ([ES99]). *The coulombic potential $V(x) = \frac{1}{|x|}$ satisfies the following Hardy-type inequalities:*

$$(\varphi, (\mu \star V)\varphi)_{L^2} \le \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\right)(\varphi, |H_0|\varphi)_{L^2}\,, \tag{2.1}$$

*for all $\varphi \in \Lambda^+(H^{1/2}) \cup \Lambda^-(H^{1/2})$ and for all probability measures $\mu$ on $\mathbb{R}^3$. Moreover,*

$$(\varphi, (\mu \star V)\varphi)_{L^2} \le \frac{\pi}{2}(\varphi, |H_0|\varphi)_{L^2}\,,\ \forall \varphi \in H^{1/2}, \tag{2.2}$$

$$\|(\mu \star V)\varphi\|_{L^2} \le 2\,\|\nabla\varphi\|_{L^2}\,,\ \forall\varphi \in H^1. \tag{2.3}$$

In the particular case where $\mu$ is equal to the Dirac mass at the origin $\delta_0$, we refer to Burenkov–Evans ([BE98]) and Tix ([Tix98], [Tix97]) for the inequality (2.1), to Herbst ([Her77]) and Kato ([Kat80]) for (2.2) and to Thaller's book ([Tha92]) for the standard Hardy inequality (2.3). The extension of (2.1), (2.2) and (2.3) to a general probability measure $\mu$ is immediate.

Then, using lemma 2.2 and proceeding like in [ES99] (Lemma 3.1), we obtain the following estimates.

**Lemma 2.3.** *Assume that*

$$\frac{g_\sigma^2 A + g_\rho^2 \max(Z,N)}{4\pi} < \frac{2}{\pi/2+2/\pi}, \tag{2.4}$$

$$\frac{g_\sigma^2 A + g_\omega^2 A + g_\rho^2 Z + e^2 Z}{4\pi} < \frac{2}{\pi/2+2/\pi}, \tag{2.5}$$

$$\frac{g_\sigma^2 A + g_\omega^2 A + g_\rho^2 N}{4\pi} < \frac{2}{\pi/2+2/\pi}. \tag{2.6}$$

*There is a constant $h_\mu > 0$, such that for any $\Psi \in \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^A$ such that*

$$\mathrm{Gram}_{L^2}(\Psi) \leq \mathbb{1},$$

*and $\psi \in H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$,*

$$h_\mu \|\psi\|_{H^{1/2}} \leq \|H_{\mu,\Psi}\psi\|_{H^{-1/2}} \tag{2.7}$$

*with $\mu = p, n$. In other words, $H_{\mu,\Psi}$ is a self-adjoint isomorphism between $H^{1/2}$ and its dual $H^{-1/2}$, whose inverse is bounded independently of $\Psi$.*

Finally, a straightforward application of the inequality (2.3) yields the following lemma.

**Lemma 2.4.** *Assume that*

$$d_p = \frac{(g_\sigma^2 + g_\omega^2 + g_\rho^2)A + e^2 Z}{2\pi} < 1, \tag{2.8}$$

$$d_n = \frac{(g_\sigma^2 + g_\omega^2 + g_\rho^2)A}{2\pi} < 1. \tag{2.9}$$

*For any $\Psi \in \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^A$ such that $\mathrm{Gram}_{L^2}(\Psi) \leq \mathbb{1}$,*

$$V_{\mu,\Psi} \leq d_\mu^{1/2}|H_0| \tag{2.10}$$

$$(1 - d_\mu)^{1/2}|H_0| \leq |H_{\mu,\Psi}| \tag{2.11}$$

*for $\mu = p, n$.*

*Remark* 2.5. Our estimates are far from optimal. In particular, we do not give any condition on $m_\sigma$, $m_\omega$ and $m_\rho$. We can expect that taking into account the meson masses, one can obtain better estimates.

# 3. Proof of theorem 1.2

This theorem is an application of the concentration-compactness argument (see [Lio84a], [Lio84b]). Like in [GL86], if $(\psi_1^k, \dots, \psi_A^k)$ is a minimizing sequence of (1.29), then we apply the lemma below (proved in [Lio84a]) with the probability $P_k$ in $\mathbb{R}^3$ whose density is $\frac{1}{A}\rho^k$ and $\rho^k = \sum_{i=1}^{A} |\psi_i^k|^2$.

**Lemma 3.1.** *Let $(P_k)_k$ be a sequence of probability measures on $\mathbb{R}^N$. Then there exists a subsequence that we still denote by $P_k$ such that one of the following properties holds:*

*i. (compactness up to a translation) $\exists y^k \in \mathbb{R}^N$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists R < \infty$*

$$P_k\left(B\left(y^k, R\right)\right) \geq 1 - \varepsilon;$$

*ii. (vanishing)* $\forall R < \infty$

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} P_k\left(B\left(y,R\right)\right) \underset{k}{\to} 0;$$

*iii. (dichotomy)* $\exists \alpha \in (0,1)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall M < \infty$, $\exists R_0 \geq M$, $\exists y^k \in \mathbb{R}^N$, $\exists R_k \underset{k}{\to} +\infty$ *such that*

$$\left|P_k\left(B\left(y^k,R_0\right)\right)-\alpha\right| \leq \varepsilon,\quad \left|P_k\left(B\left(y^k,R_k\right)^c\right)-(1-\alpha)\right| \leq \varepsilon.$$

In the following subsections, we prove that if the condition (1.31) holds, then we can rule out dichotomy and vanishing.

First, we make a few preliminary observations; let $\Psi^k = (\psi_1^k,\ldots,\psi_A^k)$ be a minimizing sequence and $g_\sigma, g_\omega, g_\rho$ and $e$ such that $d_\mu < \frac{4}{5}$ for $\mu = p,n$, then $\Psi^k$ is bounded in $\left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^A$. Indeed, since $\Psi^k$ is a minimizing sequence, there exists a constant $C$ such that

$$\begin{aligned} C \geq \mathcal{E}(\Psi^k) &= \sum_{j=1}^{A}\left(\psi_j^k, H_0\psi_j^k\right)_{L^2} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{Z}\left(\psi_j^k, V_{p,\Psi^k}\psi_j^k\right)_{L^2} \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{j=Z+1}^{A}\left(\psi_j^k, V_{n,\Psi^k}\psi_j^k\right)_{L^2} \\ &= \sum_{j=1}^{Z}\left(\psi_j^k, H_{p,\Psi^k}\psi_j^k\right)_{L^2} + \sum_{j=Z+1}^{A}\left(\psi_j^k, H_{n,\Psi^k}\psi_j^k\right)_{L^2} \\ &\quad - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{Z}\left(\psi_j^k, V_{p,\Psi^k}\psi_j^k\right)_{L^2} - \frac{1}{2}\sum_{j=Z+1}^{A}\left(\psi_j^k, V_{n,\Psi^k}\psi_j^k\right)_{L^2} \end{aligned}$$

Then, using the fact that, for any $k \in \mathbb{N}$, $\psi_j^k = \Lambda^+_{p,\Psi^k}\psi_j^k$ for $1 \leq j \leq Z$, $\psi_j^k = \Lambda^+_{n,\Psi^k}\psi_j^k$ for $Z+1 \leq j \leq A$ and the inequalities (2.10) and (2.11), we obtain

$$\begin{aligned} C &\geq \sum_{j=1}^{Z}\left(\psi_j^k, |H_{p,\Psi^k}|\psi_j^k\right)_{L^2} + \sum_{j=Z+1}^{A}\left(\psi_j^k, |H_{n,\Psi^k}|\psi_j^k\right)_{L^2} \\ &\quad - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{Z} d_p^{1/2}\left(\psi_j^k, |H_0|\psi_j^k\right)_{L^2} - \frac{1}{2}\sum_{j=Z+1}^{A} d_n^{1/2}\left(\psi_j^k, |H_0|\psi_j^k\right)_{L^2} \\ &\geq \sum_{j=1}^{Z}\left[(1-d_p)^{1/2} - \frac{d_p^{1/2}}{2}\right]\|\psi_j^k\|^2_{H^{1/2}} + \sum_{j=Z+1}^{A}\left[(1-d_n)^{1/2} - \frac{d_n^{1/2}}{2}\right]\|\psi_j^k\|^2_{H^{1/2}}. \end{aligned}$$

As a conclusion, if $2(1-d_\mu)^{1/2} - d_\mu^{1/2} > 0$, that means $d_\mu < \frac{4}{5}$, then $\|\Psi^k\|^2_{(H^{1/2})^A}$ is bounded independently of $k$ and $I$ is bounded from below.

## 3.1. Dichotomy does not occur

If dichotomy occurs (case iii.), then, roughly speaking, $\Psi^k = (\psi_1^k, \dots, \psi_A^k)$ can be split into two parts that we denote by $\Psi_1^k = (\psi_{1,1}^k, \dots, \psi_{A,1}^k)$ and $\Psi_2^k = (\psi_{1,2}^k, \dots, \psi_{A,2}^k)$. More precisely, let $\xi, \zeta$ be cut-off functions: $0 \le \xi \le 1$, $0 \le \zeta \le 1$, $\xi(x) = 1$ if $|x| \le 1$, $\xi(x) = 0$ if $|x| \ge 2$, $\zeta(x) = 0$ if $|x| \le 1$, $\zeta(x) = 1$ if $|x| \ge 2$, $\xi, \zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ and let $\xi_\mu$, $\zeta_\mu$ denote $\xi\left(\frac{\cdot}{\mu}\right)$, $\zeta\left(\frac{\cdot}{\mu}\right)$. We set

$$\begin{aligned} \psi_{i,1}^k &= \xi_{\frac{R_k}{8}}(\cdot - y^k)\psi_i^k \\ \psi_{i,2}^k &= \zeta_{\frac{R_k}{2}}(\cdot - y^k)\psi_i^k \end{aligned}$$

with $R_k \underset{k}{\to} +\infty$. We remind that $\operatorname{dist}\left(\operatorname{supp}\, \psi_{i,1}^k, \operatorname{supp}\, \psi_{i,2}^k\right) > 0$,

$$\left\|\psi_i^k - \left(\psi_{i,1}^k + \psi_{i,2}^k\right)\right\|_{L^p} \underset{k}{\to} 0 \tag{3.1}$$

for $2 \le p < 3$, and

$$\left\|\psi_i^k - \left(\psi_{i,1}^k + \psi_{i,2}^k\right)\right\|_{H^{1/2}} \underset{k}{\to} 0 \tag{3.2}$$

(see [Lio84a], [LL11]).

Next, we may assume that

$$\int_{\mathbb{R}^3} \psi_{i,1}^{k*}\psi_{j,1}^k = \lambda_i\delta_{ij}, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \psi_{i,2}^{k*}\psi_{j,2}^k = (1-\lambda_i)\delta_{ij}, \tag{3.3}$$

for $1 \le i, j \le Z$, $Z+1 \le i, j \le A$, with $\lambda_i \in [0,1]$ such that $\sum_{i=1}^{A} \lambda_i \in (0, A)$. In fact, suppose that $\Theta^k = (\theta_1^k, \dots, \theta_A^k)$ is a minimizing sequence for which the dichotomy case occurs. We remind that $\mathcal{E}(\Psi)$ is invariant under the transformations of $(\psi_1, \dots, \psi_A)$ of the form

$$U = \begin{pmatrix} U_p & 0 \\ 0 & U_n \end{pmatrix}$$

where $U_p$ (resp. $U_n$) is a $Z \times Z$ (resp. $N \times N$) unitary matrix; then, using this kind of transformations and writing $\Theta_1^k = (\Theta_{p,1}^k, \Theta_{n,1}^k)$, it is clear that we may diagonalize $\mathrm{Gram}_{L^2}(\Theta_{p,1}^k)$ and $\mathrm{Gram}_{L^2}(\Theta_{p,1}^k)$. In particular, we have

$$\begin{aligned} \mathrm{Gram}_{L^2}(\Theta_{p,1}^k) &= \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_Z^k), \\ \mathrm{Gram}_{L^2}(\Theta_{n,1}^k) &= \mathrm{diag}(\lambda_{Z+1}^k, \dots, \lambda_A^k) \end{aligned}$$

with $0 \le \lambda_i^k \le 1$ for all $k \in \mathbb{N}$. Since $\{\lambda_i^k\}_k$ is a bounded sequence in $\mathbb{R}$, up to a subsequence $\lambda_i^k \underset{k}{\to} \lambda_i$ with $0 \le \lambda_i \le 1$, and

$$\begin{aligned} &\mathrm{Gram}_{L^2}(\Theta_{p,1}^k) - \Delta_{p,1} \underset{k}{\to} 0 \qquad \Delta_{p,1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_Z), \\ &\mathrm{Gram}_{L^2}(\Theta_{n,1}^k) - \Delta_{n,1} \underset{k}{\to} 0 \qquad \Delta_{n,1} = \mathrm{diag}(\lambda_{Z+1}, \dots, \lambda_A). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Moreover, as a consequence of the definition of $\Theta_1^k$ and $\Theta_2^k$, we have

$$\begin{aligned}\mathrm{Gram}_{L^2}(\Theta_{p,2}^k) - \Delta_{p,2} \underset{k}{\to} 0 \qquad \Delta_{p,2} &= \mathrm{diag}(1-\lambda_1,\dots,1-\lambda_Z),\\ \mathrm{Gram}_{L^2}(\Theta_{n,2}^k) - \Delta_{n,2} \underset{k}{\to} 0 \qquad \Delta_{n,2} &= \mathrm{diag}(1-\lambda_{Z+1},\dots,1-\lambda_A).\end{aligned} \tag{3.5}$$

So, to obtain (3.3), we proceed as follows.

First of all, we define the sets $\mathcal{I}_p = \{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le Z\}$, $\mathcal{I}_{p,1} = \{i \in \mathcal{I}_p : \lambda_i = 0\}$, $\mathcal{I}_{p,2} = \{i \in \mathcal{I}_p : \lambda_i = 1\}$, $\tilde{\mathcal{I}}_{p,1} = \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_{p,1}$ and $\tilde{\mathcal{I}}_{p,2} = \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_{p,2}$.

Second, if $i \in \mathcal{I}_{p,1}$, we replace $\theta_{i,1}^k$ with $\psi_{i,1}^k = 0$ and, in the same way, if $i \in \mathcal{I}_{p,2}$, we replace $\theta_{i,2}^k$ with $\psi_{i,2}^k = 0$.

Next, we denote

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}_{p,1}^k &= \left(\theta_{i,1}^k\right)_{i\in\tilde{\mathcal{I}}_{p,1}}, &\qquad \tilde{G}_{p,1}^k &= \mathrm{Gram}_{L^2}(\tilde{\Theta}_{p,1}^k),\\ \tilde{\Theta}_{p,2}^k &= \left(\theta_{i,2}^k\right)_{i\in\tilde{\mathcal{I}}_{p,2}}, &\qquad \tilde{G}_{p,2}^k &= \mathrm{Gram}_{L^2}(\tilde{\Theta}_{p,2}^k),\\ \tilde{\Delta}_{p,1} &= \mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{i\in\tilde{\mathcal{I}}_{p,1}}, &\qquad \tilde{\Delta}_{p,2} &= \mathrm{diag}\,(1-\lambda_i)_{i\in\tilde{\mathcal{I}}_{p,2}},\end{aligned}$$

and we remark that $\tilde{\Delta}_{p,1}$ and $\tilde{\Delta}_{p,2}$ are invertible matrices. Furthermore, using (3.4) and (3.5), we can write, for $k \to +\infty$,

$$\tilde{G}_{p,1}^k = \tilde{\Delta}_{p,1} + o(1), \qquad \tilde{G}_{p,2}^k = \tilde{\Delta}_{p,2} + o(1);$$

then $\tilde{G}_{p,1}^k$ and $\tilde{G}_{p,2}^k$ are invertible matrices and

$$(\tilde{G}_{p,1}^k)^{-1/2} = \tilde{\Delta}_{p,1}^{-1/2} + o(1), \qquad (\tilde{G}_{p,2}^k)^{-1/2} = \tilde{\Delta}_{p,2}^{-1/2} + o(1).$$

To conclude, it is enough to consider a small perturbation of $\tilde{\Theta}_{p,1}^k$ and $\tilde{\Theta}_{p,2}^k$. More precisely, we take

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_{p,1}^k &= \left(\psi_{i,1}^k\right)_{i\in\tilde{\mathcal{I}}_{p,1}} = \tilde{\Delta}_{p,1}^{1/2}(\tilde{G}_{p,1}^k)^{-1/2}\tilde{\Theta}_{p,1}^k\\ \tilde{\Psi}_{p,2}^k &= \left(\psi_{i,2}^k\right)_{i\in\tilde{\mathcal{I}}_{p,2}} = \tilde{\Delta}_{p,2}^{1/2}(\tilde{G}_{p,2}^k)^{-1/2}\tilde{\Theta}_{p,2}^k.\end{aligned}$$

By a straightforward calculation, we obtain $\mathrm{Gram}_{L^2}(\tilde{\Psi}_{p,1}^k) = \tilde{\Delta}_{p,1}$ and $\mathrm{Gram}_{L^2}(\tilde{\Psi}_{p,2}^k) = \tilde{\Delta}_{p,2}$; hence, writing $\Psi_{p,1}^k = (\psi_{1,1}^k,\dots,\psi_{Z,1}^k)$ and $\Psi_{p,2}^k = (\psi_{1,2}^k,\dots,\psi_{Z,2}^k)$, we have

$$\mathrm{Gram}_{L^2}(\Psi_{p,1}^k) = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_Z) \text{ and } \mathrm{Gram}_{L^2}(\Psi_{p,2}^k) = \mathrm{diag}(1-\lambda_1,\dots,1-\lambda_Z).$$

Finally, with the same arguments, we can construct $\Psi_{n,1}^k = (\psi_{Z+1,1}^k,\dots,\psi_{A,1}^k)$ and $\Psi_{n,2}^k = (\psi_{Z+1,2}^k,\dots,\psi_{A,2}^k)$ such that

$$\mathrm{Gram}_{L^2}(\Psi_{n,1}^k) = \mathrm{diag}(\lambda_{Z+1},\dots,\lambda_A) \text{ and } \mathrm{Gram}_{L^2}(\Psi_{n,2}^k) = \mathrm{diag}(1-\lambda_{Z+1},\dots,1-\lambda_A).$$

We remark that $\Psi_1^k = (\psi_{1,1}^k,\dots,\psi_{A,1}^k)$ and $\Psi_2^k = (\psi_{1,2}^k,\dots,\psi_{A,2}^k)$ do not necessarily satisfy the constraints of $I(\lambda_1,\dots,\lambda_A)$ and $I(1-\lambda_1,\dots,1-\lambda_A)$ respectively, then we

proceed as follows.
First, we show that

$$\begin{aligned} &\Lambda^-_{p,\Psi_1^k}(\psi^k_{1,1},\dots,\psi^k_{Z,1}) \underset{k}{\to} 0 \text{ in } \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^Z, \\ &\Lambda^-_{n,\Psi_1^k}(\psi^k_{Z+1,1},\dots,\psi^k_{A,1}) \underset{k}{\to} 0 \text{ in } \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^N, \end{aligned} \tag{3.6}$$

and

$$\begin{aligned} &\Lambda^-_{p,\Psi_2^k}(\psi^k_{1,2},\dots,\psi^k_{Z,2}) \underset{k}{\to} 0 \text{ in } \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^Z, \\ &\Lambda^-_{n,\Psi_2^k}(\psi^k_{Z+1,2},\dots,\psi^k_{A,2}) \underset{k}{\to} 0 \text{ in } \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^N. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Second, using the implicit function theorem, we construct

$$\Phi_1^k = (\Phi^k_{p,1}, \Phi^k_{n,1}), \Phi_2^k = (\Phi^k_{p,2}, \Phi^k_{n,2}) \in \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^Z \times \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^N,$$

small perturbations of $\Psi_1^k$, $\Psi_2^k$ in $\left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^A$, such that

$$\Lambda^-_{p,\Phi_1^k}\Phi^k_{p,1} = 0, \quad \Lambda^-_{n,\Phi_1^k}\Phi^k_{n,1} = 0, \tag{3.8}$$

$$\Lambda^-_{p,\Phi_2^k}\Phi^k_{p,2} = 0, \quad \Lambda^-_{n,\Phi_2^k}\Phi^k_{n,2} = 0 \tag{3.9}$$

and

$$\mathrm{Gram}_{L^2}(\Phi^k_{\mu,i}) = \mathrm{Gram}_{L^2}(\Psi^k_{\mu,i}) \tag{3.10}$$

for $\mu = p, n$ and $i = 1, 2$.
In conclusion, thanks to the continuity of $\mathcal{E}$ in $H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$, we obtain

$$\begin{aligned} I &= \lim_{k\to\infty} \mathcal{E}(\Psi^k) \geq \varliminf_{k\to\infty} \mathcal{E}(\Psi_1^k) + \varliminf_{k\to\infty} \mathcal{E}(\Psi_2^k) \\ &= \varliminf_{k\to\infty} \mathcal{E}(\Phi_1^k) + \varliminf_{k\to\infty} \mathcal{E}(\Phi_2^k) \\ &\geq I(\lambda_1,\dots,\lambda_A) + I(1-\lambda_1,\dots,1-\lambda_A) \end{aligned}$$

that clearly contradicts (1.31). We remind that the first inequality is obtained by using the properties of localization of $\Psi_1^k, \Psi_2^k, \nabla\Psi_1^k$ and $\nabla\Psi_2^k$.

We start by showing that

$$\Lambda^-_{p,\Psi_1^k}(\psi^k_{1,1},\dots,\psi^k_{Z,1}) \underset{k}{\to} 0 \text{ in } \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^Z.$$

Using the formula (see [Kat80])

$$\begin{aligned} \Lambda_B^- - \Lambda_A^- &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[(A-i\eta)^{-1} - (B-i\eta)^{-1}\right] d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (A-i\eta)^{-1}(B-A)(B-i\eta)^{-1}\, d\eta, \end{aligned} \tag{3.11}$$

we can write

$$\begin{aligned}&\Lambda^-_{p,\Psi^k_1}\psi^k_{i,1} - \Lambda^-_{p,\Psi^k}\psi^k_{i,1} = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(H_{p,\Psi^k}-i\eta)^{-1}(H_{p,\Psi^k_1}-H_{p,\Psi^k})(H_{p,\Psi^k_1}-i\eta)^{-1}\psi^k_{i,1}\,d\eta.\end{aligned} \tag{3.12}$$

for $i = 1,\dots,Z$. Hence, if we prove that

$$\left\|\Lambda^-_{p,\Psi^k}\psi^k_{i,1}\right\|_{H^{1/2}} \underset{k}{\to} 0$$

and

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\|(H_{p,\Psi^k}-i\eta)^{-1}(H_{p,\Psi^k_1}-H_{p,\Psi^k})(H_{p,\Psi^k_1}-i\eta)^{-1}\psi^k_{i,1}\right\|_{H^{1/2}} d\eta \underset{k}{\to} 0,$$

we can conclude that

$$\left\|\Lambda^-_{p,\Psi^k_1}\psi^k_{i,1}\right\|_{H^{1/2}} \underset{k}{\to} 0.$$

First of all, we consider

$$f^k(\eta) = \left\|(H_{p,\Psi^k}-i\eta)^{-1}(H_{p,\Psi^k_1}-H_{p,\Psi^k})(H_{p,\Psi^k_1}-i\eta)^{-1}\psi^k_{i,1}\right\|_{H^{1/2}}$$

and we prove that, $\forall\eta\in\mathbb{R}$,

$$f^k(\eta) \underset{k}{\to} 0.$$

We decompose the proof of this fact into two lemmas.

**Lemma 3.2.** *Assume that $g_\sigma, g_\omega, g_\rho$ and $e$ are sufficiently small and let $\Psi^k$ be a sequence in $\left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^A$ such that $\mathrm{Gram}_{L^2}(\Psi^k) \le \mathbb{1}$, $\forall k\in\mathbb{N}$, and $\left\|\Psi^k\right\|_{(L^p)^A}$ is bounded independently of $k$ for $2\le p\le 3$. Then for any $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^3)$ and for any $\eta\in\mathbb{R}$, there exists a constant $\hat{h}_p$ such that*

$$\left\|(H_{p,\Psi^k}-i\eta)^{-1}\varphi\right\|_{H^{1/2}} \le \frac{1}{(m_b^2+\eta^2)^{1/4}}\left(\|\varphi\|_{L^2} + \frac{C}{(\hat{h}_p^2+\eta^2)^{1/3}}\|\varphi\|_{L^2}\right) \tag{3.13}$$

*with $C$ a constant that does not depend on $k$.*

*Proof.* First of all, we write

$$\begin{aligned}(H_{p,\Psi^k}-i\eta)^{-1}\varphi &= \chi\\ \varphi &= (H_{p,\Psi^k}-i\eta)\chi\\ \varphi &= (H_0-i\eta)\chi + V_{p,\Psi^k}\chi\\ (H_0-i\eta)^{-1}(\varphi - V_{p,\Psi^k}\chi) &= \chi\end{aligned}$$

where $V_{p,\Psi^k} = H_{p,\Psi^k} - H_0$. It is easy to show that if $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)$, then $\chi \in H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$; indeed, there exists a constant $h_p > 0$ such that

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{L^2}^2 &= \big((H_{p,\Psi^k} - i\eta)\chi, (H_{p,\Psi^k} - i\eta)\chi\big)_{L^2} = \left\|H_{p,\Psi^k}\chi\right\|_{L^2}^2 + \eta^2 \|\chi\|_{L^2}^2 \\
&\geq m_b h_p^2 \|\chi\|_{H^{1/2}}^2 + \eta^2 \|\chi\|_{L^2}^2 \geq m_b^2 h_p^2 \|\chi\|_{L^2}^2 + \eta^2 \|\chi\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

thanks to Sobolev embeddings and lemma 2.3.
Next, to have a good estimate of the $H^{1/2}$-norm, we use its definition and we obtain

$$\begin{aligned}
\|\chi\|_{H^{1/2}}^2 &= \left\|(H_0 - i\eta)^{-1}(\varphi - V_{p,\Psi^k}\chi)\right\|_{H^{1/2}}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} (m_b^2 + |p|^2)^{1/2} \left| \frac{\hat{\varphi}(p) - \widehat{V_{p,\Psi^k}\chi}(p)}{\hat{H}_0(p) - i\eta} \right|^2 dp \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(m_b^2 + |p|^2)^{1/2}}{\hat{H}_0(p)^2 + \eta^2} \left( |\hat{\varphi}(p)|^2 + \left|\widehat{V_{p,\Psi^k}\chi}(p)\right|^2 \right) dp \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(m_b^2 + |p|^2)^{1/2}}{m_b^2 + |p|^2 + \eta^2} \left( |\hat{\varphi}(p)|^2 + \left|\widehat{V_{p,\Psi^k}\chi}(p)\right|^2 \right) dp \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(m_b^2 + |p|^2)^{1/2}}{(m_b^2 + |p|^2)^{1/2}(m_b^2 + \eta^2)^{1/2}} \left( |\hat{\varphi}(p)|^2 + \left|\widehat{V_{p,\Psi^k}\chi}(p)\right|^2 \right) dp \\
&\leq \frac{1}{(m_b^2 + \eta^2)^{1/2}} \left( \|\varphi\|_{L^2}^2 + \left\|V_{p,\Psi^k}\chi\right\|_{L^2}^2 \right).
\end{aligned}$$

To conclude, we have to find an estimate for $\left\|V_{p,\Psi^k}\chi\right\|_{L^2}$. In particular, we have

$$\begin{aligned}
\left\|V_{p,\Psi^k}\chi\right\|_{L^2} &\leq \left\|V_{p,\Psi^k}\right\|_{L^{18}} \|\chi\|_{L^{9/4}} \leq \left\|V_{p,\Psi^k}\right\|_{L^{18}} \|\chi\|_{L^2}^{2/3} \|\chi\|_{L^3}^{1/3} \\
&\leq C \|\varphi\|_{L^2}^{1/3} \left\|(H_{p,\Psi^k} - i\eta)^{-1}\varphi\right\|_{L^2}^{2/3} \leq \frac{C}{(\hat{h}_p^2 + \eta^2)^{1/3}} \|\varphi\|_{L^2}
\end{aligned}$$

where $\hat{h}_p = m_b h_p$ and $C$ is a constant that does not depend on $k$. Hence,

$$\left\|(H_{p,\Psi^k} - i\eta)^{-1}\varphi\right\|_{H^{1/2}} \leq \frac{1}{(m_b^2 + \eta^2)^{1/4}} \left( \|\varphi\|_{L^2} + \frac{C}{(\hat{h}_p^2 + \eta^2)^{1/3}} \|\varphi\|_{L^2} \right)$$

$\forall \eta \in \mathbb{R}$.

□

**Lemma 3.3.** *Assume that $g_\sigma, g_\omega, g_\rho$ and $e$ are sufficiently small; let $\Psi^k$ be a minimizing sequence of (1.29) and $\Psi_1^k$, $\Psi_2^k$ defined as above. Then, for $i = 1, \ldots, Z$,*

$$(H_{p,\Psi_1^k} - H_{p,\Psi^k})(H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}\psi_{i,1}^k \xrightarrow[k]{L^2} 0 \quad \forall \eta \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

*Proof.* First of all, we study the behavior of

$$(H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}\psi_{i,1}^k$$

in $\mathbb{R}^3 \setminus B\left(y^k, \frac{R_k}{4}\right)$. Writing $\xi_{\frac{R_k}{8},y^k}(\cdot) = \xi_{\frac{R_k}{8}}(\cdot - y^k)$, we obtain

$$(H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}\psi_{i,1}^k = (H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}\xi_{\frac{R_k}{8},y^k}\psi_i^k = \xi_{\frac{R_k}{8},y^k}(H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}\psi_i^k + \tau^k \tag{3.15}$$

with $\tau^k$ defined by

$$\tau^k = \left[(H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}, \xi_{\frac{R_k}{8},y^k}\right]\psi_i^k. \tag{3.16}$$

As a consequence, we have

$$\begin{aligned}
\left\|(H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}\psi_{i,1}^k\right\|_{L^2\left(\mathbb{R}^3\setminus B\left(y^k,\frac{R_k}{4}\right)\right)} &\leq \left\|\xi_{\frac{R_k}{8},y^k}(H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}\psi_i^k\right\|_{L^2\left(\mathbb{R}^3\setminus B\left(y^k,\frac{R_k}{4}\right)\right)} + \left\|\tau^k\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq C\left\|\xi_{\frac{R_k}{8},y^k}\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}^3\setminus B\left(y^k,\frac{R_k}{4}\right)\right)} + \left\|\tau^k\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&= \left\|\tau^k\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

since supp $\xi_{\frac{R_k}{2},y^k} = B\left(y^k, \frac{R_k}{4}\right)$. Then, to prove that $(H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}\psi_{i,1}^k$ converges to 0 in $L^2\left(\mathbb{R}^3 \setminus B\left(y^k, \frac{R_k}{4}\right)\right)$, it is enough to show that the norm of the commutator

$$\left[(H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}, \xi_{\frac{R_k}{8},y^k}\right]$$

converges to 0. We remark that

$$\begin{aligned}
\tau^k &= (H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}\left[\xi_{\frac{R_k}{8},y^k}, (H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)\right](H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}\psi_i^k \\
&= (H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1} i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\xi_{\frac{R_k}{8},y^k}(H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}\psi_i^k.
\end{aligned}$$

Hence, using lemma 3.2, we obtain

$$\|\tau^k\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^3)} = O(R_k^{-1}). \tag{3.18}$$

Finally, using the fact that $R_k \underset{k}{\to} +\infty$,

$$\left\|(H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}\psi_{i,1}^k\right\|_{L^2\left(\mathbb{R}^3\setminus B\left(y^k,\frac{R_k}{4}\right)\right)} \underset{k}{\to} 0 \tag{3.19}$$

and

$$\left\|(H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}\psi_{i,1}^k\right\|_{L^p\left(\mathbb{R}^3\setminus B\left(y^k,\frac{R_k}{4}\right)\right)} \underset{k}{\to} 0 \tag{3.20}$$

for $2 \leq p < 3$ thanks to interpolation inequality and Sobolev embeddings. Indeed, we remind that $(H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}\psi_{i,1}^k$ is bounded in $H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$.

Second, we consider the potential

$$
\begin{aligned}
W^k := H_{p,\Psi_1^k} - H_{p,\Psi^k} \quad = \quad & \Bigg[-\beta \frac{g_\sigma^2}{4\pi} \sum_{j=1}^{A} \left( \frac{e^{-m_\sigma |\cdot|}}{|\cdot|} \star \left( \bar{\psi}_{j,1}^k \psi_{j,1}^k - \bar{\psi}_j^k \psi_j^k \right) \right) \\
& + \frac{g_\omega^2}{4\pi} \sum_{j=1}^{A} \left( \frac{e^{-m_\omega |\cdot|}}{|\cdot|} \star \left( \left|\psi_{j,1}^k\right|^2 - \left|\psi_j^k\right|^2 \right) \right) \\
& + \frac{g_\rho^2}{4\pi} \sum_{j=1}^{Z} \left( \frac{e^{-m_\rho |\cdot|}}{|\cdot|} \star \left( \left|\psi_{j,1}^k\right|^2 - \left|\psi_j^k\right|^2 \right) \right) \\
& - \frac{g_\rho^2}{4\pi} \sum_{j=Z+1}^{A} \left( \frac{e^{-m_\rho |\cdot|}}{|\cdot|} \star \left( \left|\psi_{j,1}^k\right|^2 - \left|\psi_j^k\right|^2 \right) \right) \\
& + \frac{e^2}{4\pi} \sum_{j=1}^{Z} \left( \frac{1}{|\cdot|} \star \left( \left|\psi_{j,1}^k\right|^2 - \left|\psi_j^k\right|^2 \right) \right) \Bigg]
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

and we estimate the $L^7$-norm of $W^k$ in $B_k := B(y^k, \frac{R_k}{4})$. Using (3.1) and the definitions of $\psi_{j,1}^k$ and $\psi_{j,2}^k$, we obtain, for $1 \le p < \frac{3}{2}$,

$$
\begin{aligned}
\left\| \bar{\psi}_{j,1}^k \psi_{j,1}^k - \bar{\psi}_j^k \psi_j^k \right\|_{L^p(B_k)} \le & \left\| \bar{\psi}_{j,1}^k \psi_{j,1}^k - (\bar{\psi}_{j,1}^k + \bar{\psi}_{j,2}^k)(\psi_{j,1}^k + \psi_{j,2}^k) \right\|_{L^p(B_k)} \\
& + C \left\| \psi_{j,1}^k + \psi_{j,2}^k - \psi_j^k \right\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^3)} \underset{k}{\to} 0
\end{aligned}
$$

and, in the same way,

$$
\begin{aligned}
\left\| \left|\psi_{j,1}^k\right|^2 - \left|\psi_j^k\right|^2 \right\|_{L^p(B_k)} \le & \left\| \left|\psi_{j,1}^k\right|^2 - \left|(\psi_{j,1}^k + \psi_{j,2}^k)\right|^2 \right\|_{L^p(B_k)} \\
& + C \left\| \psi_{j,1}^k + \psi_{j,2}^k - \psi_j^k \right\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^3)} \underset{k}{\to} 0.
\end{aligned}
$$

Next, we remark that this potential contains three types of terms; for the first one, we have

$$
\begin{aligned}
& \left\| \frac{e^{-m_\sigma |\cdot|}}{|\cdot|} \star \left( \bar{\psi}_{j,1}^k \psi_{j,1}^k - \bar{\psi}_j^k \psi_j^k \right) \right\|_{L^7(B_k)} \\
\le & \left\| \frac{e^{-m_\sigma |\cdot|}}{|\cdot|} \right\|_{L^{35/12}(B_k)} \left\| \left( \bar{\psi}_{j,1}^k \psi_{j,1}^k - \bar{\psi}_j^k \psi_j^k \right) \right\|_{L^{5/4}(B_k)} \underset{k}{\to} 0.
\end{aligned}
$$

Similarly, for the second type of terms, we obtain

$$
\begin{aligned}
& \left\| \frac{e^{-m_\omega |\cdot|}}{|\cdot|} \star \left( \left|\psi_{j,1}^k\right|^2 - \left|\psi_j^k\right|^2 \right) \right\|_{L^7(B_k)} \\
\le & \left\| \frac{e^{-m_\omega |\cdot|}}{|\cdot|} \right\|_{L^{35/12}(B_k)} \left\| \left( \left|\psi_{j,1}^k\right|^2 - \left|\psi_j^k\right|^2 \right) \right\|_{L^{5/4}(B_k)} \underset{k}{\to} 0.
\end{aligned}
$$

For the last term, we remind that $\frac{1}{|x|}$ can be written as $\frac{1}{|x|} = h_1(x) + h_2(x)$ with $h_1 \in L^{35/12}(\mathbb{R}^3)$ and $h_2 \in L^7(\mathbb{R}^3)$, where $h_1(x) = \frac{1}{|x|}$ for $|x| \leq 1$, $h_1(x) = 0$ otherwise. Then

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{|\cdot|} \star \left( \left|\psi_{j,1}^k\right|^2 - \left|\psi_j^k\right|^2 \right) \right\|_{L^7(B_k)} \\
&\leq \|h_1\|_{L^{35/12}(B_k)} \left\| \left( \left|\psi_{j,1}^k\right|^2 - \left|\psi_j^k\right|^2 \right) \right\|_{L^{5/4}(B_k)} \\
&+ \|h_2\|_{L^7(B_k)} \left\| \left( \left|\psi_{j,1}^k\right|^2 - \left|\psi_j^k\right|^2 \right) \right\|_{L^1(B_k)} \underset{k}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Finally,

$$\|W^k\|_{L^7\left(B\left(y^k, \frac{R_k}{4}\right)\right)} \underset{k}{\to} 0. \tag{3.22}$$

In conclusion, using (3.20) and (3.22), we obtain

$$\begin{aligned}
&\left\|(H_{p,\Psi_1^k} - H_{p,\Psi^k})(H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}\psi_{i,1}^k\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \left\|W^k(H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}\psi_{i,1}^k\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
&\leq \left\|W^k(H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}\psi_{i,1}^k\right\|_{L^2\left(B\left(y^k, \frac{R_k}{4}\right)\right)}^2 + \left\|W^k(H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}\psi_{i,1}^k\right\|_{L^2\left(\mathbb{R}^3 \setminus B\left(y^k, \frac{R_k}{4}\right)\right)}^2 \\
&\leq \left\|W^k\right\|_{L^7\left(B\left(y^k, \frac{R_k}{4}\right)\right)}^2 \left\|(H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}\psi_{i,1}^k\right\|_{L^{14/5}(\mathbb{R}^3)}^2 \\
&+ \left\|W^k\right\|_{L^7(\mathbb{R}^3)}^2 \left\|(H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}\psi_{i,1}^k\right\|_{L^{14/5}\left(\mathbb{R}^3 \setminus B\left(y^k, \frac{R_k}{4}\right)\right)}^2 \underset{k}{\to} 0.
\end{aligned}$$

□

Hence, if we apply lemma 3.2 to $\varphi = (H_{p,\Psi_1^k} - H_{p,\Psi^k})(H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}\psi_{i,1}^k$ and we use the result of lemma 3.3, we can conclude that

$$\left\|(H_{p,\Psi^k} - i\eta)^{-1}(H_{p,\Psi_1^k} - H_{p,\Psi^k})(H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}\psi_{i,1}^k\right\|_{H^{1/2}} \underset{k}{\to} 0 \tag{3.23}$$

for all $\eta \in \mathbb{R}$.

Finally, to prove that $\int_{-\infty}^{+\infty} f^k(\eta)\, d\eta \to 0$ as $k \to \infty$, we use the Lebesgue's dominated convergence theorem. Indeed, the sequence $f^k$ converges to $f = 0$ for all $\eta \in \mathbb{R}$ and is dominated by an integrable function $g$. In particular, using lemma 3.2 and its proof, we remark that, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left|f^k(\eta)\right| &\leq \frac{1}{(m_b^2 + \eta^2)^{1/4}} \left(1 + \frac{C}{(\hat{h}_p^2 + \eta^2)^{1/3}}\right) \left\|W^k(H_{p,\Psi_1^k} - i\eta)^{-1}\psi_{i,1}^k\right\|_{L^2} \\
&\leq \frac{\tilde{C}}{(m_b^2 + \eta^2)^{1/4}(\hat{h}_p^2 + \eta^2)^{1/3}} \left(1 + \frac{C}{(\hat{h}_p^2 + \eta^2)^{1/3}}\right) \left\|\psi_{i,1}^k\right\|_{L^2} := g(\eta) \\
&\leq \frac{\tilde{C}}{(m_b^2 + \eta^2)^{1/4}(\hat{h}_p^2 + \eta^2)^{1/3}} \left(1 + \frac{C}{(\hat{h}_p^2 + \eta^2)^{1/3}}\right) := g(\eta)
\end{aligned}$$

and $g(\eta) \in L^1(\mathbb{R})$. Then

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^k(\eta)\, d\eta \underset{k}{\to} 0.$$

Now, to prove that $\Lambda^-_{p,\Psi^k}\psi^k_{i,1} = \Lambda^-_{p,\Psi^k}\xi_{\frac{R_k}{8}}(\cdot - y^k)\psi^k_i$ converges to 0 in $H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$, we give an estimate on the commutator $\left[\Lambda^-_{p,\Psi^k}, \xi_{\frac{R_k}{8}}(\cdot - y^k)\right]$. Writing $\xi_{\frac{R_k}{8},y^k}(\cdot) = \xi_{\frac{R_k}{8}}(\cdot - y^k)$ and using Cauchy's formula, we infer

$$\begin{aligned}
\left[\Lambda^-_{p,\Psi^k}, \xi_{\frac{R_k}{8},y^k}\right] &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{H_{p,\Psi^k} + i\eta}\xi_{\frac{R_k}{8},y^k} - \xi_{\frac{R_k}{8},y^k}\frac{1}{H_{p,\Psi^k} + i\eta}\, d\eta \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{H_{p,\Psi^k} + i\eta}\left[\xi_{\frac{R_k}{8},y^k}, H_{p,\Psi^k} + i\eta\right]\frac{1}{H_{p,\Psi^k} + i\eta}\, d\eta \\
&= -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{H_{p,\Psi^k} + i\eta}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\xi_{\frac{R_k}{8},y^k}\frac{1}{H_{p,\Psi^k} + i\eta}\, d\eta.
\end{aligned}$$

Hence,

$$\left\|\left[\Lambda^-_{p,\Psi^k}, \xi_{\frac{R_k}{8},y^k}\right]\psi^k_i\right\|_{H^{1/2}} \leq C\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left\|\nabla\xi_{\frac{R_k}{8},y^k}\right\|_{L^\infty}}{(m_b^2+\eta^2)^{1/4}(m_b^2+\eta^2)^{1/2}}\, d\eta = O(R_k^{-1}).$$

Then, as $R_k \underset{k}{\to} +\infty$, we obtain

$$\left\|\left[\Lambda^-_{p,\Psi^k}, \xi_{\frac{R_k}{8},y^k}\right]\psi^k_i\right\|_{H^{1/2}} \underset{k}{\to} 0$$

and, since $\Lambda^-_{p,\Psi^k}\psi^k_{i,1} = \left[\Lambda^-_{p,\Psi^k}, \xi_{\frac{R_k}{8},y^k}\right]\psi^k_i + \xi_{\frac{R_k}{8},y^k}\Lambda^-_{p,\Psi^k}\psi^k_i$ and $\Lambda^-_{p,\Psi^k}\psi^k_i = 0$, we conclude that

$$\Lambda^-_{p,\Psi^k_1}(\psi^k_{1,1},\ldots,\psi^k_{Z,1}) \underset{k}{\to} 0$$

in $\left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^Z$. Moreover, with the same arguments used above, we prove that

$$\Lambda^-_{n,\Psi^k_1}(\psi^k_{Z+1,1},\ldots,\psi^k_{A,1}) \underset{k}{\to} 0$$

in $\left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^N$.

Furthermore, to show that

$$\Lambda^-_{p,\Psi^k_2}(\psi^k_{1,2},\ldots,\psi^k_{Z,2}) \underset{k}{\to} 0 \quad\text{and}\quad \Lambda^-_{n,\Psi^k_2}(\psi^k_{Z+1,2},\ldots,\psi^k_{A,2}) \underset{k}{\to} 0$$

in $\left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^Z$ and $\left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^N$ respectively, we can proceed as before; only the proof of

$$(H_{p,\Psi^k_2} - H_{p,\Psi^k})(H_{p,\Psi^k_2} - i\eta)^{-1}\psi^k_{i,1} \underset{k}{\xrightarrow{L^2}} 0, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}, \tag{3.24}$$

is slightly different. In this case,

$$\|H_{p,\Psi_2^k} - H_{p,\Psi^k}\|_{L^7\left(\mathbb{R}^3\setminus B\left(y^k,\frac{R_k}{4}\right)\right)} \underset{k}{\to} 0,$$

thanks to the localization property of $\psi_{i,1}^k$, and $(H_{p,\Psi_2^k} - i\eta)^{-1}\psi_{i,2}^k$ converges strongly to zero in $L^p\left(B\left(y^k,\frac{R_k}{4}\right)\right)$ for $2 \le p < 3$. In conclusion,

$$\begin{aligned}\left\|(H_{p,\Psi_2^k} - H_{p,\Psi^k})(H_{p,\Psi_2^k} - i\eta)^{-1}\psi_{i,2}^k\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le & C_1\left\|(H_{p,\Psi_2^k} - i\eta)^{-1}\psi_{i,2}^k\right\|^2_{L^{14/5}\left(B\left(y^k,\frac{R_k}{4}\right)\right)} \\ & + C_2\left\|(H_{p,\Psi_2^k} - H_{p,\Psi^k})\right\|^2_{L^7\left(\mathbb{R}^3\setminus B\left(y^k,\frac{R_k}{4}\right)\right)} \underset{k}{\to} 0.\end{aligned}$$

Now, we want to construct $\Phi_1^k = (\Phi_{p,1}^k, \Phi_{n,1}^k), \Phi_2^k = (\Phi_{p,2}^k, \Phi_{n,2}^k) \in \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^Z \times \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^N$, small perturbations of $\Psi_1^k, \Psi_2^k$ in $\left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^A$, that satisfy the constraints of $I(\lambda_1, \dots, \lambda_A)$ and $I(1-\lambda_1, \dots, 1-\lambda_A)$ respectively. For this purpose, we use the following lemma and its corollary. The proofs of the lemma and the corollary are given in the appendix.

**Lemma 3.4.** *Take* $\Psi = (\Psi_p, \Psi_n) \in \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^Z \times \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^N$ *such that*

*i.* $\mathrm{Gram}_{L^2}(\Psi_p) := G_p \le \mathbb{1}_Z$ *and* $\mathrm{Gram}_{L^2}(\Psi_n) := G_n \le \mathbb{1}_N$ *are invertible matrices;*

*ii.*
$$\begin{aligned}\left\|\Lambda^-_{p,\Psi}\Psi_p\right\|_{(H^{1/2})^Z} \le \tilde{\delta} \\ \left\|\Lambda^-_{n,\Psi}\Psi_n\right\|_{(H^{1/2})^N} \le \tilde{\delta}\end{aligned}$$

*for* $\tilde{\delta} > 0$ *small enough.*

*If* $g_\sigma, g_\omega, g_\rho$ *and* $e$ *are sufficiently small, there exists* $\Phi = (\Phi_p, \Phi_n) \in \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^Z \times \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^N$ *such that*

$$\Lambda^-_{p,\Phi}\Phi_p = 0, \tag{3.25}$$
$$\Lambda^-_{n,\Phi}\Phi_n = 0. \tag{3.26}$$

*Moreover,*

$$\mathrm{Gram}_{L^2}(\Phi_p) = G_p, \tag{3.27}$$
$$\mathrm{Gram}_{L^2}(\Phi_n) = G_n. \tag{3.28}$$

**Corollary 3.5.** *Take* $\Psi^k = (\Psi_p^k, \Psi_n^k) \in \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^Z \times \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^N$ *a sequence of functions bounded in* $\left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^A$ *such that*

*i.* $\mathrm{Gram}_{L^2}\left(\Psi_p^k\right) := G_p \le \mathbb{1}_Z$ *and* $\mathrm{Gram}_{L^2}\left(\Psi_n^k\right) := G_n \le \mathbb{1}_N$ *are invertible matrices that do not depend on* $k$ *for any* $k \in \mathbb{N}$*;*

*ii.*

$$\left\|\Lambda^{-}_{p,\Psi^k}\Psi^k_p\right\|_{(H^{1/2})^Z} \underset{k}{\to} 0$$
$$\left\|\Lambda^{-}_{n,\Psi^k}\Psi^k_n\right\|_{(H^{1/2})^N} \underset{k}{\to} 0.$$

*If $g_\sigma, g_\omega, g_\rho$ and $e$ are sufficiently small, there is a constant $k_0 \in \mathbb{N}$ such that, for any $k \geq k_0$, there exists $\Phi^k = (\Phi^k_p, \Phi^k_n) \in \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^Z \times \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^N$ with the following properties:*

*a.*

$$\Lambda^{-}_{p,\Phi^k}\Phi^k_p = 0, \tag{3.29}$$
$$\Lambda^{-}_{n,\Phi^k}\Phi^k_n = 0. \tag{3.30}$$

*b.*

$$\left\|\Phi^k_p - \Psi^k_p\right\|_{(H^{1/2})^Z} \underset{k}{\to} 0, \tag{3.31}$$
$$\left\|\Phi^k_n - \Psi^k_n\right\|_{(H^{1/2})^N} \underset{k}{\to} 0. \tag{3.32}$$

*c.*

$$\mathrm{Gram}_{L^2}\left(\Phi^k_p\right) = G_p, \tag{3.33}$$
$$\mathrm{Gram}_{L^2}\left(\Phi^k_n\right) = G_n. \tag{3.34}$$

So, using the corollary 3.5, we can conclude that if $g_\sigma, g_\omega, g_\rho$ and $e$ are sufficiently small, there is a constant $k_0 \in \mathbb{N}$ such that, for any $k \geq k_0$, there exists $\Phi^k_1 = (\Phi^k_{p,1}, \Phi^k_{n,1}) \in \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^Z \times \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^N$ with the following properties:

i.

$$\Lambda^{-}_{p,\Phi^k_1}\Phi^k_{p,1} = 0, \tag{3.35}$$
$$\Lambda^{-}_{n,\Phi^k_1}\Phi^k_{n,1} = 0. \tag{3.36}$$

ii.

$$\left\|\Phi^k_{p,1} - \Psi^k_{p,1}\right\|_{(H^{1/2})^Z} \underset{k}{\to} 0, \tag{3.37}$$
$$\left\|\Phi^k_{n,1} - \Psi^k_{n,1}\right\|_{(H^{1/2})^N} \underset{k}{\to} 0. \tag{3.38}$$

iii. For $1 \leq i, j \leq Z$, $Z+1 \leq i, j \leq A$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi^{k*}_{i,1}\phi^k_{j,1} = \lambda_i \delta_{ij}. \tag{3.39}$$

In particular, if

$$\mathrm{Gram}_{L^2}\left(\Psi^k_{p,1}\right) = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_Z) \text{ and } \mathrm{Gram}_{L^2}\left(\Psi^k_{n,1}\right) = \mathrm{diag}(\lambda_{Z+1},\ldots,\lambda_A)$$

are invertible matrices, we apply the corollary 3.5 to $\Psi^k_1$.
On the other hand, if $\mathrm{Gram}_{L^2}\left(\Psi^k_{p,1}\right)$ or $\mathrm{Gram}_{L^2}\left(\Psi^k_{n,1}\right)$ is not an invertible matrix; then there exists $i \in \{1,\ldots,A\}$ such that $\lambda_i = 0$. As a consequence, $\psi^k_{i,1} = 0$ for any $k \in \mathbb{N}$. We assume, without loss of generality, that $\lambda_i = 0$ for $1 \leq i < r_p$, $Z+1 \leq i < r_n$ and $\lambda_i \neq 0$ for $r_p \leq i \leq Z$, $r_n \leq i \leq A$, and we denote $\hat{\Psi}^k_{p,1} = (\psi^k_{r_p,1},\ldots,\psi^k_{Z,1})$ and $\hat{\Psi}^k_{n,1} = (\psi^k_{r_n,1},\ldots,\psi^k_{A,1})$. Since

$$\mathrm{Gram}_{L^2}\left(\hat{\Psi}^k_{p,1}\right) = \mathrm{diag}(\lambda_{r_p},\ldots,\lambda_Z) \text{ and } \mathrm{Gram}_{L^2}\left(\hat{\Psi}^k_{n,1}\right) = \mathrm{diag}(\lambda_{r_n},\ldots,\lambda_A)$$

are invertible matrices, we can apply the corollary 3.5 to $\hat{\Psi}^k_1 = (\hat{\Psi}^k_{p,1}, \hat{\Psi}^k_{n,1})$ to obtain, for any $k \geq k_0$, $\hat{\Phi}^k_1 = (\hat{\Phi}^k_{p,1}, \hat{\Phi}^k_{n,1})$ such that

i.

$$\Lambda^-_{p,\hat{\Phi}^k_1}\hat{\Phi}^k_{p,1} = 0,$$
$$\Lambda^-_{n,\hat{\Phi}^k_1}\hat{\Phi}^k_{n,1} = 0,$$

ii.

$$\left\|\hat{\Phi}^k_{p,1} - \hat{\Psi}^k_{p,1}\right\|_{(H^{1/2})^{Z-r_p+1}} \underset{k}{\to} 0,$$
$$\left\|\hat{\Phi}^k_{n,1} - \hat{\Psi}^k_{n,1}\right\|_{(H^{1/2})^{N-r_n+1}} \underset{k}{\to} 0,$$

iii. $\mathrm{Gram}_{L^2}\left(\hat{\Psi}^k_{p,1}\right) = \mathrm{Gram}_{L^2}\left(\hat{\Phi}^k_{p,1}\right)$ and $\mathrm{Gram}_{L^2}\left(\hat{\Psi}^k_{n,1}\right) = \mathrm{Gram}_{L^2}\left(\hat{\Phi}^k_{n,1}\right)$.

To conclude, it is enough to take

$$\Phi^k_{p,1} = (0,\ldots,0,\hat{\phi}^k_{r_p,1},\ldots,\hat{\phi}^k_{Z,1})$$

and

$$\Phi^k_{n,1} = (0,\ldots,0,\hat{\phi}^k_{r_n,1},\ldots,\hat{\phi}^k_{A,1})$$

and remark that $H_{\mu,\Phi^k_1} = H_{\mu,\hat{\Phi}^k_1}$ for $\mu = p,n$.

In the same way, if $g_\sigma, g_\omega, g_\rho$ and $e$ are sufficiently small, there is a constant $k_0 \in \mathbb{N}$ such that, for any $k \geq k_0$, there exists $\Phi^k_2 = (\Phi^k_{p,2}, \Phi^k_{n,2}) \in \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^Z \times \left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^N$ with the following properties:

i.

$$\Lambda^-_{p,\Phi^k_2}\Phi^k_{p,2} = 0, \tag{3.40}$$
$$\Lambda^-_{n,\Phi^k_2}\Phi^k_{n,2} = 0. \tag{3.41}$$

ii.

$$\left\|\Phi_{p,2}^k - \Psi_{p,2}^k\right\|_{(H^{1/2})^Z} \underset{k}{\rightarrow} 0, \tag{3.42}$$
$$\left\|\Phi_{n,2}^k - \Psi_{n,2}^k\right\|_{(H^{1/2})^N} \underset{k}{\rightarrow} 0. \tag{3.43}$$

iii. For $1 \leq i, j \leq Z$, $Z+1 \leq i, j \leq A$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{i,2}^{k^*} \phi_{j,2}^k = (1-\lambda_i)\delta_{ij}. \tag{3.44}$$

Using (3.37), (3.38), (3.42), (3.43) and the continuity of $\mathcal{E}$, we remark that

$$\begin{aligned} \varliminf_{k\to\infty} \mathcal{E}(\Psi_1^k) &= \varliminf_{k\to\infty} \mathcal{E}(\Phi_1^k), \\ \varliminf_{k\to\infty} \mathcal{E}(\Psi_2^k) &= \varliminf_{k\to\infty} \mathcal{E}(\Phi_2^k), \end{aligned}$$

and then, if dichotomy occurs, we have

$$\begin{aligned} I &= \lim_{k\to\infty} \mathcal{E}(\Psi^k) \geq \varliminf_{k\to\infty} \mathcal{E}(\Psi_1^k) + \varliminf_{k\to\infty} \mathcal{E}(\Psi_2^k) \\ &= \varliminf_{k\to\infty} \mathcal{E}(\Phi_1^k) + \varliminf_{k\to\infty} \mathcal{E}(\Phi_2^k) \\ &\geq I\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_A\right) + I\left(1-\lambda_1, \ldots, 1-\lambda_A\right). \end{aligned} \tag{3.45}$$

It is now clear that (3.45) contradicts (1.31).

## 3.2. Vanishing does not occur

If vanishing occurs (case ii.), then $\forall R < \infty$

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^3} \int_{B(y,R)} \left|\psi_j^k\right|^2 \underset{k}{\rightarrow} 0$$

for $j = 1, \ldots, A$ and $\psi_1^k, \ldots, \psi_A^k$ converge strongly in $L^p(\mathbb{R}^3)$ to 0 for $2 < p < 3$ (see lemma 7.2 of [LL10]). As a consequence,

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{E}(\Psi^k) = \sum_{j=1}^{A} \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \psi_j^{k^*} H_0 \psi_j^k,$$

and

$$I\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_A\right) = m_b \sum_{j=1}^{A} \lambda_j$$

thanks to the constraints of the problem.
This contradicts (1.31) because we have

$$I = m_b A = m_b \sum_{j=1}^{A} \lambda_j + m_b \sum_{j=1}^{A} (1-\lambda_j) = I\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_A\right) + I\left(1-\lambda_1, \ldots, 1-\lambda_A\right).$$

At this point, we have shown that any minimizing sequence satisfies the following compactness criterion: $\exists y^k \in \mathbb{R}^3$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists R < \infty$

$$\frac{1}{A} \sum_{j=1}^{A} \int_{B\left(y^k, R\right)} \left|\psi_j^k\right|^2 \geq 1 - \varepsilon.$$

We denote $\tilde{\Psi}^k = \Psi^k(\cdot + y^k)$ and we remark that the energy functional $\mathcal{E}$ is invariant by translations and $\tilde{\Psi}^k$ is in the minimizing set; then $\tilde{\Psi}^k$ is a minimizing sequence of (1.29). Since $\tilde{\Psi}^k$ is bounded in $\left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^A$, $\tilde{\Psi}^k$ converges weakly in $\left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^A$, almost everywhere on $\mathbb{R}^3$ and in $(L^p_{loc}(\mathbb{R}^3))^A$ for $2 \leq p < 3$ to some $\tilde{\Psi}$; moreover, thanks to the concentration-compactness argument, $\tilde{\Psi}^k$ converges strongly to $\tilde{\Psi}$ in $(L^2(\mathbb{R}^3))^A$ and in $(L^p(\mathbb{R}^3))^A$ for $2 \leq p < 3$.
As $\|\tilde{\psi}_j - \tilde{\psi}_j^k\|_{L^2} \to 0$ for $k \to +\infty$, it is clear that

$$\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\psi}_i^* \tilde{\psi}_j = \lim_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\psi}_i^{k^*} \tilde{\psi}_j^k = \delta_{ij}$$

for $1 \leq i, j \leq Z$ and $Z+1 \leq i, j \leq A$. Furthermore, $\Lambda^-_{\mu,\tilde{\Psi}} \tilde{\Psi}_\mu = 0$ for $\mu = p, n$. Indeed, as before,

$$\Lambda^-_{\mu,\tilde{\Psi}} \tilde{\psi}_j - \Lambda^-_{\mu,\tilde{\Psi}^k} \tilde{\psi}_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (H_{\mu,\tilde{\Psi}^k} - i\eta)^{-1} (V_{\mu,\tilde{\Psi}} - V_{\mu,\tilde{\Psi}^k}) (H_{\mu,\tilde{\Psi}} - i\eta)^{-1} \tilde{\psi}_j \, d\eta$$

and

$$\left\| (H_{\mu,\tilde{\Psi}^k} - i\eta)^{-1} (V_{\mu,\tilde{\Psi}} - V_{\mu,\tilde{\Psi}^k}) (H_{\mu,\tilde{\Psi}} - i\eta)^{-1} \tilde{\psi}_j \right\|_{H^{1/2}} \underset{k}{\to} 0$$

since $\|\tilde{\psi}_j - \tilde{\psi}_j^k\|_{L^p} \underset{k}{\to} 0$ for $2 \leq p < 3$. Then, applying the Lebesgue's dominated convergence theorem as above, we obtain

$$\left\| \Lambda^-_{\mu,\tilde{\Psi}} \tilde{\psi}_j - \Lambda^-_{\mu,\tilde{\Psi}^k} \tilde{\psi}_j \right\|_{H^{1/2}} \underset{k}{\to} 0$$

for $\mu = p$ if $1 \leq j \leq Z$ and $\mu = n$ if $Z+1 \leq j \leq A$. As a consequence,

$$\left\| \Lambda^-_{\mu,\tilde{\Psi}} \tilde{\psi}_j - \Lambda^-_{\mu,\tilde{\Psi}^k} \tilde{\psi}_j \right\|_{L^2} \underset{k}{\to} 0$$

and

$$\left\| \Lambda^-_{\mu,\tilde{\Psi}} \tilde{\psi}_j \right\|_{L^2} = \lim_{k \to +\infty} \left\| \Lambda^-_{\mu,\tilde{\Psi}^k} \tilde{\psi}_j \right\|_{L^2} = \lim_{k \to +\infty} \left\| \Lambda^-_{\mu,\tilde{\Psi}^k} \tilde{\psi}_j^k \right\|_{L^2} = 0,$$

thanks to the properties of the spectral projection $\Lambda^-_{\mu,\tilde{\Psi}^k}$ and using the fact that $\|\tilde{\psi}_j - \tilde{\psi}_j^k\|_{L^2} \underset{k}{\to} 0$. So we can conclude that $\tilde{\Psi}$ satisfies the constraints of the minimization problem (1.29).

Finally, we have to prove that

$$\mathcal{E}(\tilde{\Psi}) \leq \liminf_{k\to+\infty} \mathcal{E}(\tilde{\Psi}^k).$$

It is clear that if $\|\tilde{\psi}_j - \tilde{\psi}_j^k\|_{L^p} \underset{k}{\to} 0$ for $2 \leq p < 3$, then

$$\left(\tilde{\psi}_j, V_{\mu,\tilde{\Psi}}\tilde{\psi}_j\right) = \lim_{k\to+\infty} \left(\tilde{\psi}_j^k, V_{\mu,\tilde{\Psi}^k}\tilde{\psi}_j^k\right) \tag{3.46}$$

for $\mu = p$ if $1 \leq j \leq Z$ and $\mu = n$ if $Z+1 \leq j \leq A$. Moreover, we observe that

$$\left\|\Lambda^-\tilde{\psi}_j - \Lambda^-\tilde{\psi}_j^k\right\|_{H^{1/2}} \leq \left\|(\Lambda^- - \Lambda^-_{\mu,\tilde{\Psi}^k})(\tilde{\psi}_j - \tilde{\psi}_j^k)\right\|_{H^{1/2}} + \left\|(\Lambda^-_{\mu,\tilde{\Psi}^k} - \Lambda^-_{\mu,\tilde{\Psi}})\tilde{\psi}_j\right\|_{H^{1/2}}$$

and, with the same arguments used above, we obtain

$$\left\|\Lambda^-\tilde{\psi}_j\right\|_{H^{1/2}} = \lim_{k\to+\infty} \left\|\Lambda^-\tilde{\psi}_j^k\right\|_{H^{1/2}}. \tag{3.47}$$

Then, using (3.46), (3.47) and the weak lower semicontinuity of the $H^{1/2}$-norm, we get

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\tilde{\Psi}) &= \sum_{j=1}^{A}\left(\tilde{\psi}_j, |H_0|\tilde{\psi}_j\right)_{L^2} - 2\sum_{j=1}^{A}\left(\Lambda^-\tilde{\psi}_j, |H_0|\Lambda^-\tilde{\psi}_j\right)_{L^2} \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{Z}\left(\tilde{\psi}_j, V_{p,\tilde{\Psi}}\tilde{\psi}_j\right)_{L^2} + \frac{1}{2}\sum_{j=Z+1}^{A}\left(\tilde{\psi}_j, V_{n,\tilde{\Psi}}\tilde{\psi}_j\right)_{L^2} \\
&\leq \liminf_{k\to+\infty} \mathcal{E}(\tilde{\Psi}^k) \leq \mathcal{E}(\tilde{\Psi}).
\end{aligned}$$

As a conclusion, $\tilde{\Psi}$ is a minimizer of (1.29) and the minimizing sequence $\Psi^k$ is relatively compact in $(H^{1/2})^A$ up to a translation.

## 3.3. The subadditivity condition

To conclude the proof of theorem 1.2, it remains to show that the strict subadditivity condition (1.31) is a necessary condition for the compactness of all minimizing sequences (see [Lio84a], [Lio84b]).

First of all, we prove that we always have

$$I \leq I\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_A\right) + I\left(1-\lambda_1, \ldots, 1-\lambda_A\right) \tag{3.48}$$

for all $\lambda_k \in [0,1]$, $k = 1, \ldots, A$, such that $\sum_{k=1}^{A} \lambda_k \in (0, A)$.

Let $\varepsilon > 0$ and $\Psi_1^\varepsilon$, $\Psi_2^\varepsilon$ be satisfy

$$\begin{cases} I(\lambda_1, \dots, \lambda_A) \le \mathcal{E}(\Psi_1^\varepsilon) \le I(\lambda_1, \dots, \lambda_A) + \varepsilon, \\ \mathrm{Gram}_{L^2}(\Psi_{p,1}^\varepsilon) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_Z), \\ \mathrm{Gram}_{L^2}(\Psi_{n,1}^\varepsilon) = \mathrm{diag}(\lambda_{Z+1}, \dots, \lambda_A), \\ \Lambda^-_{p,\Psi_1^\varepsilon}\Psi_{p,1}^\varepsilon = 0, \ \Lambda^-_{n,\Psi_1^\varepsilon}\Psi_{n,1}^\varepsilon = 0 \end{cases} \tag{3.49}$$

and

$$\begin{cases} I(1-\lambda_1, \dots, 1-\lambda_A) \le \mathcal{E}(\Psi_2^\varepsilon) \le I(1-\lambda_1, \dots, 1-\lambda_A) + \varepsilon, \\ \mathrm{Gram}_{L^2}(\Psi_{p,2}^\varepsilon) = \mathrm{diag}(1-\lambda_1, \dots, 1-\lambda_Z), \\ \mathrm{Gram}_{L^2}(\Psi_{n,2}^\varepsilon) = \mathrm{diag}(1-\lambda_{Z+1}, \dots, 1-\lambda_A), \\ \Lambda^-_{p,\Psi_2^\varepsilon}\Psi_{p,2}^\varepsilon = 0, \ \Lambda^-_{n,\Psi_2^\varepsilon}\Psi_{n,2}^\varepsilon = 0. \end{cases} \tag{3.50}$$

By a density argument, we may assume that $\Psi_1^\varepsilon$ and $\Psi_2^\varepsilon$ have compact support and we denote by $\Psi_2^{\varepsilon,k} = \Psi_2^\varepsilon(\cdot + k\eta)$ where $\eta$ is some given unit vector in $\mathbb{R}^3$. Since for $k$ large enough the distance between the supports of $\Psi_1^\varepsilon$ and $\Psi_2^{\varepsilon,k}$ is strictly positive and goes to $+\infty$ as $k$ goes to $+\infty$, we deduce

$$\begin{cases} \mathcal{E}(\Psi^{\varepsilon,k}) - \left[\mathcal{E}(\Psi_1^\varepsilon) + \mathcal{E}(\Psi_2^{\varepsilon,k})\right] \underset{k}{\to} 0, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \psi_i^{\varepsilon,k^*}\psi_j^{\varepsilon,k} \underset{k}{\to} \delta_{ij} \qquad 1 \le i,j \le Z, \ Z+1 \le i,j \le A \\ \left\|\Lambda^-_{p,\Psi^{\varepsilon,k}}\psi_j^{\varepsilon,k}\right\|_{H^{1/2}} \underset{k}{\to} 0 \qquad j = 1, \dots, Z, \\ \left\|\Lambda^-_{n,\Psi^{\varepsilon,k}}\psi_j^{\varepsilon,k}\right\|_{H^{1/2}} \underset{k}{\to} 0 \qquad j = Z+1, \dots, A \end{cases} \tag{3.51}$$

with $\Psi^{\varepsilon,k} = \Psi_1^\varepsilon + \Psi_2^{\varepsilon,k}$. Indeed, $\Lambda^-_{\mu,\Psi^{\varepsilon,k}}\psi_j^{\varepsilon,k} = \Lambda^-_{\mu,\Psi^{\varepsilon,k}}\psi_{j,1}^\varepsilon - \Lambda^-_{\mu,\Psi_1^\varepsilon}\psi_{j,1}^\varepsilon + \Lambda^-_{\mu,\Psi^{\varepsilon,k}}\psi_{j,2}^{\varepsilon,k} - \Lambda^-_{\mu,\Psi_2^{\varepsilon,k}}\psi_{j,2}^{\varepsilon,k}$ and, by arguments similar to those used above, we obtain

$$\begin{aligned} &\left\|\Lambda^-_{\mu,\Psi^{\varepsilon,k}}\psi_{j,1}^\varepsilon - \Lambda^-_{\mu,\Psi_1^\varepsilon}\psi_{j,1}^\varepsilon\right\|_{H^{1/2}} \underset{k}{\to} 0, \\ &\left\|\Lambda^-_{\mu,\Psi^{\varepsilon,k}}\psi_{j,2}^{\varepsilon,k} - \Lambda^-_{\mu,\Psi_2^{\varepsilon,k}}\psi_{j,2}^{\varepsilon,k}\right\|_{H^{1/2}} \underset{k}{\to} 0 \end{aligned}$$

for $\mu = p, n$. Then, as before, we can construct $\Phi^{\varepsilon,k}$, small perturbation of $\Psi^{\varepsilon,k}$ in $\left(H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)^A$, such that

$$\begin{cases} I(\lambda_1, \dots, \lambda_A) + I(1-\lambda_1, \dots, 1-\lambda_A) \le \lim\limits_{k\to+\infty} \mathcal{E}\left(\Phi^{\varepsilon,k}\right) = \lim\limits_{k\to+\infty} \mathcal{E}\left(\Psi^{\varepsilon,k}\right) \\ \qquad = \mathcal{E}(\Psi_1^\varepsilon) + \mathcal{E}(\Psi_2^\varepsilon) \le I(\lambda_1, \dots, \lambda_A) + I(1-\lambda_1, \dots, 1-\lambda_A) + 2\varepsilon, \\ \mathrm{Gram}_{L^2}(\Phi_p^{\varepsilon,k}) = \mathbb{1}_Z, \ \mathrm{Gram}_{L^2}(\Phi_n^{\varepsilon,k}) = \mathbb{1}_N, \\ \Lambda^-_{p,\Phi^{\varepsilon,k}}\Phi_p^{\varepsilon,k} = 0, \ \Lambda^-_{n,\Phi^{\varepsilon,k}}\Phi_n^{\varepsilon,k} = 0 \end{cases} \tag{3.52}$$

and, by definition of $I$, we conclude

$$I \leq I\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_A\right) + I\left(1-\lambda_1, \ldots, 1-\lambda_A\right) + 2\varepsilon.$$

In fact, this argument prove also that if $I = I\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_A\right) + I\left(1-\lambda_1, \ldots, 1-\lambda_A\right)$, then there exists a minimizing sequence that is not relatively compact. Indeed, let $\Psi_1^k$ and $\Psi_2^k$ be minimizing sequences of $I\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_A\right)$ and $I\left(1-\lambda_1, \ldots, 1-\lambda_A\right)$ respectively, with compact support and such that $\operatorname{dist}\left(\operatorname{supp}\, \psi_{i,1}^k, \operatorname{supp}\, \psi_{i,2}^k\right) \underset{k}{\rightarrow} +\infty$ for $i = 1, \ldots, A$. If we take $\psi_i^k = \psi_{i,1}^k + \psi_{i,2}^k$, we can show that $\int_{\mathbb{R}^3} \psi_i^k(x)\chi(x)\, dx \underset{k}{\rightarrow} 0$ for all $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$; then $\Psi^k$ converges weakly to 0 in $(H^{1/2})^A$. Now, as before, we can construct $\Phi^k$, small perturbation of $\Psi^k$ in $(H^{1/2})^A$, which is in the minimizing set of $I$ and such that

$$\lim_{k \to +\infty} \mathcal{E}\left(\Phi^k\right) = I\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_A\right) + I\left(1-\lambda_1, \ldots, 1-\lambda_A\right) = I.$$

As a conclusion, $\Phi^k$ is a minimizing sequence that cannot be relatively compact.

# 4. Solutions of the relativistic mean-field equations

In this section, we prove that, in a weakly relativistic regime, a minimizer of (1.29) is a solution of the equations (1.26) and (1.27).

Let

$$X = \left\{\gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{H}); \gamma = \gamma^*, (m_b^2 - \Delta)^{1/4}\gamma(m_b^2 - \Delta)^{1/4} \in \sigma_1(\mathcal{H})\right\} \tag{4.1}$$

where $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ is the space of bounded linear maps from $\mathcal{H}$ to $\mathcal{H}$ and $\sigma_1(\mathcal{H})$ is the space of trace-class operators on $\mathcal{H}$.

Now, to each $P \in \mathbb{N}$, we associate

$$\Gamma_P = \left\{\gamma \in X; \gamma^2 = \gamma, \operatorname{tr}(\gamma) = P\right\}. \tag{4.2}$$

Given $\gamma = (\gamma_p, \gamma_n) \in X \times X$, we define

$$\begin{aligned} H_{p,\gamma}\gamma_p \quad := \quad & \left[H_0 - \beta \frac{g_\sigma^2}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\sigma|\cdot|}}{|\cdot|} \star \rho_s\right) + \frac{g_\omega^2}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\omega|\cdot|}}{|\cdot|} \star \rho_0\right)\right. \\ & \left. + \frac{g_\rho^2}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\rho|\cdot|}}{|\cdot|} \star \rho_{00}\right) + \frac{e^2}{4\pi}\left(\frac{1}{|\cdot|} \star \rho_p\right)\right]\gamma_p \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} H_{n,\gamma}\gamma_n \quad := \quad & \left[H_0 - \beta \frac{g_\sigma^2}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\sigma|\cdot|}}{|\cdot|} \star \rho_s\right) + \frac{g_\omega^2}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\omega|\cdot|}}{|\cdot|} \star \rho_0\right)\right. \\ & \left. - \frac{g_\rho^2}{4\pi}\left(\frac{e^{-m_\rho|\cdot|}}{|\cdot|} \star \rho_{00}\right)\right]\gamma_n \end{aligned} \tag{4.4}$$

where

$$\begin{aligned}\rho_s(x) &= \bar{\rho}_p(x) + \bar{\rho}_n(x)\\ \rho_0(x) &= \rho_p(x) + \rho_n(x)\\ \rho_{00}(x) &= \rho_p(x) - \rho_n(x)\end{aligned}$$

with $\bar{\rho}_p(x) = \mathrm{tr}(\beta\gamma_p(x,x))$, $\bar{\rho}_n(x) = \mathrm{tr}(\beta\gamma_n(x,x))$, $\rho_p(x) = \mathrm{tr}(\gamma_p(x,x))$ and $\rho_n(x) = \mathrm{tr}(\gamma_n(x,x))$.
Finally, we define

$$\begin{aligned}\Lambda^{\pm}_{p,\gamma} &= \chi_{\mathbb{R}^{\pm}}(H_{p,\gamma}),\\ \Lambda^{\pm}_{n,\gamma} &= \chi_{\mathbb{R}^{\pm}}(H_{n,\gamma}).\end{aligned}$$

Let $\tilde{\Psi} = (\tilde{\Psi}_p, \tilde{\Psi}_n)$ be a minimizer of the problem (1.29); to prove that $\tilde{\psi}_i$ is a solution of (1.26) for $1 \leq i \leq Z$ and of (1.27) for $Z+1 \leq i \leq A$, we proceed as follow: first, we consider $\tilde{\gamma}_p$ and $\tilde{\gamma}_n$ the orthogonal projectors defined by

$$\tilde{\gamma}_p = \sum_{i=1}^{Z} |\tilde{\psi}_i\rangle \langle\tilde{\psi}_i| \tag{4.5}$$

and

$$\tilde{\gamma}_n = \sum_{i=Z+1}^{A} |\tilde{\psi}_i\rangle \langle\tilde{\psi}_i|\,, \tag{4.6}$$

and we denote $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_p, \tilde{\gamma}_n)$; then, we show that the commutator of the operator $H_{\mu,\tilde{\gamma}}$ and of the projector $\tilde{\gamma}_\mu$ is zero for $\mu = p, n$. This implies

$$\begin{aligned}&H_{p,\tilde{\Psi}}\tilde{\psi}_i = \varepsilon_i\tilde{\psi}_i \quad \text{for } 1 \leq i \leq Z,\\ &H_{n,\tilde{\Psi}}\tilde{\psi}_i = \varepsilon_i\tilde{\psi}_i \quad \text{for } Z+1 \leq i \leq A.\end{aligned}$$

First of all, we observe that if $\tilde{\Psi}$ is a minimizer of (1.29), then the vector $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_p, \tilde{\gamma}_n)$ is a minimizer of the energy

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\gamma_p,\gamma_n) \;=\;& \mathrm{tr}(H_0\gamma_p) + \mathrm{tr}(H_0\gamma_n) - \frac{g_\sigma^2}{8\pi}\int\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{\rho_s(x)\rho_s(y)}{|x-y|}e^{-m_\sigma|x-y|}\,dxdy\\ &+\frac{g_\omega^2}{8\pi}\int\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{\rho_0(x)\rho_0(y)}{|x-y|}e^{-m_\omega|x-y|}\,dxdy\\ &+\frac{g_\rho^2}{8\pi}\int\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{\rho_{00}(x)\rho_{00}(y)}{|x-y|}e^{-m_\rho|x-y|}\,dxdy\\ &+\frac{e^2}{8\pi}\int\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{\rho_p(x)\rho_p(y)}{|x-y|}\,dxdy\end{aligned} \tag{4.7}$$

on $\Gamma^+_{Z,N} = \Gamma^+_Z \times \Gamma^+_N$ where

$$\begin{aligned}\Gamma^+_Z &= \left\{\gamma_p \in \Gamma_Z; \gamma_p = \Lambda^+_{p,\gamma}\gamma_p\Lambda^+_{p,\gamma}\right\},\\ \Gamma^+_N &= \left\{\gamma_n \in \Gamma_N; \gamma_n = \Lambda^+_{n,\gamma}\gamma_n\Lambda^+_{n,\gamma}\right\}.\end{aligned}$$

Next, we remind that

$$H_{\mu,\gamma} = H^+_{\mu,\gamma} + H^-_{\mu,\gamma}$$

with $H^+_{\mu,\gamma} = \Lambda^+_{\mu,\gamma}H_{\mu,\gamma}\Lambda^+_{\mu,\gamma}$ and $H^-_{\mu,\gamma} = \Lambda^-_{\mu,\gamma}H_{\mu,\gamma}\Lambda^-_{\mu,\gamma}$ for $\mu = p, n$. Then

$$[H_{\mu,\gamma}, \gamma_\mu] = \left[H^+_{\mu,\gamma}, \gamma_\mu\right] + \left[H^-_{\mu,\gamma}, \gamma_\mu\right].$$

It is clear that $\Gamma^+_{Z,N}$ is a subset of

$$\bar{\Gamma}_{Z,N} = \left\{\gamma = (\gamma_p, \gamma_n) \in \Gamma_Z \times \Gamma_N; \left[H^-_{p,\gamma}, \gamma_p\right] = 0, \left[H^-_{n,\gamma}, \gamma_n\right] = 0\right\}$$

and, since $\tilde\gamma \in \Gamma^+_{Z,N}$, we obtain $\left[H^-_{\mu,\tilde\gamma}, \tilde\gamma_\mu\right] = 0$ for $\mu = p, n$. Thus, to conclude, we have to prove that $\left[H^+_{\mu,\tilde\gamma}, \tilde\gamma_\mu\right] = 0$ for $\mu = p, n$. We proceed by contradiction.
We suppose that $\left[H^+_{p,\tilde\gamma}, \tilde\gamma_p\right]$ and $\left[H^+_{n,\tilde\gamma}, \tilde\gamma_n\right]$ are different from zero and we define

$$\tilde\gamma^\varepsilon_p = \mathcal{U}^\varepsilon_p\tilde\gamma_p\left(\mathcal{U}^\varepsilon_p\right)^{-1} := \exp\left(-\varepsilon\left[H^+_{p,\tilde\gamma}, \tilde\gamma_p\right]\right)\tilde\gamma_p \exp\left(\varepsilon\left[H^+_{p,\tilde\gamma}, \tilde\gamma_p\right]\right), \tag{4.8}$$
$$\tilde\gamma^\varepsilon_n = \mathcal{U}^\varepsilon_n\tilde\gamma_n\left(\mathcal{U}^\varepsilon_n\right)^{-1} := \exp\left(-\varepsilon\left[H^+_{n,\tilde\gamma}, \tilde\gamma_n\right]\right)\tilde\gamma_n \exp\left(\varepsilon\left[H^+_{n,\tilde\gamma}, \tilde\gamma_p\right]\right). \tag{4.9}$$

In particular,

$$\tilde\gamma^\varepsilon_p = \sum_{i=1}^{Z} |\tilde\psi^\varepsilon_i\rangle\langle\tilde\psi^\varepsilon_i|, \tag{4.10}$$
$$\tilde\gamma^\varepsilon_n = \sum_{i=Z+1}^{A} |\tilde\psi^\varepsilon_i\rangle\langle\tilde\psi^\varepsilon_i| \tag{4.11}$$

with $\tilde\psi^\varepsilon_i = \mathcal{U}^\varepsilon_p\tilde\psi_i$ for $1 \le i \le Z$ and $\tilde\psi^\varepsilon_i = \mathcal{U}^\varepsilon_n\tilde\psi_i$ for $Z+1 \le i \le A$.
Using lemma 3.4, we construct $\gamma^\varepsilon = (\gamma^\varepsilon_p, \gamma^\varepsilon_n)$, small perturbation of $\tilde\gamma^\varepsilon = (\tilde\gamma^\varepsilon_p, \tilde\gamma^\varepsilon_n)$ such that

$$\begin{aligned}\gamma^\varepsilon_p &= \Lambda^+_{p,\gamma^\varepsilon}\gamma^\varepsilon_p\Lambda^+_{p,\gamma^\varepsilon},\\ \gamma^\varepsilon_n &= \Lambda^+_{n,\gamma^\varepsilon}\gamma^\varepsilon_n\Lambda^+_{n,\gamma^\varepsilon}.\end{aligned}$$

We remark that $\gamma^\varepsilon \in \Gamma^+_{Z,N}$ and

$$\gamma^\varepsilon_p = \sum_{i=1}^{Z} |\phi^\varepsilon_i\rangle\langle\phi^\varepsilon_i|, \tag{4.12}$$
$$\gamma^\varepsilon_n = \sum_{i=Z+1}^{A} |\phi^\varepsilon_i\rangle\langle\phi^\varepsilon_i| \tag{4.13}$$

where

$$(\phi_1^\varepsilon, \dots, \phi_Z^\varepsilon) = \Phi_p^\varepsilon = \Phi_p^{\varepsilon +} + \Phi_p^{\varepsilon -} + O(\varepsilon^2) \tag{4.14}$$

$$(\phi_{Z+1}^\varepsilon, \dots, \phi_A^\varepsilon) = \Phi_n^\varepsilon = \Phi_n^{\varepsilon +} + \Phi_n^{\varepsilon -} + O(\varepsilon^2) \tag{4.15}$$

with $\Phi_\mu^{\varepsilon +} = \Lambda^+_{\mu,\tilde\Psi^\varepsilon} \tilde\Psi_\mu^\varepsilon \bullet \left[\mathrm{Gram}_{L^2}(\Lambda^+_{\mu,\tilde\Psi^\varepsilon} \tilde\Psi_\mu^\varepsilon)\right]^{-1/2}$ for $\mu = p, n$. Finally, we remind that

$$\tilde\Psi_\mu^\varepsilon = \Phi_\mu^{\varepsilon +} + \Lambda^-_{p,\tilde\Psi^\varepsilon} \tilde\Psi_\mu^\varepsilon \bullet B_\mu^{-1} + O(\varepsilon^2) \tag{4.16}$$

with $B_\mu = \left[\mathrm{Gram}_{L^2}(\Lambda^+_{\mu,\tilde\Psi^\varepsilon} \tilde\Psi_\mu^\varepsilon)\right]^{1/2}$ for $\mu = p, n$ (see the proof of lemma 3.4).
Then, to show that we have a contradiction, we want to prove that

$$\mathcal{E}(\gamma_p^\varepsilon, \gamma_n^\varepsilon) < \mathcal{E}(\tilde\gamma_p, \tilde\gamma_n).$$

For this purpose, we calculate $\mathcal{E}(\gamma_p^\varepsilon, \gamma_n^\varepsilon) - \mathcal{E}(\tilde\gamma_p, \tilde\gamma_n)$; since $(\gamma_p^\varepsilon, \gamma_n^\varepsilon)$ is a small perturbation of $(\tilde\gamma_p, \tilde\gamma_n)$, we can write

$$\mathcal{E}(\gamma_p^\varepsilon, \gamma_n^\varepsilon) - \mathcal{E}(\tilde\gamma_p, \tilde\gamma_n) = \mathrm{tr}\left(H_{p,\tilde\gamma}(\gamma_p^\varepsilon - \tilde\gamma_p)\right) + \mathrm{tr}\left(H_{n,\tilde\gamma}(\gamma_n^\varepsilon - \tilde\gamma_n)\right) + o(\varepsilon). \tag{4.17}$$

To study the sign of (4.17), we remind that given an operator $T$ and an orthogonal projector $P$, we can consider the block decomposition of $T$ defined by

$$T = \left(\begin{array}{c|c} PTP & PT(1-P) \\ \hline (1-P)TP & (1-P)T(1-P) \end{array}\right) := \left(\begin{array}{c|c} T_{++} & T_{+-} \\ \hline T_{-+} & T_{--} \end{array}\right). \tag{4.18}$$

Moreover, let $R$ be another orthogonal projector and consider $Q = R - P$; then $P + Q$ is a projector and

$$\begin{aligned} P + Q &= (P+Q)^2 \\ P + Q &= P + PQ + QP + Q^2 \\ Q^2 &= (1-P)Q - QP \\ Q^2 &= (1-P)Q(1-P) - QP + (1-P)QP \\ Q^2 &= Q_{--} - Q_{++}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

As a consequence, if $Q = O(\varepsilon)$, then $Q_{++} = O(\varepsilon^2)$ and $Q_{--} = O(\varepsilon^2)$.
Since

$$H_{\mu,\tilde\gamma} = \left(\begin{array}{c|c} H^+_{\mu,\tilde\gamma} & 0 \\ \hline 0 & H^-_{\mu,\tilde\gamma} \end{array}\right)$$

for $\mu = p, n$, then we have

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\gamma_p^\varepsilon, \gamma_n^\varepsilon) \quad - \quad & \mathcal{E}(\tilde\gamma_p, \tilde\gamma_n) = \mathrm{tr}\left(H^+_{p,\tilde\gamma}\Lambda^+_{p,\tilde\gamma}(\gamma_p^\varepsilon - \tilde\gamma_p)\Lambda^+_{p,\tilde\gamma}\right) \\ & + \mathrm{tr}\left(H^-_{p,\tilde\gamma}\Lambda^-_{p,\tilde\gamma}(\gamma_p^\varepsilon - \tilde\gamma_p)\Lambda^-_{p,\tilde\gamma}\right) + \mathrm{tr}\left(H^+_{n,\tilde\gamma}\Lambda^+_{n,\tilde\gamma}(\gamma_n^\varepsilon - \tilde\gamma_n)\Lambda^+_{n,\tilde\gamma}\right) \\ & + \mathrm{tr}\left(H^-_{n,\tilde\gamma}\Lambda^-_{n,\tilde\gamma}(\gamma_n^\varepsilon - \tilde\gamma_n)\Lambda^-_{n,\tilde\gamma}\right) + o(\varepsilon) \\ & := T_p^+ + T_p^- + T_n^+ + T_n^- + o(\varepsilon). \end{aligned} \tag{4.20}$$

First of all, we analyze the relation between $\Lambda^{\pm}_{\mu,\tilde{\gamma}}$, $\Lambda^{\pm}_{\mu,\tilde{\gamma}^\varepsilon}$ and $\Lambda^{\pm}_{\mu,\gamma^\varepsilon}$ for $\mu = p, n$. Using (3.11), we obtain

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\pm}_{\mu,\tilde{\gamma}} &= \Lambda^{\pm}_{\mu,\tilde{\gamma}^\varepsilon} + O(\varepsilon),\\
\Lambda^{\pm}_{\mu,\tilde{\gamma}} &= \Lambda^{\pm}_{\mu,\gamma^\varepsilon} + O(\varepsilon),\\
\Lambda^{\pm}_{\mu,\tilde{\gamma}^\varepsilon} &= \Lambda^{\pm}_{\mu,\gamma^\varepsilon} + O(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Then, if we take $P = \Lambda^{+}_{\mu,\gamma^\varepsilon}$, $Q = \Lambda^{+}_{\mu,\tilde{\gamma}} - \Lambda^{+}_{\mu,\gamma^\varepsilon}$ and we apply (4.18)-(4.19), we obtain

$$\Lambda^{-}_{\mu,\tilde{\gamma}} = \Lambda^{-}_{\mu,\gamma^\varepsilon} + \left(\begin{array}{c|c} O(\varepsilon^2) & O(\varepsilon) \\ \hline O(\varepsilon) & O(\varepsilon^2) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} O(\varepsilon^2) & O(\varepsilon) \\ \hline O(\varepsilon) & 1 + O(\varepsilon^2) \end{array}\right)$$

for $\mu = p, n$.
Moreover, since $\gamma^\varepsilon \in \Gamma^{+}_{Z,N}$, we can write

$$\gamma^\varepsilon_\mu = \left(\begin{array}{c|c} \gamma^\varepsilon_{\mu++} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

and

$$\Lambda^{-}_{\mu,\tilde{\gamma}} \gamma^\varepsilon_\mu \Lambda^{-}_{\mu,\tilde{\gamma}} = \left(\begin{array}{c|c} O(\varepsilon^4) & O(\varepsilon^3) \\ \hline O(\varepsilon^3) & O(\varepsilon^2) \end{array}\right).$$

So we can conclude that $T^{-}_{p} = o(\varepsilon)$ and $T^{-}_{n} = o(\varepsilon)$.
Next, we remark that

$$\begin{aligned}
T^{+}_{\mu} &= \operatorname{tr}\left(H^{+}_{\mu,\tilde{\gamma}} \Lambda^{+}_{\mu,\tilde{\gamma}} (\gamma^\varepsilon_\mu - \tilde{\gamma}^\varepsilon_\mu + \tilde{\gamma}^\varepsilon_\mu - \tilde{\gamma}_\mu) \Lambda^{+}_{\mu,\tilde{\gamma}}\right)\\
&= \operatorname{tr}\left(H^{+}_{\mu,\tilde{\gamma}} \Lambda^{+}_{\mu,\tilde{\gamma}} (\gamma^\varepsilon_\mu - \tilde{\gamma}^\varepsilon_\mu) \Lambda^{+}_{\mu,\tilde{\gamma}}\right) + \operatorname{tr}\left(H^{+}_{\mu,\tilde{\gamma}} \Lambda^{+}_{\mu,\tilde{\gamma}} (\tilde{\gamma}^\varepsilon_\mu - \tilde{\gamma}_\mu) \Lambda^{+}_{\mu,\tilde{\gamma}}\right).
\end{aligned}$$

To calculate $\operatorname{tr}\left(H^{+}_{\mu,\tilde{\gamma}} \Lambda^{+}_{\mu,\tilde{\gamma}} (\gamma^\varepsilon_\mu - \tilde{\gamma}^\varepsilon_\mu) \Lambda^{+}_{\mu,\tilde{\gamma}}\right)$, we consider the block decomposition of $\Lambda^{+}_{\mu,\tilde{\gamma}} - \Lambda^{+}_{\mu,\tilde{\gamma}^\varepsilon}$ for $P = \Lambda^{+}_{\mu,\tilde{\gamma}^\varepsilon}$. As before, we have

$$\Lambda^{+}_{\mu,\tilde{\gamma}} = \Lambda^{+}_{\mu,\tilde{\gamma}^\varepsilon} + \left(\begin{array}{c|c} O(\varepsilon^2) & O(\varepsilon) \\ \hline O(\varepsilon) & O(\varepsilon^2) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 + O(\varepsilon^2) & O(\varepsilon) \\ \hline O(\varepsilon) & O(\varepsilon^2) \end{array}\right)$$

for $\mu = p, n$.
Now, we observe that, in general, $\gamma^\varepsilon_\mu - \tilde{\gamma}^\varepsilon_\mu = O(\varepsilon)$ and, more precisely, $\Lambda^{+}_{\mu,\tilde{\gamma}^\varepsilon} (\gamma^\varepsilon_\mu - \tilde{\gamma}^\varepsilon_\mu) \Lambda^{+}_{\mu,\tilde{\gamma}^\varepsilon} = O(\varepsilon^2)$. Indeed, using the definitions from (4.10) to (4.16), we have

$$\begin{aligned}
\Lambda^{+}_{\mu,\tilde{\gamma}^\varepsilon} (\gamma^\varepsilon_\mu - \tilde{\gamma}^\varepsilon_\mu) \Lambda^{+}_{\mu,\tilde{\gamma}^\varepsilon} &= \sum_i \Lambda^{+}_{\mu,\tilde{\gamma}^\varepsilon} \Big( |\phi^\varepsilon_i\rangle \langle \phi^\varepsilon_i| - |\tilde{\psi}^\varepsilon_i\rangle \langle \tilde{\psi}^\varepsilon_i| \Big) \Lambda^{+}_{\mu,\tilde{\gamma}^\varepsilon}\\
&= \sum_i \left( |\phi^{\varepsilon\,+}_i\rangle \langle \phi^{\varepsilon\,+}_i| - |\phi^{\varepsilon\,+}_i\rangle \langle \phi^{\varepsilon\,+}_i| \right) + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Then

$$\Lambda^+_{\mu,\tilde\gamma}(\gamma^\varepsilon_\mu - \tilde\gamma^\varepsilon_\mu)\Lambda^+_{\mu,\tilde\gamma} = \left(\begin{array}{c|c} O(\varepsilon^2) & O(\varepsilon^3) \\ \hline O(\varepsilon^3) & O(\varepsilon^4) \end{array}\right)$$

and

$$T^+_\mu = \operatorname{tr}\left(H^+_{\mu,\tilde\gamma}\Lambda^+_{\mu,\tilde\gamma}(\tilde\gamma^\varepsilon_\mu - \tilde\gamma_\mu)\Lambda^+_{\mu,\tilde\gamma}\right) + o(\varepsilon).$$

Next , we consider $\tilde\gamma^\varepsilon_\mu - \tilde\gamma_\mu$. By definition,

$$\begin{array}{rcl} \tilde\gamma^\varepsilon_\mu - \tilde\gamma_\mu & = & \mathcal{U}^\varepsilon_\mu \tilde\gamma_\mu (\mathcal{U}^\varepsilon_\mu)^{-1} - \tilde\gamma_\mu \\ & = & \left(1 - \varepsilon\left[H^+_{\mu,\tilde\gamma}, \tilde\gamma_\mu\right]\right)\tilde\gamma_\mu\left(1 + \varepsilon\left[H^+_{\mu,\tilde\gamma}, \tilde\gamma_\mu\right]\right) - \tilde\gamma_\mu + o(\varepsilon) \\ & = & -\varepsilon\left[\left[H^+_{\mu,\tilde\gamma}, \tilde\gamma_\mu\right], \tilde\gamma_\mu\right] + o(\varepsilon). \end{array}$$

Then

$$T^+_\mu = -\varepsilon \operatorname{tr}\left(H^+_{\mu,\tilde\gamma}\left[\left[H^+_{\mu,\tilde\gamma}, \tilde\gamma_\mu\right], \tilde\gamma_\mu\right]\right) + o(\varepsilon)$$

for $\mu = p, n$ and

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}(\gamma^\varepsilon_p, \gamma^\varepsilon_n) - \mathcal{E}(\tilde\gamma_p, \tilde\gamma_n) & = & -\varepsilon \displaystyle\sum_{\mu=p,n} \operatorname{tr}\left(H^+_{\mu,\tilde\gamma}\left[\left[H^+_{\mu,\tilde\gamma}, \tilde\gamma_\mu\right], \tilde\gamma_\mu\right]\right) + o(\varepsilon) \\ & = & 2\varepsilon \displaystyle\sum_{\mu=p,n} \operatorname{tr}\left((H^+_{\mu,\tilde\gamma}\tilde\gamma_\mu)^2 - (H^+_{\mu,\tilde\gamma})^2\tilde\gamma_\mu^2\right) + o(\varepsilon) \\ & = & 2\varepsilon \displaystyle\sum_{\mu=p,n} \langle (H^+_{\mu,\tilde\gamma}\tilde\gamma_\mu)^*, H^+_{\mu,\tilde\gamma}\tilde\gamma_\mu\rangle - \langle H^+_{\mu,\tilde\gamma}\tilde\gamma_\mu, H^+_{\mu,\tilde\gamma}\tilde\gamma_\mu\rangle \\ & & +o(\varepsilon) \end{array} \tag{4.21}$$

where $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^*B)$ is the Hilbert–Schmidt inner product.
Then, using the Cauchy-Schwarz inequality, we obtain

$$\begin{array}{rcl} \left|\langle (H^+_{\mu,\tilde\gamma}\tilde\gamma_\mu)^*, H^+_{\mu,\tilde\gamma}\tilde\gamma_\mu\rangle\right| & \leq & \langle (H^+_{\mu,\tilde\gamma}\tilde\gamma_\mu)^*, (H^+_{\mu,\tilde\gamma}\tilde\gamma_\mu)^*\rangle^{1/2}\langle H^+_{\mu,\tilde\gamma}\tilde\gamma_\mu, H^+_{\mu,\tilde\gamma}\tilde\gamma_\mu\rangle^{1/2} \\ & = & \langle H^+_{\mu,\tilde\gamma}\tilde\gamma_\mu, H^+_{\mu,\tilde\gamma}\tilde\gamma_\mu\rangle \end{array}$$

and

$$\mathcal{E}(\gamma^\varepsilon_p, \gamma^\varepsilon_n) - \mathcal{E}(\tilde\gamma_p, \tilde\gamma_n) \leq 0\,;$$

furthermore, the equality holds if and only if $(H^+_{\mu,\tilde\gamma}\tilde\gamma_\mu)^* = \pm H^+_{\mu,\tilde\gamma}\tilde\gamma_\mu$.
First, we consider the case $(H^+_{\mu,\tilde\gamma}\tilde\gamma_\mu)^* = H^+_{\mu,\tilde\gamma}\tilde\gamma_\mu$; this implies $\tilde\gamma_\mu H^+_{\mu,\tilde\gamma} = H^+_{\mu,\tilde\gamma}\tilde\gamma_\mu$ that means $\left[H^+_{\mu,\tilde\gamma}, \tilde\gamma_\mu\right] = 0$. Then we have a contradiction.
Second, if $(H^+_{\mu,\tilde\gamma}\tilde\gamma_\mu)^* = -H^+_{\mu,\tilde\gamma}\tilde\gamma_\mu$, then

$$\begin{array}{r} \tilde\gamma_\mu H^+_{\mu,\tilde\gamma} + H^+_{\mu,\tilde\gamma}\tilde\gamma_\mu = 0 \\ \tilde\gamma_\mu H^+_{\mu,\tilde\gamma} + \tilde\gamma_\mu H^+_{\mu,\tilde\gamma}\tilde\gamma_\mu = 0 \\ \tilde\gamma_\mu H^+_{\mu,\tilde\gamma} - H^+_{\mu,\tilde\gamma}\tilde\gamma_\mu = 0 \end{array}$$

that contradicts the hypothesis $\left[H^{+}_{\mu,\tilde\gamma},\tilde\gamma_\mu\right]\neq 0$ for $\mu=p,n$.
Finally, we can conclude that if $\left[H^{+}_{\mu,\tilde\gamma},\tilde\gamma_\mu\right]\neq 0$ for $\mu=p,n$, then we can construct $\gamma^\varepsilon\in\Gamma^{+}_{Z,N}$ such that

$$\mathcal{E}(\gamma_p^\varepsilon,\gamma_n^\varepsilon)-\mathcal{E}(\tilde\gamma_p,\tilde\gamma_n)<0,$$

and thus we have a contradiction with the fact that $\tilde\gamma$ minimizes the energy on $\Gamma^{+}_{Z,N}$.
This implies that $\left[H^{+}_{\mu,\tilde\gamma},\tilde\gamma_\mu\right]$ must be equal to zero and, as a consequence,

$$[H_{\mu,\tilde\gamma},\tilde\gamma_\mu]=0$$

for $\mu=p,n$.
As a conclusion, if $g_\sigma,g_\omega,g_\rho$ and $e$ are sufficiently small, $\tilde\Psi$ is a solution of the equations (1.26) and (1.27).

# Appendix : Proofs of lemma 3.4 and corollary 3.5

In this section we give the proofs of lemma 3.4 and corollary 3.5.

*Proof of lemma 3.4.* Given an $M\times M$ matrix $B=(b_{ij})$, we denote $\Phi\bullet B$ the right action of $B$ on $\Phi=(\varphi_1,\dots,\varphi_M)\in\left(L^2(\mathbb{R}^3)\right)^M$. More precisely,

$$(\Phi\bullet B):=\left(\sum_{i=1}^{M}b_{i1}\varphi_i,\dots,\sum_{i=1}^{M}b_{iM}\varphi_i\right)$$

and, by straightforward calculation, we obtain

$$\mathrm{Gram}_{L^2}(\Phi\bullet B)=B^*\mathrm{Gram}_{L^2}(\Phi)B$$

where $B^*$ denotes the conjugate transpose of $B$.
First of all, for $\mu=p,n$, we consider

$$\tilde\Psi_\mu=\Psi_\mu\bullet G_\mu^{-1/2}\tag{4.22}$$

and we observe that

$$\mathrm{Gram}_{L^2}\left(\tilde\Psi_p\right)=\mathbb{1}_Z,$$
$$\mathrm{Gram}_{L^2}\left(\tilde\Psi_n\right)=\mathbb{1}_N.$$

Second, we define

$$\tilde\Phi_p^+ = \Lambda^+_{p,\Psi}\tilde\Psi_p\bullet\left[\mathrm{Gram}_{L^2}\left(\Lambda^+_{p,\Psi}\tilde\Psi_p\right)\right]^{-1/2}\in\left(\Lambda^+_{p,\Psi}H^{1/2}\right)^Z,\tag{4.23}$$

$$\tilde\Phi_n^+ = \Lambda^+_{n,\Psi}\tilde\Psi_n\bullet\left[\mathrm{Gram}_{L^2}\left(\Lambda^+_{n,\Psi}\tilde\Psi_n\right)\right]^{-1/2}\in\left(\Lambda^+_{n,\Psi}H^{1/2}\right)^N.\tag{4.24}$$

Remark that $\mathrm{Gram}_{L^2}\left(\Lambda^+_{p,\Psi}\tilde{\Psi}_p\right)$ and $\mathrm{Gram}_{L^2}\left(\Lambda^+_{n,\Psi}\tilde{\Psi}_n\right)$ are invertible matrices thanks to the hypothesis ii. of the lemma.
Next, we look for $\left(\tilde{\Phi}^-_p, \tilde{\Phi}^-_n\right) \in \left(\Lambda^-_{p,\Psi}H^{1/2}\right)^Z \times \left(\Lambda^-_{n,\Psi}H^{1/2}\right)^N$ such that, taking

$$\begin{aligned}\Phi_p &= l_{\tilde{\Phi}^+_p}(\tilde{\Phi}^-_p) \bullet G_p^{1/2}\\ \Phi_n &= l_{\tilde{\Phi}^+_n}(\tilde{\Phi}^-_n) \bullet G_n^{1/2},\end{aligned}$$

we have

$$\Lambda^-_{p,\Psi}\Lambda^-_{p,\Phi}\Phi_p = 0, \tag{4.25}$$
$$\Lambda^-_{n,\Psi}\Lambda^-_{n,\Phi}\Phi_n = 0, \tag{4.26}$$

with $\Phi = (\Phi_p, \Phi_n)$ and $l_{\tilde{\Phi}^+_p}$, $l_{\tilde{\Phi}^+_n}$ defined by

$$l_{\tilde{\Phi}^+_\mu}(\tilde{\Phi}^-_\mu) := \left(\tilde{\Phi}^+_\mu + \tilde{\Phi}^-_\mu\right) \bullet \left[\mathrm{Gram}_{L^2}\left(\tilde{\Phi}^+_\mu + \tilde{\Phi}^-_\mu\right)\right]^{-1/2}$$

for $\mu = p, n$.
We observe that $l_{\tilde{\Phi}^+_p}$ and $l_{\tilde{\Phi}^+_n}$ are smooth maps from $\left(\Lambda^-_{p,\Psi}H^{1/2}\right)^Z$ to $\left(H^{1/2}\right)^Z$ and from $\left(\Lambda^-_{n,\Psi}H^{1/2}\right)^N$ to $\left(H^{1/2}\right)^N$ respectively; furthermore,

$$\begin{aligned}\mathrm{Gram}_{L^2}(\Phi_p) = G_p,\\ \mathrm{Gram}_{L^2}(\Phi_n) = G_n.\end{aligned}$$

Now, to prove the existence of $\tilde{\Phi}^-_p$ and $\tilde{\Phi}^-_n$, we apply the implicit function theorem.
We remark that the equations (4.25) and (4.26) can be written as $F(g, \tilde{\Phi}^-_p, \tilde{\Phi}^-_n) = 0$ where $F$ is a nonlinear $\mathcal{C}^1$ operator and $g = (g_\sigma, g_\omega, g_\rho, e)$. In particular,

$$\begin{aligned}&\Lambda^-_{\mu,\Psi}\Lambda^-_{\mu,\Phi}\Phi_\mu =\\ &\Lambda^-_{\mu,\Psi}\Phi_\mu + \Lambda^-_{\mu,\Psi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(H_{\mu,\Psi} - i\eta)^{-1}(H_{\mu,\Phi} - H_{\mu,\Psi})(H_{\mu,\Phi} - i\eta)^{-1}\Phi_\mu\, d\eta\right)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\Lambda^-_{\mu,\Psi}\Phi_\mu &= \Lambda^-_{\mu,\Psi}\left(\tilde{\Phi}^+_\mu + \tilde{\Phi}^-_\mu\right) \bullet \left[\mathbb{1} + \mathrm{Gram}_{L^2}\left(\tilde{\Phi}^-_\mu\right)\right]^{-1/2} \bullet G_\mu^{1/2}\\ &= \tilde{\Phi}^-_\mu \bullet \left[\mathbb{1} + \mathrm{Gram}_{L^2}\left(\tilde{\Phi}^-_\mu\right)\right]^{-1/2} \bullet G_\mu^{1/2}.\end{aligned}$$

Hence, we define

$$F(g, \tilde{\Phi}^-_p, \tilde{\Phi}^-_n) = \begin{pmatrix} F_p(g, \tilde{\Phi}^-_p, \tilde{\Phi}^-_n) \\ F_n(g, \tilde{\Phi}^-_p, \tilde{\Phi}^-_n)\end{pmatrix}$$

where

$$F_p(g,\tilde\Phi_p^-,\tilde\Phi_n^-)=\tilde\Phi_p^-\bullet\left[\mathbb{1}+\mathrm{Gram}_{L^2}\left(\tilde\Phi_p^-\right)\right]^{-1/2}\bullet G_p^{1/2}+K_p(g,\tilde\Phi_p^-,\tilde\Phi_n^-), \tag{4.27}$$

$$F_n(g,\tilde\Phi_p^-,\tilde\Phi_n^-)=\tilde\Phi_n^-\bullet\left[\mathbb{1}+\mathrm{Gram}_{L^2}\left(\tilde\Phi_n^-\right)\right]^{-1/2}\bullet G_n^{1/2}+K_n(g,\tilde\Phi_p^-,\tilde\Phi_n^-) \tag{4.28}$$

and

$$K_\mu(g,\tilde\Phi_p^-,\tilde\Phi_n^-)=\Lambda^-_{\mu,\Psi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(H_{\mu,\Psi}-i\eta)^{-1}(H_{\mu,\Phi}-H_{\mu,\Psi})(H_{\mu,\Phi}-i\eta)^{-1}\Phi_\mu\,d\eta$$

for $\mu=p,n$.
Using the definitions (1.26) and (1.27), we obtain

$$K_p(0,\tilde\Phi_p^-,\tilde\Phi_n^-)=K_n(0,\tilde\Phi_p^-,\tilde\Phi_n^-)=0,$$

and then $F(0,0,0)=0$.
Now, to apply the implicit function theorem, we have to check that

$$F:\mathbb{R}^4\times\left(\Lambda^-_{p,\Psi}H^{1/2}\right)^Z\times\left(\Lambda^-_{n,\Psi}H^{1/2}\right)^N\to\left(\Lambda^-_{p,\Psi}H^{1/2}\right)^Z\times\left(\Lambda^-_{n,\Psi}H^{1/2}\right)^N$$

is a $\mathcal{C}^1$ operator and $D_2F(0,0,0):=F_{\tilde\Phi_p^-,\tilde\Phi_n^-}(0,0,0)$ is an isomorphism. We remark that

$$D_2F(0,0,0)(\chi,\tau)=\begin{pmatrix}\chi\bullet G_p^{1/2}\\ \tau\bullet G_n^{1/2}\end{pmatrix}, \tag{4.29}$$

and then it is an isomorphism, since $G_p^{1/2}$ and $G_n^{1/2}$ are invertible matrices. Proceeding as above, we can easily show that $F$ is well defined in $\left(\Lambda^-_{p,\Psi}H^{1/2}\right)^Z\times\left(\Lambda^-_{n,\Psi}H^{1/2}\right)^N$.
Next, we have to prove that $F(g,\tilde\Phi_p^-,\tilde\Phi_n^-)$ is $\mathcal{C}^1$; by classical arguments, it is enough to show that for $(\chi,\tau)\in\left(\Lambda^-_{p,\Psi}H^{1/2}\right)^Z\times\left(\Lambda^-_{n,\Psi}H^{1/2}\right)^N$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_p(g,\tilde\Phi_p^-,\tilde\Phi_n^-)}{\partial\tilde\Phi_p^-}\chi\in\left(\Lambda^-_{p,\Psi}H^{1/2}\right)^Z,\\
&\frac{\partial F_p(g,\tilde\Phi_p^-,\tilde\Phi_n^-)}{\partial\tilde\Phi_n^-}\tau\in\left(\Lambda^-_{p,\Psi}H^{1/2}\right)^Z,\\
&\frac{\partial F_n(g,\tilde\Phi_p^-,\tilde\Phi_n^-)}{\partial\tilde\Phi_p^-}\chi\in\left(\Lambda^-_{n,\Psi}H^{1/2}\right)^N,\\
&\frac{\partial F_n(g,\tilde\Phi_p^-,\tilde\Phi_n^-)}{\partial\tilde\Phi_n^-}\tau\in\left(\Lambda^-_{n,\Psi}H^{1/2}\right)^N,
\end{aligned}$$

and we leave the details of this part to the reader.
Then, applying the implicit function theorem, we conclude that there exist $U\subset\mathbb{R}^4$,

$V_p \subset \left(\Lambda^-_{p,\Psi} H^{1/2}\right)^Z$ and $V_n \subset \left(\Lambda^-_{n,\Psi} H^{1/2}\right)^N$ neighborhoods of 0, and a unique continuously differentiable function $f : U \to V_p \times V_n$ such that $F(g, f(g)) = 0$; that means that for $g_\sigma, g_\omega, g_\rho, e$ sufficiently small, there exists $(\tilde{\Phi}^-_p, \tilde{\Phi}^-_n) \in V_p \times V_n$ such that

$$\begin{aligned}\Lambda^-_{p,\Psi}\Lambda^-_{p,\Phi}\Phi_p &= 0,\\ \Lambda^-_{n,\Psi}\Lambda^-_{n,\Phi}\Phi_n &= 0.\end{aligned}$$

In particular, $U = \bar{B}(0,\gamma)$, $V_p = \bar{B}(0,\eta)$ and $V_n = \bar{B}(0,\eta)$ with $\gamma, \eta > 0$ and from the proof of the implicit function theorem, we know that, fixed $\eta$, we can choose $\gamma$ such that $f : U \to V_p \times V_n$. Then we take $\eta$ and $\gamma$ such that $D_2F(g,\chi,\tau)$ is invertible $\forall (g,\chi,\tau) \in U \times V_p \times V_n$.

Now, we denote $B_p := \left[\mathrm{Gram}_{L^2}\left(\Lambda^+_{p,\Psi}\tilde{\Psi}_p\right)\right]^{1/2}$ and we remark that

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_p &= \Lambda^+_{p,\Psi}\tilde{\Psi}_p + \Lambda^-_{p,\Psi}\tilde{\Psi}_p\\ &= \tilde{\Phi}^+_p \bullet B_p + \Lambda^-_{p,\Psi}\tilde{\Psi}_p.\end{aligned}$$

So we may write

$$\tilde{\Psi}_p \bullet B_p^{-1} = \tilde{\Phi}^+_p + \Lambda^-_{p,\Psi}\tilde{\Psi}_p \bullet B_p^{-1}.$$

As a consequence,

$$l_{\tilde{\Phi}^+_p}(\Lambda^-_{p,\Psi}\tilde{\Psi}_p \bullet B_p^{-1}) = (\tilde{\Psi}_p \bullet B_p^{-1}) \bullet \left[\mathrm{Gram}_{L^2}\left(\tilde{\Psi}_p \bullet B_p^{-1}\right)\right]^{-1/2}.$$

We can easily compute

$$\mathrm{Gram}_{L^2}(\tilde{\Psi}_p \bullet B_p^{-1}) = (B_p^*)^{-1}\mathrm{Gram}_{L^2}(\tilde{\Psi}_p)B_p^{-1} = (B_pB_p^*)^{-1}$$

where $B_p^*$ denotes the conjugate transpose of $B_p$. Since $B_p$ is hermitian,

$$\mathrm{Gram}_{L^2}(\tilde{\Psi}_p \bullet B_p^{-1}) = (B_p^2)^{-1} = (B_p^{-1})^2,$$

$$l_{\tilde{\Phi}^+_p}(\Lambda^-_{p,\Psi}\tilde{\Psi}_p \bullet B_p^{-1}) = (\tilde{\Psi}_p \bullet B_p^{-1}) \bullet (B_p^2)^{1/2} = \tilde{\Psi}_p$$

and

$$l_{\tilde{\Phi}^+_p}(\Lambda^-_{p,\Psi}\tilde{\Psi}_p \bullet B_p^{-1}) \bullet G_p^{1/2} = \Psi_p.$$

Hence

$$\|\Phi_p - \Psi_p\|_{(H^{1/2})^Z} = \left\|\left[l_{\tilde{\Phi}^+_p}(\tilde{\Phi}^-_p) - l_{\tilde{\Phi}^+_p}(\tilde{\Psi}^-_p \bullet B_p^{-1})\right] \bullet G_p^{1/2}\right\|_{(H^{1/2})^Z} \tag{4.30}$$

with $\tilde{\Psi}^-_p = \Lambda^-_{p,\Psi}\tilde{\Psi}_p$. In the same way,

$$\|\Phi_n - \Psi_n\|_{(H^{1/2})^N} = \left\|\left[l_{\tilde{\Phi}^+_n}(\tilde{\Phi}^-_n) - l_{\tilde{\Phi}^+_n}(\tilde{\Psi}^-_n \bullet B_n^{-1})\right] \bullet G_n^{1/2}\right\|_{(H^{1/2})^N} \tag{4.31}$$

with $\tilde{\Psi}_n^- = \Lambda_{n,\Psi}^- \tilde{\Psi}_n$ and $B_n := \left[\mathrm{Gram}_{L^2}\left(\Lambda_{n,\Psi}^+ \tilde{\Psi}_n\right)\right]^{1/2}$.
We remind that the maps $l_{\tilde{\Phi}_p^+}$ and $l_{\tilde{\Phi}_n^+}$ are smooth; then, to have an estimation of the norms (4.30) and (4.31), it is enough to estimate

$$\left\|\tilde{\Phi}_p^- - \tilde{\Psi}_p^- \bullet B_p^{-1}\right\|_{(H^{1/2})^Z} \text{ and } \left\|\tilde{\Phi}_n^- - \tilde{\Psi}_n^- \bullet B_n^{-1}\right\|_{(H^{1/2})^N}.$$

Indeed, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_p, \delta_n > 0$ such that

$$\left\|\tilde{\Phi}_p^- - \tilde{\Psi}_p^- \bullet B_p^{-1}\right\|_{(H^{1/2})^Z} \leq \delta_p \Rightarrow \left\|l_{\tilde{\Phi}_p^+}(\tilde{\Phi}_p^-) - l_{\tilde{\Phi}_p^+}(\tilde{\Psi}_p^- \bullet B_p^{-1})\right\|_{(H^{1/2})^Z} \leq \varepsilon$$

and

$$\left\|\tilde{\Phi}_n^- - \tilde{\Psi}_n^- \bullet B_n^{-1}\right\|_{(H^{1/2})^N} \leq \delta_n \Rightarrow \left\|l_{\tilde{\Phi}_n^+}(\tilde{\Phi}_n^-) - l_{\tilde{\Phi}_n^+}(\tilde{\Psi}_n^- \bullet B_n^{-1})\right\|_{(H^{1/2})^N} \leq \varepsilon.$$

Now, for $\tilde{\delta}$ small enough, $(\tilde{\Psi}_p^- \bullet B_p^{-1}, \tilde{\Psi}_n^- \bullet B_n^{-1}) \in V_p \times V_n$; then $F(g, \tilde{\Psi}_p^- \bullet B_p^{-1}, \tilde{\Psi}_n^- \bullet B_n^{-1})$ is differentiable and $D_2F(g, \tilde{\Psi}_p^- \bullet B_p^{-1}, \tilde{\Psi}_n^- \bullet B_n^{-1}) := Q$ is invertible $\forall g \in U$.
Using this fact, we can write

$$F(g, \tilde{\Phi}_p^-, \tilde{\Phi}_n^-) = F(g, \tilde{\Psi}_p^- \bullet B_p^{-1}, \tilde{\Psi}_n^- \bullet B_n^{-1}) + Q(\tilde{\Phi}^- - \tilde{\Psi}^- \bullet B^{-1}) + u(g, \tilde{\Phi}_p^-, \tilde{\Phi}_n^-)$$

with

$$\tilde{\Phi}^- = (\tilde{\Phi}_p^-, \tilde{\Phi}_n^-) = f(g),\ \ \tilde{\Psi}^- = (\tilde{\Psi}_p^-, \tilde{\Psi}_n^-),\ \ B = \begin{pmatrix} B_p & 0 \\ 0 & B_n \end{pmatrix}$$

and

$$\lim_{y \to \tilde{\Psi}^- \bullet B^{-1}} \frac{\|u(g,y)\|_{(H^{1/2})^A}}{\left\|y - \tilde{\Psi}^- \bullet B^{-1}\right\|_{(H^{1/2})^A}} = 0, \tag{4.32}$$

and this implies

$$(\tilde{\Phi}^- - \tilde{\Psi}^- \bullet B^{-1}) = -Q^{-1}F(g, \tilde{\Psi}_p^- \bullet B_p^{-1}, \tilde{\Psi}_n^- \bullet B_n^{-1}) - Q^{-1}u(g, \tilde{\Phi}_p^-, \tilde{\Phi}_n^-).$$

Moreover, thanks to (4.32), we know that there exists $\bar{\delta} > 0$, such that

$$\|u(g,y)\|_{(H^{1/2})^A} \leq \frac{1}{2\|Q^{-1}\|}\left\|y - \tilde{\Psi}^- \bullet B^{-1}\right\|_{(H^{1/2})^A}$$

if $\left\|y - \tilde{\Psi}^- \bullet B^{-1}\right\|_{(H^{1/2})^A} \leq \bar{\delta}$.
Then, choosing $\eta \leq \frac{\bar{\delta}}{2}$, we have

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{\Phi}^- - \tilde{\Psi}^- \bullet B^{-1}\right\|_{(H^{1/2})^A} \;\leq\; & \|Q^{-1}\|\left\|F(g, \tilde{\Psi}_p^- \bullet B_p^{-1}, \tilde{\Psi}_n^- \bullet B_n^{-1})\right\|_{(H^{1/2})^A} \\ & + \frac{1}{2}\left\|\tilde{\Phi}^- - \tilde{\Psi}^- \bullet B^{-1}\right\|_{(H^{1/2})^A}\end{aligned}$$

and

$$\left\|\tilde{\Phi}^- - \tilde{\Psi}^- \bullet B^{-1}\right\|_{(H^{1/2})^A} \leq C \left\| \begin{pmatrix} \Lambda^-_{p,\Psi}\Psi_p \\ \Lambda^-_{n,\Psi}\Psi_n \end{pmatrix} \right\|_{(H^{1/2})^A} \leq C\tilde{\delta}. \tag{4.33}$$

Finally, choosing $\tilde{\delta} \leq \frac{\min(\delta_p,\delta_n)}{C}$, we obtain

$$\|\Phi_p - \Psi_p\|_{(H^{1/2})^Z} \leq \varepsilon \tag{4.34}$$

and

$$\|\Phi_n - \Psi_n\|_{(H^{1/2})^N} \leq \varepsilon. \tag{4.35}$$

To conclude the proof of the lemma, we have to show that

$$\begin{aligned} \Lambda^-_{p,\Psi} &: \mathrm{Im}\Lambda^-_{p,\Phi} \to \mathrm{Im}\Lambda^-_{p,\Psi} \\ \Lambda^-_{n,\Psi} &: \mathrm{Im}\Lambda^-_{n,\Phi} \to \mathrm{Im}\Lambda^-_{n,\Psi} \end{aligned}$$

are one-to-one operators. We remark that

$$\begin{aligned} \left\|\Lambda^-_{p,\Phi}\Lambda^-_{p,\Psi} - I_{\mathrm{Im}\Lambda^-_{p,\Phi}}\right\| &= \left\|\Lambda^-_{p,\Phi}\Lambda^-_{p,\Psi} - \Lambda^-_{p,\Phi}\right\| = \left\|\Lambda^-_{p,\Phi}\left(\Lambda^-_{p,\Psi} - \Lambda^-_{p,\Phi}\right)\right\| \\ &\leq \left\|\Lambda^-_{p,\Phi}\right\| \left\|\Lambda^-_{p,\Psi} - \Lambda^-_{p,\Phi}\right\| \leq \left\|\Lambda^-_{p,\Psi} - \Lambda^-_{p,\Phi}\right\| < 1. \end{aligned}$$

As a consequence, $\Lambda^-_{p,\Phi}\Lambda^-_{p,\Psi}$ is an invertible operator and $\Lambda^-_{p,\Psi}$ is one-to-one from $\mathrm{Im}\Lambda^-_{p,\Phi}$ into $\mathrm{Im}\Lambda^-_{p,\Psi}$. In the same way, we can prove that $\Lambda^-_{n,\Psi}$ is one-to-one from $\mathrm{Im}\Lambda^-_{n,\Phi}$ into $\mathrm{Im}\Lambda^-_{n,\Psi}$.
In conclusion,

$$\begin{aligned} \Lambda^-_{p,\Phi}\Phi_p &= 0, \\ \Lambda^-_{n,\Phi}\Phi_n &= 0. \end{aligned}$$

□

*Proof of corollary 3.5.* To prove this corollary, we apply lemma 3.4 to $\Psi^k$ for any $k \in \mathbb{N}$ and, to obtain (3.31) and (3.32), we use the inequalities (4.30), (4.31) and (4.33).

□

## Acknowledgment

The author would like to thank Professor Eric Séré and Professor Bernhard Ruf for helpful discussions.
This work was partially supported by the Grant ANR-10-BLAN 0101 of the French Ministry of Research.

# Bibliography

[BE98] Burenkov, V.I., Evans, W.D. On the evaluation of the norm of an integral operator associated with the stability of one-electron atoms. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 128(5), 993–1005, 1998.

[BSM89] Bottcher, C., Strayer, M., McGrory, J., eds. *Nuclear and atomic physics at one gigaflop : proceedings of the Nuclear and Atomic Physics Conference at One Gigaflop, held at Oak Ridge, Tennessee, April 13–16, 1988.* Harwood Academic Publishers, 1989.

[ELS08] Esteban, M.J., Lewin, M., Séré, E. Variational methods in relativistic quantum mechanics. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 45(4), 535–593, 2008.

[ES99] Esteban, M.J., Séré, E. Solutions of the Dirac-Fock Equations for Atoms and Molecules. *Commun. Math. Phys.*, 203, 499–530, 1999.

[ES01] Esteban, M.J., Séré, E. Nonrelativistic Limit of the Dirac-Fock Equations. *Ann. Henri Poincaré*, 2, 941–961, 2001.

[GL86] Gogny, D., Lions, P.L. Hartree-Fock theory in nuclear physics. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 20(4), 571–637, 1986.

[GM96] Greiner, W., Maruhn, J. *Nuclear Models.* Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Gri87] Griffiths, D. *Introduction to elementary particles.* John Wiley & Sons, 1987.

[Her77] Herbst, I.W. Spectral Theory of the Operator $(p^2+m^2)^{1/2} - Ze^2/r$. *Commun. Math. Phys.*, 53, 285–294, 1977.

[Kat80] Kato, T. *Perturbation Theory for Linear Operators.* Berlin : Springer-Verlag, 1980.

[Lio84a] Lions, P.L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1(2), 109–145, 1984.

[Lio84b] Lions, P.L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. II. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1(4), 223–283, 1984.

[LL10] Lenzmann, E., Lewin, M. Minimizers for the Hartree-Fock-Bogoliubov theory of neutron stars and white dwarfs. *Duke Math. J.*, 152(2), 257–315, 2010.

[LL11] Lenzmann, E., Lewin, M. On singularity formation for the $L^2$-critical boson star equation, 2011. Preprint.

[MTZ+06] Meng, J., Toki, H., Zhou, S., Zhang, S., Long, W., Geng, L. Relativistic continuum Hartree Bogoliubov theory for ground-state properties of exotic nuclei. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 57, 470–563, 2006.

[Rei89] Reinhard, P.G. The relativistic mean-field description of nuclei and nuclear dynamics. *Rep. Prog. Phys.*, 52, 439–514, 1989.

[Rin96] Ring, P. Relativistic Mean Field Theory in Finite Nuclei. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 37, 193–236, 1996.

[Tha92] Thaller, B. *The Dirac Equation.* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1st edition, 1992.

[Tix97] Tix, C. Lower bound for the ground state energy of the no-pair Hamiltonian. *Phys. Lett. B*, 405, 293–296, 1997.

[Tix98] Tix, C. Strict positivity of a relativistic Hamiltonian due to Brown and Ravenhall. *Bull. London Math. Soc.*, 30(3), 283–290, 1998.

# Bibliographie générale


[1] Adler, R., Bazin, M., Schiffer, M. *Introduction to general relativity.* McGraw-Hill, 2nd edition, 1975.

[2] Bird, E.J. *A proof of existence of particle-like solutions of Einstein Dirac Equations.* Ph.D. thesis, University of Michigan, 2005.

[3] Bjorken, J.D., Drell, S.D. *Relativistic Quantum Mechanics.* McGraw-Hill, 1964.

[4] Bjorken, J.D., Drell, S.D. *Relativistic Quantum Fields.* McGraw-Hill, 1965.

[5] Bleecker, D. *Gauge Theory and Variational Principles.* Dover Publications, 2005.

[6] Bottcher, C., Strayer, M., McGrory, J., editors. *Nuclear and atomic physics at one gigaflop : proceedings of the Nuclear and Atomic Physics Conference at One Gigaflop, held at Oak Ridge, Tennessee, April 13–16, 1988.* Harwood Academic Publishers, 1989.

[7] Burenkov, V.I., Evans, W.D. On the evaluation of the norm of an integral operator associated with the stability of one-electron atoms. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 128(5), 993–1005, 1998.

[8] Dirac, P.A.M. *The Principles of Quantum Mechanics (International Series of Monographs on Physics).* Oxford University Press, USA, 4 edition, 1982.

[9] Dirac, P.A.M. Theory of electrons and positrons. Nobel Lecture, 1933.

[10] Esteban, M.J., Lewin, M., Séré, E. Variational methods in relativistic quantum mechanics. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 45(4), 535–593, 2008.

[11] Esteban, M.J., Séré, E. Solutions of the Dirac-Fock Equations for Atoms and Molecules. *Commun. Math. Phys.*, 203, 499–530, 1999.

[12] Esteban, M.J., Séré, E. Nonrelativistic Limit of the Dirac-Fock Equations. *Ann. Henri Poincaré*, 2, 941–961, 2001.

[13] Finster, F. Local U(2,2) symmetry in relativistic quantum mechanics. *J. Math. Phys.*, 39(12), 6276–6290, 1998. doi :10.1063/1.532638.

[14] Finster, F. *The Principle of the Fermionic Projector*, volume 35 of *AMS/IP studies in advanced mathematics*. International Press, 2006.

[15] Finster, F., Smoller, J., Yau, S.T. Particle-like solutions of the Einstein–Dirac–Maxwell equations. *Phys. Lett. A*, 259(6), 431–436, 1999.

[16] Finster, F., Smoller, J., Yau, S.T. Particlelike solutions of the Einstein-Dirac equations. *Phys. Rev. D*, 59, 1999.

[17] Gogny, D., Lions, P.L. Hartree-Fock theory in nuclear physics. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 20(4), 571–637, 1986.

[18] Greiner, W., Maruhn, J. *Nuclear Models*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[19] Griffiths, D. *Introduction to elementary particles*. John Wiley & Sons, 1987.

[20] Guan, M. Solitary Wave Solutions for the Nonlinear Dirac Equations, 2008. Preprint.

[21] Hainzl, C., Lewin, M., Séré, E. Existence of a Stable Polarized Vacuum in the Bogoliubov-Dirac-Fock Approximation. *Commun. Math. Phys.*, 257, 515–562, 2005.

[22] Herbst, I.W. Spectral Theory of the Operator $(p^2 + m^2)^{1/2} - Ze^2/r$. *Commun. Math. Phys.*, 53, 285–294, 1977.

[23] Kato, T. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Berlin : Springer-Verlag, 1980.

[24] Lang, S. *Fundamentals of Differential Geometry*. Springer, 1999.

[25] Lenzmann, E. Uniqueness of ground states for pseudo-relativistic Hartree equations, 2008. Preprint.

[26] Lenzmann, E., Lewin, M. Minimizers for the Hartree-Fock-Bogoliubov theory of neutron stars and white dwarfs. *Duke Math. J.*, 152(2), 257–315, 2010.

[27] Lenzmann, E., Lewin, M. On singularity formation for the $L^2$-critical boson star equation, 2011. Preprint.

[28] Lieb, E.H. Existence and Uniqueness of the Minimizing Solution of Choquard's Nonlinear Equation. *Stud. Appl. Math.*, 57, 93–105, 1977.

[29] Lions, P.L. The Choquard equation and related questions. *Nonlinear Anal.*, 4(6), 1063–1073, 1980.

[30] Lions, P.L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1(2), 109–145, 1984.

[31] Lions, P.L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. II. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1(4), 223–283, 1984.

[32] Meng, J., Toki, H., Zhou, S., Zhang, S., Long, W., Geng, L. Relativistic continuum Hartree Bogoliubov theory for ground-state properties of exotic nuclei. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 57, 470–563, 2006.

[33] Messiah, A. *Mécanique quantique. Tome 2.* Dunod, Paris, 1995.

[34] Ounaies, H. Perturbation method for a class of non linear Dirac equations. *Differential Integral Equations*, 13(4-6), 707–720, 2000.

[35] Reinhard, P.G. The relativistic mean-field description of nuclei and nuclear dynamics. *Rep. Prog. Phys.*, 52, 439–514, 1989.

[36] Renardy, M., Rogers, R.C. *An Introduction to Partial Differential Equations*, 337–338. Springer, 1993.

[37] Ring, P. Relativistic Mean Field Theory in Finite Nuclei. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 37, 193–236, 1996.

[38] Rota Nodari, S. Perturbation method for particle-like solutions of the Einstein–Dirac equations. *Ann. Henri Poincaré*, 10(7), 1377–1393, 2010.

[39] Serot, B.D., Walecka, J.D. Recent Progress in Quantum Hadrodynamics. *Int. J. Mod. Phys. E*, 6(4), 515–631, 1997.

[40] Stuart, C.A. Bifurcation from the Essential Spectrum. In M. Matzeu, A. Vignoli, editors, *Topological Nonlinear Analysis II. Degree, Singularity and Variations*, volume 27 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. Birkhäuser, 1997.

[41] Stuart, D. Existence and Newtonian limit of nonlinear bound states in the Einstein–Dirac system. *J. Math. Phys.*, 51, 032501, 2010.

[42] Thaller, B. *The Dirac Equation.* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1st edition, 1992.

[43] Tix, C. Lower bound for the ground state energy of the no-pair Hamiltonian. *Phys. Lett. B*, 405, 293–296, 1997.

[44] Tix, C. Strict positivity of a relativistic Hamiltonian due to Brown and Ravenhall. *Bull. London Math. Soc.*, 30(3), 283–290, 1998.

[45] Walecka, J.D. A theory of highly condensed matter. *Ann. Physics*, 83(2), 491 – 529, 1974.

[46] Walecka, J.D. *Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics*. Imperial College Press and World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2nd edition, 2004.

## Étude mathématique de modèles non linéaires issus de la physique quantique relativiste

**Résumé :** Cette thèse est consacrée à l'étude de deux modèles quantiques relativistes non linéaires.

Dans la première partie, nous démontrons par une méthode de perturbation l'existence de solutions des équations d'Einstein–Dirac–Maxwell pour un système statique, à symétrie sphérique de deux fermions dans un état singulet et avec un couplage électromagnétique faible.

Dans la seconde partie, nous étudions un modèle de champ moyen relativiste qui décrit le comportement des nucléons à l'intérieur du noyau atomique. Nous proposons une condition qui garantit l'existence d'une solution d'énergie minimale des équations de champ moyen relativiste dans un cas statique ; plus précisément, nous obtenons un résultat qui lie l'existence de points critiques d'une fonctionnelle d'énergie fortement indéfinie et les inégalités de concentration-compacité strictes.

**Mots clés :** analyse non linéaire, méthodes variationnelles, physique mathématique, opérateur de Dirac, relativité générale, méthode de perturbation, champ moyen relativiste, physique nucléaire, lemme de concentration-compacité.

## A mathematical study of nonlinear models from relativistic quantum physics

**Abstract:** This thesis is devoted to the study of two nonlinear relativistic quantum models.

In the first part, we prove by a perturbation method the existence of solutions of the coupled Einstein–Dirac–Maxwell equations for a static, spherically symmetric system of two fermions in a singlet spinor state and for a weak electromagnetic coupling.

In the second part, we study a relativistic mean-field model that describes the behavior of nucleons in the atomic nucleus. We provide a condition that ensures the existence of a ground state solution of the relativistic mean-field equations in a static case; in particular, we relate the existence of critical points of a strongly indefinite energy functional to strict concentration-compactness inequalities.

**Keywords:** nonlinear analysis, variational methods, mathematical physics, Dirac operator, general relativity, perturbation method, relativistic mean-field, nuclear physics, concentration-compactness lemma.