



Università degli studi di Milano

Scuola di Dottorato in Fisica, Astrofisica e Fisica Applicata

Dipartimento di Fisica

Corso di Dottorato di Ricerca in Fisica, Astrofisica e Fisica Applicata  
Ciclo XXIII

PROPRIETÀ DELLA MATERIA SUPERFLUIDA  
IN PRESENZA DEL RETICOLO NUCLEARE  
NELLA CROSTA INTERNA DELLE STELLE DI NEUTRONI

Settore Scientifico disciplinare FIS/04

**Relatore:** Prof. Pierre Pizzochero

**Coordinatore:** Prof. Marco Bersanelli

**Tesi di dottorato di:**  
Fabrizio GRILL

Anno Accademico 2009 - 2010



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Evoluzione stellare e stelle di neutroni</b>	<b>7</b>
2.1	Formazione stellare . . . . .	7
2.2	Stelle in sequenza principale . . . . .	9
2.3	Esplosione di Supernova . . . . .	11
2.4	Stelle di neutroni . . . . .	13
2.4.1	Struttura delle stelle di neutroni . . . . .	14
2.4.2	Equazioni di stato e massa limite . . . . .	19
2.4.3	Proprietà magnetiche e proprietà di rotazione . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Teoria della superfluidità</b>	<b>23</b>
3.1	Teoria Hartree-Fock (HF) . . . . .	24
3.2	Teoria Bardeen-Cooper-Shrieffer (BCS) . . . . .	24
3.3	Teoria Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB) . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Struttura della crosta interna</b>	<b>33</b>
4.1	Studi precedenti . . . . .	33
4.2	Energia delle celle di Wigner-Seitz . . . . .	36
4.3	$\beta$ -equilibrio e minimizzazione dell'energia . . . . .	38
4.4	Risultati . . . . .	39
4.4.1	Dipendenza dall'interazione di Skyrme . . . . .	40
4.4.2	Dipendenza dall'interazione di Pairing . . . . .	44
4.4.3	Finite size correction . . . . .	50
4.5	Conclusioni . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Calore specifico nella crosta interna</b>	<b>57</b>
5.1	Studi precedenti . . . . .	57
5.2	Modello proposto e risultati ottenuti . . . . .	59
5.3	Raffreddamento . . . . .	69
5.3.1	Modello di raffreddamento . . . . .	70
5.3.2	Risultati ottenuti . . . . .	72
5.4	Conclusioni . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Pinning efficace</b>	<b>81</b>
6.1	Modello a vortici per i pulsar glitches . . . . .	81
6.2	Precedenti modelli di legame . . . . .	83
6.3	Modello studiato . . . . .	86

6.3.1	Studio della lunghezza del vortice . . . . .	86
6.3.2	Energia di dislocazione del nucleo . . . . .	88
6.3.3	Energia di legame in condizione di nuclear pinning . . . . .	90
6.3.4	Collective pinning . . . . .	94
6.3.5	Numero di siti di pinning . . . . .	96
6.3.6	Forza di pinning . . . . .	101
6.3.7	Interstitial pinning . . . . .	103
6.4	Risultati . . . . .	106
6.4.1	Dimensioni del quadrato di depinning . . . . .	108
6.4.2	Approssimazione per lo studio di vortici con $L > 1000 R_{ws}$ . . . . .	110
6.4.3	Dipendenza dai parametri del modello . . . . .	115
6.4.4	Confronto coi modelli precedenti . . . . .	117
6.5	Conclusioni . . . . .	120
<b>A</b>	<b>Parametrizzazione dell'interazione</b>	<b>133</b>
A.1	Interazione di Skyrme . . . . .	133
A.2	Interazione di Pairing . . . . .	135
<b>B</b>	<b>Calcolo dell'energia coulombiana</b>	<b>139</b>
<b>C</b>	<b>Parametrizzazione del calore specifico</b>	<b>143</b>
<b>D</b>	<b>Rotazione superfluida</b>	<b>147</b>
<b>E</b>	<b>Energia di pinning per sito</b>	<b>149</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

Uno dei maggiori quesiti a cui la moderna fisica nucleare cerca di rispondere riguarda il comportamento della materia in condizioni estreme di temperatura e densità. Questo studio risulta essere però un problema complesso, che richiede la collaborazione di diversi ambiti di ricerca. La materia a temperature estreme è infatti analizzata tramite lo studio cosmologico delle condizioni in cui si trovava l'universo dopo la sua formazione, mentre lo studio della materia ad alte densità e temperature è svolto analizzando collisioni tra ioni pesanti, rese possibili grazie alla costruzione di potenti acceleratori di particelle.

Lo studio della materia in condizioni di estrema densità, in cui si inseriscono i lavori che saranno presentati in questa tesi, viene svolto, invece, tramite l'osservazione di particolari oggetti astrofisici compatti, chiamati Stelle di Neutroni. Queste particolari stelle sono, infatti, caratterizzate da una massa paragonabile a quella solare (tipicamente  $1.4 M_{\odot}$ ), compressa però in un raggio di circa dieci chilometri e, di conseguenza, nella regione centrale presentano densità addirittura superiori a quella nucleare ( $\rho_0 = 2.8 \cdot 10^{14} g \text{ cm}^{-3}$ ), condizione non raggiungibile nei laboratori terrestri in cui questo studio non risulta quindi possibile.

Lo studio di questi oggetti non è però semplice in quanto non risulta possibile osservare direttamente la materia che si trova al loro interno, che deve essere quindi studiata indirettamente analizzando l'unica grandezza osservabile: la radiazione elettromagnetica emessa dalla superficie. L'osservazione di questa radiazione elettromagnetica permette comunque di avere importanti informazioni sulle proprietà delle stelle studiate: dalla frequenza della radiazione emessa è infatti possibile determinare con una certa precisione la temperatura superficiale della stella, che può essere usata nello studio dei processi di raffreddamento, inoltre, qualora queste stelle risultino ruotanti e magnetizzate, è possibile che la loro emissione risulti pulsata ed in tal caso la frequenza di questa pulsazione è studiata essere pari alla frequenza di rotazione, che può quindi essere determinata con precisione.

Questo particolare tipo di stelle di neutroni, dette Pulsar, è stato largamente osservato negli ultimi trent'anni ed alcune di esse, come ad esempio Crab e Vela, sono state addirittura costantemente monitorate. Da questi studi è quindi stato possibile osservare che la loro velocità di rotazione è in costante diminuzione a causa della perdita di energia dovuta alla continua emissione di radiazione elettromagnetica (e probabilmente gravitazionale). Nella rotazione di alcune di esse sono però state periodicamente osservate delle brevi anomalie in cui la loro rotazione, invece che

continuare a decelerare, compiva una intensa accelerazione, detta Pulsar Glitch, le cui cause devono essere ricercate nel comportamento della materia nucleare presente al loro interno e non ad eventuali sollecitazioni esterne, in quanto questo fenomeno è stato osservato anche in stelle isolate. Successivamente al glitch vi è poi un periodo di rilassamento in cui la velocità di rotazione della stella ha una rapida decrescita, che la porta ad avere un andamento analogo a quello precedente il glitch: terminato questo periodo l'unica conseguenza evidente del fenomeno occorso risulta quindi essere una velocità di rotazione lievemente più elevata (Fig. 2.8).

Nei lavori presentati in questa tesi sono state studiate le proprietà superfluide della materia presente nella Crosta Interna: una particolare regione di queste stelle, formata da un reticolo nucleare immerso in un gas di neutroni degeneri. È, infatti, opinione generale che i neutroni liberi presenti in questa regione si accoppino formando quasi-particelle di carattere bosonico che, condensando sullo stato fondamentale, facciano acquisire alla materia proprietà superfluide. Si studia inoltre che questo particolare stato della materia, presente anche nella regione più interna delle stelle, possa influenzare notevolmente molti aspetti della loro struttura e della loro evoluzione: si pensa infatti che lo stesso fenomeno dei pulsar glitches sia dovuto alla presenza di materia superfluida, che avrà, inoltre, una notevole influenza anche sull'epoca di rilassamento post-glitch e nel raffreddamento della stella.

Il primo studio svolto in questo lavoro di tesi riguarda la struttura della crosta interna (Cap. 4). Questo studio è stato fatto in approssimazione di Wigner-Seitz, secondo cui il reticolo nucleare, presente in questa regione della stella, si può dividere in celle sferiche indipendenti, ognuna contenente il nucleo, formato da tutti i protoni presenti e dai neutroni legati, un gas di neutroni degeneri, formato invece dai neutroni liberi, ed un gas di elettroni distribuiti uniformemente nella cella. In questo contesto la struttura della crosta interna è determinata, per ogni densità studiata, dalla cella che minimizza l'energia in condizione di  $\beta$ -equilibrio.

Questo studio è stato svolto utilizzando la teoria autoconsistente di Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB), descritta nel capitolo 3, in cui il termine particella-buca dell'interazione nucleare è stato calcolato utilizzando due diverse parametrizzazioni di Skyrme, Sly4 e LNS (App. A), mentre il termine di pairing è stato descritto utilizzando un'interazione isoscalare, i cui parametri sono stati scelti per rappresentare i regimi di strong e weak pairing, ed una isovettoriale, in cui è rappresentata invece la sola condizione di strong pairing (App. A). In questo modo è stato possibile calcolare la struttura della crosta interna e studiare la dipendenza che hanno i risultati ottenuti rispetto alla scelta dell'interazione di Skyrme e dell'interazione di pairing: l'utilizzo di tre differenti condizioni di pairing ha permesso infatti di studiare, sia l'influenza della forma dell'interazione utilizzata, sia quella della sola intensità, le due interazioni isoscalari hanno infatti una comune formulazione.

Nella seconda parte del lavoro svolto (Cap. 5) si è studiato invece il calore specifico della materia presente nella crosta interna. Questo calcolo è stato svolto utilizzando la teoria HFB a temperatura finita (Cap. 3), al fine di avere una trattazione realistica in cui la materia nucleare presente nelle celle considerate è trattata nella sua interezza, tenendo conto, quindi, della presenza di neutroni e protoni, delle interazioni tra di essi e, quindi, anche della presenza di cluster nucleari, conseguenza diretta dell'interazione tra neutroni e protoni.

Utilizzando questo formalismo, inoltre, è stato possibile svolgere consistentemente

anche lo studio delle interazioni di pairing, che non devono più essere introdotte tramite un fattore correttivo, come succedeva nei calcoli precedenti. In questo modo è stato quindi possibile tenere conto sia dell'influenza che le correlazioni di pairing hanno sul comportamento della materia presente, sia, viceversa, dell'effetto che le particelle presenti hanno sul pairing field, che, come sarà ampiamente descritto nel capitolo 5, non risulta trascurabile. Infine i calori specifici calcolati sono stati utilizzati in un modello realistico del raffreddamento di una stella di  $1.6 M_{\odot}$  in regime di rapid cooling, dove è stato evidenziato che l'utilizzo dei calori specifici calcolati con un approccio HFB ha un importante effetto sul raffreddamento della stella, che in queste condizioni risulta considerevolmente più rapido.

La terza ed ultima parte del lavoro di tesi si colloca invece nel contesto dello studio dei pulsar glitches. Uno dei modelli più accreditati costruiti al fine di spiegare questo importante fenomeno è, infatti, il Modello a Vortici, che si basa sul confronto tra la forza di Magnus, derivante dal principio idrodinamico di Bernoulli, e la forza, detta di Pinning, che lega i vortici superfluidi (App. D) ed i nuclei, entrambi presenti nella crosta interna delle pulsar. Uno dei maggiori problemi nell'utilizzo di questo modello risiede nel fatto che mentre le forze di pinning sono calcolate per sito di legame (App. E), la forza di Magnus è calcolata per unità di lunghezza [1]. Risulta quindi necessario uno studio del numero di siti di legame per unità di lunghezza, studio che però in letteratura è stato fatto solamente in modo qualitativo, senza quindi svolgere un effettivo calcolo delle condizioni di legame. I valori della forza di legame per unità di lunghezza tra vortice e reticolo ottenuti con questi modelli risultano inoltre essere circa due ordini di grandezza maggiori delle forze che si studiano essere necessarie per generare un glitch analogo a quelli osservati (Par. 6.2).

Ciò che ci proponiamo di fare in questo lavoro (Cap. 6) è appunto uno studio quantitativo delle condizioni di legame, al fine di determinare, tramite un calcolo realistico, la forza di pinning per unità di lunghezza che lega il vortice al reticolo nucleare. Questo calcolo è stato svolto tramite un vero e proprio conteggio del numero di siti di legame presenti tra il vortice ed il reticolo, in cui il vortice, contrariamente a quanto ipotizzato in gran parte dei lavori presentati nella letteratura, risulta inoltre avere un'orientazione generica col reticolo stesso. Tramite questo studio è quindi stato possibile ottenere dei valori della forza di pinning per unità di lunghezza calcolati in modo quantitativo e realistico: questi valori risultano inoltre essere uno o due ordini di grandezza inferiori a quelli calcolati coi modelli qualitativi precedentemente proposti e risultano quindi essere sufficientemente ridotti da poter essere applicati in un eventuale studio quantitativo della dinamica dei vortici, al fine di determinare in modo realistico i processi che possono condurre alla formazione dei pulsar glitches.





# Capitolo 2

## Evoluzione stellare e stelle di neutroni

La materia presente nell'universo, secondo il modello comunemente accettato del Big Bang, deriva da un'esplosione primordiale che generò l'universo stesso. Questo, nei suoi primi attimi, si può considerare come un plasma in rapida espansione, caratterizzato da un'estrema temperatura e formato principalmente da quark e gluoni deconfinati (Quark Gluon Plasma). L'espansione, unita al susseguente raffreddamento, causò, dopo  $10^{-33}s$ , la fine dello stato di deconfinamento dei quark, che quindi si unirono per formare protoni e neutroni i quali, divenuti stabili dopo  $10^{-2}s$ , si fusero a loro volta per formare atomi di elio e di altri elementi leggeri. Nel Quark Gluon Plasma, benché inizialmente poco influenti, in quanto aventi massa molto inferiore ai quark ed ai gluoni, erano presenti anche leptoni ed antileptoni. Questi, a causa della forte diminuzione di temperatura, iniziarono ad annichilarsi così che, alla formazione dei nucleoni e dei primi nuclei leggeri, poterono essere presenti soltanto gli elettroni, che a loro volta, dopo circa  $3 \cdot 10^5$  anni quando la temperatura era inferiore ai  $4000 K$ , si legarono ai nuclei formando gli atomi. Alcuni di questi atomi si unirono poi in molecole, generando così la materia come oggi la conosciamo: nubi di gas composte da idrogeno molecolare al 75%, elio al 25% e tracce di elementi più pesanti.

### 2.1 Formazione stellare

È proprio dal collasso di queste nubi, derivante da uno squilibrio tra energia gravitazionale ed energia cinetica interna, che si possono originare le stelle. Infatti, se chiamiamo l'energia gravitazionale

$$E_G = -f \frac{GM^2}{R} \quad (2.1)$$

e l'energia cinetica interna della nube

$$E_k = \frac{3}{2} N k_b T \quad (2.2)$$

possiamo porre

$$E_G > E_k \quad (2.3)$$

come condizione necessaria perché la nube cominci a collassare.  $M$ ,  $R$ ,  $T$  ed  $N$  sono rispettivamente la massa, il raggio, la temperatura interna ed il numero di particelle di cui è composta la nube,  $f$  è un fattore di forma che, a parte casi molto particolari, si assume uguale a 1,  $G$  è la costante di gravitazione universale ( $G = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2}$ ) e  $k_b$  è la costante di Boltzman ( $k_b = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{erg K}^{-1}$ ).

Invertendo la relazione (2.3) ed esplicitando rispetto alla massa media per particella ( $\bar{m} = \frac{M}{N}$ ) si possono quindi trovare condizioni equivalenti su massa, raggio e densità della nube

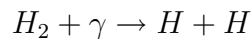
$$M > \frac{3k_b T}{2G\bar{m}} R = M_J \quad (2.4)$$

$$R < \frac{2G\bar{m}}{3k_b T} M = R_J \quad (2.5)$$

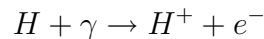
$$\rho > \frac{3}{4\pi M^2} \left( \frac{3k_b T}{2G\bar{m}} \right)^3 = \rho_J \quad (2.6)$$

dove il pedice  $J$  indica che i valori limite calcolati sono rispettivamente la massa, il raggio e la densità di Jeans, dal nome del fisico che per primo ha ricavato queste condizioni. Grande importanza tra queste ha quella riguardante la densità (2.6), in quanto rappresenta una condizione locale che permette il collasso di una o più zone della nube anche se nella sua interezza questa potrebbe non soddisfare le condizioni globali (2.4) e (2.5), rendendo così anche possibile che più regioni collassino indipendentemente dando origine agli ammassi stellari.

La prima fase di contrazione avverrà senza che nessuna forza interna possa contrastare la caduta libera dovuta all'autogravitazione della nube. Infatti l'energia potenziale gravitazionale persa dal gas durante il collasso non andrà in eccitazione termica delle particelle presenti, bensì nella dissociazione delle molecole di idrogeno, che come già accennato si presenta in forma molecolare,



e nella ionizzazione degli atomi risultanti dopo la dissociazione



Questa fase di collasso avverrà in due stadi: nel primo si avrà un collasso globale della nube, più probabile vista la grande dipendenza dalla massa riscontrata nella (2.6), portando la nube stessa, che inizialmente aveva una densità media dell'ordine di  $10^{-23} \text{g cm}^{-3}$ , a densità dell'ordine di  $10^{-19} \text{g cm}^{-3}$  in un tempo  $t_1 \sim 10^8 \text{anni}$ . Nel secondo, invece, molte zone della nube, avendo raggiunto la condizione imposta dalla (2.6), inizieranno a collassare indipendentemente causando un ulteriore aumento della densità, che in un tempo  $t_2 \sim 10^5 \text{anni}$  arriverà ad essere dell'ordine di  $10^{-7} \text{g cm}^{-3}$ .

A questo punto l'idrogeno presente nella nube sarà totalmente ionizzato ed il susseguente collasso sarà rallentato dalla pressione dovuta all'aumento di energia cinetica interna delle particelle ionizzate presenti, fino a che non sarà talmente lento da poter considerare la materia in equilibrio idrostatico. Quella che ora potrà essere chiamata protostella evolverà, quindi, per Stati di equilibrio, in cui le uniche perdite di energia saranno dovute all'irraggiamento dalla superficie, contraendosi man mano fino a che, se la massa coinvolta sarà maggiore di  $0.08 M_\odot$ , la temperatura presente nel

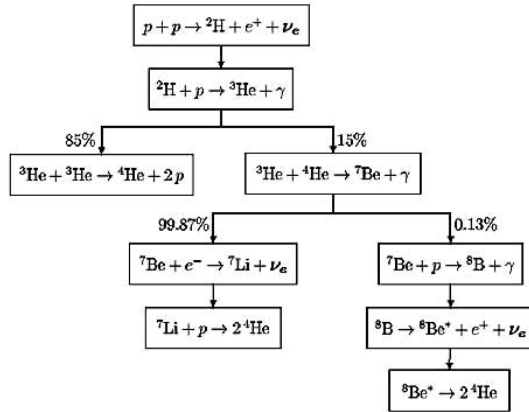


Figura 2.1: **Reazioni del ciclo p-p.** Sono rappresentate solo le reazioni più probabili. Esisteranno altri rami, ma la loro influenza nel complesso energetico è minima.

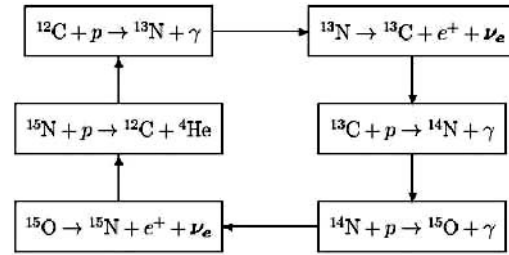


Figura 2.2: **Reazioni del ciclo CNO.** È rappresentato solo il ramo principale, il ramo alternativo ha una probabilità molto bassa e coinvolge il fluoro ( $^{17}F$ ) che ha massa maggiore degli elementi coinvolti nel ramo principale.

nucleo sarà sufficiente ad innescare reazioni di fusione nucleare ( $T \sim 10^7 K$ ). Queste, data la grande quantità di energia rilasciata, potranno equilibrare l'irraggiamento, arrestando così il collasso. La stella entra così nella fase di sequenza principale, in cui rimarrà per la maggior parte della sua esistenza.

Nelle stelle con massa inferiore a  $0.08 M_{\odot}$ , durante la contrazione si giungerà, invece, ad una fase in cui gli elettroni presenti nel core diventeranno degeneri. In questa condizione si svilupperà un altro tipo di pressione, la pressione di degenerazione degli elettroni, che andrà a contrastare anch'essa il collasso. A causa di questa ulteriore pressione la contrazione si arresterà prima di raggiungere temperature sufficienti ad innescare le reazioni di fusione, impedendo così un ulteriore aumento della temperatura e, di conseguenza, l'instaurarsi di reazioni termonucleari. Questi oggetti stellari, che non hanno potuto evolvere fino a diventare vere e proprie stelle, saranno chiamati nane brune.

## 2.2 Stelle in sequenza principale

Durante la fase di sequenza principale la stella brucerà buona parte dell'idrogeno ( $^1H$ ), di cui è principalmente formata, sintetizzando elio ( $^4He$ ) tramite i cicli  $p-p$  (Fig. 2.1) e  $CNO$  (Fig. 2.2), i quali, bruciando 4 atomi di  $H$ , formeranno un atomo di  $He$  con un guadagno energetico di circa  $26 MeV$ . Il ciclo  $p-p$  sarà presente in tutte le stelle, mentre il ciclo  $CNO$  potrà avvenire solo a temperature molto elevate ed in presenza di carbonio, che dovrà fungere da catalizzatore. Non essendo possibile sintetizzare metalli pesanti alle temperature raggiunte in questa fase, questo ciclo potrà avvenire solo in stelle in cui questo elemento è già presente alla nascita, dovranno quindi essere stelle giovani, in cui la materia presente nella nube da cui si sono generate possa derivare da esplosioni di supernova, in cui, come vedremo, questi elementi sono presenti. Le stelle in cui avverrà questo ciclo dovranno inoltre essere stelle molto massive, in quanto le temperature necessarie ad innescare le reazioni di cui è formato non potranno essere raggiunte nel core di stelle poco massive.

In questa fase la stella avrà una sorta di autoregolazione delle reazioni nucleari

in quanto, essendo in equilibrio idrostatico, si avrà una forte dipendenza dell'energia interna dall'energia gravitazionale del sistema

$$\Delta U_G = -2\Delta E_k \quad (2.7)$$

Questo farà sì che in una stella in cui le reazioni nucleari rilasciano un eccesso di energia rispetto a quella emessa, si avrà una maggior pressione di radiazione rispetto a quella gravitazionale ed una conseguente espansione della stella, che causerà, secondo la (2.7), un forte abbassamento della temperatura ed una susseguente diminuzione nel rate di reazioni nucleari, che ridurranno a loro volta l'emissione energetica. Viceversa, se il rilascio di energia dovuto alle reazioni termonucleari risultasse inferiore a quella emessa, la pressione di radiazione non sarebbe in grado di bilanciare quella gravitazionale e si avrebbe una contrazione della stella che, sempre a seguito della (2.7), causerebbe un aumento di temperatura e, di conseguenza, del rate di reazioni nucleari e dell'energia emessa. In termini figurativi questo processo può essere visto come una sorta di calore specifico negativo del sistema.

Per via di questo processo di autoregolazione stellare si ricava che l'energia emessa dalla stella sotto forma di radiazione elettromagnetica sarà pari a quella prodotta dalle reazioni nucleari presenti nel core. Questo avrà anche una grande influenza sulla durata della fase di sequenza principale

$$t \propto \frac{M}{L}$$

dove  $M$ , massa della stella, è proporzionale all'energia che è possibile produrre tramite reazioni termonucleari ed  $L$  è la luminosità della stella, energia emessa nell'unità di tempo. Si ricava, inoltre, dalle equazioni del trasporto radiativo che  $L \propto M^3$ , da cui

$$t \propto \frac{M}{L} \propto \frac{M}{M^3} \propto M^{-2}$$

dove risulta che le stelle molto massive avranno una vita più breve di quelle poco massive.

Evolvendo nella fase di sequenza principale la stella brucerà quindi l'idrogeno formando elio che, essendo più pesante, si porterà verso il centro generando un core di elio. Questo, però, non ha al suo interno reazioni termonucleari che contrastino la propria pressione gravitazionale e dovrà quindi contrarsi, aumentando la propria temperatura e, di conseguenza, la temperatura dell'envelope (shell concentrica al core) in cui avverranno ancora le reazioni di fusione dell'idrogeno, che a loro volta, producendo altro elio, causeranno un ulteriore accrescimento del core. All'aumento di temperatura seguirà, ora, un aumento del rate di reazioni termonucleari che porterà a due risultati: un grande incremento della massa di elio depositato nel core ed un'espansione, con susseguente raffreddamento, degli strati più esterni della stella, facendola così uscire dalla fase di sequenza principale per entrare in quella di gigante rossa, caratterizzata appunto dalle grandi dimensioni e dall'emissione elettromagnetica nella banda del rosso, che denota appunto bassa temperatura superficiale.

L'evoluzione della stella dipenderà ora fortemente dalla sua massa. Infatti, se questa sarà inferiore a  $0.5 M_\odot$ , gli elettroni presenti nel core diventeranno degeneri e la conseguente pressione di degenerazione arresterà il collasso prima che la contrazione porti il core stesso ad avere una temperatura sufficiente ad innescare le reazioni di

fusione dell'elio ( $T \sim 10^8 K$ ). A questo punto le reazioni nucleari presenti nell'envelope e i venti stellari faranno sì che la materia esterna al core venga espulsa formando una nebulosa planetaria, che circonda una nana bianca di elio formata dal core della stella, ormai stabile grazie alla pressione di degenerazione degli elettroni.

Anche nelle stelle aventi massa compresa tra  $0.5 M_\odot$  e  $8 M_\odot$  gli elettroni del core diventeranno degeneri, ma la pressione di degenerazione non arresterà il collasso prima che questo raggiunga la temperatura necessaria ad innescare la fusione dell'elio. Le reazioni avverranno però in un sistema di elettroni degeneri e causeranno quindi un'espansione del core, ma non una susseguente diminuzione della temperatura. In queste condizioni le reazioni avverranno in modo incontrollato producendo un rilascio di energia esplosivo, detto Helium flash, che farà espandere il core di elio e, di conseguenza, diminuire la sua densità a tal punto che gli elettroni torneranno ad essere classici. In questo modo la fusione sarà di nuovo autoregolata: si entra nella fase chiamata Horizontal branch.

Questo tipo di stelle, quando la fusione dell'elio avrà generato una struttura formata da un core inattivo di carbonio ( $^{12}C$ ) e ossigeno ( $^{16}O$ ) sormontato da un envelope di elio ed uno di idrogeno in cui avvengono reazioni di fusione rispettivamente di elio ed idrogeno, seguiranno uno sviluppo analogo a quello già visto per il core di elio nelle stelle poco massive: la contrazione del core stesso porterà gli elettroni ad essere degeneri e la pressione di degenerazione di questi ad arrestare il collasso prima di raggiungere temperature sufficienti ad innescare le reazioni di fusione del carbonio ( $T \sim 5 \cdot 10^8 K$ ). In modo analogo a quello discusso in precedenza si formerà quindi una nebulosa planetaria con al centro una nana bianca di carbonio e ossigeno, sorretta anch'essa dalla pressione di degenerazione degli elettroni.

Le stelle di massa superiore a  $8 M_\odot$  differiscono invece da quelle meno massive già per quanto riguarda la combustione dell'elio. Infatti il core di elio inattivo formatosi dalla fusione dell'idrogeno, come nel caso precedente, collasserà sotto l'effetto della propria autogravitazione, ma raggiungerà ora la temperatura necessaria alla combustione dell'elio quando gli elettroni presenti non saranno ancora degeneri. In questo modo la fusione inizierà in modo controllato senza, quindi, la presenza di helium flash.

In questo tipo di stelle non ci si fermerà, però, alla formazione di carbonio e ossigeno. Infatti, seguendo lo stesso processo descritto per la combustione dell'elio, si avrà quella del carbonio, che avverrà alla temperatura di circa  $5 \cdot 10^8 K$  e formerà ossigeno, neon ( $^{20}Ne$ ) e magnesio ( $^{24}Mg$ ). Successivamente, ad una temperatura di circa  $10^9 K$ , avverrà la combustione del neon, che formerà ossigeno e magnesio, poi, a temperature di circa  $2 \cdot 10^9 K$ , inizierà quella dell'ossigeno che formerà magnesio e silicio ( $^{28}Si$ ). Quest'ultimo fonderà ad una temperatura di circa  $3 \cdot 10^9 K$  formando nichel ( $^{59}Ni$ ) e ferro ( $^{56}Fe$ ), ma solo in stelle con massa superiore a  $11 M_\odot$ . Si formerà a questo punto una Struttura a Cipolla (Fig. 2.3), formata da un core di ferro inattivo (silicio nelle stelle meno massive) sormontato da envelope, formati da elementi via via più leggeri, soggetti a reazioni di fusione.

## 2.3 Esplosione di Supernova

Quando, come in tutti i casi precedenti, il core di ferro collasserà sotto l'effetto della propria autogravitazione, questa non potrà più essere contrastata dall'innescamento di un'ulteriore reazione di fusione in quanto quello di ferro è il nucleo con la massima

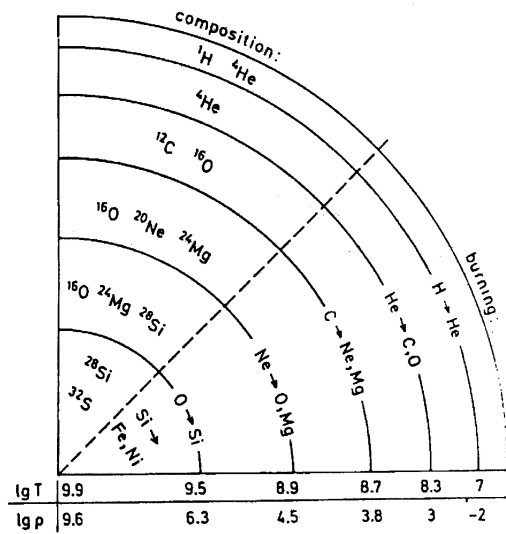


Figura 2.3: **Struttura a cipolla.** Sono anche indicate la temperatura e la tipica densità a cui fondono gli elementi.

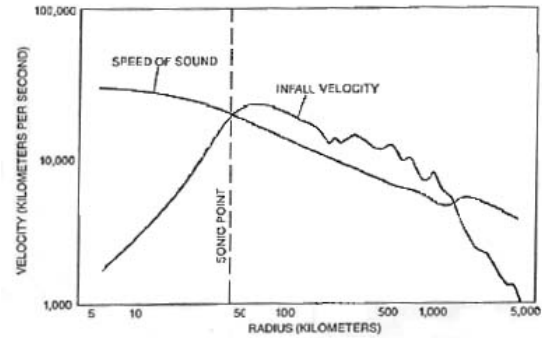


Figura 2.4: **Confronto tra la velocità di caduta della materia e la velocità del suono.** La velocità del suono è superiore a quella di caduta della materia fino al punto sonico, dove si accumulano le onde di pressione.

energia di legame per nucleone ed un'eventuale reazione di fusione sarebbe energeticamente sfavorevole. Il core di ferro collasserà, quindi, in modo incontrastato e le grandi energie presenti causeranno un aumento delle reazioni di fotodissociazione dei nuclei di ferro



e di cattura elettronica



che non potranno più essere considerate trascurabili.

Il processo di fotodissociazione dei nuclei di ferro (2.8) ha due principali conseguenze: aumenta il numero di fermioni presente nel nucleo, e quindi anche la pressione di degenerazione che si oppone alla contrazione, ed assorbe energia termica dalla materia presente, diminuendo così la pressione cinetica. Si riscontra, però, che i due opposti contributi daranno il risultato netto di diminuire la pressione che si oppone alla contrazione e, di conseguenza, aumentare ulteriormente la velocità di collasso. Nel processo di cattura elettronica (2.9), invece, entrambi i contributi daranno come risultato una diminuzione di pressione interna, infatti si osserverà una perdita di fermioni, in quanto i neutrini potranno fuggire, ed una diminuzione dell'energia interna, in quanto il processo è endotermico.

Il collasso non potrà, quindi, arrestarsi fino a che la materia non raggiunge una densità dell'ordine di quella nucleare ( $\rho_0 = 2.8 \cdot 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ ), in cui i nucleoni si troveranno in uno stato analogo a quelli del nucleo atomico e presenteranno, quindi, una forte resistenza ad un'ulteriore compressione. Si avrà allora una reazione elastica che genererà onde di pressione che si propagheranno verso l'esterno alla velocità del suono fino ad una distanza dal centro detta Punto sonico, in cui la materia collassa appunto alla velocità del suono (Fig. 2.4), oltre cui non potranno propagarsi in quanto la velocità di collasso è superiore a quella di propagazione. Queste onde di pressione si accumuleranno quindi nel punto sonico facendo sì che al suo interno, dove

la velocità di caduta della materia è inferiore a quella del suono, questa sarà collegata in ogni suo punto tramite onde sonore: la distribuzione di densità rimarrà quindi inalterata e di conseguenza la materia avrà una velocità di collasso proporzionale alla distanza dal centro. Questo tipo di collasso viene detto Collasso Omologo e la regione della stella posta all'interno del punto sonico, caratterizzata appunto da questo particolare tipo di collasso, viene chiamata, di conseguenza, Core Omologo. La materia, che continua a cadere sul core, causerà, però, la generazione di altre onde di pressione che si accumuleranno anch'esse nel punto sonico, fino a che, dopo qualche frazione di millisecondo, si genererà una discontinuità di pressione e velocità, che rallenterà il materiale in caduta. Le onde accumulate nel punto sonico daranno, quindi, origine ad un'onda d'urto supersonica, che procederà verso l'esterno facendo invertire la direzione di moto alla materia che attraversa.

In stelle in cui a collassare è un core di silicio o un core di ferro avente una massa non superiore a  $1.4 M_{\odot}$  (stelle in genere con massa inferiore a  $18 M_{\odot}$ ) l'onda d'urto raggiungerà la superficie della stella dando origine ad un'esplosione detta Supernova di tipo II. Siamo in presenza di un Prompt shock.

Per stelle più massive, però, l'energia dell'onda d'urto non sarà sufficiente ad attraversare il core di ferro. Questo perché, oltre a far invertire la direzione del moto della materia che attraversa, l'onda d'urto causerà anche reazioni di fotodissociazione dei nuclei (2.8) e di cattura elettronica (2.9), che causeranno una forte perdita di energia e, di conseguenza, l'interruzione della propagazione. L'onda d'urto si troverà quindi in una situazione di stallo, ma potrà riprendere il proprio moto, dopo circa  $100 \text{ ms}$ , grazie all'energia ad essa trasferita dai neutrini in fuga dal core omologo. Ripresa la propagazione, l'onda d'urto attraverserà quindi tutti gli strati della stella per poi, una volta raggiunta la superficie, dare origine anch'essa ad un'esplosione di Supernova di tipo II. Siamo in presenza di un Delayed shock.

## 2.4 Stelle di neutroni

Durante il processo di supernova il core omologo subisce profonde modificazioni diventando prima, quando ha origine l'onda d'urto, una calda protostella di neutroni, ricca di nucleoni e materia leptonica, poi una degenerata e deleptonizzata stella di neutroni. Il processo che porta dalla protostella di neutroni alla stella di neutroni vera e propria è chiamato Epoca di Kelvin-Helmholtz. In questa fase la grande pressione cui è soggetta causerà una contrazione della stella, che passerà dall'aver un raggio dell'ordine dei  $150 \text{ km}$  ad uno dell'ordine dei  $10 \text{ km}$ , senza considerevoli perdite di massa.

Questo processo si sviluppa in due fasi. Nella prima avverrà una deleptonizzazione tramite reazioni di cattura elettronica (2.9) in un mezzo trasparente ai neutrini, che quindi fuggiranno, diminuendo notevolmente l'energia termica e la pressione di degenerazione della stella. Nella seconda avverrà, invece, un'ulteriore compressione in una materia opaca rispetto ai neutrini, in cui questi non potranno fuggire e diffonderanno quindi all'interno della protostella. Questo, a causa della grande densità, unita alla grande energia termica dei neutrini stessi, che ne aumenterà notevolmente la sezione d'urto, è l'unico stato della materia in cui i neutrini non possono fuggire liberamente.

Esiste, però, una massa limite al di sopra della quale la protostella, durante il processo di deleptonizzazione, risulterà instabile. In protostelle di massa troppo ele-

vata infatti, la grossa perdita di leptoni, dovuta alla fuga dei neutrini, porterà ad un'eccessiva diminuzione della pressione di degenerazione che non sarà più in grado di contrastare quella gravitazionale e che porterà quindi, in circa 100 s, la stella a collassare in un Buco nero: un oggetto la cui energia gravitazionale è talmente intensa da catturare anche la radiazione elettromagnetica. In questi particolari tipi di stelle non sarà possibile effettuare alcuna osservazione diretta e le uniche informazioni ottenibili saranno quindi massa, momento angolare e carica elettrica, grandezze misurabili indirettamente tramite l'osservazione degli oggetti che ne sono influenzati.

Alla sua formazione, conclusa l'epoca di Kelvin-Helmholtz, una stella di neutroni si troverà a temperature dell'ordine di  $10^{11}K$ . Nelle ore immediatamente successive, però, l'intensa emissione di neutrini causerà una notevole perdita di energia che la porterà a temperature interne dell'ordine di  $10^9K$ . Questa è una temperatura estremamente elevata se confrontata con quelle raggiunte dalle stelle in sequenza principale, ma trascurabile nel bilancio energetico interno in quanto l'alta densità della materia degenerata presente darà un'energia di punto zero molto maggiore di quella termica: una stella di neutroni è, quindi, nella maggior parte dei casi considerata un oggetto freddo.

### 2.4.1 Struttura delle stelle di neutroni

La prima cosa che è necessario studiare di una stella di neutroni è la sua struttura [44][49]. Questa risulta molto complicata in quanto all'aumentare della distanza dal centro della stella la densità della materia presente, e di conseguenza il suo stato, subirà notevoli variazioni, rendendo quindi necessario l'utilizzo di modelli differenti per i vari regimi di densità. Questa particolare caratteristica impone, quindi, una suddivisione di questa struttura in tre zone (crosta esterna, crosta interna e core) in cui il comportamento della materia nucleare risulta sostanzialmente diverso (Fig. 2.5).

Nella prima regione, chiamata Crosta esterna (Outer crust), la materia è caratterizzata da densità inferiori a  $4.3 \cdot 10^{11}g \text{ cm}^{-3}$  e si presenta sotto forma di un reticolo atomico cubico a corpo centrato (BCC) immerso in un gas di elettroni degeneri. Fino a densità dell'ordine di  $10^7g \text{ cm}^{-3}$  gli elettroni saranno non relativistici e le loro energie non saranno sufficienti a colmare il difetto di massa per innescare la reazione (2.9): il reticolo sarà formato da nuclei di  $^{56}Fe$ . Questa regione, detta anche Superficie, è considerata in alcuni casi come una zona a sé, esterna quindi alla crosta.

Al diminuire della distanza dal centro della stella aumenterà però la densità nucleonica e, di conseguenza, l'energia di Fermi degli elettroni [49], che, a densità superiori di  $10^7g \text{ cm}^{-3}$ , sarà sufficiente ad innescare reazioni di cattura elettronica (2.9), causando quindi uno spostamento del  $\beta$ -equilibrio, che genererà un eccesso di neutroni. A causa dell'instaurarsi di queste reazioni gli atomi di ferro del reticolo saranno quindi sostituiti da atomi di elementi più pesanti, che, all'aumentare della densità, saranno sempre più ricchi di neutroni (Tab. 2.1): in questa regione lo studio delle proprietà fisiche della materia deve perciò partire dalla determinazione degli elementi che, al variare della densità, costituiscono il reticolo nucleare.

Un primo studio completo di questo problema è stato presentato da Baym, Pethick e Sutherland (BPS) nel 1971 [16]. Essi proposero di ricavare la struttura di questa regione della stella minimizzando la densità di energia della materia, che,



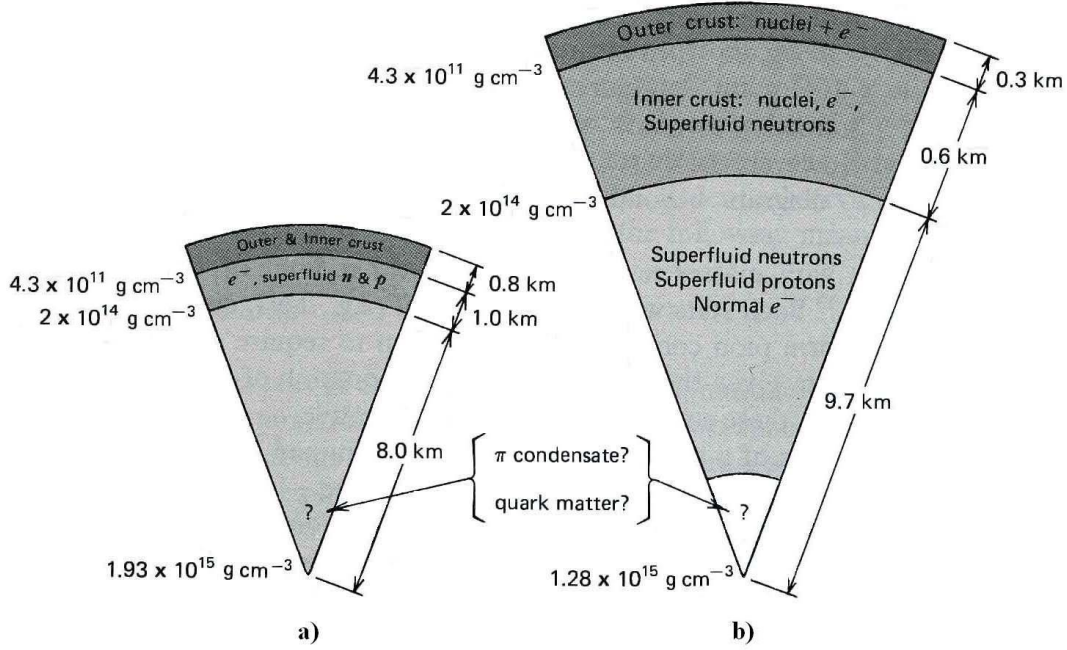


Figura 2.5: **Struttura delle stelle di neutroni.** Le equazioni di stato sono dette più o meno rigide a seconda dell'intensità della pressione che contrasta l'autogravitazione (Par. 2.4.2). Un modello con equazione di stato più rigida (b) darà una pressione maggiore, quindi una stella avente raggio maggiore e crosta più spessa rispetto ad un modello con equazione di stato morbida (a).

utilizzando un approccio semiclassico, calcolarono essere data da quattro contributi: quello riguardante le energie dei nuclei, quello degli elettroni liberi, quello di eventuali neutroni liberi e quello riguardante l'energia reticolare

$$\varepsilon = n_N M(A, Z) + \varepsilon_e(n_e) + \varepsilon_n(n_n) + \varepsilon_L \quad (2.10)$$

dove  $n_N = \frac{n}{A}$  è la densità dei nuclei,  $n$  è la densità barionica della materia presente,  $M(A, Z)$  è l'energia di un nucleo avente  $Z$  protoni e  $A-Z$  neutroni,  $\varepsilon_e(n_e)$  è la densità di energia degli elettroni che dipenderà appunto dalla densità degli elettroni stessi ( $n_e = Zn_N$ ),  $\varepsilon_L = -1.4Z^2 e^2 n_e^{4/3}$  è la densità di energia reticolare del sistema ed  $\varepsilon_n(n_n)$  è la densità di energia di eventuali neutroni liberi che dipenderà dalla densità dei neutroni liberi stessi ( $n_n$ ). Quest'ultimo termine, che risulterà trascurabile in questa regione in quanto non saranno presenti neutroni liberi, acquisterà però importanza nella zona di transizione con la regione successiva in cui questi inizieranno a comparire.

L'energia del nucleo sarà quella calcolata nel Liquid drop model, quindi

$$M(Z, A) = [(A - Z)m_n c^2 + Z(m_p + m_e)c^2 - E_b] \quad (2.11)$$

in cui  $m_n$ ,  $m_p$  ed  $m_e$  sono rispettivamente la massa di neutroni, protoni ed elettroni, mentre  $E_b$  è l'energia di legame del nucleo. Questa, secondo il modello trattato, deriverà dalla Formula Semiempirica delle masse, quindi

$$E_b = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z(Z-1)e^2}{A^{1/3}} - a_{sym} A \left( \frac{1}{2} - \frac{Z}{A} \right)^2 + a_p A^{-3/2} \quad (2.12)$$

dove  $a_V$ ,  $a_S$ ,  $a_C$ ,  $a_{sym}$  ed  $a_p$  sono delle costanti che definiscono l'intensità rispettivamente del termine di volume, di superficie, coulombiano, di simmetria e di parità.

$\rho$	$A$	$N$	$Z$	<i>Nucleo</i>
$8.1 \cdot 10^6$	56	30	26	$^{56}\text{Fe}$
$2.7 \cdot 10^8$	62	34	28	$^{62}\text{Ni}$
$1.2 \cdot 10^9$	64	36	28	$^{64}\text{Ni}$
$8.2 \cdot 10^9$	84	50	34	$^{84}\text{Se}$
$2.2 \cdot 10^{10}$	82	50	32	$^{82}\text{Ge}$
$4.8 \cdot 10^{10}$	80	50	30	$^{80}\text{Zn}$
$1.6 \cdot 10^{11}$	78	50	28	$^{78}\text{Ni}$
$1.8 \cdot 10^{11}$	76	50	26	$^{76}\text{Fe}$
$1.9 \cdot 10^{11}$	124	82	42	$^{124}\text{Mo}$
$2.7 \cdot 10^{11}$	122	82	40	$^{122}\text{Zr}$
$3.7 \cdot 10^{11}$	120	82	38	$^{120}\text{Sr}$
$4.3 \cdot 10^{11}$	118	82	36	$^{118}\text{Kr}$

Tabella 2.1: **Elementi che compongono la crosta esterna.** La densità ( $\rho$ ) è espressa in  $g \text{ cm}^{-3}$ . A, N e Z sono rispettivamente il numero di massa, di neutroni e protoni del nucleo.

La densità di energia degli elettroni liberi e degli eventuali neutroni liberi sarà quella ricavata per un gas degeneri di fermioni [49]

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\lambda_c^3} \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{x_F} \sqrt{1 + y^2} y^2 dy \quad (2.13)$$

in cui  $m$  è la massa del fermione considerato,  $\lambda_c = \frac{\hbar}{mc}$  è la lunghezza d'onda di Compton della particella considerata e  $x_F = \frac{p_F}{mc}$  è un parametro che discrimina il caso ultrarelativistico ( $x_F \gg 1$ ) dal caso non relativistico ( $x_F \ll 1$ ), essendo  $p_F = \hbar (3\pi^2 n)^{1/3}$  il momento di Fermi della particella considerata.

La struttura della crosta esterna viene quindi ottenuta minimizzando l'energia così ottenuta per  $Y_n = A \frac{n_N}{n} + \frac{n_m}{n}$ ,  $A$ ,  $Z$  ed  $n$ , ottenendo i risultati espressi in tabella 2.1.

Il passaggio da crosta esterna a crosta interna (Inner Crust) avviene quando la densità barionica raggiunge il limite detto di Drip ( $\rho_{drip} = 4.3 \cdot 10^{11} g \text{ cm}^{-3}$ ). Oltre questa tipica densità i neutroni presenti all'interno dei nuclei avranno un'energia talmente elevata da poter raggiungere gli stati del continuo, formando un gas di neutroni degeneri che permea il reticolo. Questo processo si dice appunto Dripping. Il contributo di questo gas di neutroni alla pressione che sorregge la stella diventerà, inoltre, sempre più importante al crescere della densità, fino ad essere dominante rispetto ad ogni altro.

In questa zona, in cui sarà presente un reticolo BCC di nuclei ricchi di neutroni immerso in un gas composto da neutroni degeneri ed elettroni degeneri ed ultrarelativistici. Contrariamente al caso precedente, in cui non erano presenti, avrà quindi grande importanza il termine di energia dei neutroni liberi. Nel calcolare questo contributo bisognerà, però, tenere conto del fatto che le particelle legate ai nuclei sono identiche a quelle libere, per cui sarà necessario trattarle nello stesso modo.

Il primo studio della struttura di questa regione della stella fu svolto, sempre nel 1971, da Baym, Bethe e Pethick [15] ed è chiamato modello *BBP*. Essi, utilizzando sempre un approccio semiclassico, proponevano una densità di energia simile a quella del modello BPS (2.10)

$$\varepsilon = n_N(W_N + W_L) + \varepsilon_e(n_e) + \varepsilon_n(n_n)(1 - V_N n_N) \quad (2.14)$$

$\rho$	$A$	$N$	$Z$	$k_N$	$k$	$n_N$
$4.66 \cdot 10^{11}$	127	87	40	1.32	0.07	$2.02 \cdot 10^6$
$8.79 \cdot 10^{11}$	134	93	41	1.32	0.15	$2.23 \cdot 10^6$
$1.47 \cdot 10^{12}$	140	98	42	1.32	0.20	$2.43 \cdot 10^6$
$2.67 \cdot 10^{12}$	149	105	44	1.31	0.26	$2.74 \cdot 10^6$
$6.25 \cdot 10^{12}$	170	122	48	1.30	0.36	$3.45 \cdot 10^6$
$1.50 \cdot 10^{13}$	211	157	54	1.27	0.49	$4.84 \cdot 10^6$
$3.44 \cdot 10^{13}$	296	230	65	1.24	0.65	$7.52 \cdot 10^6$
$8.01 \cdot 10^{13}$	548	459	89	1.20	0.86	$13.1 \cdot 10^6$
$1.30 \cdot 10^{14}$	990	870	120	1.21	1.01	$17.8 \cdot 10^6$
$2.00 \cdot 10^{14}$	2500	2299	201	1.27	1.17	$18.8 \cdot 10^6$
$2.39 \cdot 10^{14}$	7840	7395	445	1.30	1.25	$11.0 \cdot 10^6$

Tabella 2.2: **Struttura della materia stellare nella crosta interna.** La densità ( $\rho$ ) è espressa in  $g \text{ cm}^{-3}$ , i momenti di Fermi del gas di neutroni ( $k$ ) e del nucleo ( $k_N$ ) sono espressi in  $fm^{-1}$  e la densità di nuclei ( $n_N$ ) è espressa in  $fm^{-3}$ .

dove  $W_L$  ed  $\varepsilon_e(n_e)$ , che sono rispettivamente l'energia reticolare per nucleo e la densità di energia del gas di elettroni, risultano analoghi a quelli già trattati, mentre  $W_N$ , che rappresenta l'energia del nucleo, ed  $\varepsilon_n(n_n)$ , contributo del gas di neutroni in cui  $1 - V_N n_N$  è il volume occupato appunto dai neutroni liberi, sono visti in modo sostanzialmente diverso.  $V_N$  è il volume nucleare, che risulta essere in questo modello una variabile.

In questo modello, infatti, l'energia del nucleo sarà data da

$$W_N = A \left[ (1 - x)m_n c^2 + x m_p c^2 + W(k, x) \right] + W_c + W_s \quad (2.15)$$

in cui  $x = \frac{Z}{A}$  è la frazione di protoni sui barioni,  $k$  è il momento di Fermi,  $W(k, x)$ , detto Energia di Bulk, è il contributo all'energia per nucleone della materia se non si considerano effetti di superficie e coulombiani, mentre  $W_c$  e  $W_s$  sono appunto il termine coulombiano e quello di superficie, che ha la proprietà di annullarsi quando il gas di neutroni liberi raggiunge densità pari a quella nucleare. In queste condizioni, infatti, la materia sarà formata essenzialmente da un gas n-p-e, in cui si sarà persa la struttura di nucleo.

La densità di energia per i neutroni liberi è posta invece pari a

$$\varepsilon_n(n_n) = \left[ m_n c^2 + W(k_n, 0) \right] \quad (2.16)$$

in cui si è utilizzata anche in questo caso l'energia di bulk ( $W(k_n, 0)$ ) in quanto, come già accennato, è necessario trattare la materia all'interno del nucleo nello stesso modo del gas di neutroni, così da rendere plausibile anche una trattazione a densità prossime a quella nucleare. L'espressione per l'energia del bulk è stata inoltre utilizzata in quanto nel gas, che si estende per quasi tutta la stella ed è composto prevalentemente da neutroni, saranno trascurabili sia gli effetti di superficie sia quelli coulombiani. Minimizzando l'energia così ricavata per  $A$ ,  $Z$ ,  $n_N$ ,  $n_n$ ,  $V_N$  ed  $n$  ricavarono quindi la struttura riportata in Tabella 2.2.

Come già accennato, questi modelli sono stati costruiti utilizzando un approccio semiclassico in cui devono essere trascurati tutti gli effetti di shell nucleare, che risultano, però, molto importanti se nella materia studiata sono presenti appunto dei

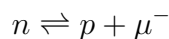
nuclei. Per questo motivo si sono quindi costruiti modelli in cui le proprietà nucleari nella materia presente sono studiate in modo più realistico utilizzando un'approssimazione detta di Wigner-Seitz. Secondo questo modello il reticolo nucleare presente nella crosta delle stelle di neutroni si può suddividere in celle sferiche, dette appunto celle di Wigner-Seitz, ognuna contenente un nucleo  $(N_{bound}, Z)$ ,  $Z$  elettroni liberi, in quanto la cella è ipotizzata avere carica neutra, ed eventualmente  $N_{free}$  neutroni liberi.

La grande utilità di questa approssimazione risiede nel poter dividere la regione di studio in celle, che, in quanto indipendenti, possono essere studiate separatamente. Questo permette quindi di poter utilizzare modelli di fisica nucleare molto più avanzati e, quindi, avere una descrizione della materia nucleare più accurata. La struttura della crosta interna della stella ottenuta utilizzando questa importante approssimazione è uno degli argomenti di studio di questo lavoro e sarà quindi presentata dettagliatamente nel capitolo ad essa dedicato (Cap. 4).

La crosta interna termina quando la densità del gas di neutroni liberi eguaglia quella della materia nucleare ( $\rho_0 = 2.8 \cdot 10^{14} g \text{ cm}^{-3}$ ) e sparisce quindi la struttura di nucleo: si entra nella regione della stella chiamata Core.

La zona di transizione tra queste due diverse regioni della stella ha però proprietà molto particolari. È stato infatti studiato che in questa regione la grande densità della materia presente causa prima una notevole deformazione dei nuclei presenti, per cui non potrà più essere usata l'approssimazione di Wigner-Seitz in quanto le celle non potranno più essere considerate sferiche, poi la formazione di strutture nucleari esotiche in quella che viene chiamata Pasta Phase (Fig. 2.6). In questa regione la deformazione dei nuclei li porta infatti a formare prima dei cilindri di materia nucleare immersi nel gas di neutroni degeneri (Spaghetti Phase), poi delle particolari lamine in cui le zone di materia nucleare vengono separate da zone in cui è presente ancora il gas di neutroni (Lasagna Phase). Aumentando ancora la densità, la materia risulterà essere poi formata principalmente da materia nucleare in cui però persisteranno regioni formate da materia puramente neutronica la cui forma risulta essere prima cilindrica (Penne Phase) e poi sferica, con dimensioni simili a quelle nucleari, (Swiss Cheese Phase). A seguito di un ulteriore aumento di densità si giungerà infine alla scomparsa della pura materia neutronica e si entra quindi nel core vero e proprio, in cui la materia è formata principalmente da un gas n-p-e a densità superiori a quella nucleare e le sue proprietà sono quindi dominate dall'interazione presente tra i nucleoni.

Nelle regioni più interne del core, dove la densità della materia eccede quella di saturazione, è inoltre possibile la formazione di particelle diverse dai classici elettroni, protoni e neutroni. La prima di queste particolari particelle è un leptone, il Muone ( $\mu^-$ ), la cui formazione, che avviene tramite reazioni di decadimento neutronico



risulta permessa quando la differenza nel potenziale chimico tra i neutroni ed i protoni eccede la sua energia di massa ( $m_\mu = 105.6 \text{ MeV}$ ).

A densità prossime al doppio di quella di saturazione ( $\rho \sim 2\rho_0$ ) è inoltre possibile la formazione di un Condensato di Pioni ( $m_\pi = 139.6 \text{ MeV}$ ). Questo può essere di due tipi: carico (o Pionico) in cui si ha la formazione di pioni reali nella materia e neutro (o Sonoro) in cui risulta costante la presenza di correlazioni aventi i numeri

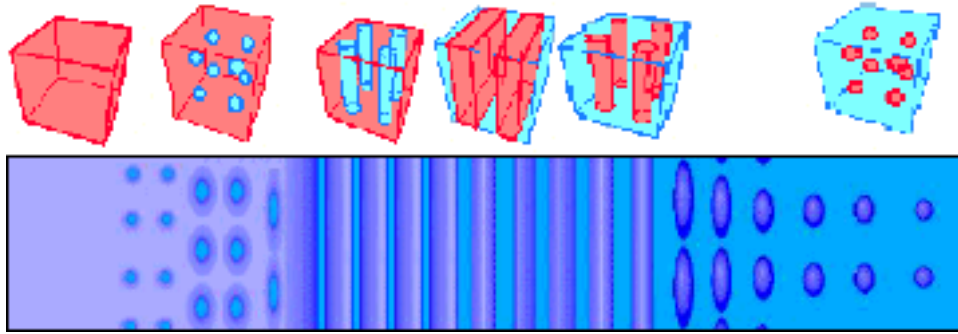
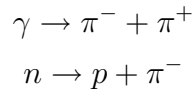


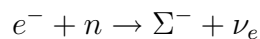
Figura 2.6: **Pasta Phase**. In figura è rappresentata la regione di Pasta Phase, in cui la materia passa dall'aver al suo interno un reticolo nucleare, nella crosta interna (destra), all'essere formata solamente da un gas n-p-e, nel core (sinistra).

quantici tipici del pione, ma non sarà presente la particella reale. La comparsa di un condensato di pioni carichi è dovuta all'instaurarsi di reazioni nucleari che coinvolgono appunto i pioni carichi



e potrà avvenire solamente se le grandi densità presenti fanno sì che nel primo caso la massa efficace acquisita dal fotone interagendo con la materia presente sia maggiore dell'energia di formazione dei due pioni oppure, nel secondo caso, che la differenza tra il potenziale chimico dei neutroni e dei protoni sia maggiore dell'energia di massa del pione stesso. La comparsa di un condensato di pioni neutro è, invece, dovuta al grande aumento nel valore di aspettazione di interazioni nucleari dovute appunto allo scambio di pioni.

A densità ancora più elevate risulta inoltre possibile la formazione di barioni molto massivi, detti Iperoni. In queste condizioni il potenziale chimico di neutroni ed elettroni risulta infatti essere sufficientemente elevato per innescare reazioni del tipo



generando così un gas di Fermi composto prevalentemente da particelle  $\Sigma^-$  ( $M_\Sigma = 1197.5 \text{ MeV}$ ) in equilibrio chimico con i neutroni e gli elettroni presenti. All'aumentare della densità sarà inoltre possibile l'instaurarsi di reazioni che permetteranno la creazione di barioni sempre più pesanti, la cui formazione richiederà però energie sempre più elevate.

A densità estremamente elevate ( $\rho \sim 4\rho_0 - 5\rho_0$ ), nel centro della stella, è stata inoltre ipotizzata la possibile formazione di quark deconfinati. Questo particolare stato della materia si potrà però formare soltanto se le densità saranno talmente elevate da portare i nucleoni a distanze inferiori alle dimensioni dei nucleoni stessi e quindi i quark di un nucleone a mischiarsi ai quark dei nucleoni vicini, formando essenzialmente un quark gluon plasma.

### 2.4.2 Equazioni di stato e massa limite

Oltre alle caratteristiche microscopiche della materia presente nella stella, descritte nel paragrafo precedente, grande importanza hanno anche le sue proprietà macroscopiche,

come ad esempio il profilo di densità ( $\rho(r)$ ) e pressione ( $P(r)$ ), la sua massa o il suo raggio.

Queste proprietà sono studiate tramite un importante sistema di due equazioni differenziali del primo ordine chiamato Equazioni di Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) [42][54]

$$\frac{dP(r)}{dr} = -G \frac{m(r)\rho(r)}{r^2} \left\{ \left[ 1 + \frac{P(r)}{c^2\rho(r)} \right] \left[ 1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{c^2 m(r)} \right] \left[ 1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right]^{-1} \right\} \quad (2.17)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

che risulta risolvibile, utilizzando le dovute condizioni al contorno, solamente se messo in relazione con un'equazione di stato (EOS)

$$P(r) = P(\rho(r))$$

in cui l'andamento della pressione della materia viene descritto in funzione della sua densità.

Purtroppo la scelta dell'equazione di stato da utilizzare non è univoca, in quanto non esistono attualmente evidenze sperimentali che permettano di determinare quale sia quella che descrive il comportamento della materia nucleare in condizioni estreme. Esistono tuttavia alcune leggi fondamentali che devono essere soddisfatte. Innanzitutto l'equazione di stato deve portare ad una stabilità microscopica, cioè in ogni punto della stella

$$\frac{dP}{d\rho} \geq 0$$

un'eventuale violazione di questo principio porterebbe, infatti, ad un'instabilità che condurrebbe la stella ad un inevitabile collasso. Inoltre, l'equazione di stato deve soddisfare in ogni punto la condizione di causalità

$$s^2 = \frac{dP}{d\rho} \leq c^2$$

che impone che la velocità di propagazione di una qualunque perturbazione di pressione, velocità del suono ( $s$ ), non potrà essere superiore alla velocità della luce.

La scelta dell'equazione di stato utilizzata nella risoluzione del sistema di equazioni TOV (2.17) ha inoltre una grande influenza sulle caratteristiche della stella ottenuta. In particolare, questa scelta risulta essere di massima importanza nella determinazione della massa limite oltre la quale una stella di neutroni non può più essere stabile. Si dimostra infatti che, fissando la densità centrale della stella ( $\rho_c$ ), la massa è determinata univocamente dall'equazione di stato considerata e che, di conseguenza, per ogni equazione di stato è possibile determinare la dipendenza che la massa della stella ha dalla sua densità centrale (Fig. 2.7). Grazie a questo studio è quindi possibile osservare che la curva ottenuta presenta sempre un massimo, da cui deriva che, qualunque sia l'equazione di stato utilizzata, esiste sempre una massa limite oltre la quale, indipendentemente dalla densità centrale, non può esistere una stella stabile. Si dimostra inoltre che utilizzando equazioni di stato più rigide (o Stiff), in cui la pressione della materia che contrasta il collasso gravitazionale risulta molto

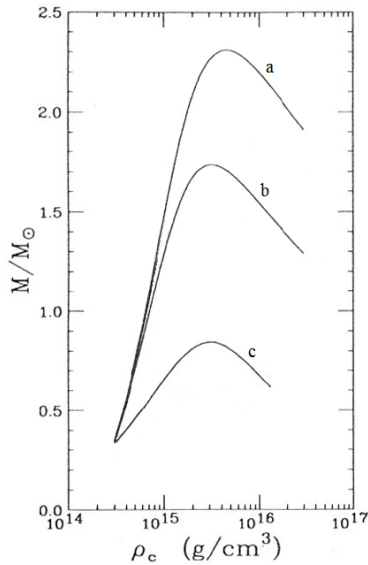


Figura 2.7: **Dipendenza della massa dalla densità centrale.** In figura è presentata la dipendenza della massa della stella dalla scelta della densità centrale ottenuta utilizzando tre diverse equazioni di stato, una molto rigida (a), una intermedia (b) ed una, invece, molto morbida (c).

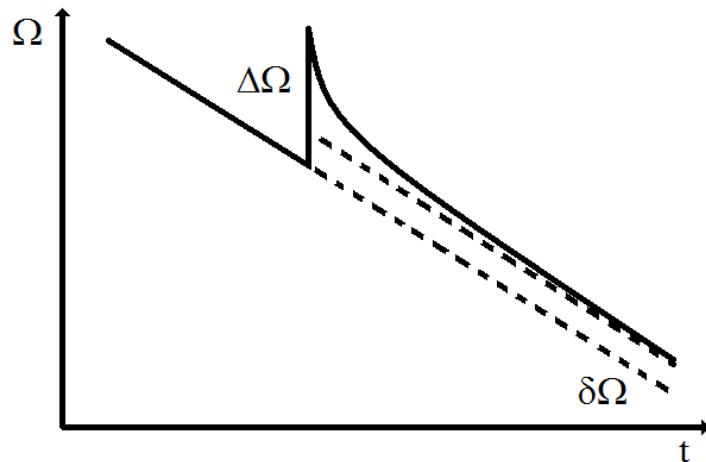


Figura 2.8: **Rappresentazione di un pulsar glitch.** In figura è rappresentato l'andamento della velocità angolare della stella ( $\Omega$ ) in funzione del tempo ( $t$ ) durante un pulsar glitch. A seguito al repentino aumento di velocità angolare caratteristico dei pulsar glitches ( $\Delta\Omega$ ), è rappresentato anche il periodo di rilassamento in cui la velocità angolare della stella diminuisce fino a tornare ad un valore solo lievemente maggiore di quella che avrebbe avuto se il glitch non fosse avvenuto, questa differenza di velocità angolare in figura è chiamata  $\delta\Omega$ .

elevata, si otterranno masse limite maggiori di quelle ottenute utilizzando equazioni di stato più morbide (o Soft), in cui questa pressione risulta invece molto debole (Fig. 2.5). Alcuni importanti esempi della determinazione della massa limite in funzione della scelta dell'equazione di stato sono descritti in [17].

### 2.4.3 Proprietà magnetiche e proprietà di rotazione

Le stelle di neutroni sono anche sorgente di intense radiazioni elettromagnetiche. Queste derivano dall'interazione dell'intenso campo magnetico delle stelle stesse (tipicamente  $B \sim 10^{12}G$ , ma esistono stelle chiamate Magnetars in cui  $B > 10^{15}G$ ) con le particelle cariche presenti nella magnetosfera, un plasma immerso nel campo magnetico [49].

Si pensa che questo campo magnetico si sia originato dall'intrappolamento del flusso magnetico durante il collasso gravitazionale in cui, come descritto, la stella di neutroni si è generata. Questo intrappolamento è dovuto ad un particolare effetto dei materiali superconduttori, detto effetto Meisner, secondo cui il flusso magnetico concatenato ad un qualsiasi loop di materiale superfluido deve rimanere costante [26]. Nel caso di una pulsar si pensa che questo effetto, unito alla forte diminuzione del raggio della stella, possa spiegare l'origine di un campo magnetico così intenso.

L'osservazione dell'emissione elettromagnetica permette, inoltre, di studiare le proprietà di rotazione di alcuni particolari tipi di stelle di neutroni, che hanno la caratteristica di essere ruotanti e magnetizzate: le Pulsar. In alcune di queste stelle, infatti, il mancato allineamento tra l'asse di rotazione e l'asse magnetico fa sì che la

radiazione emessa appaia pulsata con una frequenza pari alla frequenza di rotazione della stella: l'osservazione di questa radiazione permette quindi di determinare molto accuratamente la velocità di rotazione.

L'emissione di questa radiazione elettromagnetica ha però un ulteriore effetto sulla rotazione delle pulsar. La perdita di energia che ne deriva viene infatti sottratta all'energia di rotazione della stella secondo la legge

$$P = \frac{dE_{rot}}{dt} = I\Omega\dot{\Omega}$$

dove  $P$  è la potenza della radiazione emessa,  $\Omega$  è la velocità angolare della pulsar e  $\dot{\Omega}$  è la sua derivata temporale, ovvero la decelerazione angolare. A causa dell'emissione elettromagnetica la rotazione delle pulsar sarà quindi caratterizzata da un graduale rallentamento.

Questo andamento non è però del tutto regolare: nella rotazione di alcune pulsar sono infatti state osservate quasi-periodiche anomalie, dette Pulsar Glitches, in cui queste, invece che continuare a rallentare, compiono una breve accelerazione, la cui intensità è 6 – 8 ordini di grandezza inferiore alla stessa velocità di rotazione

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} \sim 10^{-6} - 10^{-8}$$

in cui  $\Omega$  è ancora la velocità angolare della stella, osservata prima del glitch, mentre  $\Delta\Omega$  è l'incremento della stessa velocità angolare durante il glitch (Fig. 2.8).

Questo fenomeno è considerato di grande importanza in quanto può avvenire anche in stelle isolate in cui quest'accelerazione non può essere stata generata da cause esterne, ma deve essere ricercata nella struttura della stella stessa. Per questo motivo, allo scopo di determinare i processi che lo regolano, sono stati proposti diversi modelli, di cui i più accreditati sono il Modello a Vortici [1] ed il Modello degli Starquakes [49]. Mentre nel primo di questi modelli si associa il glitch alle proprietà della materia superfluida presente nella stella, nel secondo si associa invece a fenomeni sismici nella crosta, gli starquakes appunto.

Il modello a vortici, essendo uno dei principali argomenti del lavoro svolto, sarà ampiamente trattato nel capitolo ad esso dedicato (Cap. 6). Nella teoria degli starquakes si considera, invece, la crosta della stella di neutroni come un oggetto solido di forma oblatata a causa dell'elevata velocità di rotazione. La diminuzione di velocità angolare dovuta all'emissione elettromagnetica dovrebbe gradualmente far tendere la stella verso una forma sferica, ma la grande rigidità della crosta, secondo questo modello, tende ad opporsi facendo sì che questa risulti di forma meno sferica rispetto a quella di equilibrio. Quando, però, la differenza di curvatura raggiunge il valore critico, caratteristico della stella, si avrà uno starquake, che porterà la crosta nella posizione di equilibrio con curvatura quindi inferiore a quella precedente. Questo fenomeno causerà quindi una diminuzione del momento angolare, dovuto alla minor distanza media della materia dall'asse di rotazione, che dovrà essere compensato da un repentino aumento nella velocità rotazionale, il glitch appunto, al fine di soddisfare la conservazione del momento angolare [49].



# Capitolo 3

## Teoria della superfluidità

La superfluidità è un particolare stato della materia in cui questa acquisisce proprietà meccaniche e termodinamiche molto particolari grazie alla condensazione sullo stato fondamentale delle particelle che la compongono.

Questa condensazione, che è stata osservata sia in sistemi bosonici che fermionici, è però, in condizioni classiche, prerogativa delle sole particelle bosoniche, in quanto il principio di esclusione di Pauli non permette a più particelle fermioniche di avere gli stessi numeri quantici e, quindi, di condensare sullo stato fondamentale. Esistono però situazioni particolari in cui le particelle fermioniche si accoppiano formando quasi-particelle, dette Coppie di Cooper [21], che hanno spin intero e, quindi, carattere bosonico, grazie al quale possono condensare sullo stato fondamentale facendo acquisire alla materia proprietà superfluide.

Nel lavoro svolto, come descritto nell'introduzione, si sono studiate alcune proprietà della materia superfluida presente nella crosta interna delle stelle di neutroni utilizzando alcune delle più avanzate teorie costruite per lo studio della materia sia in fase superfluida che in fase non superfluida (chiamata d'ora in poi fase Normale). Infatti, nelle prime due parti di questo lavoro si è utilizzata la teoria Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB) [23] per studiare la struttura di Wigner-Seitz della crosta interna delle stelle di neutroni (Cap. 4) ed il calore specifico della materia in questa stessa regione della stella (Cap. 5). Nella terza parte l'interazione vortice-reticolo è studiata, invece, utilizzando un approccio semi-classico [26] in quanto non è ancora stato realizzato un modello HFB realistico per lo studio dell'interazione di pinning (Cap. 6).

La teoria HFB, che è stata utilizzata in questo lavoro, è una teoria di particelle interagenti in cui si ammette la possibilità di accoppiamento tra le particelle (Correlazione di Pairing), da cui deriva la formazione delle coppie di Cooper. Questa teoria si propone come uno sviluppo delle più semplici teorie di Hartree-Fock (HF) [27][30], in cui la possibilità di un accoppiamento tra particelle, e quindi la formazione di coppie di Cooper, non era contemplata, e di Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) [14], in cui questa possibilità era contemplata solamente per particelle di pari energia. In questo capitolo verranno quindi presentate a temperatura nulla ( $T = 0$ ) tutte e tre le teorie di particelle interagenti che sono state introdotte (HF, BCS e HFB), calcolando i fattori di occupazione ( $U_k$  e  $V_k$ ) e l'energia dello stato fondamentale del sistema

$$E = \langle GS | H - \lambda N | GS \rangle \quad (3.1)$$

in cui  $|GS\rangle$  descrive lo stato fondamentale,  $\lambda$  è il potenziale chimico,  $N = \sum_k a_k^\dagger a_k$  è

l'operatore numero di particelle e

$$H = \sum_{k_1 k_2} t_{k_1 k_2} a_{k_1}^+ a_{k_2} + \frac{1}{4} \sum_{\substack{k_1 k_2 \\ k_3 k_4}} v_{k_1 k_2 k_3 k_4} a_{k_1}^+ a_{k_2}^+ a_{k_4} a_{k_3} \quad (3.2)$$

è l'hamiltoniana del sistema dove i  $k_i$  rappresentano i numeri quantici delle particelle,  $a_k^+$  e  $a_k$  sono rispettivamente l'operatore di creazione e distruzione di una particella con numeri quantici  $k$ ,  $t$  è il termine cinetico e  $v$  descrive l'interazione tra le particelle e comprende sia il termine diretto che quello di scambio.

Solamente la teoria HFB verrà, invece, trattata più approfonditamente tramite l'introduzione della temperatura, che risulta fondamentale nello studio dei calori specifici, su cui è incentrata la seconda parte di questo lavoro (Cap. 5).

### 3.1 Teoria Hartree-Fock (HF)

La teoria HF, come già accennato, non contempla la possibilità di un accoppiamento tra particelle, che in assenza di eccitazioni termiche potranno quindi solamente occupare gli stati di minore energia, riempiendo, di conseguenza, tutti gli stati del sistema aventi energia minore dell'energia di Fermi e lasciando vuoti quelli di energia superiore (Fig. 3.1). I fattori di occupazione saranno quindi facilmente calcolabili come

$$V_k = \begin{cases} 1 & \varepsilon_k \leq \lambda \\ 0 & \varepsilon_k > \lambda \end{cases} \quad U_k = \begin{cases} 0 & \varepsilon_k \leq \lambda \\ 1 & \varepsilon_k > \lambda \end{cases}$$

dove  $\varepsilon_k$  è l'energia di particella singola delle particelle nello stato di numero quantico  $k$ , mentre  $V_k$  e  $U_k$  se elevati al quadrato ( $V_k^2$  e  $U_k^2$ ) rappresentano le probabilità che uno stato  $k$  sia rispettivamente occupato e libero, da cui deriva direttamente

$$|V_k|^2 + |U_k|^2 = 1 \quad (3.3)$$

che descrive una legge generale la cui validità rimane inalterata anche nelle teorie più avanzate che saranno descritte.

In queste condizioni è, quindi, possibile definire lo stato fondamentale del sistema  $|HF\rangle$  a partire dallo stato di vuoto  $|-\rangle$  come

$$|HF\rangle = \prod_{\varepsilon_k < \lambda} a_k^+ |-\rangle$$

e, di conseguenza, calcolarne l'energia, a partire dalla (3.1), come

$$E = \langle HF | H - \lambda N | HF \rangle = \sum_{\varepsilon_k < \lambda} \left[ t_k - \lambda + \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon_{k'} < \lambda} v_{kk'kk'} \right]$$

dove, come già descritto,  $t_k$  è il termine cinetico e  $v_{kk'kk'}$  descrive l'interazione [48].

### 3.2 Teoria Bardeen-Cooper-Shrieffer (BCS)

La teoria BCS, come già accennato, rappresenta un notevole sviluppo rispetto alla teoria HF per via dell'introduzione della possibilità di un accoppiamento tra le particelle, detto Pairing, che permette la formazione di materia superfluida. Secondo

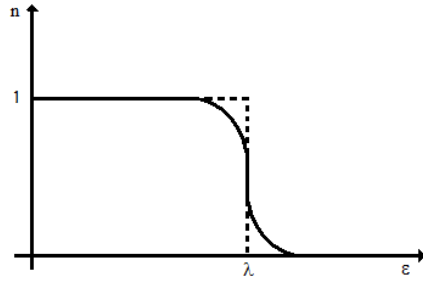


Figura 3.1: **Densità di particelle.** In figura raffigurata la densità di particelle in funzione dell'energia di particella singola per un sistema soggetto a pairing (linea continua) e non soggetto a pairing (linea tratteggiata). Mentre il primo caso è tipico dello stato fondamentale ricavato dalle teorie BCS ed HFB, il secondo caso è tipico della teoria HF.

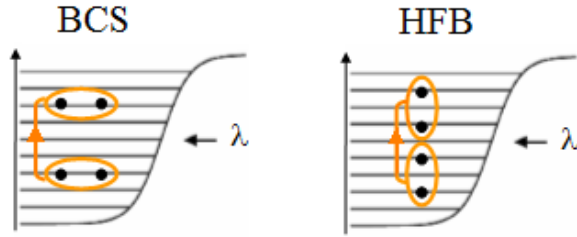


Figura 3.2: **Formazione di coppie di Cooper nelle teorie BCS ed HFB.** In figura è raffigurato il processo di accoppiamento nella formazione delle coppie di Cooper. Si nota che nella teoria BCS si possono accoppiare solamente particelle dello stesso stato energetico mentre nella teoria HFB le particelle accoppiate possono avere energia anche molto diversa tra loro. In figura è inoltre rappresentata la conseguente occupazione di stati con energia maggiore di quella di Fermi.

questa teoria, infatti, lo stato di minore energia è quello formato dalle sole coppie di Cooper, in quanto l'accoppiamento tra due particelle porta ad una diminuzione dell'energia del sistema che eccede l'incremento di energia cinetica dovuto all'occupazione di stati con energia superiore all'energia di Fermi, il che è una diretta conseguenza dell'accoppiamento.

Secondo questa teoria è infatti possibile che due particelle dello stesso stato energetico, aventi stesso momento angolare ma spin opposto, possano accoppiarsi ed andare ad occupare stati di energia anche superiore a quella di Fermi (Fig. 3.2). Questo fenomeno porta ad un notevole aumento dell'energia cinetica del sistema, ma si dimostra che il guadagno energetico dovuto all'accoppiamento delle due particelle risulta superiore a questo contributo: la formazione di coppie di Cooper porta quindi nel complesso ad una diminuzione dell'energia del sistema.

L'utilizzo di questa teoria è però più complesso dell'utilizzo della teoria HF. Infatti, a causa dell'accoppiamento, e della conseguente occupazione di stati ad energia superiore a quella di Fermi, i fattori di occupazione delle particelle coinvolte diventano una delle incognite da calcolare, contrariamente al caso della teoria HF in cui invece sono noti. Lo studio deve quindi partire dalla costruzione di uno stato fondamentale in cui si ipotizza di avere solamente particelle accoppiate [48]

$$|BCS\rangle = \prod_{k>0} (U_k + V_k a_k^+ a_{\bar{k}}^+) |-\rangle$$

dove  $U_k$  e  $V_k$ , come già accennato, sono ora delle incognite del calcolo, mentre la coppia di operatori  $a_k^+ a_{\bar{k}}^+$  rappresenta la creazione di una coppia di Cooper in cui le particelle che la formano, come descritto, devono avere la stessa energia, stesso momento angolare e spin opposto (Fig. 3.2)

$$|k\rangle = |nljm\rangle \quad |\bar{k}\rangle = |nlj-m\rangle$$

dove il segno di  $k$  è dato dal segno di  $m$ , per cui per ogni  $k > 0$  esisterà un  $\bar{k} < 0$  e viceversa.

In queste condizioni è quindi possibile applicare la (3.1) considerando i fattori di occupazione  $V_k$  e  $U_k$  come parametri variazionali e di conseguenza calcolare l'energia del sistema in funzione di questi parametri come

$$\begin{aligned} E &= \sum_k \left[ (t_k - \lambda) V_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k'} v_{kk'k'k'} V_k^2 V_{k'}^2 \right] + \sum_{kk'>0} v_{k\bar{k}k'\bar{k}'} V_k U_k V_{k'} U_{k'} = \quad (3.4) \\ &= \sum_{k>0} \left[ (\varepsilon_k - \lambda) V_k^2 - \Delta_k V_k U_k \right] \end{aligned}$$

dove  $\varepsilon_k = 2t_k + \Gamma_k$  è l'energia di particella singola, in cui il termine cinetico è stato raddoppiato al fine di considerare il contributo dato sia dalle particelle con  $k > 0$  che da quelle con  $k < 0$ ,

$$\Gamma_k = \sum_{k'} v_{kk'k'k'} V_{k'}^2 \quad (3.5)$$

è il campo medio e

$$\Delta_k = - \sum_{k'>0} v_{k\bar{k}k'\bar{k}'} V_{k'} U_{k'} \quad (3.6)$$

è il gap superfluido, che descrive l'energia di accoppiamento tra le particelle che formano le coppie di Cooper.

Il valore dei fattori di occupazione è quindi ricavato, in funzione di  $\varepsilon_k$ ,  $\lambda$  e  $\Delta_k$ , imponendo che l'energia così calcolata sia effettivamente un minimo, quindi imponendo che la sua variazione sia nulla

$$\delta \langle BCS | H - \lambda N | BCS \rangle = \left( \frac{\partial}{\partial V_k} + \frac{\partial U_k}{\partial V_k} \frac{\partial}{\partial U_k} \right) \langle BCS | H - \lambda N | BCS \rangle = 0$$

da cui si può ricavare che

$$\begin{aligned} V_k^2 &= V_k^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\varepsilon_k - \lambda}{\sqrt{\Delta_k^2 + (\varepsilon_k - \lambda)^2}} \right] \\ U_k^2 &= U_k^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\varepsilon_k - \lambda}{\sqrt{\Delta_k^2 + (\varepsilon_k - \lambda)^2}} \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Questa trattazione non risolve però il problema della determinazione dello stato e dell'energia del sistema. Infatti in questo modo si sono potuti determinare i fattori di occupazione,  $V_k$  ed  $U_k$ , in funzione del valore del gap dello stato  $k$  trattato (3.6) e del potenziale chimico, che però rimangono un'incognita, in quanto a loro volta dipendenti dai fattori di occupazione. Una possibile soluzione del problema risiede nella costruzione di un sistema di equazioni in  $\Delta_k$  e  $\lambda$ , la cui risoluzione permetterebbe di ricavare queste grandezze e, da esse, ipotizzando di conoscere le energie di particella singola ( $\varepsilon_k$ ), ricavare quindi i fattori di occupazione.

Le equazioni studiate per risolvere questo sistema sono le Gap equations unite alla Number equation. Le gap equations sono equazioni che descrivono il gap di ogni stato  $k$  in funzione di tutti gli altri stati del sistema

$$\Delta_k = - \sum_{k'>0} v_{k\bar{k}k'\bar{k}'} U_{k'} V_{k'} = - \sum_{k'>0} v_{k\bar{k}k'\bar{k}'} \frac{\Delta_{k'}}{\sqrt{\Delta_{k'}^2 + (\varepsilon_{k'} - \lambda)^2}}$$

derivano dalla definizione di energia di gap descritta dalla (3.6), in cui vengono sostituiti i valori ricavati per i fattori di occupazione (3.7), e sono un numero pari agli stati considerati. La number equation è invece una singola equazione, che deriva dall'imposizione di un determinato numero di particelle

$$N = 2 \sum_{k>0} V_k^2 = \sum_{k>0} \left[ 1 - \frac{\varepsilon_k - \lambda}{\sqrt{\Delta_k^2 + (\varepsilon_k - \lambda)^2}} \right]$$

in cui è stato di nuovo imposto un fattore 2 per considerare sia le particelle con  $k > 0$  che quelle con  $k < 0$ .

Questo sistema nonostante risulti teoricamente risolvibile, in quanto il numero di equazioni che lo compongono è pari al numero di incognite che si vuole calcolare (il gap di ogni stato ed il potenziale chimico), si rivela però molto complesso, in quanto le equazioni risultano accoppiate tra loro, e necessita di essere risolto quindi iterativamente. Ricavati i valori del gap e del potenziale chimico che risolvono il sistema di equazioni è poi, però, sufficiente sostituirli nelle dovute relazioni per ricavare l'energia del sistema (3.4) ed i fattori di occupazione (3.7).

### 3.3 Teoria Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB)

Ciò che differenzia la teoria HFB dalla teoria BCS è la possibilità di accoppiamento tra particelle che non occupano necessariamente lo stesso stato energetico (Fig. 3.2). Questa lieve differenza concettuale porta però a notevoli differenze nello studio del sistema in esame. Innanzitutto molto diverso risulta essere lo stato fondamentale

$$|HFB\rangle = \prod_{kk'} \left( U_{kk'} + V_{kk'} a_k^+ a_{k'}^+ \right) |-\rangle$$

dove l'utilizzo di numeri quantici differenti ( $k$  e  $k'$ ) descrive appunto che le particelle che formano le coppie di Cooper devono avere lo stesso momento angolare e spin opposto, come nella teoria BCS, ma non necessariamente la stessa energia (Fig. 3.2)

$$|k\rangle = |nljm\rangle \quad |\bar{k}'\rangle = |n'lj - m\rangle$$

Altra importante differenza risiede nei fattori di occupazione  $V_{kk'}$  e  $U_{kk'}$ . Questi, che nella teoria BCS per ogni stato  $k$  fissato assumevano un determinato valore, sono ora rappresentati da dei vettori, rendendo più complicato il calcolo dello stato fondamentale, che risulta ora definito da un sistema di equazioni

$$\begin{cases} \sum_{l'} [(h_{ll'} - \lambda \delta_{ll'}) U_{l'k} + \Delta_{ll'} V_{l'k}] & = E_k U_{lk} \\ -\sum_{l'} [\Delta_{ll'}^* U_{l'k} + (h_{ll'}^* - \lambda \delta_{ll'}) V_{l'k}] & = E_k V_{lk} \end{cases} \quad (3.8)$$

rappresentabile in modo compatto come

$$\begin{pmatrix} h - \lambda & \Delta \\ -\Delta^* & -h^* + \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix} = E_k \begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

dove

$$E_k = \sqrt{(\varepsilon_k - \lambda)^2 + \Delta_k^2} \quad (3.10)$$

è l'energia di quasi-particella dello stato  $k$ ,

$$h_{ll'} = t_{ll'} + \Gamma_{ll'} \quad (3.11)$$

è il termine di particella singola,  $t_{ll'}$  è il termine cinetico,

$$\Gamma_{ll'} = \sum_{qq'} v_{lq'l'} \rho_{qq'} \quad (3.12)$$

è il campo medio,  $v$ , come nelle teorie HF e BCS, descrive l'interazione in funzione degli stati in esame,

$$\Delta_{ll'} = \frac{1}{2} \sum_{qq'} v_{ll'qq'} k_{qq'} \quad (3.13)$$

è il termine di pairing e, analogamente al caso BCS, rappresenta l'energia di accoppiamento tra le particelle,

$$\rho_{ll'} = \langle HFB | a_{l'}^\dagger a_l | HFB \rangle = \sum_w (2j_w + 1) V_{lw}^* V_{wl'} \quad (3.14)$$

è la densità di particelle e

$$k_{ll'} = \langle HFB | a_{l'} a_l | HFB \rangle = \sum_w (2j_w + 1) V_{lw}^* U_{wl'} \quad (3.15)$$

è una quantità, chiamata Densità di pairing, che descrive l'accoppiamento tra le particelle. Il simbolo  $*$  descrive infine semplicemente il complesso coniugato di una funzione.

Questa teoria può inoltre essere riscritta in rappresentazione delle coordinate, formalismo che è stato utilizzato negli studi svolti in quanto permette di studiare con più facilità i sistemi caratterizzati da una elevata simmetria. In particolare questa trattazione risulta, infatti, molto utile in caso di simmetria radiale, dove è possibile definire i fattori di occupazione proiettandoli su una base ortonormale  $\varphi_l(r)$

$$\begin{aligned} U_k(r) &= \sum_l U_{kl} \varphi_l(r) \\ V_k(r) &= \sum_l V_{kl} \varphi_l^*(r) \end{aligned} \quad (3.16)$$

e riscrivere quindi il sistema di equazioni HFB (3.8) come

$$\begin{pmatrix} h(r) - \lambda & \Delta(r) \\ -\Delta^*(r) & -h^*(r) + \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k(r) \\ V_k(r) \end{pmatrix} = E_k \begin{pmatrix} U_k(r) \\ V_k(r) \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Per risolvere questo sistema è, però, ora, necessario calcolare esplicitamente le grandezze presenti: il termine di particella singola ( $h(r)$ ) ed il termine di pairing ( $\Delta(r)$ ). Queste sono state infatti finora descritte solamente tramite la loro dipendenza dall'interazione  $v$ , che deve, però, ora, essere definita esplicitamente al fine di poter utilizzare queste equazioni in un calcolo reale.

Sfortunatamente, ad oggi, non è ancora stato possibile ricavare un'espressione analitica che descriva con esattezza l'andamento dell'interazione nucleare e questa non può quindi essere utilizzata in calcoli reali se non tramite la scelta di parametrizzazioni costruite in modo da rappresentare accuratamente alcune proprietà note di sistemi

conosciuti, come ad esempio la densità di saturazione, la compressibilità della materia nucleare, le proprietà di scattering nucleone-nucleone o le energie di legame di alcuni nuclei noti (App. A).

La scelta da noi effettuata è stata l'utilizzo di una parametrizzazione di tipo Skyrme per descrivere il termine particella-buca dell'interazione tra le particelle (A.1), che viene quindi trattato separatamente dalle correlazioni di pairing, che vengono invece descritte da un'interazione a zero range dipendente dalla densità della materia presente (A.3). I parametri utilizzati sono riportati in tabella 3.1 ed in appendice A.

Grazie all'utilizzo della parametrizzazione dell'interazione nucleare, descritta in appendice A, è quindi possibile ricavare il valore del termine di particella singola presente nelle equazioni HFB (A.2). Questa avrà però una forte dipendenza da alcune importanti grandezze: la densità di particelle, che in rappresentazione delle coordinate è definita come

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi} \sum_k (2j_k + 1) V_k(r) V_k^*(r)$$

la densità di energia cinetica, definita invece come

$$\tau(r) = \frac{1}{4\pi} \sum_k (2j_k + 1) \left[ \left( \frac{dV_k}{dr} - \frac{V_k}{r} \right)^2 + \frac{l_k(l_k + 1)}{r^2} V_k^2 \right]$$

e la densità di spin, definita infine come

$$J(r) = \frac{1}{4\pi} \sum_k (2j_k + 1) \left[ j_k(j_k + 1) - l_k(l_k + 1) - \frac{3}{4} \right] V_k^2$$

Il termine di pairing presente nelle equazioni (3.17), detto anche Pairing field, come descritto sempre in appendice A, risulta invece essere pari a

$$\Delta(r) = \frac{1}{2} V(\rho_n(r), \rho_p(r)) k(r) \quad (3.18)$$

dove

$$k(r) = \frac{1}{4\pi} \sum_k (2j_k + 1) U_k(r) V_k^*(r)$$

è la densità di pairing e  $V(\rho_n(r), \rho_p(r))$  è un funzionale che descrive l'interazione di pairing ed è strettamente dipendente da alcuni parametri che ne determineranno la forma e l'intensità (App. A).

Altra importante caratteristica di questa particolare formulazione della teoria HFB è la facilità con cui è possibile introdurre la dipendenza dalla temperatura. Nel caso di una trattazione a temperatura finita, infatti, nonostante venga imposta la necessità di considerare le eccitazioni termiche delle particelle e la conseguente rottura delle coppie di Cooper, si dimostra che risulta possibile scrivere le equazioni HFB in una forma analoga a quelle che descrivono una trattazione a temperatura nulla (3.17)

$$\begin{pmatrix} h_T(r) - \lambda & \Delta_T(r) \\ -\Delta_T^*(r) & -h_T^*(r) + \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k(r) \\ V_k(r) \end{pmatrix} = E_k \begin{pmatrix} U_k(r) \\ V_k(r) \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Inoltre, nonostante le grandezze coinvolte debbano avere una forte dipendenza dalla temperatura, questa non influenza la loro forma generale, ma solamente le funzioni da cui esse dipendono. Si dimostra infatti che sia il termine di particella singola

Parametri			Proprietà nucleari		
	Sly4	LNS		Sly4	LNS
$x_0$	0.834	0.063	$\rho_0$	0.160	0.175
$t_0$	-2488.913	-2484.970	$\frac{E}{A}$	-15.972	-15.320
$x_1$	-0.344	0.658	$K$	229.900	210.850
$t_1$	486.818	266.735	$\frac{m_{is}^*}{m}$	0.695	8.825
$x_2$	-1.000	-0.954	$\frac{m_{iv}^*}{m}$	0.800	0.727
$t_2$	-546.395	-337.135	$\frac{E_s}{A}$	32.010	33.400
$x_3$	1.354	-0.034			
$t_3$	13777.000	14588.200			
$W_0$	122.690	96.000			
$\gamma$	0.167	0.167			

Tabella 3.1: **Tabelle riassuntive delle interazioni di Skyrme.** Nella prima tabella sono riportati i parametri caratteristici delle interazioni di Skyrme utilizzate, quella chiamata Sly4 [20] e quella chiamata LNS [18].  $V_0$  e  $t_0$  sono dati in  $MeV fm^3$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  e  $W_0$  sono dati in  $MeV fm^5$ ,  $t_3$  è dato in  $MeV fm^{3+3\gamma}$ . Nella seconda sono invece riportate le principali proprietà della materia nucleare ottenute a densità di saturazione utilizzando le date parametrizzazioni:  $\rho_0$ , dato in  $fm^{-3}$ , è la densità di saturazione,  $E/A$ ,  $E_s/A$  e  $K$ , dati in MeV, sono rispettivamente l'energia per barione, l'energia di simmetria per barione ed il coefficiente di incompressibilità, mentre  $m_{is}^*/m$  ed  $m_{iv}^*/m$  descrivono rispettivamente la massa efficace isoscalare ed isovettoriale dei nucleoni.

( $h_T(r)$ ) che il termine di pairing ( $\Delta_T(r)$ ), a temperatura finita, avranno la stessa formulazione descritta per la teoria a temperatura nulla, rispettivamente (A.2) e (3.18). La dipendenza dalla temperatura è quindi portata solamente dalle grandezze da cui questi termini dipendono: la densità di particelle ( $\rho_T(r)$ ), la densità di pairing ( $k_T(r)$ ), la densità di energia cinetica ( $\tau_T(r)$ ) e la densità di spin ( $J_T(r)$ ), che avranno quindi ora una nuova formulazione

$$\begin{aligned}
\rho_T(r) &= \frac{1}{4\pi} \sum_k (2j_k + 1) [V_k(r)V_k^*(r)(1 - f_k) + U_k(r)U_k^*(r)f_k] \\
k_T(r) &= \frac{1}{4\pi} \sum_k (2j_k + 1) U_k^*(r)V_k(r)(1 - 2f_k) \\
\tau_T(r) &= \frac{1}{4\pi} \sum_k (2j_k + 1) \left\{ \left[ \left( \frac{dV_k}{dr} - \frac{V_k}{r} \right)^2 + \frac{l_k(l_k + 1)}{r^2} V_k^2 \right] (1 - f_k) \right. \\
&\quad \left. + \left[ \left( \frac{dU_k}{dr} - \frac{U_k}{r} \right)^2 + \frac{l_k(l_k + 1)}{r^2} U_k^2 \right] f_k \right\} \\
J_T(r) &= \frac{1}{4\pi} \sum_k (2j_k + 1) \left[ j_k(j_k + 1) - l_k(l_k + 1) - \frac{3}{4} \right] [V_k^2(1 - f_k) + U_k^2 f_k]
\end{aligned}$$

dove la temperatura è stata introdotta tramite il fattore  $f_k = [1 + \exp(E_k/T)]^{-1}$ ,  $T$  è la temperatura espressa in  $MeV$  ( $T[MeV] = k_b T[K]$ , dove  $k_b = 8.617 \cdot 10^{-11} MeV K^{-1}$  è la costante di Boltzman) ed  $E_k$  è l'energia dello stato  $k$ , data ancora dalla (3.10).

A temperatura finita è infine possibile calcolare due importanti grandezze su cui è incentrata la seconda parte del lavoro svolto: l'entropia del sistema

$$S(T) = - \sum_k (2j_k + 1) [f_k \ln(f_k) + (1 - f_k) \ln(1 - f_k)] \quad (3.20)$$



e, da questa, il calore specifico

$$C_V = \frac{T}{V} \frac{\partial S}{\partial T} \quad (3.21)$$

dove  $V$  è il volume della regione considerata nel calcolo. Sia l'entropia (3.20) che, quindi, il calore specifico (3.21) sono dati in unità della costante di Boltzman.



# Capitolo 4

## Struttura della crosta interna

La prima parte del lavoro svolto è stata fatta in collaborazione col professor Nicolae Sandulescu, National Institute of Physics and Nuclear Engineering di Bucharest (Romania), e col professor Jerome Margueron, Institut de Physique Nucleaire, Université Paris-Sud, di Orsay Cedex (Francia). Questo lavoro consiste in uno studio accurato della struttura della crosta interna delle stelle di neutroni utilizzando la teoria autoconsistente di Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB) a temperatura nulla.

Lo studio è svolto in approssimazione di Wigner-Seitz secondo cui, come accennato nel capitolo 2, il reticolo nucleare presente nella crosta interna della stella viene suddiviso in celle sferiche indipendenti, ognuna contenente un nucleo ( $N_{bound}, Z$ ),  $Z$  elettroni ed  $N_{free}$  neutroni liberi. La struttura della crosta viene, quindi, suddivisa in dieci regioni di densità fissata, in cui le proprietà delle celle di Wigner-Seitz (raggio,  $R_{ws}$ , numero totale di neutroni,  $N = N_{bound} + N_{free}$ , e numero di protoni del nucleo,  $Z$ ) vengono studiate tramite la minimizzazione dell'energia della cella in condizione di  $\beta$ -equilibrio.

### 4.1 Studi precedenti

Il primo calcolo microscopico della struttura di Wigner-Seitz della crosta interna delle stelle di neutroni fu svolto da Negele e Vautherin nel 1973 [41] ed è ancora oggi utilizzato come riferimento negli studi che coinvolgono la crosta interna delle stelle di neutroni. In questo lavoro essi divisero la crosta della stella in undici regioni, descritte dalla loro densità media, ed il reticolo nucleare in celle sferiche, che vennero poi trattate in approssimazione di Wigner-Seitz, così da calcolare, per ogni densità considerata, quale fosse la configurazione di minima energia.

Questo studio fu svolto utilizzando un'interazione a due corpi, costruita per riprodurre le energie di legame dei nuclei atomici e della materia neutronica infinita, e risolvendo le equazioni HF, trascurando quindi gli effetti di pairing, al fine di minimizzare un funzionale di energia dipendente da due parametri: il numero di protoni che formano il nucleo al centro della cella ( $Z$ ) ed il raggio della cella stessa ( $R_{ws}$ , che nell'articolo in questione è chiamato  $R_c$ ). Le condizioni al contorno utilizzate per risolvere le equazioni HF, che sono calcolate in rappresentazione delle coordinate, sono quelle di Dirichlet-Neuman, secondo cui la parte radiale delle funzioni d'onda utilizzate ( $R_{nlj}(r)$ ) avrà un diverso andamento al bordo della cella a seconda che  $l$  sia pari o dispari: per  $l$  dispari è stato infatti imposto che le funzioni d'onda si annullino

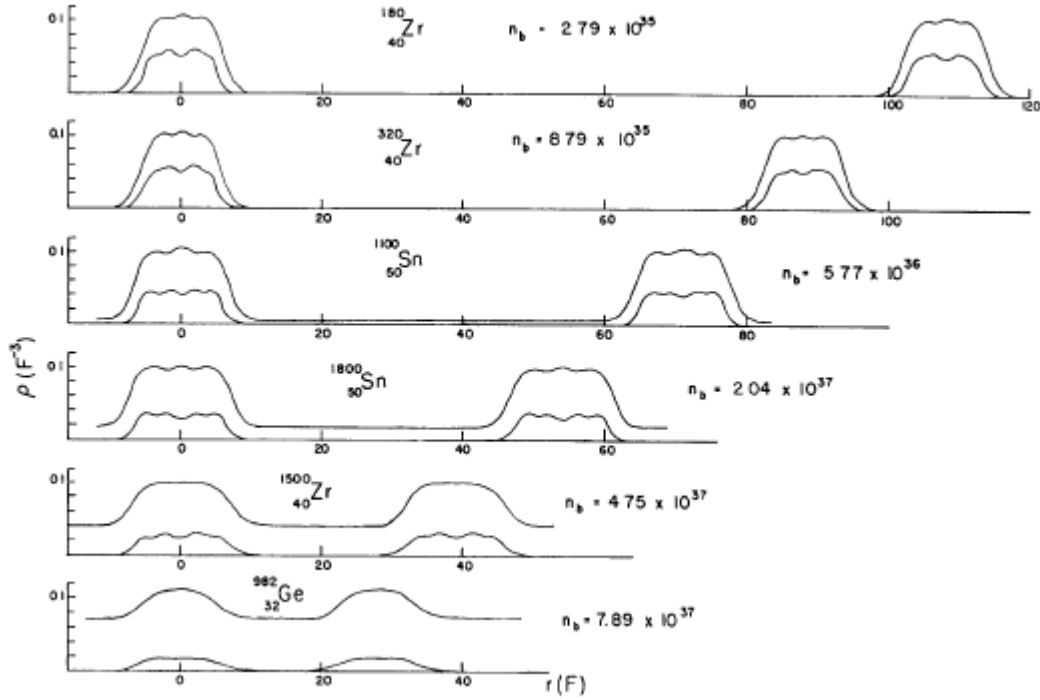


Figura 4.1: **Densità di protoni e neutroni nelle celle di Wigner-Seitz.** In figura è rappresentata la densità di protoni e neutroni, così come è stata calcolata in [41]. Sono rappresentate due celle adiacenti al fine di mostrare l'andamento del gas di neutroni al bordo della cella. Le regioni rappresentate sono quelle considerate più significative (0, 1, 2, 4, 7 e 10, descritte dalla loro densità barionica).

al bordo della cella

$$R_{nlj}(r = R_{ws}) = 0 \quad (4.1)$$

mentre per  $l$  pari è stato imposto che ad annullarsi siano le loro derivate prime

$$\left( \frac{dR_{nlj}}{dr} \right)_{r=R_{ws}} = 0 \quad (4.2)$$

Una complicazione nel calcolo deriva, però, dal fatto che i due parametri scelti per la minimizzazione ( $Z$  ed  $R_{ws}$ ) non risultano del tutto indipendenti l'uno dall'altro. Il calcolo può, infatti, essere considerato realistico solamente se le celle analizzate sono in condizione di  $\beta$ -equilibrio

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e$$

dove  $\mu_n$ ,  $\mu_p$  e  $\mu_e$  sono i potenziali chimici rispettivamente dei neutroni, dei protoni e degli elettroni. La scelta dei due parametri risulta, comunque, giustificata in quanto da essi è possibile determinare tutte le grandezze caratteristiche della cella studiata, tra cui l'energia, a partire dal funzionale calcolato, il numero di elettroni, che risulta uguale al numero di protoni in quanto la cella deve avere carica neutra, ed il numero di neutroni ( $N = A - Z$ ), dove  $A$  è fissato a sua volta dalla densità della regione considerata e dalle dimensioni della cella stessa ( $A = \frac{4\pi}{3} R_{ws}^3 \rho$ ).

I risultati di questo studio sono espressi in tabella 4.1 ed in figura 4.1, dove viene raffigurata la distribuzione di protoni e neutroni per le regioni considerate più signifi-

$N_{cell}$	$\rho$	$Z$	$N$	$R_{ws}$
0	$1.3 \cdot 10^{14}$	32	950	14
1	$7.8 \cdot 10^{13}$	40	1460	20
2	$3.4 \cdot 10^{13}$	50	1750	28
3	$1.5 \cdot 10^{13}$	50	1300	33
4	$9.6 \cdot 10^{12}$	50	1050	36
5	$6.2 \cdot 10^{12}$	50	900	39
6	$2.7 \cdot 10^{12}$	40	460	42
7	$1.5 \cdot 10^{12}$	40	280	44
8	$1.0 \cdot 10^{12}$	40	210	46
9	$6.7 \cdot 10^{11}$	40	160	49
10	$4.7 \cdot 10^{11}$	40	140	54

Tabella 4.1: **Tabella dei risultati ricavati da Negele e Vautherin.** In tabella è riportata la struttura di Wigner-Seitz della crosta interna così come è stata calcolata in [41]. La nomenclatura delle regioni è stata riscritta per mantenere una corrispondenza con quella usata nel lavoro svolto, dove la zona chiamata 0 non è stata considerata. La densità ( $\rho$ ) è espressa in  $g \text{ cm}^{-3}$  ed il raggio della cella ( $R_{ws}$ ) in  $fm$ .  $Z$  ed  $N$  sono rispettivamente il numero di protoni e neutroni.

$\rho$	$Z$		$R_{ws}$	
	$BC1$	$BC2$	$BC1$	$BC2$
$4.5 \cdot 10^{11}$	52	52	57	57
$1.2 \cdot 10^{13}$	58	56	38	37
$1.9 \cdot 10^{13}$	52	48	32	31
$2.9 \cdot 10^{13}$	42	44	27	27
$4.1 \cdot 10^{13}$	24	22	20	20
$5.6 \cdot 10^{13}$	20	24	17	18
$7.5 \cdot 10^{13}$	20	26	15	17
$9.8 \cdot 10^{13}$	20	26	14	15

Tabella 4.2: **Tabella dei risultati ricavati da Baldo et al.** In tabella è riportata la struttura di Wigner-Seitz della crosta interna così come è stata calcolata in [13]. Con  $BC1$  e  $BC2$  sono indicate le due diverse scelte delle condizioni al contorno,  $Z$  indica il numero di protoni, mentre il numero di neutroni è calcolabile a partire dalla densità della regione. Purtroppo le densità scelte per questo calcolo non sono le stesse utilizzate in [41] e riprese poi nel lavoro svolto. La densità ( $\rho$ ) è espressa in  $g \text{ cm}^{-3}$  ed il raggio della cella ( $R_{ws}$ ) in  $fm$ .

ficative, che verranno poi in parte riprese per il calcolo dell'energia di pinning su cui è incentrata la terza parte del lavoro svolto.

In questo studio, in cui come già accennato sono stati trascurati gli effetti di pairing, è presente inoltre un calcolo dell'energia della cella in funzione del numero di protoni presente ( $Z$ ), da cui si osserva che, a parità di densità totale, le energie ricavate sono molto simili una dall'altra, tanto che la loro variazione risulta confrontabile con le tipiche energie di pairing. Questo particolare risultato, rappresentato in figura 1 dell'articolo [41], porta quindi a ragionevoli dubbi sulla scelta di trascurare quegli effetti di pairing che, in queste particolari condizioni, possono portare infatti a configurazioni di minima energia considerevolmente differenti da quelle calcolate.

L'introduzione del pairing, e quindi della materia superfluida, nella struttura di Wigner-Seitz fu però attuata solo recentemente da Baldo, Lombardo, Saperstein e Tolokonnikov [9][10][11][12][13], utilizzando il metodo del funzionale di energia generalizzato descritto in [25].

In questo studio il calcolo della struttura della crosta interna è svolto, sempre in approssimazione di Wigner-Seitz, ma utilizzando un approccio HF+BCS in cui gli effetti di pairing sono calcolati utilizzando appunto la teoria BCS, che risulta molto accurata per lo studio della materia omogenea, ma non altrettanto per quello della materia non omogenea, in cui quindi a priori sarebbe preferibile un approccio HFB, come quello che è stato usato nel lavoro svolto. In questo lavoro gli autori cercarono di ovviare a questo inconveniente utilizzando due diversi funzionali di energia per le due diverse regioni della cella: nella parte interna dove è presente il nucleo è stato infatti usato un funzionale fenomenologico, mentre il gas di neutroni presente nella regione esterna è stato studiato con un funzionale microscopico derivante dai calcoli

di Bruckner in materia neutronica infinita.

Altra differenza rispetto allo studio svolto da Negele e Vautherin [41] riguarda la scelta delle condizioni al contorno. In questo studio, infatti, sono stati considerati due diversi casi, che portarono a risultati abbastanza diversi. Le prime condizioni al contorno considerate sono, come nel caso precedente, quelle di Dirichlet-Neuman, in cui la parte radiale della funzione d'onda, trattata ancora in rappresentazione delle coordinate, avrà un diverso andamento a seconda del valore del numero quantico angolare  $l$ : verrà quindi imposta la condizione (4.1) per  $l$  dispari e la condizione (4.2) per  $l$  pari. Questo tipo di condizioni al contorno è indicata dagli autori come *BC1*. L'altra scelta fatta, chiamata *BC2*, è stato considerare condizioni al contorno opposte a quelle precedentemente descritte, quindi imponendo alla parte radiale della funzione d'onda la condizione (4.2) per  $l$  dispari e la condizione (4.1) per  $l$  pari. Le ulteriori due possibilità, ovvero l'utilizzo di una sola delle due condizioni per ogni  $l$ , non furono prese in considerazione in quanto portavano a situazioni non realistiche in cui la densità del gas di neutroni liberi era portata a svanire o a divergere al bordo della cella. I risultati ricavati dall'utilizzo di questo modello sono riportati in tabella 4.2, dove però si nota che sfortunatamente le densità considerate non sono le stesse calcolate nel lavoro di Negele e Vautherin [41], rendendo un eventuale confronto più complicato.

## 4.2 Energia delle celle di Wigner-Seitz

Nel lavoro svolto, come già accennato, si è calcolata la struttura della crosta interna delle stelle di neutroni dividendola in dieci regioni che sono state studiate separatamente. Il reticolo nucleare è invece stato trattato in approssimazione di Wigner-Seitz tramite una suddivisione in celle sferiche indipendenti. La struttura della crosta sarà quindi studiata, per ogni densità considerata, minimizzando l'energia per particella delle celle in condizione di  $\beta$ -equilibrio.

Grande importanza per questo studio ha quindi il calcolo dell'energia per particella delle varie configurazioni. Quest'energia è stata calcolata come somma di diversi contributi, tutti calcolati per particella,

$$E = E_N + E_M + T_e + E_C \quad (4.3)$$

dove  $E_N$  è l'energia di legame nucleare, calcolata tramite lo studio HFB descritto nel capitolo precedente (le condizioni al contorno utilizzate sono quelle chiamate *BC2* in [13]),  $T_e$  è l'energia cinetica degli elettroni,  $E_C$  descrive l'interazione coulombiana tra le particelle coinvolte ed

$$E_M = \frac{Z(m_p + m_e) + Nm_n}{A} - m_n$$

è l'energia di massa per particella a cui è sottratta la massa del neutrone ( $m_n$ ) per portarla ad avere un ordine di grandezza paragonabile con le altre energie in gioco. Il risultato del calcolo non è però influenzato da questa piccola manipolazione in quanto quelle che si studiano sono le variazioni di energia, che non hanno alcuna dipendenza da costanti additive.  $m_p$  ed  $m_e$  sono ovviamente la massa di protoni ed elettroni.

L'energia cinetica degli elettroni viene calcolata esattamente come in [41], considerando cioè gli elettroni come un gas uniforme di particelle relativistiche

$$T_e = \frac{1}{A} \frac{2}{h^3} \int_0^{p_F} \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^4} \pi p^2 dp$$

che integrato porta ad un'energia pari a

$$T_e = \frac{Z}{A} m_e c^2 \left\{ \frac{3}{8x^3} \left[ x(1+2x^2) \sqrt{1+x^2} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right] - 1 \right\} \quad (4.4)$$

dove il parametro  $x = \frac{\hbar k_e}{m_e c}$  descrive il grado di relatività degli elettroni della cella: la condizione  $x \ll 1$  descrive infatti un sistema di elettroni non relativistici, mentre la condizione  $x \gg 1$  descrive, invece, un sistema di elettroni ultrarelativistici.

Più complicato è invece il calcolo dell'energia coulombiana tra le particelle cariche presenti

$$E_C = \frac{1}{2A} \int d^3r d^3r' (\rho_p(r) - \rho_e(r)) \frac{e^2}{|r - r'|} (\rho_p(r') - \rho_e(r')) \quad (4.5)$$

il cui valore, come descritto in appendice B, risulta essere calcolabile come somma di tre differenti termini

$$E_C = E_{pp} + E_{ee} + E_{ep}$$

Il primo termine ( $E_{pp}$ ) descrive il contributo dato dall'interazione tra i protoni presenti nel nucleo e deve essere trascurato in quanto già incluso nel calcolo HFB dell'energia di legame nucleare ( $E_N$ ). Il secondo termine ( $E_{ee}$ ) descrive, invece, il contributo dato dall'interazione tra gli elettroni presenti nella cella e può essere calcolato come

$$E_{ee} = \frac{1}{2A} \int d^3r d^3r' \rho_e(r) \frac{e^2}{|r - r'|} \rho_e(r') = \frac{1}{A} \frac{3}{5} \frac{e^2 Z^2}{R_{ws}} \quad (4.6)$$

dove nel calcolo, svolto in appendice B, la densità è stata trattata come una costante

$$\rho_e(r) = \rho_e = \frac{Z}{\frac{4}{3} \pi R_{ws}^3} \quad (4.7)$$

Il terzo termine ( $E_{ep}$ ), infine, descrive contributo dell'interazione tra i protoni presenti nel nucleo ed il gas di elettroni e può essere calcolato come

$$E_{ep} = -\frac{1}{A} \int d^3r d^3r' \rho_p(r) \frac{e^2}{|r - r'|} \rho_e(r') = -\frac{1}{A} \frac{3}{2} \frac{Z^2 e^2}{R_{ws}} + \frac{2\pi e^2 Z}{A R_{ws}^3} \int_0^{R_{ws}} dr \rho_p(r) r^4 \quad (4.8)$$

dove nel calcolo, svolto anch'esso in appendice B, si è considerato ancora il gas di elettroni come omogeneo su tutta la cella. L'energia gravitazionale viene invece trascurata in quanto le sue variazioni su scala microscopica sono del tutto trascurabili.

Le celle che sono state considerate nel processo di minimizzazione sono in generale tutte quelle caratterizzate da un numero pari di protoni compreso tra 12 e 60, tenendo però in conto che per ragioni di convergenza del calcolo HFB si sono dovute trascurare alcune configurazioni, che sarebbero però comunque state caratterizzate da un'energia totale piuttosto elevata, a parte alcune situazioni particolari che saranno però evidenziate durante la descrizione dei risultati. Per questa ragione, nonostante in alcuni casi il range di valori di  $Z$  non sia stato del tutto coperto, il calcolo risulta comunque realistico.

Z	N	Rad	mu e	corr	mu p	mu n	eq.beta	Z	N	Rad	mu e	corr	mu p	mu n	eq.beta
12	310	15,6	56,353	1,328	-44,670	6,765	-> 4,14	26	60	42,0	27,251	1,069	-24,940	0,067	-> 1,46
12	322	15,8	55,663	1,312	-44,850	6,765	-> 3,27	26	62	42,4	27,039	1,061	-24,950	0,081	-> 1,23
12	336	16,0	54,900	1,294	-45,110	6,780	-> 2,23	26	64	42,8	26,833	1,053	-24,940	0,092	-> 1,02
12	348	16,2	54,277	1,280	-45,240	6,767	-> 1,49	26	66	43,0	26,634	1,045	-24,990	0,140	-> 0,72
12	362	16,4	53,585	1,264	-45,440	6,778	-> 0,58	26	68	43,2	26,440	1,038	-25,060	0,197	-> 0,40
12	376	16,6	52,926	1,248	-45,600	6,787	-> -0,24	26	70	43,6	26,251	1,030	-25,060	0,214	-> 0,20
12	390	16,8	52,299	1,234	-45,660	6,783	-> -0,93	26	72	43,8	26,068	1,023	-25,070	0,226	-> -0,01
12	404	17,0	51,700	1,220	-45,710	6,782	-> -1,57	26	74	44,2	25,890	1,016	-25,060	0,233	-> -0,18
12	420	17,2	51,047	1,204	-45,790	6,809	-> -2,33	26	76	44,6	25,716	1,010	-25,050	0,238	-> -0,35
12	434	17,4	50,502	1,192	-45,760	6,819	-> -2,86	26	78	44,8	25,547	1,003	-25,050	0,247	-> -0,53
12	450	17,6	49,906	1,178	-45,780	6,853	-> -3,51	26	80	45,2	25,382	0,997	-25,040	0,253	-> -0,69

(a-Cell 2)

(b-Cell10)

Figura 4.2: **Output del programma di calcolo del beta equilibrio.** In figura è rappresentata parte della schermata di output del programma per il calcolo del  $\beta$ -equilibrio per una regione caratterizzata da alta densità (a) ed una regione caratterizzata invece da bassa densità (b). I valori riportati sono il numero di protoni (Z), il numero di neutroni (N), il raggio della cella (Rad), il potenziale chimico di elettroni (mu e), protoni (mu p) e neutroni (mu n), il termine  $\mu_c$  che compare in (4.10) (corr) ed il valore di  $\delta\mu$  (4.9)(eq.beta). Si nota che le celle più prossime alla condizione di  $\beta$ -equilibrio sono quelle evidenziate in quanto il valore di  $\delta\mu$  è il minore in valore assoluto.

### 4.3 $\beta$ -equilibrio e minimizzazione dell'energia

Come accennato in precedenza, il processo di minimizzazione dell'energia delle celle deve essere svolto in  $\beta$ -equilibrio. Questa condizione risulta fondamentale in quanto la struttura delle stelle di neutroni deve risultare stabile nel tempo e l'assenza di  $\beta$ -equilibrio genererebbe un'instabilità nella struttura che non può essere accettata in un modello realistico.

La condizione di  $\beta$ -equilibrio imposta nel lavoro svolto è

$$\delta\mu = m_e c^2 + \mu_e + m_p c^2 + \mu_p + m_n c^2 + \mu_n = 0 \quad (4.9)$$

dove i potenziali chimici dei protoni e dei neutroni sono ricavati risolvendo le equazioni HFB, mentre il potenziale chimico degli elettroni deve essere calcolato a parte come

$$\mu_e = \sqrt{(\hbar c k_e)^2 + (m_e c^2)^2} - m_e c^2 + \mu_c \quad (4.10)$$

in cui i primi due termini descrivono il contributo cinetico, che risulta essere quello dominante, ed il terzo descrive il contributo dell'interazione coulombiana tra gli stessi elettroni e con i protoni presenti nel nucleo

$$\begin{aligned} \mu_c &= \frac{dAE_C^e}{dN_e} = \frac{1}{V} \frac{dAE_C^e}{d\frac{N_e}{V}} = \frac{\rho_e}{Z} \frac{dAE_C^e}{d\rho_e} = \frac{\rho_e}{Z} \frac{d(AE_{ee})}{d\rho_e} + \frac{\rho_e}{Z} \frac{d(AE_{ep})}{d\rho_e} = \\ &= \frac{6}{5} \frac{e^2 Z}{R} - \frac{3}{2} \frac{e^2 Z}{R} + 2\pi \frac{e^2}{R^3} \int_0^{R_{ws}} dr \rho_p(r) r^4 \end{aligned}$$

in cui con  $E_C^e$  si è identificato il contributo all'energia coulombiana dovuto alla presenza degli elettroni.

Sostituendo a  $\mu_c$  il suo valore numerico è, quindi, infine, possibile ricavare che il potenziale chimico degli elettroni risulta essere pari a

$$\mu_e = \sqrt{(\hbar c k_e)^2 + (m_e c^2)^2} - m_e c^2 - \frac{3}{10} e^2 \frac{Z}{R} + 2\pi \frac{e^2}{R^3} \int_0^{R_{ws}} dr \rho_p(r) r^4 \quad (4.11)$$

Utilizzando i potenziali chimici così calcolati è quindi stato possibile imporre la condizione di  $\beta$ -equilibrio fissando, in ogni regione considerata, il numero di protoni



Z	N	Rad	mu e	corr	mu p	mu n	eq.beta	Z	N	Rad	mu e	corr	mu p	mu n	eq.beta
16	416	17,2	56,516	1,606	-46,680	6,656	-> 2,40	16	470	17,9	54,320	1,544	-46,400	6,776	-> 0,36
16	430	17,4	55,913	1,589	-46,590	6,677	-> 1,86	16	472	17,9	54,245	1,542	-46,390	6,782	-> 0,29
16	446	17,6	55,254	1,570	-46,540	6,723	-> 1,21	16	474	18,0	54,171	1,540	-46,380	6,788	-> 0,22
16	462	17,8	54,624	1,553	-46,440	6,759	-> 0,64	16	476	18,0	54,096	1,538	-46,380	6,794	-> 0,14
16	478	18,0	54,023	1,536	-46,380	6,802	-> 0,06	16	478	18,0	54,023	1,536	-46,380	6,802	-> 0,06
16	496	18,2	53,376	1,517	-46,370	6,853	-> -0,63	16	480	18,0	53,949	1,534	-46,370	6,805	-> -0,01
16	512	18,4	52,826	1,502	-46,290	6,861	-> -1,11	16	482	18,1	53,876	1,531	-46,360	6,811	-> -0,08
16	530	18,6	52,234	1,485	-46,310	6,886	-> -1,74	16	484	18,1	53,804	1,529	-46,350	6,815	-> -0,14
16	548	18,8	51,666	1,469	-46,360	6,907	-> -2,38	16	486	18,1	53,731	1,527	-46,350	6,821	-> -0,22
16	566	19,0	51,123	1,454	-46,430	6,916	-> -3,01	16	488	18,1	53,660	1,525	-46,340	6,825	-> -0,29
16	584	19,2	50,601	1,439	-46,530	6,924	-> -3,63	16	490	18,1	53,588	1,523	-46,340	6,831	-> -0,36

(a)

(b)

Figura 4.3: **Confronto tra le due procedure nel calcolo del  $\beta$ -equilibrio.** In figura è rappresentata parte della schermata di output del programma per il calcolo del  $\beta$ -equilibrio utilizzando le due diverse procedure descritte nel testo, quella in cui si impone uno step nel raggio della cella (a) e quella in cui si impone invece lo step nel numero di neutroni (b). Dai risultati raffigurati, che derivano dal calcolo per la stessa densità (Cell 2), si nota che la condizione di  $\beta$ -equilibrio ha caratteristiche molto simili utilizzando le due diverse procedure.

e facendo variare il numero di neutroni al fine di trovare la configurazione in cui il valore di  $\delta\mu$  è più prossimo allo zero (Fig. 4.2): il raggio della cella risulta fissato dal valore di N e Z e dalla densità della regione in esame ( $\frac{4\pi}{3}R_{ws}^3 = \frac{N+Z}{\rho}$ ).

Questo studio può essere però svolto solamente in modo approssimativo, in quanto sia il numero di protoni che quello di neutroni presenti nella cella sono variabili discrete. La precisione nello studio dipende, però in gran parte dal solo step nel numero di neutroni, infatti, come descritto in precedenza, lo step nel numero di protoni è sempre 2. In questo calcolo, al fine di facilitare lo studio HFB, si è scelta una variazione nel numero di neutroni che porti ad uno step nel raggio della cella pari a  $0.2 \text{ fm}$ . Questo procedimento, porta però ad un calcolo poco preciso nelle regioni caratterizzate da un'elevata densità. Si nota infatti che in queste regioni, lo step utilizzato nelle dimensioni della cella porta ad una variazione dell'ordine dei 10 neutroni tra la configurazione studiata e quella successiva (Fig. 4.2a). Problema, invece, non riscontrato nelle regioni caratterizzate da una densità meno elevata, in cui lo step nel numero di neutroni risulta comunque essere sempre dell'ordine di 2-4 (Fig. 4.2b).

Al fine di verificare l'effettiva influenza di questa bassa precisione nel calcolo del  $\beta$ -equilibrio, per alcune configurazioni si è, quindi, svolto un ulteriore calcolo in cui lo step preso in considerazione è sempre di 2 neutroni ed il raggio viene calcolato di conseguenza. Da questo calcolo di controllo (Fig. 4.3) è stato però possibile verificare che i risultati ottenuti con le due diverse procedure sono in effetti molto simili, e che di conseguenza la scelta di quale utilizzare non è particolarmente rilevante.

Studiata la situazione di  $\beta$ -equilibrio è quindi sufficiente analizzare tra le celle in cui questa è soddisfatta, quale sia quella con minima energia per particella, che caratterizzerà quindi la struttura della crosta interna alla densità studiata (Fig. 4.4, 4.6, 4.10 e 4.11).

## 4.4 Risultati

Le densità scelte per svolgere il calcolo appena descritto sono le stesse già analizzate da Negele e Vautherin [41], escludendo quella che è stata chiamata regione 0, la cui densità è prossima a quella in cui inizia a comparire la fase che, come ho descritto nel capitolo 2, viene chiamata pasta phase. In questa regione della stella le

$N_{cell}$	$\rho$	$Z$	$N$	$R_{ws}$	$E_N$	$T_e$	$E_M$	$E_C$	$E$
1	$7.8 \cdot 10^{13}$	16	624	14.8	5.561	1.195	-0.020	0.023	6.760
2	$3.4 \cdot 10^{13}$	18	494	18.2	3.233	1.418	-0.027	0.030	4.653
3	$1.5 \cdot 10^{13}$	26	672	26.6	1.862	1.158	-0.029	0.031	3.023
4	$9.6 \cdot 10^{12}$	18	322	24.2	0.724	1.600	-0.041	0.034	2.317
5	$6.2 \cdot 10^{12}$	20	300	27.4	-0.005	1.724	-0.049	0.039	1.710
6	$2.7 \cdot 10^{12}$	22	292	36.2	-0.761	1.503	-0.055	0.037	0.724
7	$1.5 \cdot 10^{12}$	24	196	39.2	-2.069	2.224	-0.085	0.058	0.128
8	$1.0 \cdot 10^{12}$	22	126	39.0	-3.180	2.956	-0.116	0.072	-0.268
9	$6.7 \cdot 10^{11}$	24	90	41.0	-4.788	4.105	-0.165	0.107	-0.741
10	$4.7 \cdot 10^{11}$	26	68	43.2	-6.427	5.235	-0.216	0.143	-1.264

Tabella 4.3: **Risultati per interazione Sly4 trascurando il pairing.** In tabella sono riportati i risultati del calcolo svolto con l'interazione Sly4 trascurando gli effetti di pairing. Con  $\rho$  si indica la densità della regione studiata, espressa in  $g \text{ cm}^{-3}$ ,  $Z$  e  $N$  sono rispettivamente il numero di protoni e neutroni, con  $R_{ws}$  si indica il raggio della cella, espresso in  $fm$ , ed  $E$ ,  $E_N$ ,  $T_e$ ,  $E_M$  e  $E_C$  sono rispettivamente l'energia per particella totale, quella nucleare, quella cinetica degli elettroni, quella di massa e quella coulombiana, espresse in  $MeV$ .

grandi deformazioni nucleari, indotte dall'elevata densità, non permettono infatti di utilizzare l'approssimazione di Wigner-Seitz, in quanto le celle non possono più essere considerate sferiche.

#### 4.4.1 Dipendenza dall'interazione di Skyrme

Innanzitutto si è svolto uno studio in approssimazione HF, trascurando quindi le correlazioni di pairing. Questo studio è stato fatto al fine di confrontare l'influenza sulla struttura della cella che ha la scelta della parametrizzazione di Skyrme del termine particella-buca dell'interazione nucleare (App. A).

Le parametrizzazioni dell'interazione di Skyrme scelte per questo confronto sono quelle i cui parametri sono riportati in tabella 3.1. La prima parametrizzazione utilizzata, chiamata Sly4 [20], è comunemente usata per studiare le proprietà dei nuclei atomici e della materia presente nelle stelle di neutroni, motivo per cui è stata scelta anche per i successivi calcoli in cui sono state introdotte le interazioni di pairing.

I risultati di questo studio (Tab. 4.3) si possono innanzitutto confrontare con quelli ottenuti da Negele e Vautherin [41] (Tab. 4.1). Da questo confronto è possibile notare una notevole discrepanza nella struttura della crosta. Nel calcolo che è stato svolto le celle ottenute non sono infatti caratterizzate necessariamente da un numero di protoni pari ad un numero magico, o semimagico, come invece accadeva nel calcolo riportato in [41], inoltre il valore ottenuto è in ogni regione notevolmente inferiore rispetto a quello ricavato in [41].

In figura 4.4 si rappresenta inoltre l'andamento dell'energia totale in funzione di  $Z$  per le celle in condizione di  $\beta$ -equilibrio: per ogni densità studiata la configurazione che determina la struttura della crosta sarà quindi, come già descritto, quella di minima energia. In questo studio si può notare che il calcolo svolto non risulta sufficiente a determinare la struttura nella regione di densità massima (Cell 1). Questo perché al diminuire di  $Z$  si riscontra una continua diminuzione anche dell'energia del sistema e questo comporta che la cella di minore energia avrà probabilmente un

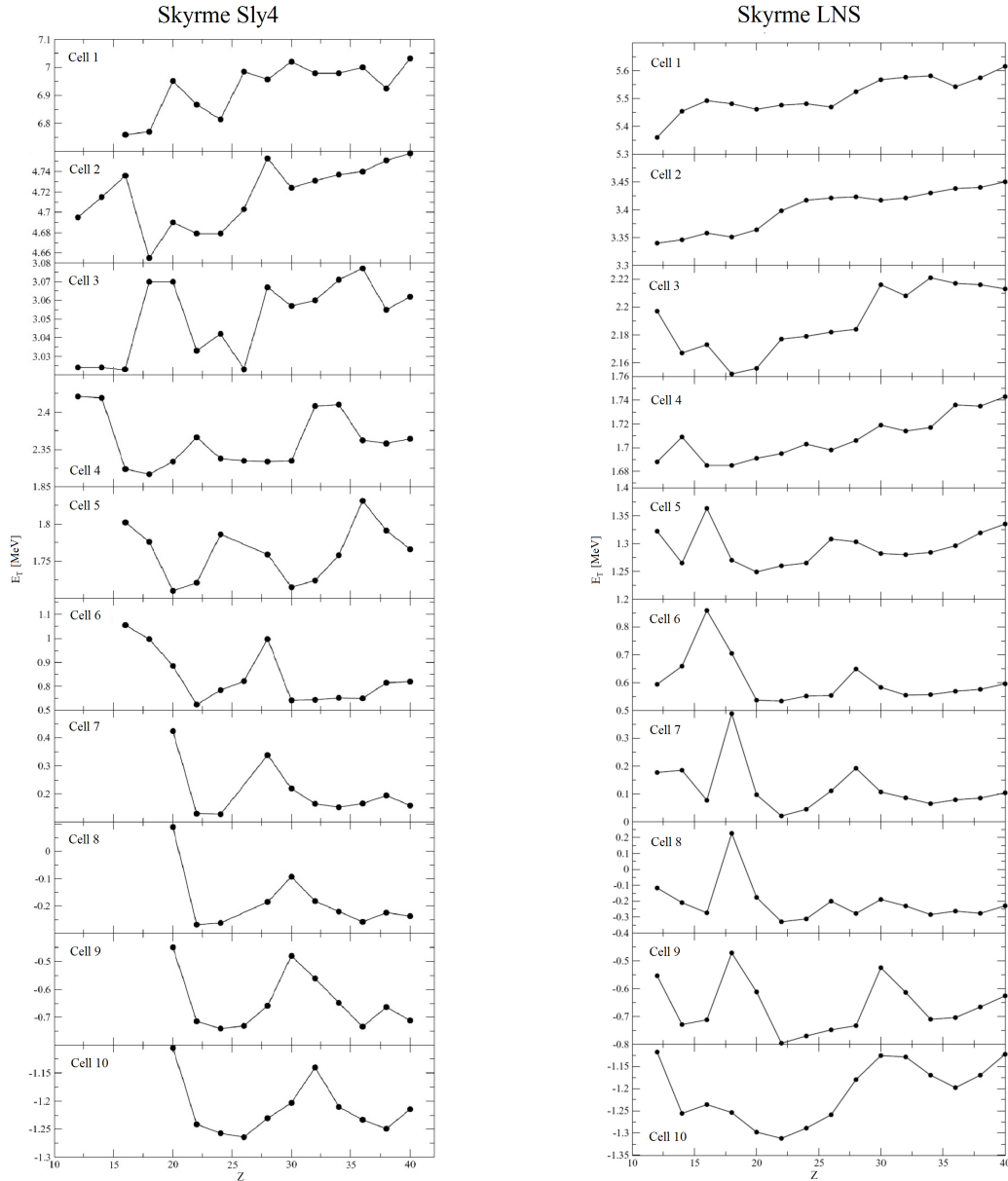


Figura 4.4: **Energia delle celle ricavata con un approccio HF.** In figura è rappresentata l'energia per particella delle celle di in condizione di  $\beta$ -equilibrio ( $E_T$ ), data in  $MeV$ , in funzione del numero di protoni presente ( $Z$ ). Il calcolo è svolto, trascurando gli effetti di pairing, per le due interazioni considerate: rispettivamente Sly4 ed LNS.

numero di protoni inferiore al minimo studiato. Sfortunatamente in questa regione non è stato possibile svolgere il calcolo HFB per celle con un minor numero di protoni.

Lo stesso problema può inoltre essere riscontrato anche nella seconda regione (Cell 2) in quanto, nonostante in essa si sia trovato un minimo, è necessario notare che l'energia degli ultimi tre valori di  $Z$  calcolati è in continua decrescita e non è possibile essere certi che per  $Z$  ancora inferiori non si riscontri una configurazione di energia minore di quella trovata come minimo.

Ulteriore conferma che il calcolo nella regione 1 non risulta attendibile si può ottenere analizzando la densità di protoni e neutroni (Fig. 4.5). Perché l'approssimazione di Wigner-Seitz possa essere utilizzata è, infatti, assolutamente necessario che al bor-

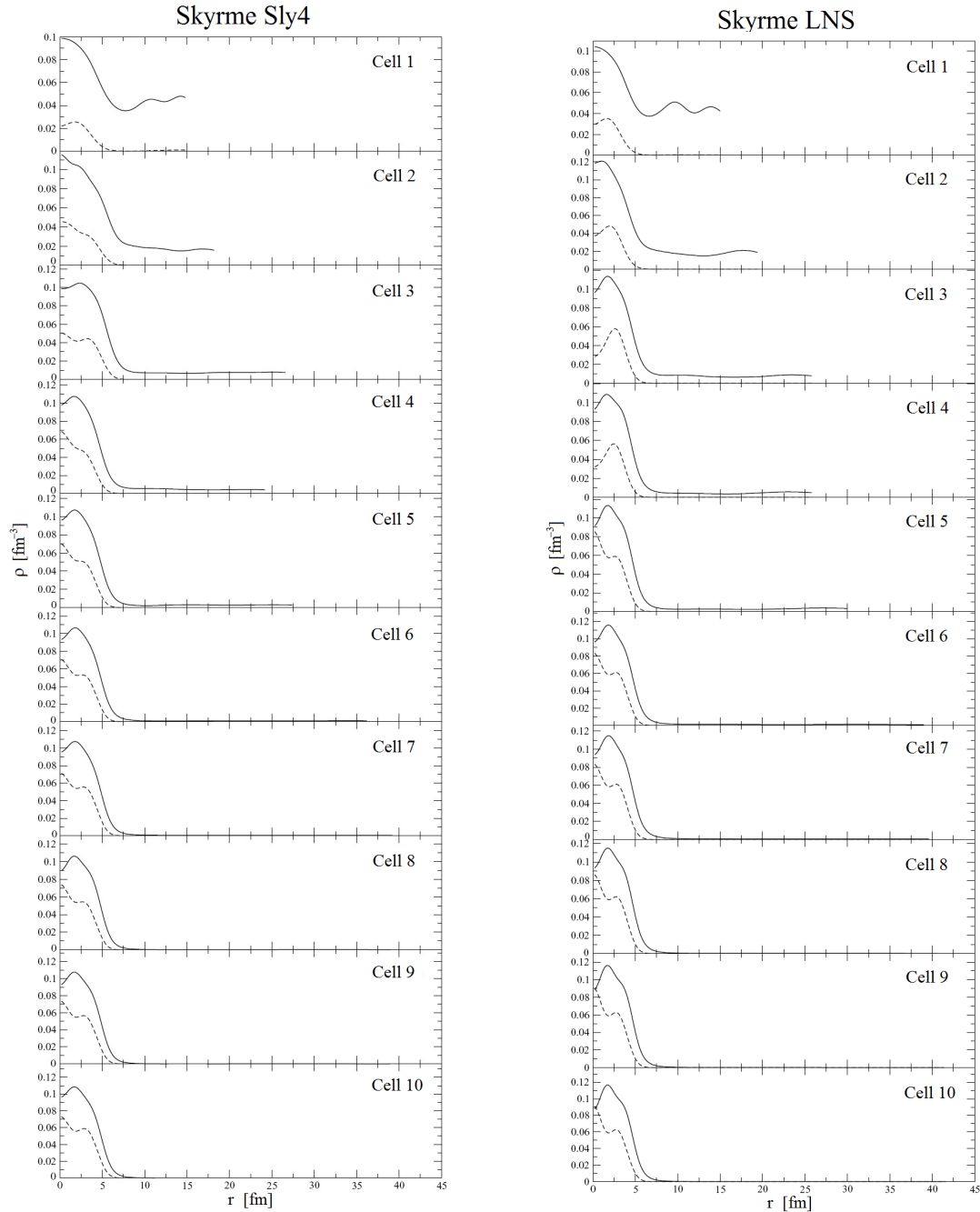


Figura 4.5: Densità di protoni e neutroni in un approccio HF. In figura è rappresentata la densità di protoni (linea tratteggiata) e neutroni (linea continua) per tutte le regioni studiate. Il calcolo è svolto, trascurando gli effetti di pairing, per le due interazioni considerate: rispettivamente Sly4 ed LNS. La densità è data in  $fm^{-3}$ , mentre la coordinata radiale in  $fm$ .

do della cella la densità dei neutroni forma un plateau ben definito (ovvero che assuma un valore approssimativamente costante), condizione non rispettata nella regione di densità massima. Inoltre per questa regione si può anche osservare una depressione nella densità di protoni nel centro della cella: fenomeno che indica una distribuzione di protoni non del tutto stabile.

La parametrizzazione utilizzata come confronto è invece quella chiamata LNS [18]: è un'interazione calcolata in approccio Bruckner, utilizzata principalmente per

$N_{cell}$	$\rho$	$Z$		$N$		$R_w$		$E$	
		Sly4	LNS	Sly4	LNS	Sly4	LNS	Sly4	LNS
1	$7.8 \cdot 10^{13}$	16	12	624	654	14.8	15.0	6.760	5.360
2	$3.4 \cdot 10^{13}$	18	12	494	608	18.2	19.4	4.653	3.340
3	$1.5 \cdot 10^{13}$	26	18	672	618	26.6	25.8	3.023	2.152
4	$9.6 \cdot 10^{12}$	18	16	322	396	24.2	25.8	2.317	1.685
5	$6.2 \cdot 10^{12}$	20	20	300	400	27.4	30.0	1.710	1.249
6	$2.7 \cdot 10^{12}$	22	22	292	370	36.2	39.0	0.724	0.534
7	$1.5 \cdot 10^{12}$	24	22	196	206	39.2	39.6	0.128	0.021
8	$1.0 \cdot 10^{12}$	22	22	126	146	39.0	40.8	-0.268	-0.329
9	$6.7 \cdot 10^{11}$	24	22	90	96	41.0	41.4	-0.741	-0.796
10	$4.7 \cdot 10^{11}$	26	22	68	62	43.2	41.8	-1.264	-1.312

Tabella 4.4: **Confronto tra la struttura ricavata dall'interazione Sly4 e dall'interazione LNS.** In figura sono riportati i risultati del calcolo HF utilizzando la parametrizzazione dell'interazione nucleare Sly4 e LNS. Con  $\rho$  si indica la densità della regione studiata, espressa in  $g \text{ cm}^{-3}$ ,  $Z$  e  $N$  sono rispettivamente il numero di protoni e neutroni, con  $R_{ws}$  si indica il raggio della cella, espresso in  $fm$ , ed  $E$  è l'energia per particella della cella, espressa in  $MeV$ .

studiare le proprietà di bulk della materia nucleare.

Come si può notare dalla tabella 4.4 i risultati ottenuti utilizzando le due diverse interazioni sono piuttosto differenti, il che sta ad indicare una forte dipendenza dall'interazione utilizzata. Questa discordanza nei risultati deriva però in realtà da una notevole differenza nei risultati del calcolo del  $\beta$ -equilibrio. Questa si può facilmente notare osservando le regioni in cui la cella a minima energia ricavata dall'utilizzo delle due interazioni è caratterizzata dallo stesso numero di protoni: le regioni 5, 6 e 8. In queste celle si può infatti notare che la configurazione di beta equilibrio derivante dalle due diverse interazioni, pur essendo caratterizzata dallo stesso  $Z$ , ha in realtà un numero di neutroni molto differente.

Analizzando, invece, anche per quest'interazione la dipendenza dell'energia delle celle dal numero di protoni (Fig. 4.4) si può inoltre osservare, nelle due regioni caratterizzate da densità massima, che non è presente una condizione di minima energia. Al diminuire di  $Z$  si riscontra infatti una continua diminuzione anche dell'energia della cella e questo comporta che la cella di minima energia sarà probabilmente caratterizzata da un numero di protoni inferiore al minimo ricavato nello studio svolto. In conseguenza di ciò, analogamente ai casi riscontrati per l'interazione Sly4, il risultato che è stato ricavato non risulta accettabile ai fini dello studio proposto.

Anche in questo caso, come fatto per i risultati ricavati dall'utilizzo dell'interazione Sly4, è molto importante analizzare anche la densità di protoni e neutroni (Fig. 4.5), che risulta essere uno dei mezzi più importanti per definire l'accettabilità delle soluzioni ottenute. Dal risultato di questo studio è infatti possibile verificare definitivamente la non accettabilità del risultato ottenuto nella regione a massima densità (Cell 1). Si nota infatti che in questa regione l'andamento della densità di neutroni al bordo della cella risulta essere molto irregolare, mentre, come descritto in precedenza, l'ipotesi di celle indipendenti richiede la formazione di un plateau. Inoltre, come anche nel caso di interazione Sly4, si può osservare una depressione della densità di protoni al centro della cella.

Analizzando, poi, le celle rimanenti si può notare che è presente un'instabilità nella distribuzione di protoni anche nelle successive tre regioni (Cell 2, 3 e 4), instabilità evidenziata anche in questo caso da una depressione nella loro densità al centro della cella: utilizzando l'interazione LNS, lo studio delle regioni della stella caratterizzate da alta densità non si può quindi considerare realistico. I risultati ottenuti nelle celle caratterizzate da densità minore, dove il contributo dominante è dato dal gas di neutroni, si possono invece considerare accettabili.

Si può quindi concludere che l'interazione LNS, pur dando una descrizione realistica del gas di neutroni liberi, non risulta accettabile, invece, nel calcolo delle proprietà del nucleo al centro della cella. In particolare, con questa interazione non risulta possibile ottenere una descrizione realistica del comportamento dei protoni presenti.

#### 4.4.2 Dipendenza dall'interazione di Pairing

Studiata la dipendenza dall'interazione di Skyrme resta da analizzare la dipendenza dall'interazione di pairing. Questo studio è svolto utilizzando la teoria HFB a temperatura nulla, così come è stata formulata nel capitolo precedente.

Le parametrizzazioni usate per descrivere le correlazioni di pairing (3.18) sono quelle descritte in appendice A, che corrispondono ad un'interazione isoscalare (A.4), e ad un'interazione isovettoriale (A.7). L'interazione isoscalare è stata parametrizzata in modo da ottenere sia una condizione di strong pairing (ISS) che una condizione di weak pairing (ISW), quindi con un gap medio avente il massimo rispettivamente di  $3 \text{ MeV}$  e  $1 \text{ MeV}$ , mentre l'interazione isovettoriale è stata parametrizzata per descrivere solamente la condizione di strong pairing (IV), quindi con un massimo gap medio dell'ordine dei  $3 \text{ MeV}$ . I parametri utilizzati sono descritti in appendice A.

I risultati ottenuti dall'utilizzo delle tre interazioni di pairing sono riportati in tabella 4.5, dove oltre che la struttura della cella vengono riportati anche le quattro forme di energia che contribuiscono all'energia totale della cella (l'energia nucleare ( $E_N$ ), l'energia cinetica degli elettroni ( $T_e$ ), l'energia di massa ( $E_M$ ) e l'energia coulombiana ( $E_C$ )), grazie a cui è possibile notare che, come anche nel caso HF, i principali contributi vengono dall'energia nucleare e dall'energia cinetica degli elettroni.

Il processo di minimizzazione dell'energia grazie a cui si sono ricavati i risultati appena descritti è raffigurato in figura 4.6. In questo studio si può notare che, come nel caso HF, il minimo ricavato nella zona più densa per le interazioni ISS ed IV non risulta consistente in quanto al diminuire di  $Z$  si ha una continua decrescita dell'energia: la configurazione di minimo sarà quindi molto probabilmente caratterizzata da un numero di protoni inferiore a quelli studiati. Stessa considerazione si può, inoltre, fare anche per i risultati ottenuti con l'interazione ISW. In questo caso infatti, nonostante si sia ottenuto un minimo nel range di valori studiato, si osserva una consistente diminuzione di energia per gli ultimi valori di  $Z$  analizzati, diminuzione che rende molto probabile l'esistenza di configurazioni di energia inferiore a quella riportata come minimo.

Contrariamente al caso precedente, queste considerazioni si possono fare però anche per la seconda regione, dove si osserva ancora una continua diminuzione dell'energia al decrescere di  $Z$ , per cui anche in questo caso il minimo ottenuto non può essere considerato affidabile. Lievemente diversi sono invece i risultati ottenuti dall'utilizzo

	$N_{cell}$	$\rho$	$Z$	$N$	$R_{ws}$	$E_N$	$T_e$	$E_M$	$E_C$	$E$
ISS	1	$7.8 \cdot 10^{13}$	16	624	14.8	5.402	1.195	-0.020	0.023	6.601
	2	$3.4 \cdot 10^{13}$	12	404	17.0	3.276	1.088	-0.023	0.018	4.360
	3	$1.5 \cdot 10^{13}$	14	350	21.4	1.610	1.209	-0.030	0.022	2.811
	4	$9.6 \cdot 10^{12}$	20	484	27.6	1.089	1.088	-0.031	0.025	2.170
	5	$6.2 \cdot 10^{12}$	20	408	30.2	0.451	1.168	-0.037	0.027	1.609
	6	$2.7 \cdot 10^{12}$	22	308	36.8	-0.694	1.406	-0.052	0.034	0.695
	7	$1.5 \cdot 10^{12}$	22	186	38.4	-1.998	2.133	-0.083	0.052	0.105
	8	$1.0 \cdot 10^{12}$	22	130	39.4	-3.097	2.852	-0.113	0.070	-0.288
	9	$6.7 \cdot 10^{11}$	24	102	42.4	-4.308	3.589	-0.149	0.093	-0.774
	10	$4.7 \cdot 10^{11}$	24	68	43.0	-6.068	4.840	-0.204	0.126	-1.307
ISW	1	$7.8 \cdot 10^{13}$	22	786	16.0	5.455	1.340	-0.021	0.032	6.806
	2	$3.4 \cdot 10^{13}$	14	418	17.2	3.340	1.272	-0.025	0.023	4.610
	3	$1.5 \cdot 10^{13}$	16	446	23.2	1.948	1.051	-0.027	0.021	2.992
	4	$9.6 \cdot 10^{12}$	16	332	24.4	0.982	1.325	-0.036	0.026	2.297
	5	$6.2 \cdot 10^{12}$	20	400	30.0	0.508	1.198	-0.037	0.027	1.695
	6	$2.7 \cdot 10^{12}$	22	318	37.2	-0.612	1.351	-0.051	0.033	0.722
	7	$1.5 \cdot 10^{12}$	22	192	38.8	-1.907	2.054	-0.080	0.050	0.117
	8	$1.0 \cdot 10^{12}$	22	132	39.6	-3.035	2.803	-0.112	0.069	-0.275
	9	$6.7 \cdot 10^{11}$	24	106	42.8	-4.149	3.442	-0.144	0.089	-0.762
	10	$4.7 \cdot 10^{11}$	24	68	43.0	-6.054	4.840	-0.204	0.126	-1.293
IV	1	$7.8 \cdot 10^{13}$	16	598	14.6	5.427	1.264	-0.020	0.025	6.695
	2	$3.4 \cdot 10^{13}$	12	376	16.6	3.219	1.195	-0.024	0.019	4.409
	3	$1.5 \cdot 10^{13}$	16	400	22.4	1.535	1.209	-0.030	0.024	2.737
	4	$9.6 \cdot 10^{12}$	18	384	25.6	0.777	1.279	-0.035	0.027	2.048
	5	$6.2 \cdot 10^{12}$	20	366	29.2	0.134	1.341	-0.041	0.031	1.465
	6	$2.7 \cdot 10^{12}$	22	262	35.0	-1.063	1.720	-0.061	0.042	0.639
	7	$1.5 \cdot 10^{12}$	24	194	39.0	-2.148	2.251	-0.086	0.058	0.075
	8	$1.0 \cdot 10^{12}$	24	134	39.8	-3.314	3.043	-0.119	0.079	-0.310
	9	$6.7 \cdot 10^{11}$	24	88	40.8	-4.929	4.204	-0.168	0.109	-0.783
	10	$4.7 \cdot 10^{11}$	26	72	43.8	-6.195	4.951	-0.207	0.136	-1.316

Tabella 4.5: **Struttura della crosta calcolata in approccio HFB.** In tabella sono riportati i risultati del calcolo per i diversi modelli di interazione di pairing utilizzati: ISS (A.5), ISW (A.6) ed IV (A.8). Con  $\rho$  si indica la densità della regione studiata, espressa in  $g \text{ cm}^{-3}$ ,  $Z$  e  $N$  sono rispettivamente il numero di protoni e neutroni, con  $R_{ws}$  si indica il raggio della cella, espresso in  $fm$ , ed  $E$ ,  $E_N$ ,  $T_e$ ,  $E_M$  e  $E_C$  sono rispettivamente l'energia per particella totale, quella nucleare, quella cinetica degli elettroni, quella di massa e quella coulombiana, espresse in  $MeV$ .

dell'interazione ISW, dove si osserva un aumento di energia per l'ultimo valore di  $Z$  studiato, il che induce a pensare che la configurazione trovata possa effettivamente essere quella a minima energia. Lo studio di celle caratterizzate da un numero di protoni inferiore a quello considerato potrebbe eliminare queste ambiguità, ma sfortunatamente a causa di problemi di convergenza del calcolo HFB non è stato possibile analizzare tali condizioni.

Anche in questo caso, come fatto per lo studio dell'interazione di Skyrme, è importante verificare l'attendibilità dei risultati ottenuti. Per fare ciò è possibile innanzi-

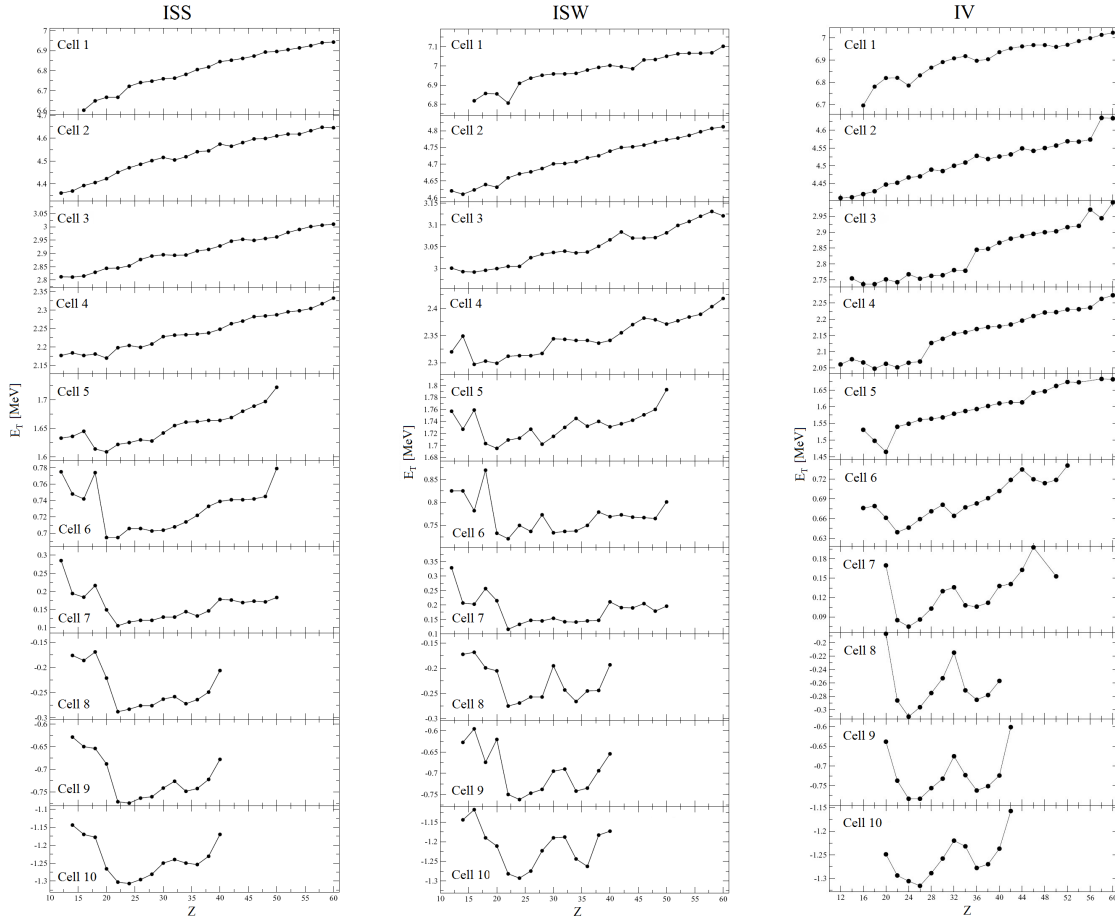


Figura 4.6: **Energia delle celle ricavata con un approccio HFB.** In figura è rappresentata l'energia per particella delle celle di in condizione di  $\beta$ -equilibrio ( $E_T$ ), data in  $MeV$ , in funzione del numero di protoni presente ( $Z$ ). Il calcolo è svolto utilizzando la teoria HFB, per tutte le tre interazioni di pairing considerate: rispettivamente ISS (A.5), ISW (A.6) ed IV (A.8).

tutto analizzare le densità di protoni e neutroni ottenuti per le tre interazioni studiate (Fig. 4.7). Da quest'analisi è possibile osservare che per ogni interazione utilizzata, come anche nel caso HF, il calcolo della regione più densa non risulta consistente in quanto la densità di neutroni non presenta un plateau. Si può inoltre osservare che anche l'attendibilità dei risultati nella regione successiva è in dubbio, assieme a quelli della zona 3 nel calcolo ISS, in quanto analizzando l'andamento della densità di protoni si riscontra una irrealistica depressione al centro della cella, che indica infatti come già descritto una distribuzione di protoni instabile. I risultati ricavati per le restanti regioni appaiono invece più realistici.

Ulteriore verifica della non attendibilità dei risultati ottenuti per la regione di massima densità si può ottenere analizzando poi il pairing field dei neutroni (Fig. 4.8). Perché la condizione di celle indipendenti sia rispettata, infatti, anche questa grandezza, come è stato per la densità, deve presentare un plateau al bordo della cella, condizione non rispettata nella regione a densità più elevata, per la quale si ha quindi un'ulteriore conferma della necessità di andare oltre l'approssimazione di Wigner-Seitz.

L'analisi di questa stessa grandezza nelle regioni successive porta poi a rilevare



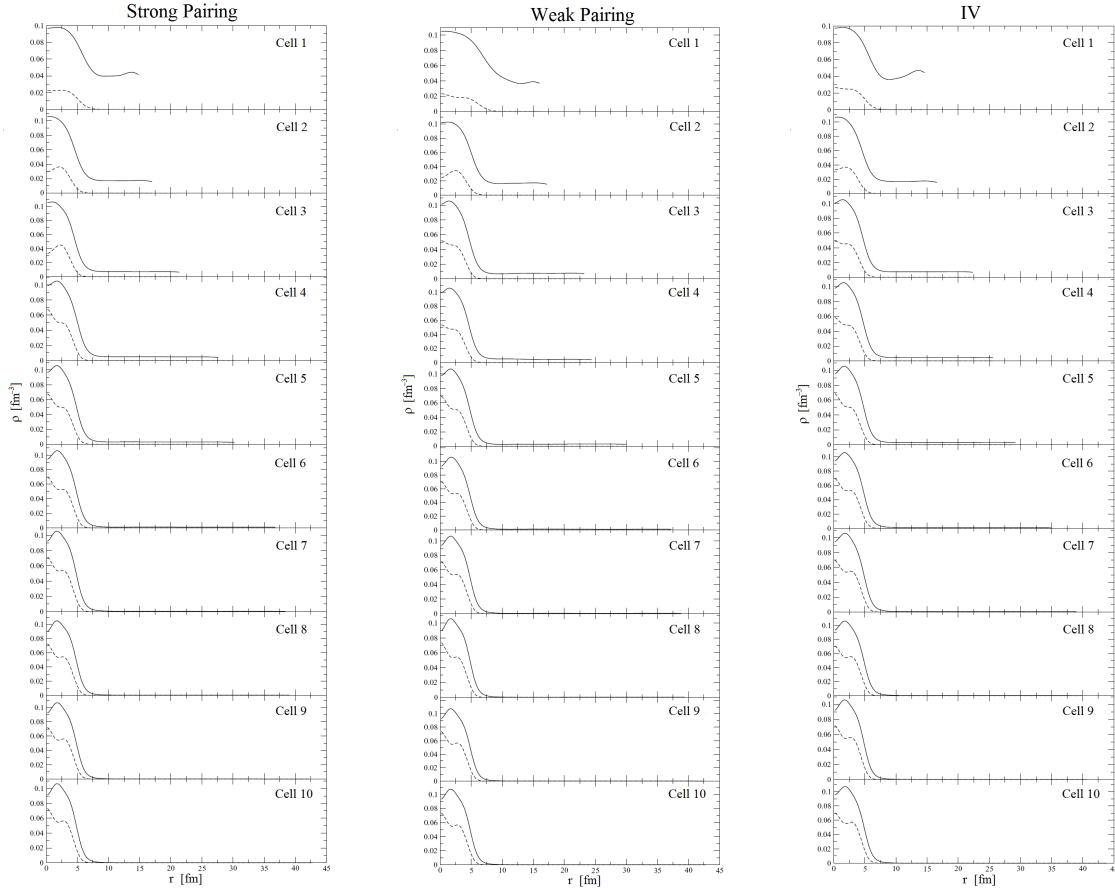


Figura 4.7: **Densità di protoni e neutroni in un approccio HFB.** In figura è rappresentata la densità di protoni (linea tratteggiata) e neutroni (linea continua) per tutte le regioni studiate. Il calcolo è svolto utilizzando la teoria HFB, per tutte le tre interazioni di pairing considerate: rispettivamente ISS (A.5), ISW (A.6) ed IV (A.8). La densità è data in  $fm^{-3}$ , mentre la coordinata radiale in  $fm$ .

la presenza costante di lievi oscillazioni nel caso di pairing ISW. Queste potrebbero indicare un problema nella trattazione del pairing dei neutroni in situazioni in cui questo abbia una bassa intensità, tuttavia l'osservazione della densità della materia, che come descritto non evidenzia comportamenti irrealistici, e l'analisi dei risultati ottenuti, che risultano plausibili se confrontati con quelli derivanti dalle altre interazioni di pairing, indicano che lo studio svolto risulta comunque attendibile.

Di grande importanza è inoltre lo studio del pairing field dei protoni (Fig. 4.8). I risultati ottenuti per questa grandezza per l'interazione isoscalare (A.4) sono quelli attesi. Molto importante è infatti che questa grandezza sia nulla nelle regioni 4 e 5 dell'interazione ISS, così come lo è anche nella regione 5 dell'interazione ISW. Si nota infatti che il numero di protoni riscontrato nelle celle caratteristiche di quelle regioni è 20, un numero di particelle che identifica una closed shell, in cui, a causa del grande gap di energia con lo stato successivo all'ultimo occupato, non può esserci fenomeno di pairing. Discorso analogo si può fare per le celle in cui il numero di protoni è pari a 14, infatti nonostante questo numero di protoni non identifichi una closed shell si riscontra comunque una gap rilevante tra l'ultimo stato occupato ed il successivo. Anche per le regioni in cui il numero di protoni nella cella è pari a 14, si riscontra infatti una importante diminuzione nell'intensità del pairing field ricavato

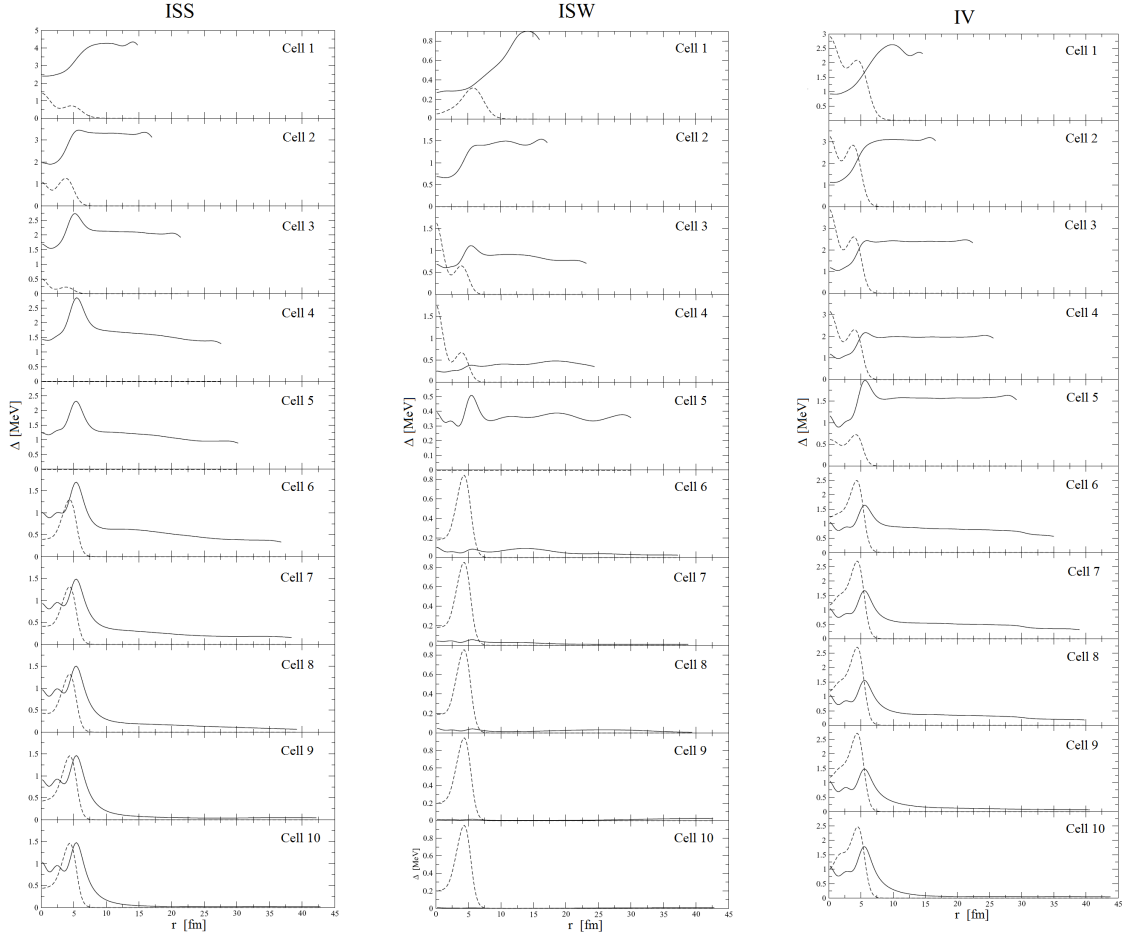


Figura 4.8: **Pairing field di protoni e neutroni in un approccio HFB.** In figura è rappresentata il pairing field di protoni (linea tratteggiata) e neutroni (linea continua) per tutte le regioni studiate. Il calcolo è svolto utilizzando la teoria HFB, per tutte le tre interazioni di pairing considerate: rispettivamente ISS (A.5), ISW (A.6) ed IV (A.8). Il pairing field ( $\Delta$ ) è dato in  $MeV$ , mentre la coordinata radiale in  $fm$ .

dall'interazione isoscalare, diminuzione che porta addirittura ad ottenere pairing nullo nel caso di weak pairing (ISW).

Considerazioni totalmente opposte devono essere fatte, invece per quanto riguarda l'interazione isovettoriale (A.7). In questo caso si nota infatti che nell'unica regione caratterizzata da una cella in cui il numero di protoni identifica una closed shell (Cell 5) è sì presente una notevole diminuzione dell'intensità del pairing field, ma non la sua soppressione, il che indica un accoppiamento talmente intenso da avere un'energia addirittura superiore al gap tra lo stato di closed shell ed il successivo. Da questo risultato, unito ai valori di pairing field molto elevati riscontrati anche nelle restanti regioni, si può quindi concludere che l'interazione di pairing isovettoriale in realtà porti ad una notevole sovrastima del pairing field dei protoni.

Le ultime importanti considerazioni riguardano il confronto tra i risultati ottenuti con le quattro situazioni di pairing considerate: assenza di pairing (HF), pairing isoscalare strong (ISS) e weak (ISW) ed infine pairing isovettoriale strong (IV).

In questo confronto, riportato per semplicità in tabella 4.6, si nota che le differenti interazioni utilizzate portano a notevoli differenze nel calcolo del  $\beta$ -equilibrio. Questo

$N_{cell}$	$Z$				$N$				$R_w$			
	HF	ISS	ISW	IV	HF	ISS	ISW	IV	HF	ISS	ISW	IV
1	16	16	22	16	624	624	786	598	14.8	14.8	16.0	14.6
2	18	12	14	12	494	404	418	376	18.2	17.0	17.2	16.6
3	26	14	16	16	672	350	446	400	26.6	21.4	23.2	22.4
4	18	20	16	18	322	484	332	384	24.2	27.6	24.4	25.6
5	20	20	20	20	300	408	400	366	27.4	30.2	30.0	29.2
6	22	22	22	22	292	308	318	262	36.2	36.8	37.2	35.0
7	24	22	22	24	196	186	192	194	39.2	38.4	38.8	39.0
8	22	22	22	24	126	130	132	134	39.0	39.4	39.6	39.8
9	24	24	24	24	90	102	106	88	41.0	42.4	42.8	40.8
10	26	24	24	26	68	68	68	72	43.2	43.0	43.0	43.8

Tabella 4.6: **Confronto tra la struttura ricavata dai diversi modelli di pairing.** In figura è riportata la struttura della crosta ricavata per i diversi modelli di interazione di pairing utilizzati: rispettivamente *HF* (pairing nullo), *ISS* (A.5), *ISW* (A.6) e *IV* (A.8).  $Z$  e  $N$  sono rispettivamente il numero di protoni e neutroni, con  $R_{ws}$  si indica il raggio della cella, espresso in  $fm$ .

andamento è ricavabile analizzando le regioni dalla 5 alla 10 che sono caratterizzate da celle con un numero di protoni molto simile, se non in molti casi uguale. In queste regioni si nota infatti che, a parità del numero di protoni, si trovano celle con un numero di neutroni molto differente. In particolare, si nota che il numero di neutroni ottenuto in un calcolo HF risulta in genere molto inferiore a quello ottenuto in presenza di pairing.

Le differenze nel  $\beta$ -equilibrio non sono però dovute solamente all'introduzione delle correlazioni di pairing, ma anche alle diverse formulazioni di questa interazione: in particolare si nota che l'interazione isovettoriale porta a condizioni di  $\beta$ -equilibrio molto diverse rispetto a quella isoscalare, in cui le due situazioni analizzate (*ISS* e *ISW*) portano invece a risultati molto simili. Da queste considerazioni è quindi possibile concludere che la condizione di  $\beta$ -equilibrio è molto influenzata dalla forma del pairing utilizzato, ma non dalla sua intensità.

Nelle regioni rimanenti vi è meno accordo sulla struttura della cella ottenuta dai vari modelli di pairing. In particolare si nota una grossa differenza tra i due modelli di interazione isoscalare, che nelle regioni a minore densità avevano risultati molto simili. Questo potrebbe indicare una maggior dipendenza dall'intensità del pairing nelle regioni più dense, in cui, quindi la cella studiata avrà un raggio inferiore. In particolar modo si riscontra una grande differenza nella regione 3, in cui il calcolo HF porta a celle caratterizzate da un numero di protoni molto maggiore che nei restanti casi. Analizzando però la figura 4.4 si nota che l'energia dello stato scelto è molto simile all'energia dello stato con  $Z = 16$ , che risulterebbe invece molto simile quelli ricavati con le altre interazioni. Discorso a parte meritano infine le due celle a maggior densità in cui, come già descritto, non si è trovato un minimo di energia stabile e per cui, quindi, le condizioni trovate non sono affidabili.

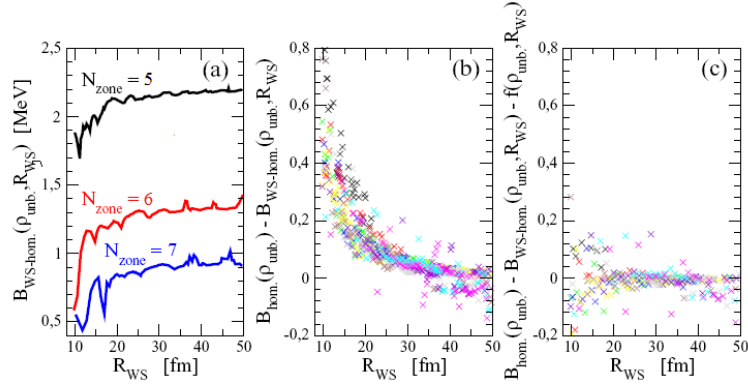


Figura 4.9: **Finite size correction.** In figura sono riportati i grafici inerenti lo studio della finite size correction svolto in [40]. In figura (a) è rappresentata l'energia  $B_{WS-hom}$  in funzione del raggio della cella. In figura (b) viene invece rappresentata la differenza di energia tra il valore ricavato analiticamente e quello calcolato. Infine, in figura (c) è rappresentato l'errore rimanente nello studio del sistema dopo che è stata applicata la correzione. Lo studio è stato svolto per un gas omogeneo avente densità pari a quelle che identificano le regioni 5, 6 e 7 del lavoro svolto (in [40] identificate come 6, 7 e 8).

### 4.4.3 Finite size correction

In tutti gli studi svolti si sono riscontrati problemi nella determinazione della configurazione a minima energia per le regioni di più alta densità, la cui causa è da ricercarsi nello studio del gas di neutroni liberi, più in particolare nello studio dei livelli energetici in cui è suddiviso. Nonostante il gas di neutroni liberi sia in effetti descritto da uno stato del continuo, al fine di svolgere il calcolo HFB e di imporre le necessarie condizioni al contorno, è, infatti, necessario imporre una discretizzazione di questi stati, che permette di ottenere comunque un'ottima descrizione del gas di neutroni a patto di avere livelli energetici molto ravvicinati.

Quando le dimensioni della cella di Wigner-Seitz diventano troppo limitate però la distanza media tra i livelli che descrivono il gas di neutroni diventa, però, troppo grande e quindi troppo diversa da un realistico spettro continuo, portando l'energia nucleare delle celle aventi raggio molto ridotto ad essere abbondantemente sottostimata.

Per ovviare a questa erronea trattazione dello stato del continuo è quindi necessario introdurre una correzione, detta Finite size correction. Questa correzione è stata ottenuta in [40] studiando, col programma utilizzato per il calcolo HFB, un gas omogeneo di neutroni, per cui l'energia nucleare dovrebbe essere costante e indipendente dalle dimensioni della cella in cui i calcoli sono svolti. Analizzando però, a densità fissata, celle con raggio compreso tra i 10 fm ed i 50 fm è stato riscontrato che l'energia nucleare calcolata col programma HFB ( $B_{WS-hom}$ ) non risulta indipendente dal raggio della cella se non quando questo diventa molto elevato (Fig. 4.9a), in cui l'energia nucleare tende effettivamente al valore calcolato analiticamente utilizzando l'interazione di Skyrme considerata ( $B_{hom}$ ).

La differenza tra il valore teorico e quello calcolato col programma HFB ( $B_{WS-hom} - B_{hom}$ ) è invece raffigurata in figura 4.9b. La correzione da porre alle energie nucleari studiate è quindi stata ricavata tramite un fit di questa grandezza su una funzione

che è studiata essere pari a

$$\Delta E = f(\rho_{unb}, R_{ws}) = \frac{A}{R_{ws}^2} \left( \frac{\rho_{unb}}{\rho_0} \right)^B \quad (4.12)$$

in cui la dipendenza dal raggio della cella è imposto in quanto l'errore introdotto deve essere proporzionale alla distanza media tra gli stati, che si calcola essere proporzionale a  $R_{ws}^{-2}$ , mentre  $A = 89.05$  e  $B = 0.1425$  sono due parametri i cui valori assegnati sono quelli che permettono di ricavare il Best Fit: di questi due parametri  $A$  definisce l'intensità della correzione, mentre  $B$  l'importanza della densità di neutroni liberi ( $\rho_{unb}$ ). In figura 4.9c è infine raffigurato l'errore ancora presente una volta applicata la correzione.

I risultati ottenuti dall'applicazione di questa correzione nel calcolo della struttura della crosta interna sono riportati in tabella 4.7, dove, per ogni regione considerata, vengono descritte le caratteristiche delle celle di minima energia ricavate dall'utilizzo di questa correzione.

Confrontando i risultati ottenuti con e senza la finite size correction si può poi osservare che, come ci si era aspettato, questa non influenza considerevolmente le regioni caratterizzate da una densità meno elevata. Solamente nel caso HF per la regione 10 e IV per la regione 9 vi è infatti una leggera differenza, ma sono casi in cui il minimo ricavato senza finite size correction aveva già energia molto simile alla configurazione che aggiungendo la correzione è diventata di minima energia (Fig. 4.4 e 4.6). Grandi miglioramenti si hanno invece nelle regioni più dense, dove le celle considerate hanno un raggio molto minore. In questo caso si nota, infatti, che si riesce ad ottenere un minimo evidente anche in casi in cui precedentemente non era presente o comunque non era molto pronunciato (Fig. 4.10 e 4.11): questa correzione porta quindi ad eliminare uno dei problemi più importanti dello studio appena descritto. L'unica regione in cui non è comunque possibile definire una situazione a minima energia è quella caratterizzata da densità più elevata (Cell 1), dove però i risultati sarebbero in ogni caso inaffidabili a causa del comportamento della densità e del pairing field dei neutroni, che come descritto non risulta realistico.

È infine necessario fare un confronto coi risultati proposti in [13]. Questo confronto è complicato dal fatto che i due studi sono stati svolti in un range di densità molto differente: infatti mentre nel lavoro presentato in questa tesi si è scelto di studiare tutta la crosta interna, nel lavoro descritto in [13] si è scelto invece di limitarsi alle regioni caratterizzate da elevata densità, in cui gli effetti di pairing risultano più evidenti, in modo da descrivere più accuratamente la regione di interesse. La scelta fatta in [13] di studiare però anche una regione a bassa densità ( $\rho = 4.5 \cdot 10^{11} g \text{ cm}^{-3}$ ) rende comunque possibile una stima delle differenze nei risultati ottenuti (Tab. 4.2).

Da questo confronto si può infatti osservare che benché a densità molto elevate (Cell 1 e 2) le configurazioni di minima energia risultino compatibili con quelle riportate in [13], al diminuire della densità questa compatibilità viene a mancare. Si nota infatti che nelle celle ricavate in [13] al diminuire della densità vi sarà un rapido aumento nel numero di protoni, mentre nei risultati del calcolo svolto in questo lavoro l'aumento nel numero di protoni risulta molto più lieve e molto meno rapido.

Se si effettua, però, anche un confronto dell'andamento della densità di energia in funzione del numero di protoni, così come è stata fatta nei due diversi lavori, si può notare che i risultati ottenuti non sono così dissimili come invece sembrano

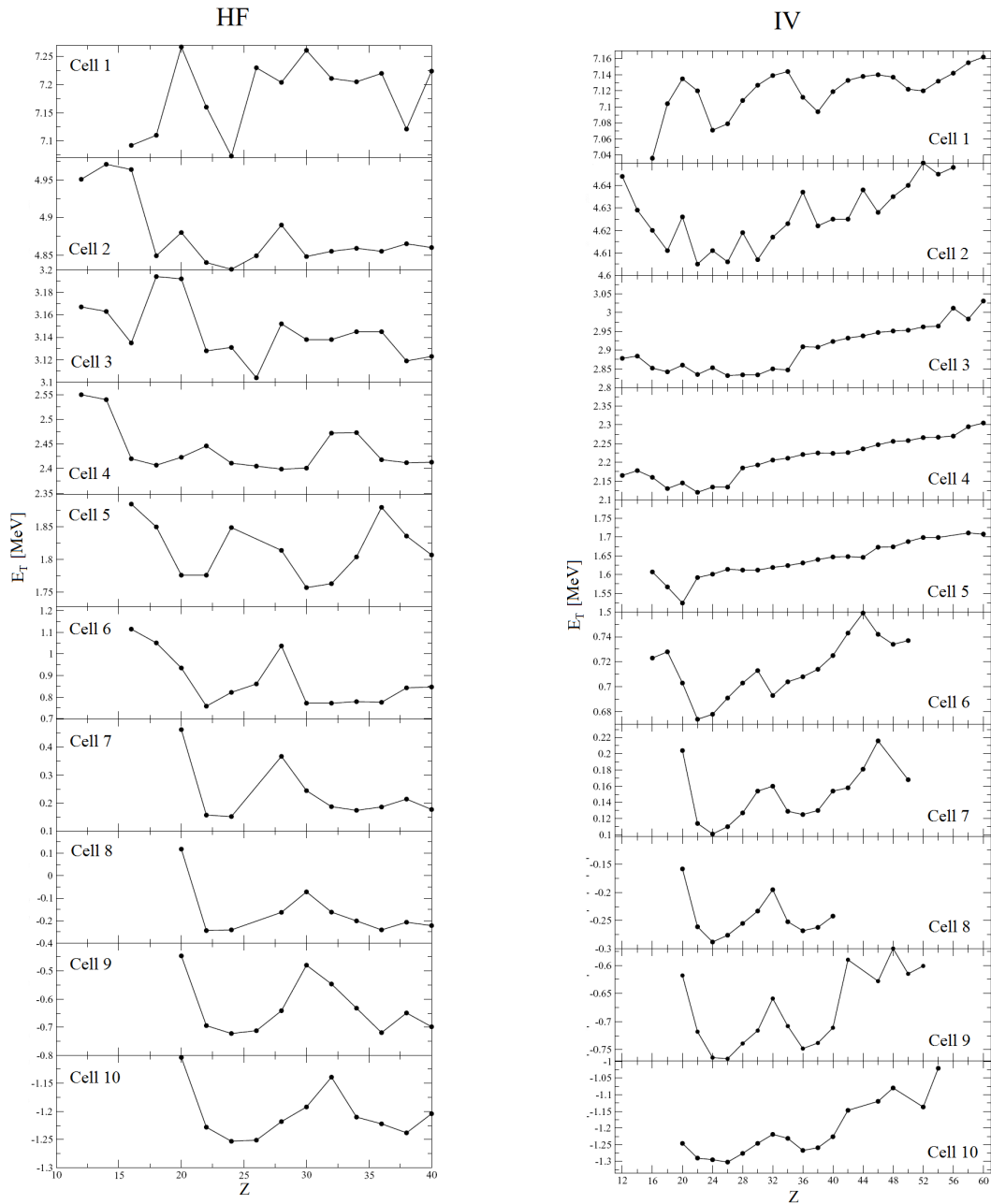


Figura 4.10: **Energia delle celle ricavata utilizzando la finite size correction.** In figura è rappresentata l'energia per particella delle celle in condizione di  $\beta$ -equilibrio ( $E_T$ ), data in  $MeV$ , in funzione del numero di protoni presente ( $Z$ ). Il calcolo è svolto utilizzando la finite size correction rispettivamente in condizione HF e IV.

essere le configurazioni a minima energia (Fig. 4.10 e 4.11 e fig. 2, 5 ed 11 in [13]). Si osserva infatti che la densità di energia presenta in entrambi i lavori un andamento caratterizzato un'alternanza di minimi relativi la cui differenza di energia rispetto al minimo assoluto non risulta molto marcata. Ciò che nonostante il simile comportamento porta però ad una configurazione di minima energia così diversa è quindi solamente il fatto che la trattazione proposta in questo lavoro, contrariamente a quanto riscontrato nel calcolo svolto in [13], tende a favorire i minimi di energia caratterizzati da un minor numero di protoni, portando quindi la configurazione di

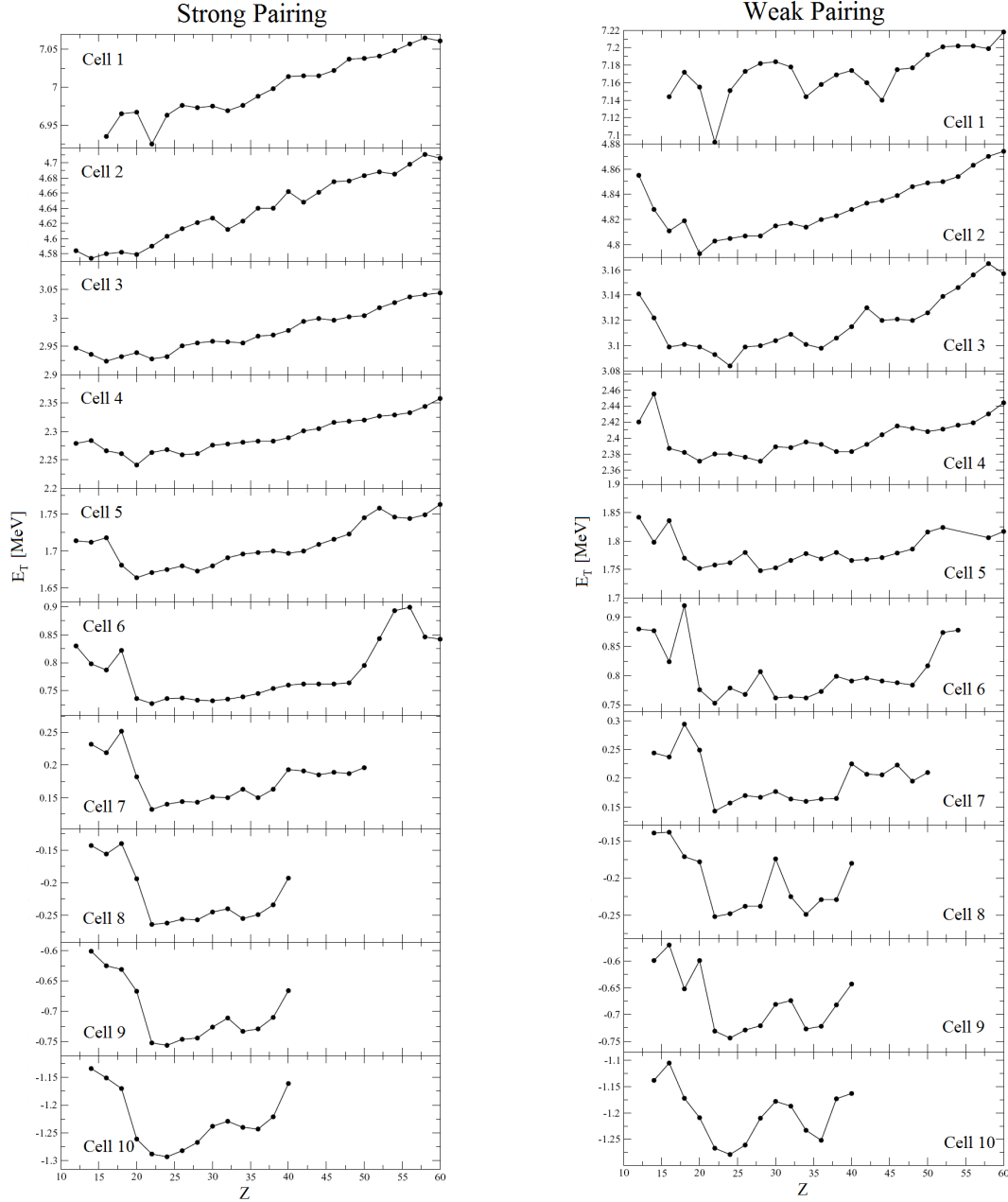


Figura 4.11: **Energia delle celle ricavata utilizzando la finite size correction.** In figura è rappresentata l'energia per particella delle celle in condizione di  $\beta$ -equilibrio ( $E_T$ ), data in  $MeV$ , in funzione del numero di protoni presente ( $Z$ ). Il calcolo è svolto utilizzando la finite size correction rispettivamente in condizione ISS e ISW.

minimo ad essere caratterizzata da celle di più piccole dimensioni e contenenti un più basso numero di particelle.

Questa diversa tendenza può essere dovuta alla differente trattazione dell'interazione nucleare, sia nella componente di pairing che in quella di particella-buca. Come già ampiamente descritto infatti questi due lavori differiscono per entrambi questi aspetti. Infatti, mentre nel lavoro presentato in questa tesi si è utilizzato un approccio HFB ed una parametrizzazione di Skyrme, nel lavoro descritto in [13] si è utilizzato un approccio HF+BCS ed un complesso funzionale di energia ottenuto dal

matching di due diversi potenziali [9][10].

## 4.5 Conclusioni

Nel lavoro svolto si è studiata la struttura della crosta interna calcolando l'influenza che su questa ha la scelta dell'interazione di Skyrme e dell'interazione di pairing.

Si è ricavato che con l'interazione di Skyrme utilizzata (Sly4) si ottengono risultati realistici, mentre con l'interazione presa come confronto (LNS) il comportamento della materia risulta realistico solamente nelle regioni di bassa densità. Si è ricavato inoltre che la scelta dell'interazione di Skyrme influenza notevolmente anche la condizione di  $\beta$ -equilibrio.

Si è poi analizzata l'importanza dell'interazione di pairing, osservando che anche questa ha una notevole influenza sulla condizione di  $\beta$ -equilibrio, ma non sull'effettivo studio della cella a minima energia. Si è tuttavia osservato che mentre l'interazione isoscalare porta a risultati realistici, l'interazione isovettoriale comporta una notevole sovrastima del pairing field dei protoni, che tuttavia non sembra influenzare particolarmente la struttura della crosta.

Si è infine osservato che nelle celle caratterizzate da un'elevata densità il calcolo dell'energia nucleare non risulta realistico e ciò ha posto evidenti problemi nello studio della cella a minima energia. L'esistenza di tale problema nel calcolo HFB era tuttavia già conosciuta: in questo lavoro si è quindi verificata l'effettiva validità ed importanza della finite size correction, che ha permesso di ottenere risultati realistici anche nelle regioni a densità più elevata. Il calcolo svolto utilizzando la finite size correction ha quindi permesso di calcolare la struttura della stella per ogni regione considerata, tranne che quella a più alta densità in cui, a causa della mancata validità dell'approssimazione di Wigner-Seitz, non è stato possibile ottenere risultati affidabili.



	$N_{cell}$	$\rho$	$Z$	$N$	$R_{ws}$	$E_N$	$T_e$	$E_M$	$E_C$	$\Delta E$	$E$
HF	1	$7.8 \cdot 10^{13}$	24	912	16.8	5.567	1.237	-0.020	0.032	0.257	7.073
	2	$3.4 \cdot 10^{13}$	24	716	20.6	3.399	1.273	-0.025	0.033	0.152	4.831
	3	$1.5 \cdot 10^{13}$	26	672	26.6	1.862	1.158	-0.029	0.031	0.081	3.104
	4	$9.6 \cdot 10^{12}$	28	534	28.6	0.855	1.475	-0.039	0.042	0.065	2.399
	5	$6.2 \cdot 10^{12}$	30	634	35.0	0.601	1.116	-0.035	0.033	0.042	1.757
	6	$2.7 \cdot 10^{12}$	22	292	36.2	-0.761	1.503	-0.055	0.037	0.034	0.758
	7	$1.5 \cdot 10^{12}$	24	196	39.2	-2.069	2.224	-0.085	0.058	0.026	0.153
	8	$1.0 \cdot 10^{12}$	22	126	39.0	-3.180	2.956	-0.116	0.072	0.024	-0.244
	9	$6.7 \cdot 10^{11}$	24	90	41.0	-4.788	4.105	-0.165	0.107	0.019	-0.722
	10	$4.7 \cdot 10^{11}$	24	60	41.8	-6.644	5.468	-0.223	0.142	0.005	-1.253
ISS	1	$7.8 \cdot 10^{13}$	22	914	16.8	5.557	1.101	-0.018	0.027	0.259	6.925
	2	$3.4 \cdot 10^{13}$	14	464	17.8	3.262	1.111	-0.023	0.020	0.204	4.574
	3	$1.5 \cdot 10^{13}$	16	434	23.0	1.733	1.088	-0.028	0.021	0.109	2.924
	4	$9.6 \cdot 10^{12}$	20	484	27.6	1.089	1.088	-0.031	0.025	0.071	2.241
	5	$6.2 \cdot 10^{12}$	20	408	30.2	0.451	1.168	-0.037	0.027	0.055	1.664
	6	$2.7 \cdot 10^{12}$	22	308	36.8	-0.694	1.406	-0.052	0.034	0.033	0.727
	7	$1.5 \cdot 10^{12}$	22	186	38.4	-1.998	2.133	-0.083	0.052	0.027	0.132
	8	$1.0 \cdot 10^{12}$	22	130	39.4	-3.097	2.852	-0.113	0.070	0.023	-0.264
	9	$6.7 \cdot 10^{11}$	24	102	42.4	-4.308	3.589	-0.149	0.093	0.018	-0.756
	10	$4.7 \cdot 10^{11}$	24	68	43.0	-6.068	4.840	-0.204	0.126	0.014	-1.293
ISW	1	$7.8 \cdot 10^{13}$	22	786	16.0	5.455	1.340	-0.021	0.032	0.279	7.085
	2	$3.4 \cdot 10^{13}$	20	658	20.0	3.507	1.122	-0.023	0.025	0.162	4.793
	3	$1.5 \cdot 10^{13}$	24	704	27.0	2.022	0.984	-0.026	0.025	0.079	3.084
	4	$9.6 \cdot 10^{12}$	28	744	31.8	1.354	0.964	-0.028	0.028	0.053	2.371
	5	$6.2 \cdot 10^{12}$	28	530	33.0	0.420	1.285	-0.039	0.037	0.046	1.748
	6	$2.7 \cdot 10^{12}$	22	318	37.2	-0.612	1.351	-0.051	0.033	0.032	0.753
	7	$1.5 \cdot 10^{12}$	22	192	38.8	-1.907	2.054	-0.080	0.050	0.026	0.143
	8	$1.0 \cdot 10^{12}$	22	132	39.6	-3.035	2.803	-0.112	0.069	0.023	-0.252
	9	$6.7 \cdot 10^{11}$	24	106	42.8	-4.149	3.442	-0.144	0.089	0.018	-0.744
	10	$4.7 \cdot 10^{11}$	24	68	43.0	-6.054	4.840	-0.204	0.126	0.014	-1.279
IV	1	$7.8 \cdot 10^{13}$	16	598	14.6	5.427	1.264	-0.020	0.025	0.341	7.036
	2	$3.4 \cdot 10^{13}$	22	718	20.6	3.315	1.133	-0.023	0.027	0.153	4.605
	3	$1.5 \cdot 10^{13}$	26	720	27.2	1.693	1.060	-0.027	0.029	0.078	2.832
	4	$9.6 \cdot 10^{12}$	22	516	28.2	0.924	1.133	-0.032	0.028	0.068	2.120
	5	$6.2 \cdot 10^{12}$	20	366	29.2	0.134	1.341	-0.041	0.031	0.059	1.524
	6	$2.7 \cdot 10^{12}$	22	262	35.0	-1.063	1.720	-0.061	0.042	0.036	0.674
	7	$1.5 \cdot 10^{12}$	24	194	39.2	-2.148	2.251	-0.086	0.058	0.026	0.101
	8	$1.0 \cdot 10^{12}$	24	134	39.8	-3.314	3.043	-0.119	0.079	0.023	-0.288
	9	$6.7 \cdot 10^{11}$	26	106	43.0	-4.486	3.755	-0.154	0.103	0.017	-0.765
	10	$4.7 \cdot 10^{11}$	26	72	43.8	-6.195	4.951	-0.207	0.136	0.014	-1.302

Tabella 4.7: **Struttura della crosta calcolata in approccio HFB dopo l'applicazione della finite size correction.** In tabella sono riportati i risultati del calcolo per i diversi modelli di interazione di pairing utilizzati: rispettivamente *HF* (pairing nullo), *ISS* (A.5), *ISW* (A.6) e *IV* (A.8). Con  $\rho$  si indica la densità della regione studiata, espressa in  $g \text{ cm}^{-3}$ ,  $Z$  e  $N$  sono rispettivamente il numero di protoni e neutroni, con  $R_{ws}$  si indica il raggio della cella, espresso in  $fm$ , ed  $E$ ,  $E_N$ ,  $T_e$ ,  $E_M$ ,  $E_C$  e  $\Delta E$  sono rispettivamente l'energia per particella totale, quella nucleare, quella cinetica degli elettroni, quella di massa, quella coulombiana e la finite size correction, espresse in  $MeV$ .



# Capitolo 5

## Calore specifico nella crosta interna

La seconda parte del lavoro svolto è stata fatta ancora in collaborazione col professor Nicolae Sandulescu e col professor Jerome Margueron. In questa parte è stata utilizzata la teoria HFB, questa volta a temperatura finita, per calcolare il calore specifico della materia presente nella crosta interna delle stelle di neutroni, trattata in approssimazione di Wigner-Seitz, e la dipendenza di questa grandezza dalle diverse condizioni di pairing presentate in appendice A. I calori specifici calcolati sono poi in parte stati utilizzati nel calcolo del raffreddamento di una stella di neutroni di  $1.6 M_\odot$ , grazie a cui si è studiata l'influenza delle correlazioni di pairing nel processo di Termalizzazione [28]. Questo ulteriore lavoro, descritto nel paragrafo 5.3, è stato svolto in collaborazione con Morgane Fortin, Institut de Physique Nucleaire, Université Paris-Sud, di Orsay Cedex (Francia), Dany Page, Departamento de Astrofísica Teórica, Instituto de Astronomía, Universidad Nacional Autónoma de México (Messico), ed ancora Nicolae Sandulescu e Jerome Margueron.

### 5.1 Studi precedenti

Il calore specifico della crosta è una delle grandezze di maggior importanza nello studio del raffreddamento delle stelle di neutroni. Nonostante ciò negli studi di raffreddamento finora presenti in letteratura è stato calcolato approssimando la materia presente come un gas omogeneo di neutroni degeneri e non relativistici, che, calcolato in unità della costante di Boltzman, si può scrivere come

$$C_V^0 = \frac{m_n^* p_F T}{3\hbar^3} \quad (5.1)$$

in cui  $m_n^*$  è la massa efficace del neutrone,  $p_F$  è il suo momento di Fermi e  $T$  è la temperatura in  $MeV$ . La presenza dei protoni e del reticolo nucleare era invece di solito trascurata o trattata separatamente, trascurando quindi completamente le interazioni tra protoni e neutroni e di conseguenza la formazione di clusters nucleari.

L'eventuale presenza di superfluidità era calcolata, invece, tramite un fattore di correzione ( $C_V = R(T)C_V^0$ ), studiato in modo da rappresentare i risultati dei calcoli BCS per i gas superfluidi omogenei (Fig. 5.1). In tali studi era stato calcolato che l'instaurarsi del regime di superfluidità porta ad una discontinuità, che identifica la transizione di fase, in cui il calore specifico del gas ha un istantaneo incremento: a temperature prossime a quella di transizione, detta Temperatura critica ( $T_c$ ), il

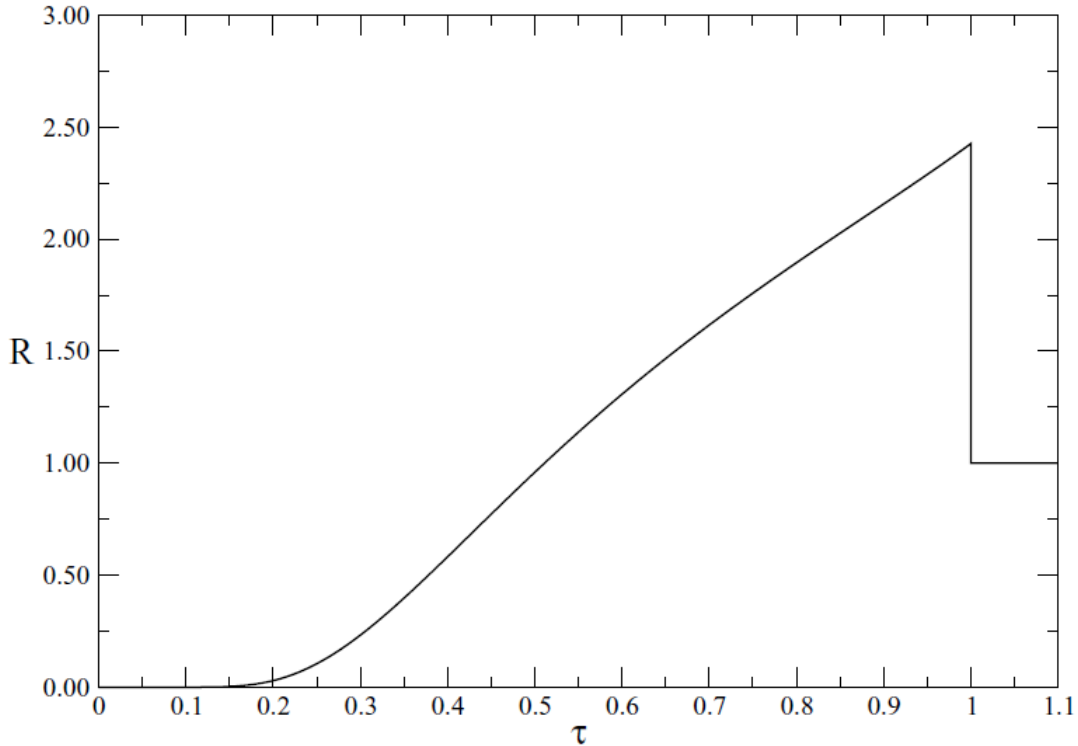


Figura 5.1: **Fattore di correzione per il calore specifico della materia superfluida.** In figura è riportato il risultato del calcolo svolto in [36] sul fattore di correzione per il calore specifico della materia superfluida ( $R(\tau)$ ).  $\tau = \frac{T}{T_c}$  è una variabile adimensionale che definisce la temperatura in funzione della temperatura critica della transizione in fase superfluida.

calore specifico della materia in fase superfluida risulta quindi maggiore di quello della materia in fase normale. Al diminuire della temperatura si osserva poi una rapida decrescita che porta il calore specifico ad annullarsi esponenzialmente per temperature prossime allo zero assoluto. A temperature maggiori di quella critica, invece, il gas non è più in regime superfluido ed il fattore di correzione viene quindi posto uguale ad uno (Fig. 5.1).

La più accurata modellizzazione di questo fattore è stata fatta da Levenfish e Yakovlev nel 1994 [36], i quali, utilizzando un approccio BCS, riuscirono a determinare un'espressione integrale del fattore di correzione

$$R(T) = \frac{3}{2\pi^3} \int d\Omega \int_0^\infty dx z T \frac{df(z)}{dT} \quad (5.2)$$

dove  $d\Omega$  è l'elemento di angolo solido e  $T$  è la temperatura espressa in  $MeV$ , mentre  $x = \frac{\varepsilon - \lambda}{T}$ ,  $z = \frac{\sqrt{\Delta^2 + (\varepsilon - \lambda)^2}}{T}$  ed  $f(z) = (1 + \exp(z))^{-1}$  sono dei fattori adimensionali.

Questa espressione non può però essere integrata analiticamente se non analizzando i limiti per  $T \rightarrow 0$  o  $T \rightarrow T_c$ , da cui si ottengono le espressioni che descrivono il comportamento del calore specifico del gas superfluido rispettivamente a basse temperature

$$R(\tau \rightarrow 0) \approx \frac{3.149}{\tau^{5/2}} e^{-\frac{1.764}{\tau}}$$

dove  $\tau = \frac{T}{T_c}$  è una variabile adimensionale che descrive la temperatura del gas, ed a

temperature prossime a quella critica

$$R(\tau \rightarrow 1) \approx 2.426$$

in cui questo fattore è rappresentato da una costante.

Per poter svolgere i calcoli di raffreddamento delle stelle è però necessario poter utilizzare il calore specifico anche per temperature lontane dai due limiti che sono stati calcolati. Per questo motivo in [36] è stata ricavata anche un'espressione parametrica che riproduce accuratamente i risultati del calcolo numerico dell'integrale (5.2)

$$R(T) = \left[ 0.4186 + \sqrt{(1.007)^2 + (0.5010u)^2} \right]^{2.5} e^{\left(1.456 - \sqrt{(1.456)^2 + u^2}\right)} \quad (5.3)$$

dove

$$u = \sqrt{1 - \tau} \left( 1.456 - \frac{0.157}{\sqrt{\tau}} + \frac{1.764}{\tau} \right) \quad \tau \leq 1 \quad (5.4)$$

in cui si nota che svolgendo i limiti per  $\tau \rightarrow 0$  e per  $\tau \rightarrow 1$  si ritrovano i risultati precedentemente calcolati. Nell'espressione (5.4) il valore di  $u$  può essere calcolato solamente per  $\tau$  minore od uguale ad uno: questo non rappresenta comunque un problema in quanto per  $\tau$  maggiore di uno la materia risulta essere in fase normale,  $R$  viene quindi posto uguale ad uno ed il calcolo di  $u$  risulta superfluo.

Le grandezze riportate sono solamente quelle inerenti al pairing  $^1S_0$ , in cui le coppie di Cooper hanno momento angolare e spin totale nullo, l'unico presente nella crosta interna delle stelle di neutroni. Nell'articolo [36], però, gli autori danno una trattazione del fattore di correzione per due ulteriori casi in cui il pairing è di tipo  $^3P_2$ , dove le coppie di cooper hanno momento angolare e spin pari a 1. Queste condizioni di legame possono però apparire solamente nel core della stella, dove invece viene soppressa l'interazione  $^1S_0$ , e non sono quindi di interesse nel lavoro svolto, in quanto, come già spiegato, la trattazione di Wigner-Seitz non permette lo studio delle regioni in cui non sia presente un ben definito reticolo nucleare.

## 5.2 Modello proposto e risultati ottenuti

L'approssimazione appena descritta causa, però, la perdita del contributo dato dalla presenza dei nuclei nella crosta interna delle stelle di neutroni. L'effetto che questi nuclei possono avere sul calore specifico non deriva però, come precedentemente ipotizzato, solamente dal loro contributo diretto, che risulta trascurabile rispetto a quello dato dal gas di neutroni degeneri, ma soprattutto dall'influenza che questi hanno sul gas di neutroni.

Il lavoro svolto, in cui il calore specifico è studiato tramite un calcolo HFB, rappresenta quindi una novità nella fisica delle stelle compatte, in quanto, contrariamente alle modellizzazioni appena descritte, in questo studio il calore specifico della materia nucleare viene calcolato nella sua interezza, senza trascurare la struttura della materia presente e le interazioni che la caratterizzano. In un calcolo HFB si studia, infatti, la materia nel suo complesso, tenendo quindi conto sia della presenza di neutroni e protoni, che delle interazioni presenti tra di essi. In questo modo risulta inoltre automatico considerare anche la presenza dei clusters nucleari, in quanto la loro formazione è una diretta conseguenza dell'interazione tra i nucleoni.

Altro importante miglioramento derivante da una trattazione HFB è l'utilizzo coerente delle interazioni di pairing. In questo tipo di studio, infatti, queste vengono introdotte nel calcolo fin dall'inizio e non alla fine tramite una correzione, come invece avveniva nei precedenti studi. Questo risulta essere un miglioramento notevole in quanto permette di considerare sia l'influenza che il pairing ha sul comportamento della materia nucleare, sia l'influenza che la materia nucleare ha sulle correlazioni di pairing, che, come sarà descritto in seguito, non è trascurabile.

Anche per questo lavoro, come già accennato, si è utilizzata l'approssimazione di Wigner-Seitz, che divide la crosta della stella in celle sferiche, su cui è stato svolto il calcolo HFB a temperatura finita, al fine di determinare l'entropia della cella per le diverse temperature studiate (3.20). Il calore specifico (3.21) è stato quindi calcolato come

$$C_V(T) = \frac{T}{V} \frac{S(T + \delta T) - S(T)}{\delta T} \quad (5.5)$$

dove  $S(T)$  è l'entropia calcolata dal programma HFB (3.20) e la derivata presente in (3.21) è stata calcolata computazionalmente come un rapporto incrementale per un  $\delta T = 0.01 \text{ MeV}$ . Come accennato alla fine del capitolo 3, tutte le grandezze utilizzate (temperatura, entropia e calore specifico) sono date in unità della costante di Boltzman.

Lo studio è stato svolto considerando tutte le parametrizzazioni per l'interazione di pairing che sono state presentate: ISS, ISW e IV (App. A): scelta fatta al fine di analizzare la dipendenza che ha il calore specifico della materia dall'interazione di pairing. La sola parametrizzazione del termine particella-buca dell'interazione nucleare che è stata utilizzata è invece la Sly4 (Tab. 3.1). È stata poi scelta la parametrizzazione di pairing isovettoriale (IV) per calcolare il calore specifico utilizzando la struttura delle celle di Wigner-Seitz ricavate nel capitolo 4 (Tab. 4.7): si è così, infine, potuto studiare anche l'effetto che ha l'utilizzo di una diversa struttura della crosta interna sul calore specifico.

Come già accennato lo studio è stato svolto inizialmente considerando un'interazione di pairing ISS (A.5) per le regioni descritte in [41] (Tab. 4.1), in cui, come anche per lo studio della struttura della crosta, è stata trascurata la regione 0 in quanto in tale regione non è possibile utilizzare l'approssimazione di Wigner-Seitz (Par. 4.4). I risultati generali di questo calcolo sono espressi in figura 5.24, in cui è rappresentato il calore specifico per tutte le densità analizzate ed alle temperature raggiungibili all'interno della crosta interna delle stelle di neutroni dopo la loro formazione ( $T < 0.5 \text{ MeV}$ ). Nei grafici riportati si può notare che, per le temperature analizzate, è possibile osservare la transizione di fase solamente nelle regioni a più bassa densità (Cell 6-10), dove si evidenzia inoltre un'abbassamento della temperatura critica al diminuire della densità della materia. Molto importante è inoltre la forma assunta da questa transizione di fase, che risulta essere molto graduale invece che netta come invece si riscontra nei calcoli BCS (Par. 5.1).

Per comprendere meglio questo comportamento è quindi necessario analizzare più dettagliatamente una delle regioni in cui è stato riscontrato, studiando in particolare il pairing field, che ne è il principale responsabile. Analizziamo inizialmente la regione 6 ( $\rho = 2.7 \cdot 10^{12} \text{ g cm}^{-3}$ ), studiando il calore specifico fino ad una temperatura tale da perdere ogni proprietà superfluida (Fig. 5.2). Da una prima osservazione dei risultati ottenuti in questa regione è possibile notare che, contrariamente a quanto ricavato

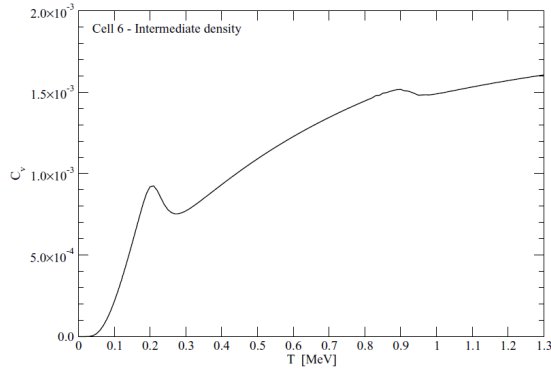


Figura 5.2: **Calore specifico della regione 6.** In figura è rappresentato il calore specifico trovato nella regione 6, calcolato fino ad una temperatura tale che il gas di neutroni non sia più in fase superfluida (Fig. 5.3). Il calore specifico è dato in unità della costante di Boltzman.

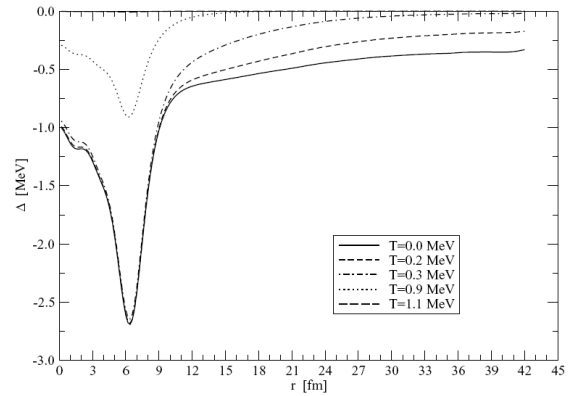


Figura 5.3: **Pairing field dei neutroni nella regione 6.** In figura è rappresentato il pairing field dei neutroni per le temperature che sono state considerate nell'analisi del comportamento del calore specifico (Fig. 5.2).

dai calcoli BCS, sono presenti due transizioni ( $T \approx 0.2 \text{ MeV}$  e  $T \approx 0.9 \text{ MeV}$ ) e che queste, come già accennato in precedenza, risultano essere molto gradualì (Fig. 5.2).

Analizzando poi in dettaglio l'andamento del calore specifico al variare della temperatura, si può osservare che, per temperature inferiori a quella della prima transizione ( $T < 0.2 \text{ MeV}$ ), si riscontra un decadimento esponenziale molto simile a quello osservato nel gas omogeneo. Questo comportamento è dovuto alla risposta del pairing field ad un aumento di temperatura: si nota infatti che questo presenta un picco sulla superficie del nucleo (Fig. 5.3), in virtù del quale l'influenza dell'aumento di temperatura viene avvertita solamente nella regione esterna, quella occupata dal gas di neutroni liberi, che, essendo caratterizzati da un pairing field molto simile a quello di un gas omogeneo, ne simuleranno il comportamento.

Molto diverso sarà però l'andamento del calore specifico durante la transizione di fase (da  $T = 0.2 \text{ MeV}$  a  $T = 0.3 \text{ MeV}$ ). Si osserva infatti che contrariamente a quanto osservato nei gas omogenei, il pairing field non si annulla contemporaneamente in tutta la cella, ma bensì richiede temperature di transizione sempre più elevate avvicinandosi al picco posto sulla superficie del nucleo, causando così il diverso comportamento del calore specifico durante la transizione, che sarà ora molto meno netta.

Aumentando ancora la temperatura iniziano poi a subire una riduzione del pairing field anche i neutroni posti sulla superficie del nucleo, fino a che, durante la seconda transizione ( $T = 0.9 \text{ MeV}$ ), non si annullerà gradualmente anche il pairing field presente in questa zona della cella. A temperature ancora superiori, quindi, la materia sarà totalmente in fase normale ( $T = 1.1 \text{ MeV}$ ).

Questo particolare andamento del calore specifico è però prerogativa delle sole regioni a densità intermedia. Analizzando infatti una regione ad alta densità, ad esempio la regione 1 ( $\rho = 7.8 \cdot 10^{13} \text{ g cm}^{-3}$ ), si ricava infatti un andamento del calore specifico totalmente diverso da quello ricavato nella regione 6.

Per questa regione si nota infatti un andamento del calore specifico molto simile a quello descritto per il gas omogeneo di neutroni (Fig. 5.4), in cui dopo una di-

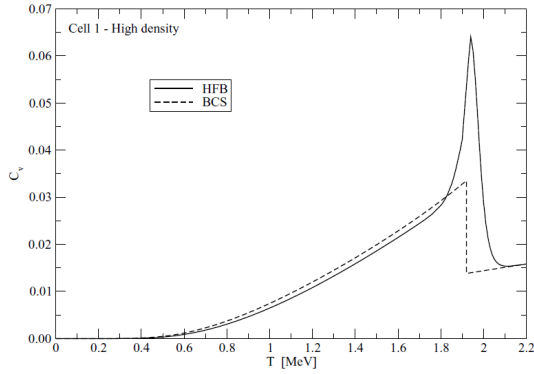


Figura 5.4: **Calore specifico della regione 1.** In figura è rappresentato il calore specifico trovato nella regione 1, calcolato fino ad una temperatura tale che i neutroni non siano più in fase superfluida (Fig. 5.5). Il calore specifico è dato in unità della costante di Boltzman.

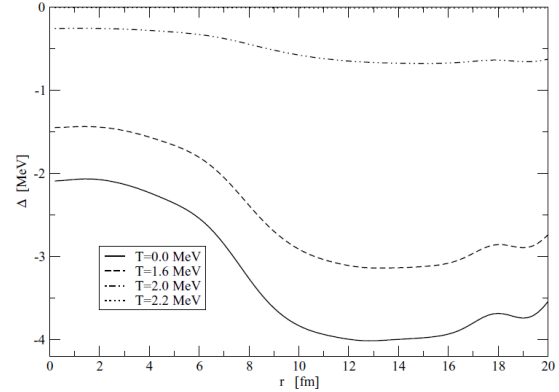


Figura 5.5: **Pairing field dei neutroni nella regione 1.** In figura è rappresentato il pairing field dei neutroni per le temperature che sono state considerate nell'analisi del comportamento del calore specifico (Fig. 5.4).

scontinuità alla temperatura di transizione ( $T_c \approx 1.9 \text{ MeV}$ ) si ha un calore specifico molto elevato, ma in rapida decrescita al diminuire della temperatura, fino ad annullarsi esponenzialmente per temperature prossime allo zero: la presenza del nucleo non comporta quindi notevoli differenze rispetto al gas di neutroni omogeneo, se non a temperature prossime a quella di transizione in cui il calore specifico che è stato calcolato risulta essere notevolmente più intenso di quello ricavato con un approccio BCS (Fig. 5.4).

Questo andamento è coerente con quanto si può osservare analizzando il pairing field dei neutroni in questa regione (Fig. 5.5). Si nota infatti che, contrariamente a quanto osservato nella regione 6, questo è più intenso nella zona occupata dal gas di neutroni liberi ( $T = 0.0 \text{ MeV}$ ), che determina quindi il comportamento del calore specifico. Al variare della temperatura il pairing field avrà quindi inizialmente una lieve riduzione ( $T = 1.6 \text{ MeV}$ ), che diventerà però più intensa in prossimità della temperatura critica ( $T = 2.0 \text{ MeV}$ ), in cui il pairing field della regione occupata dal nucleo tende ad uniformarsi con quello del gas di neutroni liberi, per poi annullarsi uniformemente ad un ulteriore aumento di temperatura ( $T = 2.2 \text{ MeV}$ ), generando, quindi, una transizione molto più netta.

Analizzando la regione 10 si ottiene poi una situazione ancora diversa rispetto a quelle appena analizzate: l'andamento del calore specifico è infatti di nuovo caratterizzato da una singola transizione, che però risulta graduale come quelle riscontrate nella regione 6 (Fig. 5.6). Questo comportamento è dovuto al pairing field dei neutroni liberi (Fig. 5.7), che a causa della bassa densità, risulta trascurabile già a temperatura nulla ( $T = 0.0 \text{ MeV}$ ), non permettendo quindi la formazione della prima transizione. L'unica transizione presente sarà quindi, quella in cui ad annullarsi è il pairing field dei neutroni posti nel nucleo ed alla sua superficie, che come avveniva già per la regione 6, avranno una temperatura critica diversa a seconda del valore che assume il pairing field a temperatura nulla, generando quindi una transizione molto graduale ( $T = 0.5 \text{ MeV}$ ). La temperatura molto alta in cui avviene la seconda transizione fa però sì che questa non potrà essere osservata per le temperature che si possono trovare nella crosta interna delle stelle di neutroni ed il suo contributo al



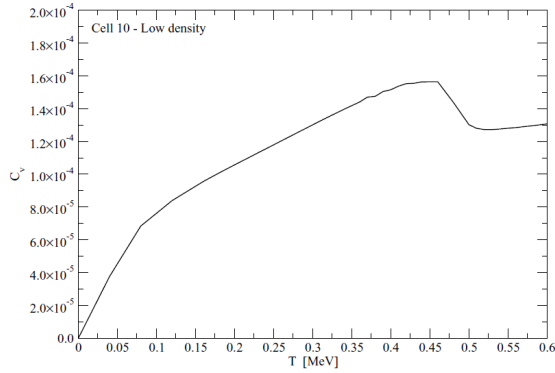


Figura 5.6: **Calore specifico della regione 10.** In figura è rappresentato il calore specifico trovato nella regione 10, calcolato fino ad una temperatura tale che il gas di neutroni non sia più in fase superfluida (Fig. 5.7). Il calore specifico è dato in unità della costante di Boltzman.

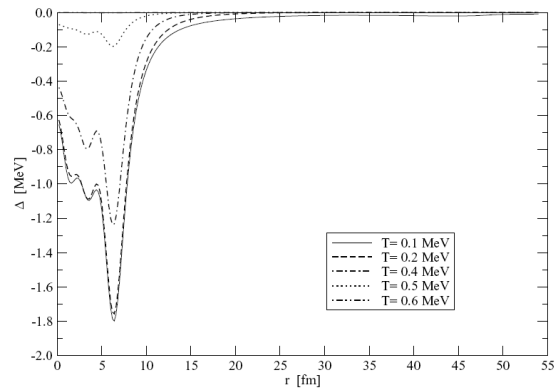


Figura 5.7: **Pairing field dei neutroni nella regione 10.** In figura è rappresentato il pairing field dei neutroni per le temperature che sono state considerate nell'analisi del comportamento del calore specifico (Fig. 5.6).

raffreddamento risulta quindi trascurabile: nella regione a minima densità (Cell 10) la temperatura critica è infatti comunque al limite del range di temperature studiato (Fig. 5.24).

Discorso del tutto simile si può fare anche per i risultati ottenuti dal calcolo in cui è stata utilizzata l'interazione di pairing ISW (A.6). Analizzando, però, anche per quest'interazione il calore specifico di tutte le regioni per le temperature presenti nella crosta interna delle stelle di neutroni ( $T < 0.5 \text{ MeV}$ ), si può osservare un comportamento lievemente diverso rispetto a quello ottenuto con l'interazione ISS (Fig. 5.25). Si nota infatti che la minor intensità dell'interazione di pairing utilizzata porta a transizioni caratterizzate da una minore temperatura critica e che questa lieve differenza può avere un grande effetto sulla risposta termica della materia: per questa interazione si riscontra, infatti, una transizione di fase alle temperature raggiungibili nella crosta anche in alcune regioni caratterizzate da alta densità (Cell 3-5), transizione che in alcuni casi risulta essere netta come quella descritta nella regione 1 per l'interazione ISS (Cell 3). Si osserva poi che le regioni caratterizzate da bassa densità (Cell 6-10) presentano alle temperature considerate la seconda transizione, che porta quindi la materia ad essere completamente in fase normale. Nonostante la notevole differenza nelle temperature di transizione ricavate dalle interazioni ISS ed ISW, è però importante osservare che l'andamento dei calori specifici risulta comunque molto simile: questo è dovuto al fatto che queste due interazioni, sebbene siano caratterizzate da una diversa intensità, hanno però la medesima forma, da cui consegue un'analogia risposta termica della materia studiata.

Queste stesse considerazioni possono essere fatte analizzando approfonditamente una singola regione. Anche in questo caso, come per l'interazione ISS prendiamo come esempio la regione 6 ( $\rho = 2.7 \cdot 10^{12} \text{ g cm}^{-3}$ ). In questo caso, come ci si aspettava, l'andamento del calore specifico è molto simile a quello riscontrato per l'interazione ISS: in figura 5.8 si nota infatti la presenza della doppia transizione che corrisponde al passaggio in fase normale rispettivamente dei neutroni liberi e di quelli posti invece sulla superficie del nucleo, comportamento dovuto anche in questo caso al pairing

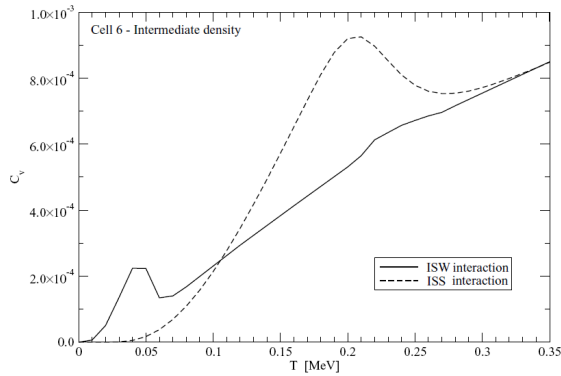


Figura 5.8: **Calore specifico della regione 6 per pairing ISW.** In figura è rappresentato il calore specifico trovato nella regione 6 utilizzando l'interazione di pairing ISW (linea continua). Il confronto è fatto col calore specifico ottenuto dall'interazione ISS (linea tratteggiata). I calori specifici sono dati in unità della costante di Boltzman.

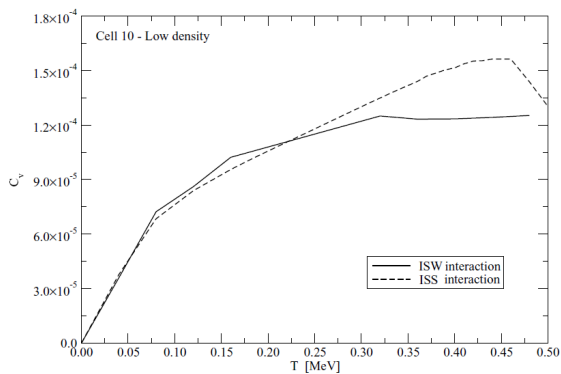


Figura 5.10: **Calore specifico della regione 10 per pairing ISW.** In figura è rappresentato il calore specifico trovato nella regione 10 utilizzando l'interazione di pairing ISW (linea continua). Il confronto è fatto col calore specifico ottenuto dall'interazione ISS (linea tratteggiata). I calori specifici sono dati in unità della costante di Boltzman.

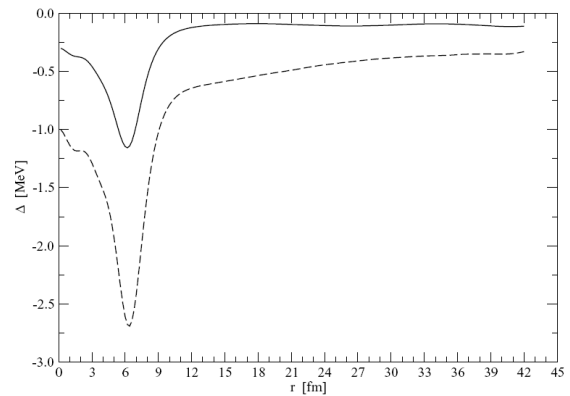


Figura 5.9: **Pairing field dei neutroni ricavato tramite l'interazione ISW nella regione 6.** In figura è rappresentato il confronto tra il pairing field dei neutroni ricavato dall'interazione ISW (linea continua) e dall'interazione ISS (linea tratteggiata).

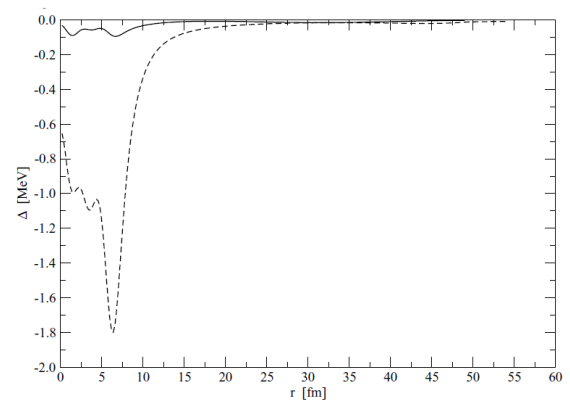


Figura 5.11: **Pairing field dei neutroni ricavato tramite l'interazione ISW nella regione 10.** In figura è rappresentato il confronto tra il pairing field dei neutroni ricavato dall'interazione ISW (linea continua) e dall'interazione ISS (linea tratteggiata).

field dei neutroni che presenta un picco analogo a quello osservato per l'interazione ISS (Fig. 5.9).

Discorso a parte merita infine la regione 10. Analizzando, infatti, in figura 5.11, il pairing field dei neutroni, si nota che la bassa intensità dell'interazione ISW porta il pairing field ad essere quasi trascurabile anche nella zona posta sulla superficie del nucleo. Questo particolare comportamento fa però sì che questo si annulli completamente già a temperature prossime allo zero, rendendo quindi trascurabile ogni influenza sulla materia nucleare presente in questa regione, che si comporterà quindi in pratica come se fosse semplicemente in fase normale.

Risultati lievemente diversi si ottengono invece utilizzando l'interazione isovettoriale IV (A.8). Nonostante rappresenti uno scenario di strong pairing esattamente

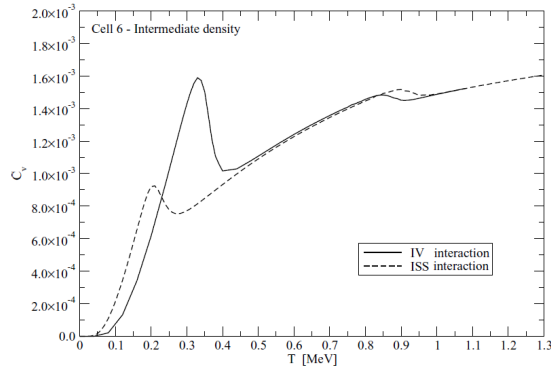


Figura 5.12: **Calore specifico della regione 6 per pairing IV.** In figura è rappresentato il calore specifico trovato nella regione 6 utilizzando l'interazione di pairing IV (linea continua). Il confronto è fatto col calore specifico ottenuto dall'interazione ISS (linea tratteggiata). I calori specifici sono dati in unità della costante di Boltzman.

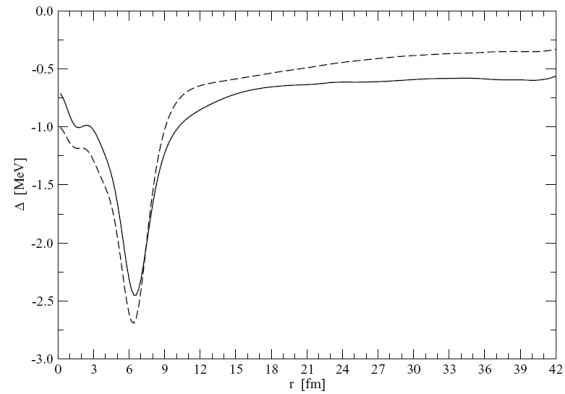


Figura 5.13: **Pairing field dei neutroni ricavato tramite l'interazione IV nella regione 6.** In figura è rappresentato il confronto tra il pairing field dei neutroni ricavato dall'interazione IV (linea continua) e dall'interazione ISS (linea tratteggiata).

come l'interazione ISS, che avrà quindi analoga intensità, quest'interazione favorisce infatti il pairing field del gas di neutroni liberi, penalizzando lievemente quello dei neutroni posti nel nucleo e sulla sua superficie (Fig. 5.13), il che porta ad un diverso andamento anche del calore specifico. Confrontando infatti il calore specifico ottenuto utilizzando quest'interazione nella regione 6 (Fig. 5.12) con quello ottenuto nella stessa regione ma con l'interazione ISS, si nota per l'interazione IV che la temperatura critica della prima transizione (dovuta ai neutroni liberi) risulta notevolmente maggiore rispetto a quella ottenuta per l'interazione ISS, mentre quella della seconda transizione (dovuta ai neutroni sulla superficie del nucleo) risulta minore.

Questo diverso comportamento dell'interazione isovettoriale si può osservare anche analizzando le figure 5.26, in cui il calore specifico della materia è ottenuto, a temperature inferiori di  $0.5 \text{ MeV}$ , per tutte le densità analizzate. Confrontando i risultati ottenuti con quelli ricavati per le stesse regioni ma con l'interazione ISS (Fig. 5.24), si nota infatti che, nelle regioni in cui è presente la transizione di fase dei neutroni liberi, questa avviene a temperature decisamente più elevate, confermando la maggiore intensità del pairing dei neutroni liberi ricavato con l'interazione isovettoriale. Osservando poi, sempre in figura 5.26, il calore specifico ottenuto nella regione 10, si può ottenere un'ulteriore conferma anche dell'osservazione fatta sulla minore intensità del pairing field dei neutroni posti sulla superficie del nucleo rispetto all'interazione ISS: si osserva infatti che, contrariamente a quanto avveniva per l'interazione ISS, per l'interazione IV è presente la seconda transizione di fase ( $T \approx 0.45 \text{ MeV}$ ), avvenuta quindi, come ci si aspettava, a temperature inferiori rispetto a quanto avveniva per l'interazione ISS.

Analizzando, infine, le densità più elevate rappresentate in figura 5.26, si può osservare un'altra peculiarità dell'interazione isovettoriale: si nota infatti che il calore specifico della regione 1, contrariamente a quanto osservato per l'interazione IS, risulta essere maggiore di quello ricavato per la regione 2. Questo andamento, se avviene a temperature inferiori a quella della prima transizione di fase, indica però inequivocabilmente una minor temperatura critica e quindi un pairing field meno intenso

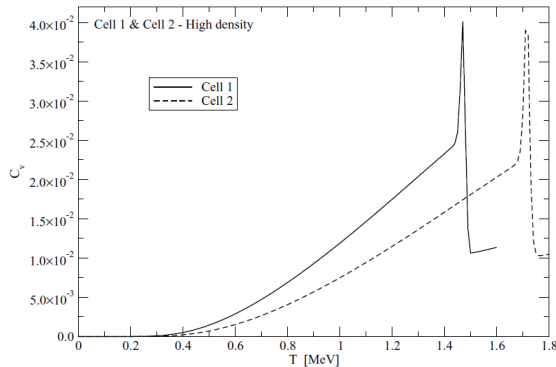


Figura 5.14: **Calore specifico della regione 1 per pairing IV.** In figura è rappresentato il calore specifico trovato nella regione 1 utilizzando l'interazione di pairing IV (linea continua). Il confronto è fatto col calore specifico ottenuto invece per la regione 2 (linea tratteggiata). I calori specifici sono dati in unità della costante di Boltzman.

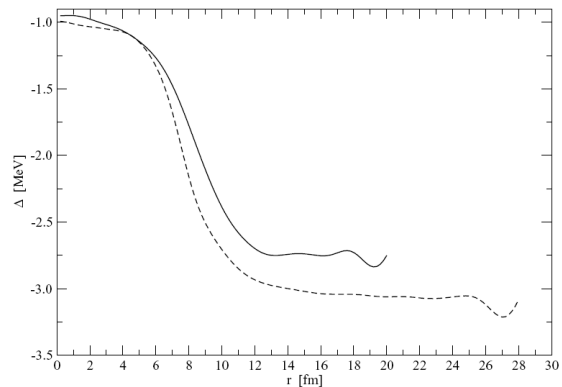


Figura 5.15: **Pairing field dei neutroni ricavato tramite l'interazione IV nella regione 1.** In figura è rappresentato il confronto tra il pairing field dei neutroni ricavato dall'interazione IV per la regione 1 (linea continua) e per la regione 2 (linea tratteggiata).

rispetto a quello ricavato nella regione successiva, caratterizzata da minore densità. Questo importante risultato (confermato dal confronto dei calori specifici e dei pairing field a temperatura nulla svolto rispettivamente in figura 5.14 e 5.15) porta quindi a concludere che, per l'interazione isovettoriale, il pairing field ad alte densità subisce una notevole riduzione.

I risultati finora descritti sono stati ottenuti utilizzando la struttura della crosta ricavata in [41]. Come descritto nel capitolo 4, però, l'influenza del pairing field sulla materia non comporta solo una diversa risposta alle sollecitazioni termiche, ma anche una differente struttura della crosta stessa. Uno studio approfondito dell'influenza dell'interazione di pairing sui calori specifici e, di conseguenza, sul raffreddamento delle stelle di neutroni, deve quindi tenere conto delle implicazioni del pairing sulla struttura della crosta utilizzata nel calcolo: lo studio che è stato svolto finora non può quindi essere considerato del tutto completo in quanto è stata imposta un'accurata trattazione degli effetti di pairing, utilizzando però una struttura della crosta in cui questi stessi effetti non erano presi in considerazione. Per ovviare a questa mancanza si è quindi svolto uno studio del calore specifico dove la struttura della crosta interna utilizzata è quella ricavata dalle stesse interazioni di Skyrme e di pairing che sono state utilizzate nel successivo calcolo del calore specifico.

Questo lavoro, i cui risultati sono riportati in figura 5.27, è stato svolto utilizzando una interazione di Skyrme Sly4 (Tab. 3.1) ed un'interazione di pairing isovettoriale (A.8). La struttura della crosta che è stata utilizzata è quella riportata in tabella 4.7.

Dal confronto dei risultati ottenuti utilizzando questa particolare struttura della crosta interna con quelli ottenuti, invece, utilizzando le stesse parametrizzazioni dell'interazione nucleare (Sly4+IV), ma la struttura ricavata da Negele e Vautherin in [41] (Fig. 5.26) è possibile fare alcune importanti considerazioni. Si osserva innanzitutto che, nelle regioni in cui è presente la prima transizione, questa avviene a temperature maggiori rispetto a quelle ricavate utilizzando la struttura della crosta riportata in tabella 4.1, il che implica una maggiore intensità del pairing field dei neutroni liberi. Analizzando poi i risultati riportati per la regione 10 si osserva però

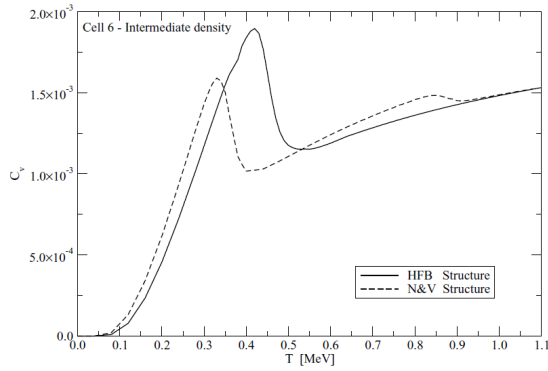


Figura 5.16: **Calore specifico della regione 6 calcolato utilizzando la struttura della crosta ricavata dall'utilizzo della teoria HFB.** In figura è rappresentato il calore specifico calcolato nella regione 6 utilizzando la struttura della crosta ricavata dall'utilizzo della teoria HFB (linea continua). Il confronto è fatto col calore specifico ottenuto dalla stessa interazione IV ma utilizzando la struttura della crosta calcolata in [41] (linea tratteggiata). I calori specifici sono dati in unità della costante di Boltzman.

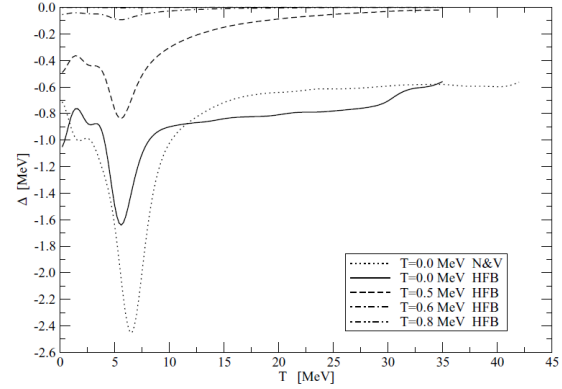


Figura 5.17: **Pairing field dei neutroni calcolato utilizzando la struttura della crosta ricavata dall'utilizzo della teoria HFB nella regione 6.** In figura è rappresentato il pairing field dei neutroni per le temperature che sono state considerate nell'analisi del comportamento del calore specifico (Fig. 5.16). È rappresentato inoltre, come confronto, il pairing field ricavato con la stessa interazione ma utilizzando la struttura della crosta interna calcolato in [41] a  $T = 0.0 \text{ MeV}$  (linea puntinata).

che questo comportamento non porta, come osservato nel confronto tra le interazioni di pairing ISS ed IV, ad una minor intensità del pairing field dei neutroni presenti nel nucleo e sulla sua superficie: se questo avvenisse, infatti, in questa regione si avrebbe una temperatura critica per la seconda transizione inferiore a quella ricavata utilizzando la struttura di Negele e Vautherin ( $T \approx 0.45 \text{ MeV}$ ), portando quindi questa stessa transizione ad essere visibile in figura 5.27.

Per comprendere meglio questi risultati è necessario anche in questo caso analizzare approfonditamente alcune regioni della crosta. Iniziamo, come anche nelle precedenti situazioni, con la regione 6 ( $\rho = 2.7 \cdot 10^{12} \text{ g cm}^{-3}$ ), caratterizzata da una densità intermedia. Analizzando il calore specifico per questa regione, riportato in figura 5.16, si osserva subito un particolare comportamento che non è mai stato riscontrato nelle regioni che in precedenza sono state analizzate: si nota infatti una prima transizione (dovuta ai neutroni liberi) analoga a quelle osservate precedentemente nella stessa regione, anche se a temperature decisamente superiori, ma anche la totale assenza della seconda transizione (quella dovuta ai neutroni del nucleo).

Questo comportamento può essere, per l'ennesima volta, spiegato analizzando il pairing field dei neutroni (Fig. 5.17). Si osserva infatti, a temperatura nulla, che il pairing field dei neutroni del nucleo risulta essere molto meno intenso rispetto a quanto ricavato utilizzando la struttura di Negele e Vautherin, il che dovrebbe portare ad una seconda transizione caratterizzata da una temperatura critica inferiore. D'altra parte, come ci si aspettava, il pairing field dei neutroni liberi risulta essere invece maggiore di quello ricavato dalla struttura riportata in tabella 4.1. Analizzando poi, sempre in figura 5.17, l'andamento del pairing field dei neutroni all'aumentare della temperatura si può infine comprendere l'assenza della seconda transizione. Si nota infatti che, all'aumentare della temperatura, si avrà non soltanto una diminuzione del pairing field dei neutroni liberi, ma anche quello dei neutroni del nucleo ( $T = 0.5 \text{ MeV}$ ),

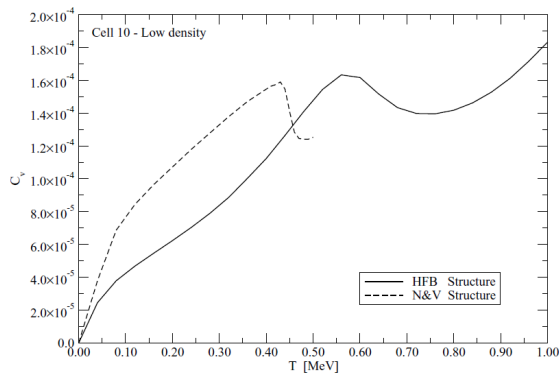


Figura 5.18: Calore specifico della regione 10 calcolato utilizzando la struttura della crosta ricavata dall'utilizzo della teoria HFB. In figura è rappresentato il calore specifico calcolato nella regione 10 utilizzando la struttura della crosta ricavata dall'utilizzo della teoria HFB (linea continua). Il confronto è fatto col calore specifico ottenuto dalla stessa interazione IV ma utilizzando la struttura della crosta calcolata in [41] (linea tratteggiata). I calori specifici sono dati in unità della costante di Boltzman.

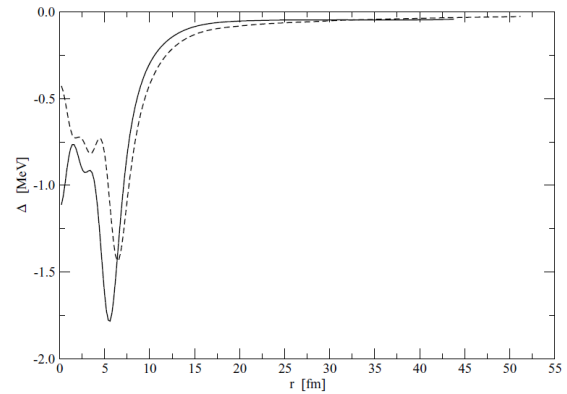


Figura 5.19: Pairing field dei neutroni calcolato utilizzando la struttura della crosta ricavata dall'utilizzo della teoria HFB nella regione 10. In figura è rappresentato il confronto tra il pairing field dei neutroni della regione 10 ricavato dall'interazione IV ed utilizzando la struttura della crosta ricavata dall'utilizzo della teoria HFB (linea continua) ed il pairing field dei neutroni ricavato dalla stessa interazione ma utilizzando la struttura della crosta calcolata in [41] (linea tratteggiata).

portando quindi ad una singola transizione di fase in cui ad annullarsi è gradualmente il pairing field di tutta la cella. Questa singola transizione non è però netta come quella osservata ad esempio per l'interazione ISS nella regione 1 (Fig. 5.4), in quanto il picco nel pairing field, che è comunque presente, porta ad un annullamento dello stesso a temperature sempre maggiori avvicinandosi alla superficie del nucleo, zona caratterizzata dalla temperatura critica maggiore ( $T = 0.6 \text{ MeV}$ ). A temperature ancora maggiori la materia sarà quindi semplicemente in fase normale ( $T = 0.8 \text{ MeV}$ ).

Analizzando ancora, in figura 5.16, il calore specifico della materia calcolato utilizzando le due differenti strutture della crosta interna è possibile, infine, fare un'ulteriore importante osservazione: si nota infatti, analizzando i risultati ricavati per temperature elevate, che i calori specifici della materia, ormai in fase non superfluida, hanno la stessa intensità. Questa particolare corrispondenza era ovviamente presente anche in tutti risultati trovati in precedenza (Fig. 5.12), ma, in quei particolari casi, non rappresentava un risultato notevole in quanto i calcoli erano svolti cambiando solamente l'interazione di pairing utilizzata ed era quindi logico pensare che la materia in fase non superfluida si comportasse nello stesso modo. Trovare questo stesso risultato anche variando la struttura della crosta interna implica però che la questa stessa struttura non influenza particolarmente la risposta termica della materia in fase normale, che in pratica, come appena descritto, avrà una importante influenza solamente in regime superfluido.

Un'ulteriore menzione merita infine il comportamento della materia ad alta e bassa densità. Innanzitutto è possibile osservare, in figura 5.27, il particolare comportamento del calore specifico nella regione 1, comportamento già osservato per la stessa interazione utilizzando la struttura della crosta calcolata in [41]. In questo caso però la minor temperatura critica per la transizione di fase non è solamente dovuta

alla riduzione del gap medio, tipica dell'interazione IV, ma anche al fatto che, come descritto nel capitolo 4, i calcoli svolti in questa cella non sono attendibili a causa del irrealistico comportamento della densità e del pairing field dei neutroni al bordo della cella (Cap. 4.4).

Per quanto riguarda il comportamento a bassa densità si è invece analizzata approfonditamente la regione 10, in cui si è notato che il pairing field dei neutroni (Fig. 5.19), contrariamente a quanto avveniva nella regione 6, presenta un picco sulla superficie del nucleo più intenso rispetto a quello riscontrato utilizzando la struttura della crosta calcolata da Negele e Vautherin: l'unica transizione di fase presente, quella dei neutroni del nucleo, avrà quindi, come si nota in figura 5.18, una temperatura critica più elevata di quelle calcolate nei precedenti casi ( $T \approx 0.6 \text{ MeV}$ ) e, di conseguenza, non potrà essere osservata in figura 5.27, dove la massima temperatura analizzata è  $T = 0.5 \text{ MeV}$ .

### 5.3 Raffreddamento

Come già accennato, i calori specifici ottenuti dall'interazione isoscalare sono stati utilizzati nello studio del raffreddamento di una stella di neutroni, dove si è utilizzata la parametrizzazione ISW per rappresentare uno scenario di weak pairing e la parametrizzazione ISS per rappresentare uno scenario di strong pairing [28]. Questa scelta è stata fatta al fine di avere un confronto tra il raffreddamento derivante dai due scenari di pairing utilizzati: confronto che non è stato possibile fare con un'interazione isovettoriale per la quale non sono stati resi disponibili parametri che descrivano uno scenario di weak pairing. Molto interessante sarebbe stato inoltre un confronto tra il raffreddamento ottenuto utilizzando la struttura della crosta descritta in [41] e quello ottenuto utilizzando invece la struttura calcolata nel capitolo 4 e, di conseguenza, i calori specifici calcolati per quella struttura. Purtroppo però questo studio non è stato possibile in quanto non sono stati ottenuti risultati affidabili per la regione più densa della crosta interna (Cell 1), che risulta molto importante nel raffreddamento della stella. Anche in questo caso, inoltre, avendo usato un'interazione IV, non sarebbe comunque stato possibile svolgere il calcolo in regime di weak pairing, per cui non sarebbe stato possibile fare un confronto tra i due regimi di interesse. Lo studio accurato della dipendenza del raffreddamento dalla struttura di Wigner-Seitz della crosta interna può in ogni caso essere preso in considerazione per un successivo lavoro.

Per lo studio del raffreddamento si è scelto di considerare una stella di  $1.6 M_{\odot}$  così da ottenere uno scenario di rapid cooling. Questo perché nel core di una stella di tale massa si sono potute trovare condizioni tali da innescare le reazioni nucleari dei processi URCA diretto, la cui intensa emissione neutrinica causa un raffreddamento molto rapido del core della stella, che lo porta in un tempo molto breve ad avere una temperatura notevolmente inferiore a quella della crosta, in cui l'emissione neutrinica, benché comunque presente, è caratterizzata da una emissività molto inferiore. Questo gap di temperatura porta quindi ad un processo chiamato Termalizzazione, in cui la crosta cederà continuamente calore al core fino a che non avrà raggiunto la sua stessa temperatura. Successivamente la stella, ormai caratterizzata da una temperatura omogenea, avrà un continuo e regolare raffreddamento in un primo momento causato dalla ancora consistente emissione neutrinica, poi, dopo circa  $10^5$  anni, dall'emissione



elettromagnetica dalla superficie, che sarà diventato il processo dominante grazie alla forte diminuzione dell'emissione neutrinica.

### 5.3.1 Modello di raffreddamento

In questo lavoro si studia appunto il processo di termalizzazione della crosta, in cui la diffusione del calore è descritta dalla sua equazione relativistica [53]

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{Kr^2}{\Gamma(r)} e^\phi \frac{\partial}{\partial r} (e^\phi T) \right] = r^2 \Gamma(r) e^\phi \left( C_V \frac{\partial T}{\partial t} + e^\phi Q_\nu \right) \quad (5.6)$$

dove  $T$  è la temperatura,  $t$  è il tempo,  $K$  è la conducibilità termica,  $C_V$  è il calore specifico totale della materia presente e  $Q_\nu$  è l'emissività neutrinica. L'effetto della gravità è dato dal potenziale gravitazionale  $\phi$ , che entra nell'equazione tramite il redshift della temperatura  $\tilde{T} = T e^\phi$ , e dal fattore  $\Gamma(r) = (1 - 2Gm(r)/rc^2)^{-1/2}$ , dove  $G$  è la costante di gravitazione universale e  $m(r)$  è la massa gravitazionale inclusa nel raggio  $r$ . La distribuzione di temperatura iniziale è scelta come costante ( $T(r, t = 0) = T_i$ ).

L'emissività neutrinica del core è stata imposta considerando tre importanti contributi: il processo di bremsstrahlung, l'emissione URCA modificata e l'emissione URCA diretta per densità superiori a  $\rho = 5 \cdot 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ , quindi solamente nella regione più interna. Per quanto riguarda la crosta, invece, sono state incluse l'emissione dovuta al decadimento dei plasmoni, che è il contributo dominante, ed i processi di bremsstrahlung dovuti all'interazione elettrone-ione, elettrone-elettrone e neutrone-neutrone. Nelle regioni in cui invece risultano presenti effetti di superfluidità (e/o superconduttività) di neutroni (e/o protoni), viene tenuto conto della soppressione dei processi neutrinici a cui questi partecipano e viene attivato il processo chiamato Cooper pair breaking and formation (PBF) [56], in cui è stata considerata anche la soppressione del canale vettoriale [35]. Il gap dei protoni e dei neutroni nel core è stato considerato usando il modello di accoppiamento  $^1S_0$  [52], per i protoni, ed il modello  $^3P_2$  [43], per i neutroni.

La conducibilità termica è stata calcolata sommando i contributi delle particelle libere presenti: nel core è stato quindi considerato il contributo di elettroni, muoni, protoni e neutroni [7], mentre nella crosta solamente quello degli elettroni. Ognuno di questi contributi è stato valutato come

$$K^x = \frac{C_V^x \langle v^x \rangle^2}{3\nu^x} \quad (5.7)$$

dove  $x$  descrive la specie in esame,  $C_V^x$  il suo calore specifico,  $\langle v^x \rangle$  la sua velocità media (per fermioni degeneri  $\langle v^x \rangle = v_F^x$ ) e  $\nu^x$  la frequenza di collisioni, che nella crosta è stata calcolata utilizzando le regole di Matthiessen

$$\nu^e = \nu^{e\text{-ion}} + \nu^{e\text{-e}}$$

dove la frequenza di collisione elettrone-ione è stata calcolata secondo il modello presentato in [29], mentre quella elettrone-elettrone utilizzando il modello presentato in [51]. La dipendenza della conducibilità termica totale dalla densità è data in figura 5.20.



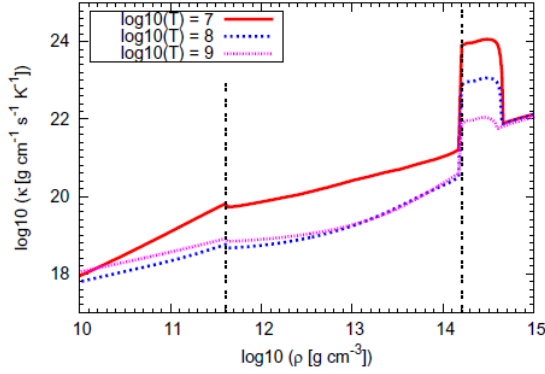


Figura 5.20: **Conducibilità termica nella stella.** In figura è rappresentata la conducibilità termica della materia in funzione della densità per tre temperature caratteristiche negli scenari di cooling ( $10^7 K$ ,  $10^8 K$  e  $10^9 K$ ). Sono presentati infine, tramite righe verticali, i limiti della crosta interna.

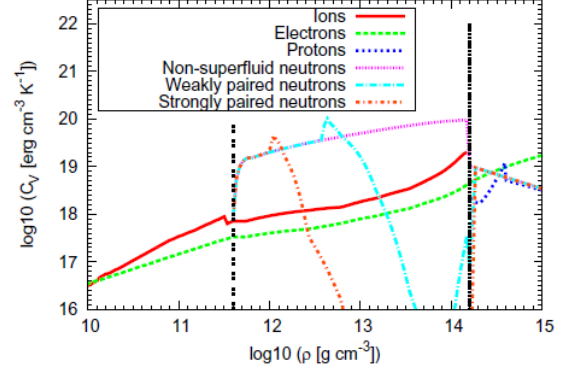


Figura 5.21: **Calore specifico nella stella.** In figura è rappresentata il calore specifico delle diverse componenti della materia presente nella stella di neutroni in funzione della densità. Lo studio è stato svolto per una temperatura pari a  $T = 10^9 K$ . Sono presentati infine, tramite righe verticali, i limiti della crosta interna.

Resta infine da analizzare il calore specifico della materia presente: mentre per la crosta esterna ed il core sono stati semplicemente utilizzati i modelli descritti in [43] (in cui si considera il contributo di elettroni e reticolo nella crosta ed il contributo di uno standard gas n-p-e nel core), per la crosta interna è stato invece svolto un lavoro più approfondito.

Il calore specifico in questa regione è dato dal contributo del gas di elettroni, del reticolo e della materia nucleare. Il contributo della materia nucleare è quello calcolato approfonditamente nei precedenti paragrafi di questo capitolo ed è stato utilizzato tramite la parametrizzazione presentata in appendice C. Gli elettroni, essendo ultrarelativistici, sono stati invece considerati semplicemente come un gas uniforme, degenerare ed ovviamente ultrarelativistico, il cui calore specifico è dato da

$$C_V^{(e)} = \frac{(3\pi)^{2/3}}{3\hbar c} \left(\frac{Z}{V}\right)^{2/3} T \quad (5.8)$$

dove  $V$  è il volume della cella di Wigner-Seitz e  $Z$  è il numero di elettroni (e protoni) presenti nella cella.

Più complesso è invece il calcolo del contributo del reticolo coulombiano. Questo è stato calcolato usando la teoria di Debye

$$C_V = n_i \cdot \frac{12\pi^4}{5} \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 \quad (5.9)$$

dove la temperatura di Debye,  $\Theta_D$ , è data da

$$\Theta_D = \alpha \hbar \left(\frac{4\pi(Ze)^2 n_i}{m_i}\right)^{1/2} \quad (5.10)$$

$n_i$  è la densità di nuclei,  $m_i$  è la loro massa e  $\alpha \simeq 0.45$  [19]. Qualora si raggiungano temperature tali che si cominciano a perdere gli effetti di cristallizzazione questo contributo dovrà però essere calcolato utilizzando modelli che considerano cristalli

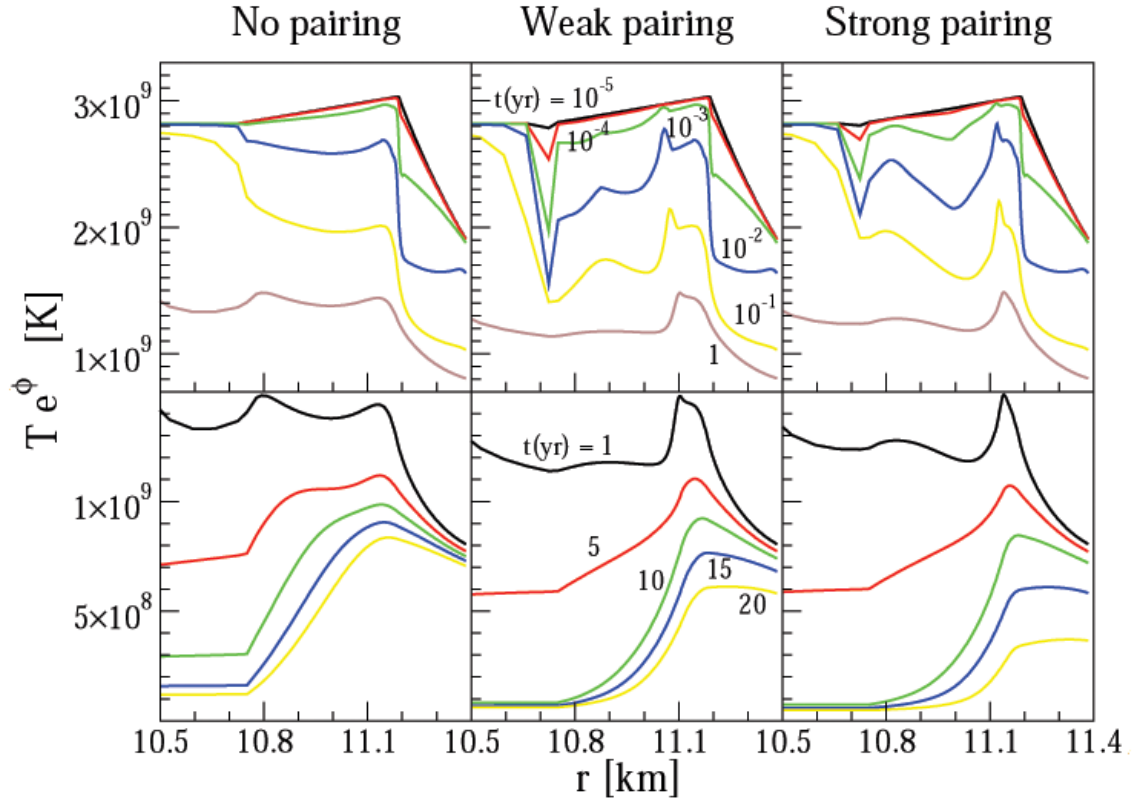


Figura 5.22: **Evoluzione temporale della temperatura di redshift.** In figura è rappresentata l'evoluzione temporale della temperatura di redshift nella crosta interna di una stella di neutroni considerando una temperatura iniziale di  $T_i = 500 \text{ keV}$ .  $r$  rappresenta la distanza dal centro della stella in  $km$ . La transizione core-crosta avviene per  $r = 10.75 \text{ km}$ .

armonici, come quello presentato in [8], o addirittura, qualora si evidenzi la totale perdita di cristallizzazione, modelli OCP come quello presentato in [45]. Per temperature ancora più elevate si cade poi nel regime classico in cui il calore specifico in unità della costante di Boltzman risulta essere pari a

$$C_v \sim 3$$

Il calore specifico delle varie componenti della materia presenti nella stella è presentato in figura 5.21. Particolarmente interessante è il comportamento nella crosta interna. In questa regione si nota infatti che in assenza di superfluidità a dominare è il contributo della materia nucleare (che in figura è indicata come Neutrons in quanto il termine dominante è quello dei neutroni). La presenza di superfluidità porta però il suo valore a diventare trascurabile ad alte densità in cui a dominare saranno quindi il contributo reticolare (Ions) ed il contributo degli elettroni.

### 5.3.2 Risultati ottenuti

L'evoluzione temporale della temperatura ottenuta applicando questo modello è presentata in figura 5.22, in cui, per comprendere meglio gli effetti che influenzano la termalizzazione, sono stati considerati due diversi intervalli temporali: il primo descrive il range che va da  $10^{-5} \text{ yr}$  a  $1 \text{ yr}$ , mentre il secondo da  $1 \text{ yr}$  a  $15 \text{ yr}$ .

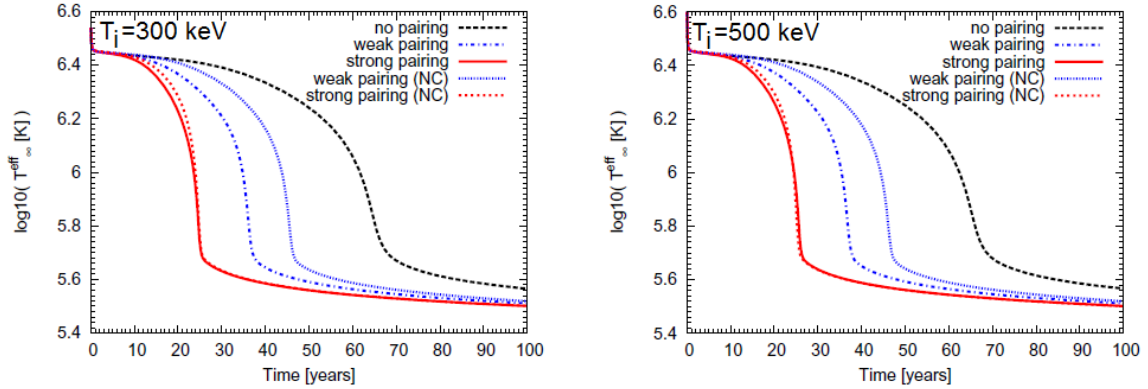


Figura 5.23: **Evoluzione temporale della superficie della stella.** In figura è rappresentata l'evoluzione temporale della superficie della stella per le due temperature iniziali considerate  $T_i = 300 \text{ keV}$  e  $T_i = 500 \text{ keV}$ . NC indica i risultati ottenuti utilizzando la parametrizzazione data in [36].

Nel primo intervallo la stella è troppo giovane perché il trasporto del calore sia significativo: l'unico contributo sarà dato, quindi, dall'emissione neutrinica

$$\frac{\partial T}{\partial t} \propto \frac{Q_\nu}{C_\nu}$$

e l'evoluzione temporale sarà quindi governata dall'emissione locale di neutrini ( $Q_\nu$ ) e dal calore specifico ( $C_\nu$ ). La presenza di materia superfluida, in questa fase non ha una grande influenza sull'emissione neutrinica: riduce infatti solamente il rate del processo di bremsstrahlung neutrone-neutrone la cui emissività è però trascurabile rispetto a quella data dal contributo congiunto del decadimento dei plasmoni e dei processi di bremsstrahlung elettrone-ione ed elettrone-elettrone. Nonostante ciò gli effetti di pairing hanno comunque un grande contributo in questa fase del raffreddamento in quanto riducono notevolmente il calore specifico della materia nucleare, che sarebbe altrimenti dominante. Questo importante contributo si può osservare in figura 5.22, dove si nota facilmente che, nell'intervallo di tempo che intercorre tra i  $10^{-4} \text{ yr}$  ed i  $10^{-1} \text{ yr}$ , il raffreddamento in presenza di interazioni di pairing risulta molto più rapido. È infine importante notare che dopo  $10^{-1}$  anni si ha un appianamento del profilo termico che, di conseguenza, dopo circa  $1 \text{ yr}$  risulta molto simile nei tre differenti scenari di pairing considerati.

Nel secondo intervallo temporale considerato gli effetti di pairing avranno un ruolo ancora più importante. In quest'intervallo infatti l'evoluzione temporale della stella è dominata dal trasporto di calore ed è quindi determinata dal valore della conducibilità della materia ( $K$ ) e del calore specifico ( $C_\nu$ ) secondo la relazione

$$\frac{\partial T}{\partial t} \propto \frac{K}{C_\nu}$$

in cui il calore specifico, strettamente influenzato dalla presenza della fase superfluida, diventa il parametro di maggior importanza.

In figura 5.23 è infine rappresentata l'evoluzione temporale della crosta della stella per le due diverse temperature iniziali considerate ( $T_i = 300 \text{ keV}$  e  $T_i = 500 \text{ keV}$ ). In questi risultati si nota che gli effetti di pairing hanno grande importanza nell'effettivo raffreddamento della stella, che risulta invece quasi indipendente dalla temperatura

iniziale considerata. Si nota infatti che in entrambi i casi la presenza di materia superfluida porta ad un raffreddamento notevolmente più rapido.

In figura 5.23 è inoltre presentato uno scenario di raffreddamento in cui non si è tenuto conto della presenza dei nuclei (in figura è indicato con la sigla NC): in cui cioè la materia presente è stata considerata come un gas n-p-e, il cui calore specifico è trattato secondo l'approssimazione descritta in [36]. Il confronto tra i risultati ricavati dallo studio presentato in questo capitolo con quelli ricavati utilizzando l'approssimazione NC premette di concludere che l'utilizzo di una trattazione HFB porta la stella ad avere, in regime di weak pairing, un raffreddamento più rapido rispetto a quello ricavato da una trattazione BCS (NC). Da questo stesso confronto è però anche possibile notare invece che, in regime di strong pairing, l'utilizzo di una trattazione HFB non porta ad una sostanziale differenza nel processo di termalizzazione.

Questo particolare risultato è però facilmente spiegabile se si analizzano i calori specifici della materia nucleare alle temperature di interesse nel processo di raffreddamento (Fig. 5.24 e 5.25). Mentre l'utilizzo di una trattazione HFB risulta fondamentale nella descrizione dei calori specifici durante la transizione di fase, questi stessi calori specifici, se analizzati a temperature lontane da questa transizione, risultano infatti molto simili a quelli ricavati da una più semplice trattazione BCS (Fig. 5.4). In condizioni di strong pairing, però, si ottengono transizioni di fase alle temperature di interesse solamente in tre delle regioni studiate (Fig. 5.24, cell 6-8), mentre nelle restanti regioni queste transizioni o saranno a temperature più elevate (cell 1-5) o non saranno presenti (cell 9 e 10). La seconda transizione, come già descritto, avverrà invece sempre a temperature maggiori di quelle considerate. In conseguenza di ciò si può concludere che il calore specifico calcolato con la trattazione HFB si discosterà sostanzialmente da quello calcolato con la trattazione BCS (NC) solamente in un range di densità molto limitato, non potendo quindi generare una differenza consistente nel raffreddamento della stella.

D'altra parte in regime di weak pairing (Fig. 5.25) sono presenti transizioni di fase in quasi tutte le regioni analizzate. Si riscontra infatti la presenza sia della prima transizione (cell 3-6), che della seconda transizione (cell 6-8), portando quindi il calore specifico calcolato con la trattazione HFB a differire da quello calcolato con la trattazione BCS (NC) in gran parte della crosta interna della stella. In queste condizioni è quindi logico pensare che, come poi evidenziato dal calcolo, l'utilizzo di un approccio HFB porti ad una sostanziale differenza nel raffreddamento.

## 5.4 Conclusioni

Nel lavoro svolto è stato calcolato il calore specifico della materia nucleare presente nella crosta interna delle stelle di neutroni utilizzando la teoria HFB.

Grazie a questo studio è stato possibile osservare che il calore specifico in questa regione della stella, specialmente a densità non molto elevate, è fortemente dipendente dalla presenza dei nuclei, dipendenza dovuta alla grande influenza che questi hanno sul pairing field dei neutroni. Questo è particolarmente evidente nelle regioni a densità intermedia dove la presenza del nucleo implica un picco del pairing field posto sulla superficie del nucleo stesso, che causa la formazione di una doppia transizione di fase: la prima, più marcata, descrive il passaggio in fase normale dei neutroni liberi, mentre la seconda quello dei neutroni posti sulla superficie del nucleo. La presenza dei nuclei

porta inoltre queste transizioni ad essere molto graduali, diversamente da quelle date da una trattazione BCS in cui la transizione di fase è identificata da una discontinuità nel calore specifico.

I calori specifici calcolati in questa sede sono poi stati utilizzati in un modello avanzato di raffreddamento, in cui si è osservato che questa nuova trattazione del calore specifico porta, in regime di weak pairing, a scenari molto differenti rispetto a quelli in cui non si considerava la presenza dei nuclei nella crosta e l'effetto della superfluidità era dato da un calcolo BCS (modello NC). Si è però anche osservato che questa diversa trattazione non comporta sostanziali differenze nel raffreddamento in regime di strong pairing.

Nello studio svolto si è poi calcolato il calore specifico utilizzando la struttura della crosta calcolata nel capitolo 4. Da questo studio si è evidenziata una grande dipendenza del calore specifico dalla struttura della crosta utilizzata nel calcolo: questa forte dipendenza è tuttavia prerogativa della materia in fase superfluida, si è infatti osservato che ad alte temperature, in cui la materia torna ad essere in fase normale, l'influenza della diversa struttura della crosta diventa trascurabile. Sfortunatamente non è stato possibile utilizzare questi calori specifici nello studio del raffreddamento, in quanto non è stato possibile calcolare il contributo della regione della crosta di densità più elevata, regione molto importante nel calcolo svolto. Un confronto tra il raffreddamento della stella utilizzando queste due diverse strutture di Wigner-Seitz sarebbe tuttavia molto interessante e può essere preso in considerazione per un successivo lavoro.

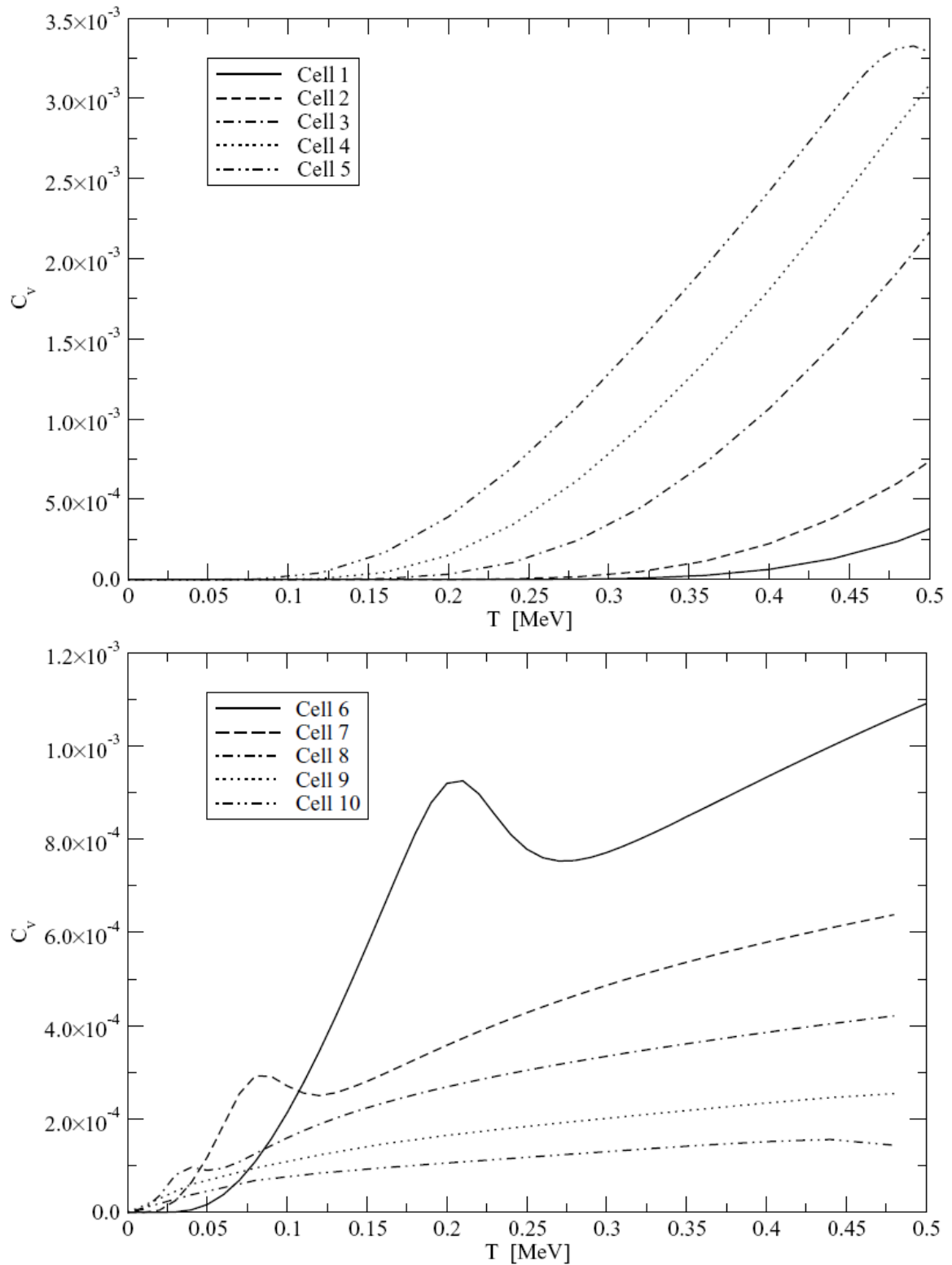


Figura 5.24: Calore specifico ricavato utilizzando l'interazione di pairing ISS per tutte le regioni considerate. In figura è rappresentato il calore specifico calcolato per le temperature raggiungibili nella crosta interna delle stelle di neutroni ( $T < 0.5 \text{ MeV}$ ). Le prime cinque regioni sono riportate nella figura in alto mentre le successive cinque in quella in basso. I calori specifici sono dati in unità della costante di Boltzman.

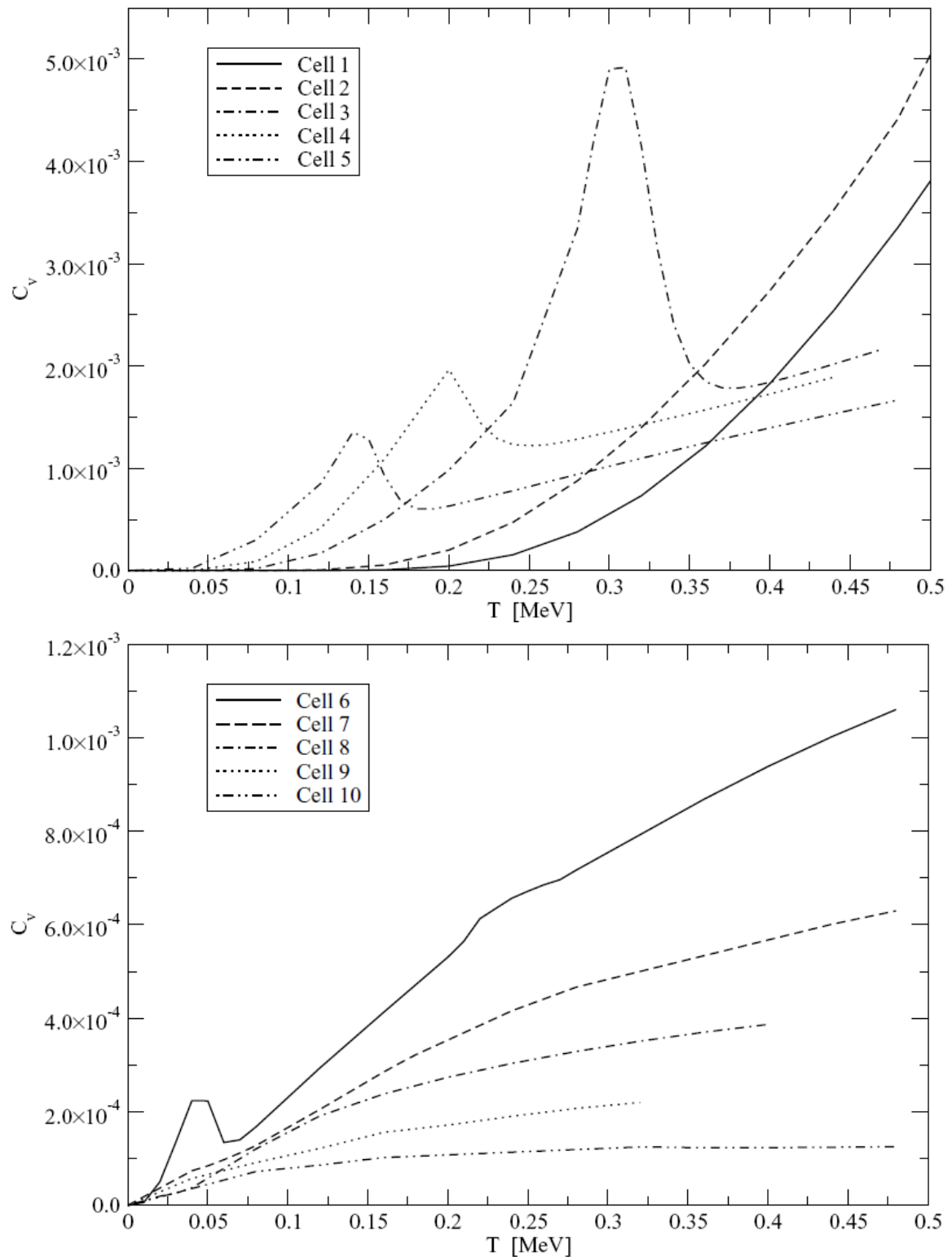


Figura 5.25: Calore specifico ricavato utilizzando l'interazione di pairing ISW per tutte le regioni considerate. In figura è rappresentato il calore specifico calcolato per le temperature raggiungibili nella crosta interna delle stelle di neutroni ( $T < 0.5 \text{ MeV}$ ). Le prime cinque regioni sono riportate nella figura in alto mentre le successive cinque in quella in basso. I calori specifici sono dati in unità della costante di Boltzman.

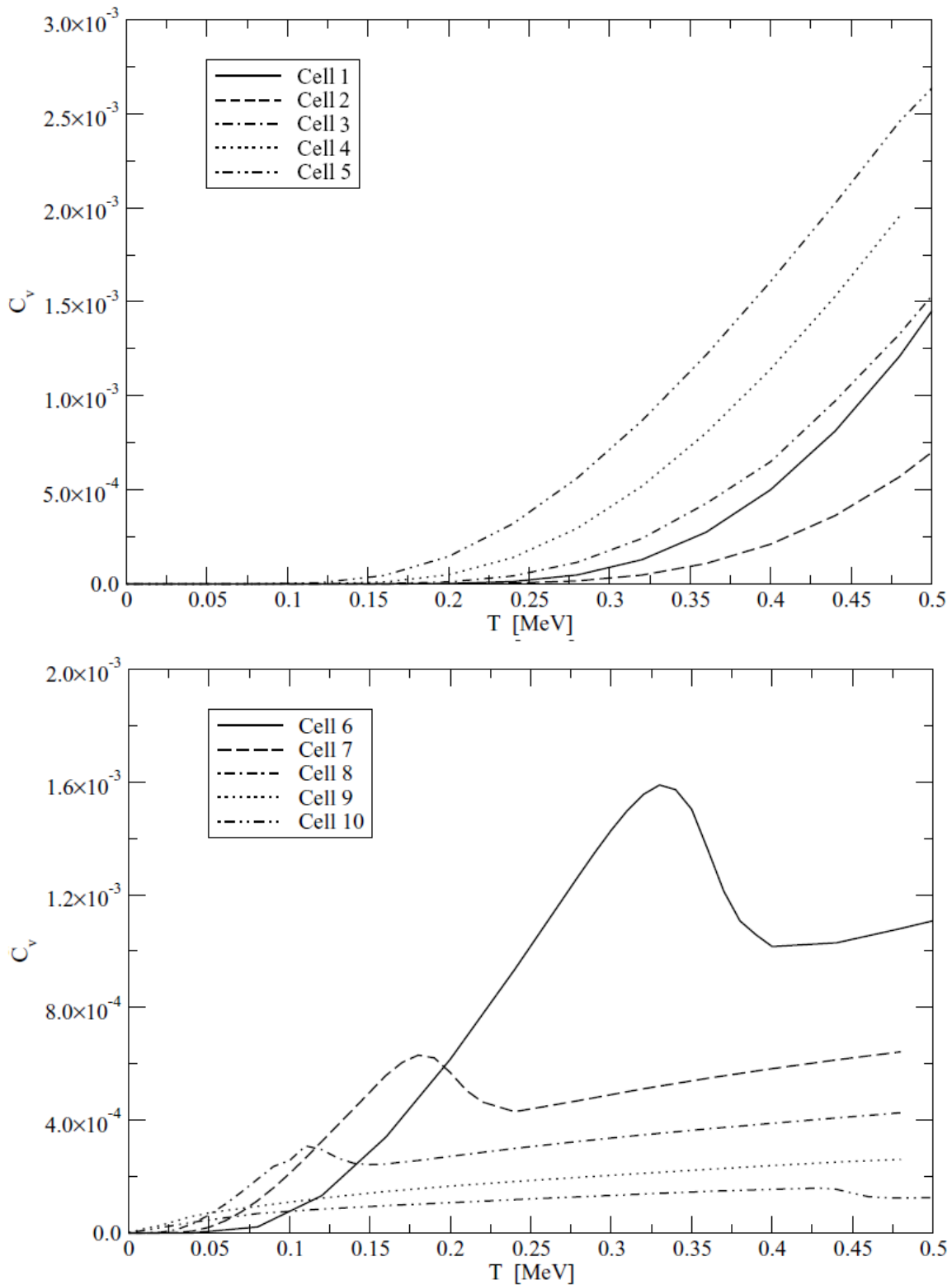


Figura 5.26: **Calore specifico ricavato utilizzando l'interazione di pairing IV per tutte le regioni considerate.** In figura è rappresentato il calore specifico calcolato per le temperature raggiungibili nella crosta interna delle stelle di neutroni ( $T < 0.5 \text{ MeV}$ ). Le prime cinque regioni sono riportate nella figura in alto mentre le successive cinque in quella in basso. I calori specifici sono dati in unità della costante di Boltzman.



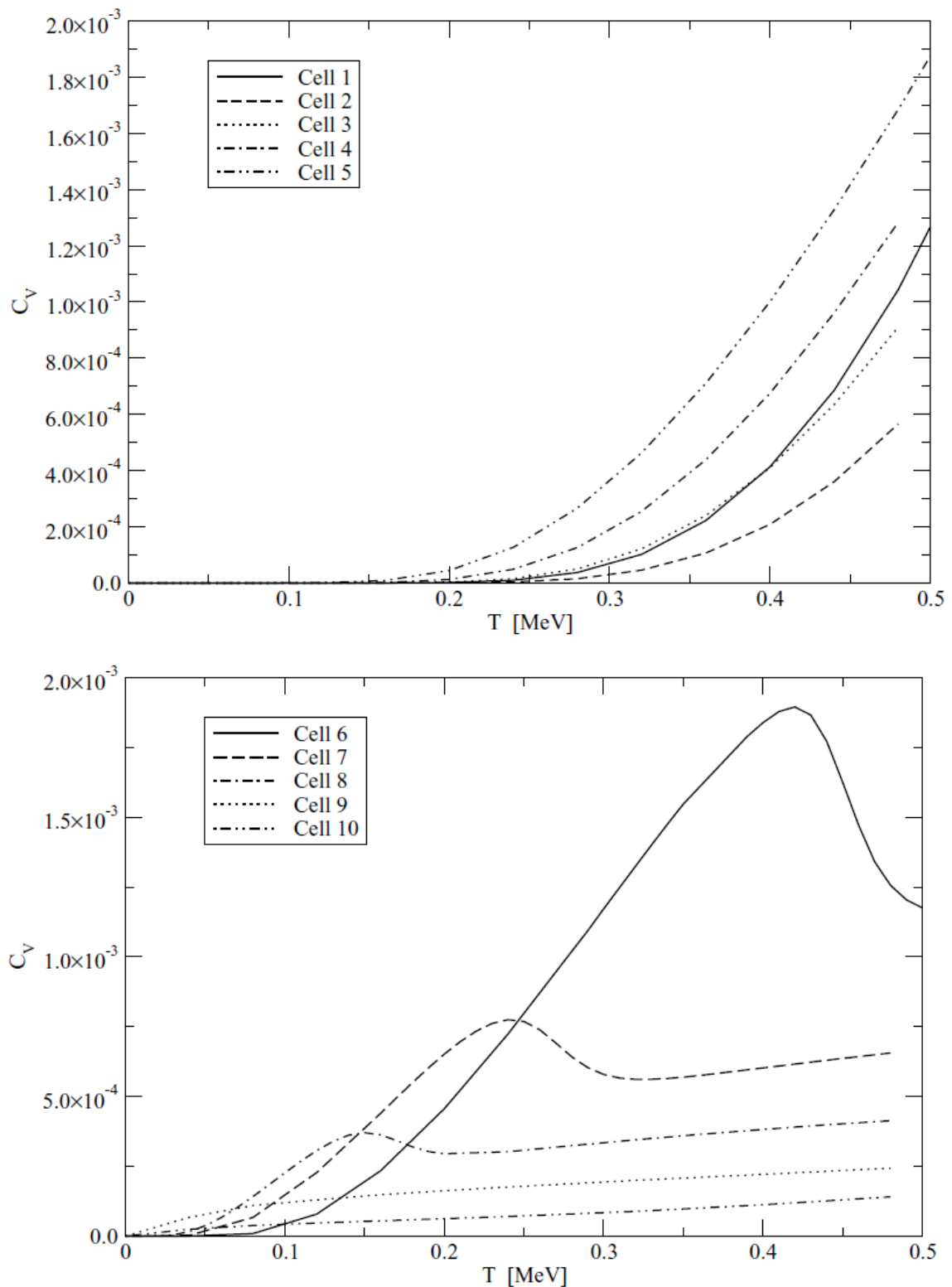


Figura 5.27: Calore specifico ricavato per l'interazione IV utilizzando la struttura di Wigner-Seitz riportata in tabella 4.7. In figura è rappresentato il calore specifico calcolato per le temperature raggiungibili nella crosta interna delle stelle di neutroni ( $T < 0.5$  MeV). Le prime cinque regioni sono riportate nella figura in alto mentre le successive cinque in quella in basso. I calori specifici sono dati in unità della costante di Boltzman.



# Capitolo 6

## Pinning efficace

La terza parte del lavoro svolto è stata fatta in collaborazione col professor Pierre Pizzochero, Dipartimento di Fisica dell'Università degli studi di Milano (Italia). Questo lavoro consiste nel calcolo della forza per unità di lunghezza che lega i vortici superfluidi, derivanti dalla rotazione della stella (App. D), al reticolo nucleare che è presente nella crosta interna delle stelle di neutroni, come ampiamente descritto nei capitoli 2 e 4.

### 6.1 Modello a vortici per i pulsar glitches

Questa forza, detta di Pinning, è stata largamente studiata per i superfluidi bosonici in rotazione nei laboratori terrestri, in cui si è osservata una forte attrazione tra i vortici superfluidi e le impurità presenti. In termini astrofisici acquista però grande importanza se applicata al Modello a Vortici per i Pulsar Glitches che, come accennato nel capitolo 2, è uno dei modelli più accreditati tra quelli costruiti al fine di spiegare questo importante fenomeno: è stato infatti dimostrato dal punto di vista teorico che quest'interazione è presente anche nella crosta interna delle pulsar tra il gas di neutroni superfluidi ed i nuclei che formano il reticolo nucleare.

Da questi studi teorici [24][37][46][47] in cui, come descritto in appendice E, sono state calcolate le energie di pinning per sito che legano il vortice ad un singolo nucleo, si è ricavato che questa interazione può essere repulsiva o attrattiva a seconda della densità della materia presente. Qualora risulti repulsiva i vortici tenderanno a fraporsi fra i nuclei e si parlerà allora di Interstitial Pinning, mentre qualora risulti attrattiva questi tenderanno a legarsi ai nuclei e si parlerà quindi di Nuclear Pinning. Secondo il modello a vortici classicamente proposto [1], mentre in configurazione di nuclear pinning questi risultano legati al reticolo nucleare, in quella di interstitial pinning risultano invece essenzialmente liberi di migrare.

Nel contesto del modello a vortici questa distinzione risulta essere fondamentale in quanto la materia superfluida, essendo irrotazionale, tende a simulare una rotazione rigida tramite la formazione di un fascio di vortici, in cui la velocità della materia a distanza  $R$  dall'asse di rotazione risulta essere proporzionale al numero di vortici presenti all'interno di questo raggio  $R$  (App. D). Il superfluido potrà quindi diminuire la sua velocità di rotazione (per seguire l'andamento della crosta esterna la cui velocità di rotazione, come spiegato nel capitolo 2, è in continua diminuzione) solamente tramite una perdita di vortici dovuta ad un'opportuna migrazione dei vortici stessi

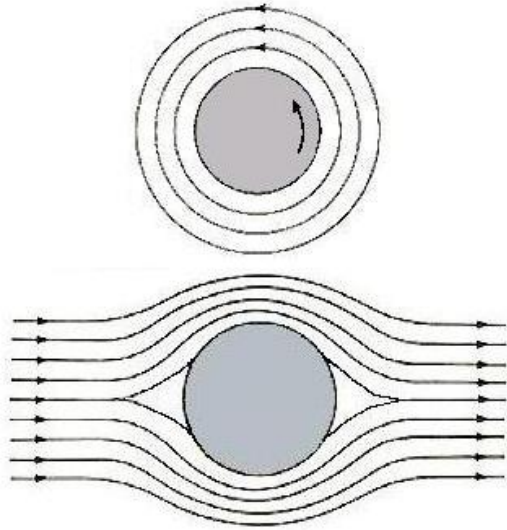


Figura 6.1: **Vortice in moto rispetto al superfluido.** Sono rappresentate separatamente le due componenti del moto del gas: quella locale attorno al vortice nella prima figura e quella globale del gas rispetto al vortice stesso nella seconda figura.

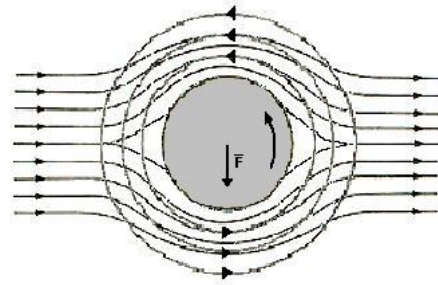


Figura 6.2: **Vortice in moto rispetto al superfluido.** Sono rappresentate entrambe le componenti del moto. Nella regione raffigurata sopra il vortice la velocità effettiva del gas risulta essere la differenza delle componenti dei due differenti moti, mentre nella regione posta sotto il vortice la velocità risultante ne è la somma. Si avrà quindi una maggior pressione nella regione superiore rispetto a quella inferiore con una conseguente forza sul vortice diretta verso il basso.

verso la crosta esterna della stella. La migrazione risulta però impossibile nel caso in cui ci si trovi in condizione di nuclear pinning. In questo caso infatti i vortici, essendo legati al reticolo, non potranno migrare, mantenendo quindi costante la velocità di rotazione del superfluido: si instaurerà così una differenza di velocità angolare tra le due fasi della materia presente nella stella, quella normale e quella superfluida.

Al continuo rallentamento della crosta esterna della stella di neutroni corrisponde quindi un costante aumento della differenza di velocità angolare delle due fasi della materia presente, che continuerà finché non vi sarà una forza in grado di rompere il legame tra nuclei e vortici, permettendo quindi a questi ultimi di migrare e rallentare il superfluido. Questa forza è la Forza di Magnus, dal nome del fisico che l'ha scoperta. È una forza puramente classica, basata sul principio idrodinamico di Bernoulli, secondo cui la somma della pressione, della densità di energia cinetica e della densità di energia potenziale gravitazionale è una costante lungo le linee di flusso di un fluido

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + u = \text{costante} \quad (6.1)$$

dove  $P$  è la pressione,  $\rho$  è la densità della materia,  $v$  è la sua velocità e  $u$  è la densità di energia potenziale che, lavorando su scale microscopiche, potrà essere considerata costante e, di conseguenza, verrà trascurata.

In condizione di nuclear pinning la velocità della materia superfluida rispetto al vortice avrà due contributi: quello dato dalla rotazione attorno all'asse del vortice stesso e quello dovuto al gap di velocità tra le due fasi della materia (normale e superfluida), il vortice, infatti, essendo legato ai nuclei, seguirà il moto della materia in fase normale (Fig. 6.1). La presenza di due contributi comporta però la formazione di un gap tra la velocità della regione in cui questi sono concordi e quella in cui invece sono discordi, regioni che si trovano ai due lati del vortice (Fig. 6.2). Per il teorema

di Bernoulli, si instaurerà allora una differenza di pressione tra le due regioni ed il vortice subirà quindi una forza diretta verso la zona di minor pressione, in cui le due componenti della velocità rappresentate in figura 6.1 sono concordi. Questa forza per unità di lunghezza è stata calcolata essere pari a

$$f_{mag} = k\rho(v_s - v_n) = k\rho R(\Omega_s - \Omega_n) \quad (6.2)$$

dove  $v_n$ ,  $v_s$ ,  $\Omega_n$  e  $\Omega_s$  sono rispettivamente la velocità e la velocità angolare delle componenti normale e superfluida della materia presente,  $R$  è la distanza dall'asse di rotazione della stella e  $k = \frac{h}{2m_n}$  è la circuitazione attorno all'asse del vortice.

Quando la differenza di velocità angolare tra le due componenti del fluido risulta sufficiente affinché la Forza di Magnus integrata sull'intero vortice riesca a contrastare la forza di pinning, anch'essa integrata sull'intero vortice, si avrà quindi la rottura del legame col reticolo (Depinning) ed il vortice risulterà libero di migrare verso la crosta esterna trasferendogli il proprio momento angolare.

Il momento angolare trasferito da un singolo vortice non è però sufficiente a generare una accelerazione della crosta esterna così come è osservata nei pulsar glitches: si suppone quindi il depinning di un elevato numero di vortici, che potranno migrare verso la crosta esterna trasferendogli simultaneamente il proprio momento angolare, che risulta ora sufficiente a generare l'accelerazione propria di un pulsar glitches.

## 6.2 Precedenti modelli di legame

Il lavoro svolto si propone di risolvere uno dei principali problemi presenti in questo modello: il confronto tra forza di pinning, calcolata per sito (App. E), e la forza di Magnus, calcolata invece per unità di lunghezza. Per poter fare questo confronto è quindi necessario uno studio del numero di siti per unità di lunghezza cui il vortice si lega al reticolo, studio che è stato finora svolto solo tramite modelli qualitativi che non permettevano quindi un confronto accurato tra le due grandezze.

In questi modelli erano considerate due diverse situazioni: quella in cui la forza di pinning risulta sufficientemente intensa da riuscire a dislocare i nuclei dalla loro posizione di equilibrio all'interno del reticolo, si parla allora di Strong Pinning, e quella in cui, invece, ciò non è possibile, e si parla quindi di Weak Pinning.

In situazione di weak pinning il numero di siti di legame per unità di lunghezza si può calcolare dal punto di vista statistico come il prodotto tra la densità di nuclei presente ed il volume che il vortice occupa per unità di lunghezza [3]

$$N_W = n_N \times V_V = \frac{1}{\frac{3}{4}\pi R_{ws}^3} \pi \xi^2 = \frac{4\xi^2}{3R_{ws}^3} \quad (6.3)$$

dove  $n_N = \frac{1}{\frac{3}{4}\pi R_{ws}^3}$  è la densità di nuclei calcolata in approssimazione di Wigner-Seitz e  $V_V = \pi \xi^2$  è il volume del vortice per unità di lunghezza,  $\xi$  è la lunghezza di coerenza del superfluido e rappresenta il raggio della sezione del vortice, mentre  $R_{ws}$  è il raggio di Wigner-Seitz e misura esattamente la metà del passo reticolare [4].

Più complicata è la situazione in condizione di strong pinning (Fig. 6.3). In questa situazione infatti, come già accennato, risulta necessario tenere conto della possibilità di dislocare i nuclei dalla loro posizione di equilibrio all'interno del reticolo. La forza

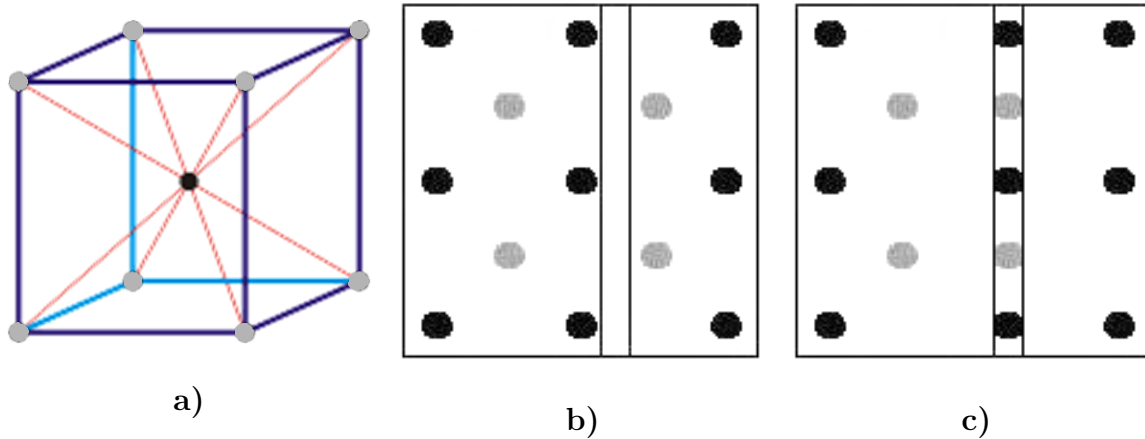


Figura 6.3: **Dislocazione dei nuclei in configurazione di strong pinning.** In figura *a* è rappresentato un reticolo *BCC*, ripreso poi nelle figure *b* e *c*, dove i diversi colori descrivono la profondità in accordo con quelli in figura *a*. Il vortice rappresentato in figura *b* attrae i nuclei vicini al suo interno, così da portare il sistema in una configurazione come quella di figura *c*, dove si nota che la separazione tra i siti di legame è pari a metà del passo reticolare, quindi un raggio di Wigner-Seitz.

di pinning è infatti ora sufficiente a catturare i nuclei vicini e trasportarli all'interno del vortice in modo da contribuire anch'essi al legame tra il vortice stesso ed il reticolo nucleare. In una configurazione di questo tipo, come si nota anche in figura 6.3, la separazione media tra siti successivi risulta essere pari ad un raggio di Wigner-Seitz così che il numero di siti per unità di lunghezza risulta essere pari a [2]

$$N_S = \frac{1}{R_{ws}} \quad (6.4)$$

I calcoli svolti utilizzando questi modelli portavano però a forze di pinning per unità di lunghezza di due o tre ordini di grandezza superiori al valore che teoricamente avrebbero dovuto avere per permettere l'effettiva formazione di un glitch, valore calcolato imponendo che la massima forza di pinning per unità di lunghezza eguagli la forza di Magnus portata dalla variazione di velocità angolare al momento del glitch ( $\Delta\Omega = \dot{\Omega}t_g$ ), anch'essa calcolata per unità di lunghezza,

$$F_{max} = \rho k R \Delta\Omega = \rho k R \dot{\Omega} t_g \approx 10^{15} \text{ erg cm}^{-2} \quad (6.5)$$

dove  $\rho \approx 5 \cdot 10^{13} \text{ g cm}^{-3}$  è la densità media della materia nella regione della stella soggetta a pinning,  $k \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  è sempre la circuitazione attorno al vortice,  $R \approx 10 \text{ km}$  è il raggio della stella,  $\dot{\Omega} \approx 10^{-10} \text{ rad s}^{-2}$  è il rallentamento angolare della superficie e  $t_g \approx 3 \text{ yr}$  è il tipico tempo che intercorre tra due glitch successivi. I valori scelti per questo calcolo sono quelli osservati per la pulsar Vela (PSR B0833-45).

Nel 1984 Alpar et al. [3] proseguirono poi questo studio introducendo il concetto di Superweak Pinning. Essi notarono che se la lunghezza di coerenza del superfluido, e quindi il raggio del vortice, risulta maggiore del raggio di Wigner-Seitz non potranno esistere configurazioni in cui il numero di siti di legame tra il vortice ed il reticolo sia nullo (Fig. 6.4). Ipotizzarono quindi che in questa condizione le varie configurazioni del vortice nelle diverse posizioni rispetto al reticolo siano caratterizzate approssimativamente dallo stesso numero di siti di legame e, di conseguenza, abbiano

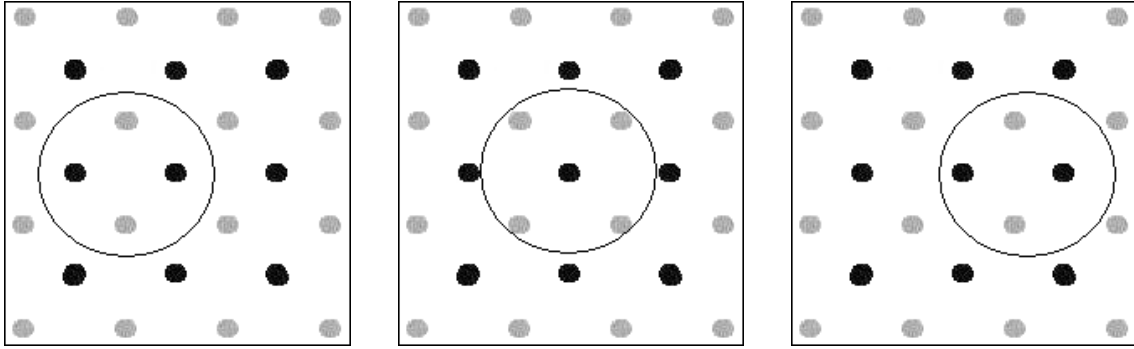


Figura 6.4: **Superweak pinning.** In figura è rappresentato un vortice con raggio maggiore del raggio di Wigner-Seitz posto in tre diverse configurazioni rispetto al reticolo.

approssimativamente la stessa energia: in queste condizioni il vortice è quindi libero di migrare da una configurazione ad un'altra con un dispendio di energia trascurabile. Conclusero quindi che, dove la lunghezza di coerenza del superfluido risulta maggiore del raggio di Wigner-Seitz, l'energia di pinning per unità di lunghezza sarà sufficientemente piccola da essere considerata nulla

$$\xi > R_{ws} \longrightarrow E \approx 0 \quad (6.6)$$

Il concetto di superweak pinning venne esteso da Jones tredici anni più tardi [33]. Questi osservò che, contrariamente all'implicita supposizione utilizzata nei calcoli fino ad allora svolti, i vortici non risultano necessariamente paralleli all'allineamento reticolare (Fig 6.5). Studiando poi le configurazioni in cui il vortice forma un angolo generico con una delle direzioni preferenziali del reticolo, ricavò che le orientazioni in cui risulta possibile trovare una condizione in cui non saranno presenti siti di pinning, dove quindi ci si può ricondurre alla condizione proposta dalle precedenti teorie, sono un numero molto limitato e che quindi in generale si avrà sempre una condizione di superweak pinning. In queste condizioni l'energia di legame tra il vortice ed il reticolo per una data orientazione risulta quindi pari alla differenza tra la massima e la minima energia delle possibili configurazioni e, di conseguenza, proporzionale alla differenza tra il massimo ed il minimo numero di siti di pinning ottenibile con quella data orientazione

$$E = E_{max} - E_{min} \propto N_{max} - N_{min} \quad (6.7)$$

Nello stesso articolo Jones studia poi qualitativamente quanto deve essere questo numero di siti di pinning nelle varie configurazioni e giunge infine ad ipotizzare che se si prende un vortice sufficientemente lungo si avranno un numero molto limitato di orientazioni particolarmente simmetriche in cui l'energia di legame risulta apprezzabile, mentre per tutte le altre orientazioni si avranno invece condizioni in cui il numero di siti di pinning risulta approssimativamente lo stesso ( $N_{max} \sim N_{min}$ ) e, di conseguenza, l'energia di legame (6.7) risulta nulla

$$E \propto N_{max} - N_{min} \sim 0 \quad (6.8)$$

Jones conclude quindi ipotizzando che, per vortici sufficientemente lunghi, se si mediasse l'energia di legame su tutte le possibili orientazioni, questa risulterebbe sufficientemente piccola da poter considerare il vortice sempre come libero. In queste condizioni verrebbe, però, a cadere il principio su cui si basa il modello a vortici che non avrebbe quindi più ragione di esistere.

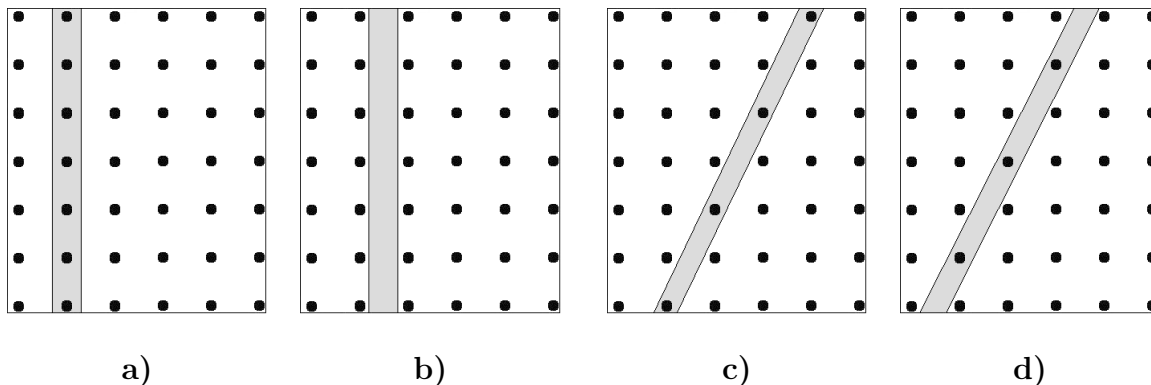


Figura 6.5: **Estensione di Jones al superweak pinning.** In figura *a* e *b* è rappresentato un vortice orientato secondo una direzione preferenziale del reticolo, come considerato nelle teorie precedenti quella di Jones. In figura *c* e *d* è rappresentato invece un vortice con un'orientazione casuale rispetto al reticolo.

## 6.3 Modello studiato

Le conclusioni tratte da Alpar [3] e Jones [33] sono però solamente ipotesi formulate tramite un'analisi qualitativa delle condizioni di legame e non sono quindi finora state verificate da uno studio quantitativo.

Ciò che ci proponiamo di fare in questo lavoro è appunto uno studio quantitativo delle condizioni di legame tra vortice e reticolo, svolto tramite una simulazione numerica realistica per contare i nuclei contenuti in un cilindro di raggio pari alla lunghezza di coerenza superfluida ( $\xi$ ) e lunghezza  $L$ , che rappresenta il vortice. Il fine ultimo di questo studio sarà quindi il calcolo della forza di legame per unità di lunghezza tra vortice e reticolo, grandezza che potrà essere applicata in un eventuale studio della dinamica dei vortici nei pulsar glitches.

Questo studio permetterà, inoltre, di confermare, o confutare, le ipotesi avanzate da Alpar e Jones. Qualunque sia il risultato però, cioè che le ipotesi siano confermate o confutate, il lavoro fatto rimane comunque di massima importanza in quanto grazie ad essi si è compreso che per lo studio del legame tra vortice e reticolo non è sufficiente considerare solamente la semplice configurazione di vortice stretto e allineato col reticolo (Fig. 6.5a e 6.5b). In generale, infatti, come proposto da Alpar e Jones, a causa di una grande lunghezza di coerenza (Fig. 6.4) o di una diversa orientazione del vortice rispetto al reticolo (Fig 6.5c e 6.5d), non si potrà avere una situazione di vortice totalmente libero e, di conseguenza, l'energia necessaria a rompere il legame sarà data dalla differenza tra l'energia di legame delle diverse configurazioni (6.7).

### 6.3.1 Studio della lunghezza del vortice

L'idea principale su cui nasce il modello proposto si pone in contrapposizione con le ipotesi formulate da Jones in [33]. Questi nel suo studio considerava infatti un vortice rettilineo non deformabile, senza quindi una curvatura apprezzabile, condizione non compatibile con l'utilizzo di un vortice di lunghezza molto elevata in quanto, nonostante i vortici siano caratterizzati da una grande rigidità, vi dovrà essere un limite di lunghezza oltre il quale la curvatura del vortice non potrà più essere trascurabile. Nel calcolo delle condizioni di legame tra vortice e reticolo, che presuppone un vortice



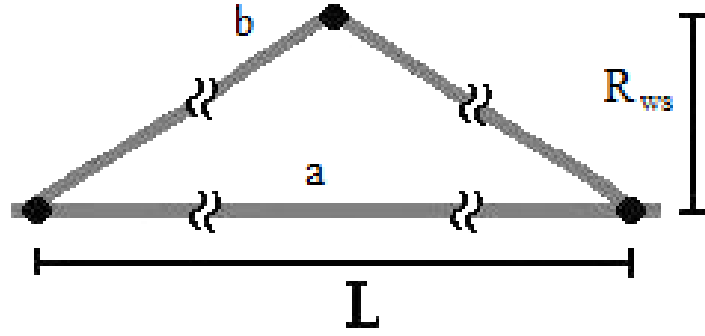


Figura 6.6: **Deformazione del vortice.** In figura sono rappresentate le due condizioni ipotizzate nel calcolo della lunghezza limite del vortice non deformabile. Il cammino  $a$  rappresenta un vortice non deformato, mentre il cammino  $b$  è il modello di un vortice deformato al fine di aggiungere un nucleo al legame col reticolo.

rettilineo, devono quindi essere considerate regioni di vortice di lunghezza tale da poterle considerare non deformabili: lo studio dei fenomeni macroscopici, in cui è necessario considerare il vortice nella sua interezza, deve quindi essere svolto dividendo il vortice stesso in regioni di lunghezza limitata.

Il calcolo del massimo valore ottenibile per la lunghezza di un vortice che può essere ancora considerato come non deformabile viene svolto tramite un diverso approccio al problema: studiando, invece che la massima lunghezza per un vortice non deformabile, la minima lunghezza per cui il vortice può aver una deformazione apprezzabile, calcolo che risulta, oltre che del tutto analogo, anche più semplice. Questo studio viene svolto ipotizzando che le deformazioni possano essere solamente dovute all'interazione di pinning con nuclei che altrimenti non contribuirebbero al legame: la deformazione potrà quindi avvenire se il guadagno energetico derivante dal legame con un nucleo in più sarà maggiore della spesa necessaria alla deformazione

$$E_p > \Sigma \Delta L \quad (6.9)$$

dove  $E_p$  è l'energia di pinning per sito,  $\Sigma$  è la Self Energy, che rappresenta l'energia per unità di lunghezza del vortice, e  $\Delta L$  è l'allungamento del vortice necessario per legare il nucleo in questione.

L'allungamento  $\Delta L$  è studiato confrontando le due situazioni estreme: quella di vortice rettilineo (Fig. 6.6a) e quella di vortice deformato per catturare un nucleo posto ad una distanza da esso pari al raggio della cella di Wigner-Seitz (Fig. 6.6b). L'allungamento del vortice necessario per passare da una condizione all'altra risulta essere pari alla differenza tra la lunghezza del vortice nelle due configurazioni

$$\Delta L = 2\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + R_{ws}^2} - L = L \left( \sqrt{1 + \left(\frac{2R_{ws}}{L}\right)^2} - 1 \right)$$

dove  $L$  è la lunghezza del vortice. Sviluppando ora la radice come

$$\sqrt{1 + x^2} \simeq 1 + \frac{1}{2}x^2$$

è possibile ricavare

$$\Delta L \simeq L \frac{1}{2} \frac{4R_{ws}^2}{L^2} = 2 \frac{R_{ws}^2}{L}$$

che sostituito nella (6.9) permette di ricavare

$$\Sigma \Delta L \simeq 2\Sigma \frac{R_{ws}^2}{L} < E_p$$

da cui

$$\frac{L}{R_{ws}} > 2 \frac{\Sigma R_{ws}}{E_p} \sim 2 \frac{2 \frac{10^{14} \text{ MeV}}{10^{13} \text{ fm}} 3 \cdot 10^1 \text{ fm}}{1 \text{ MeV}} \sim 10^3 \quad (6.10)$$

Il valore utilizzato per la Self Energy ( $\Sigma \sim 2 \cdot 10^{14} \text{ MeV cm}^{-1}$ ) è ricavato da [31], mentre i valori approssimati di  $R_{ws}$  ed  $E_p$  sono ricavati da [41] e [47].

Questo studio non è supposto essere un calcolo esatto della lunghezza minima di un vortice deformabile (o analogamente della lunghezza massima di un vortice rigido) in quanto il modello costruito descrive solamente una situazione semplificata e ideale, inoltre i valori utilizzati sono solamente approssimazioni delle grandezze calcolate. Nonostante questo, il valore ricavato dà importanti informazioni sull'ordine di grandezza di questa lunghezza massima. Da questo risultato infatti è possibile determinare che il valore massimo della lunghezza del vortice perché questo sia considerato non deformabile risulta essere dell'ordine di grandezza dei  $10^3 R_{ws}$ , valore che risulta molto inferiore alle dimensioni della stella, da cui si ricava che il vortice non potrà essere studiato nella sua interezza, come invece ipotizzato da Jones in [33].

Per avere uno studio completo è quindi necessario svolgere il calcolo diverse volte variando sempre la lunghezza del vortice, così da coprire un range di valori attorno a quello calcolato come massimo ( $100 R_{ws} \leq L \leq 3000 R_{ws}$ ): vortici di lunghezza  $L = 100 R_{ws}$ ,  $L = 200 R_{ws}$ ,  $L = 500 R_{ws}$  ed  $L = 1000 R_{ws}$  sono stati studiati in modo esatto, mentre vortici di lunghezza  $L = 1500 R_{ws}$ ,  $L = 2000 R_{ws}$  e  $L = 3000 R_{ws}$  sono stati studiati in modo approssimato, in quanto uno studio esatto di vortici di tale lunghezza richiederebbe un tempo di calcolo eccessivo. La lunghezza dei vortici studiati è data in unità del raggio di Wigner-Seitz al fine di ottenere un modello adimensionale.

### 6.3.2 Energia di dislocazione del nucleo

Altro importante concetto che è necessario introdurre in un modello quantitativo come quello che si ha intenzione di costruire è la possibile dislocazione dei nuclei. Questo importante fenomeno, come accennato nel paragrafo ad essi dedicato (Par. 6.2), è già stato trattato nei modelli precedenti [2] ma solamente in modo qualitativo: ipotizzando cioè che fosse possibile spostare i nuclei dalla loro posizione di equilibrio all'interno del reticolo solamente nelle zone della stella caratterizzate da una forza di pinning molto intensa, senza però dare una descrizione quantitativa del processo di dislocazione.

Ciò che ci proponiamo di introdurre in questo modello di legame tra vortice e reticolo è invece una trattazione quantitativa del fenomeno: calcolando quindi esplicitamente l'energia necessaria a spostare un nucleo dalla sua posizione di equilibrio e, qualora questo risulti possibile, analizzando quantitativamente come questo fenomeno possa influenzare il legame studiato.

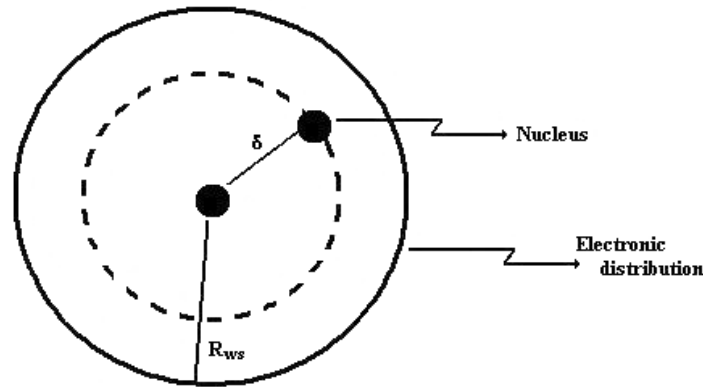


Figura 6.7: **Dislocazione del nucleo.** È qui raffigurata la cella di Wigner-Seitz come considerata nel calcolo dell'energia di dislocazione del nucleo. Questa è formata da una distribuzione elettronica omogenea di forma sferica e raggio  $R_{ws}$ , al cui centro è posto un nucleo di carica  $Ze$ . Lo spostamento del nucleo di una distanza  $\delta$  impone una spesa energetica pari a  $E_d(\delta)$ .

Per fare ciò è stato innanzitutto calcolata l'energia necessaria a spostare un nucleo dalla sua posizione di equilibrio nel reticolo. Sfruttando l'approssimazione di Wigner-Seitz, che considera le celle che formano il reticolo come indipendenti, si può studiare quest'energia considerando solamente una singola cella: quindi formata da un nucleo circondato da una distribuzione elettronica omogenea avente forma sferica e con raggio pari al raggio di Wigner-Seitz (Fig. 6.7), i neutroni liberi non entrano nel calcolo in quanto di carica neutra. Ipotizziamo ora, come rappresentato in figura, di spostare il nucleo di una distanza pari a  $\delta$ , questo subirà quindi una forza di attrazione elettrostatica calcolabile tramite il teorema di Gauss, secondo cui il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa dipende solamente dalla carica elettrica contenuta al suo interno, che in unità del sistema *cgs*, si può scrivere come

$$\Phi(E) = 4\pi Q \quad (6.11)$$

dove  $\Phi(E)$  è il flusso del campo elettrico  $E$  attraverso la superficie considerata e  $Q$  è la carica contenuta al suo interno.

Considerando come superficie chiusa una sfera avente centro nella posizione di equilibrio del nucleo all'interno del reticolo e raggio pari alla dislocazione  $\delta$ , la carica in esso contenuta risulta essere pari a

$$Q(\delta) = Ze \frac{\delta^3}{R_{ws}^3} \quad (6.12)$$

dove  $Ze$  è la carica del nucleo, che corrisponde alla carica totale contenuta nella distribuzione elettronica, mentre  $\frac{\delta^3}{R_{ws}^3}$  è il rapporto tra il volume le cui cariche contenute contribuiscono all'interazione ed il volume occupato dalla distribuzione di carica.

Ponendo quindi la carica calcolata in (6.12) nell'equazione data dal teorema di Gauss (6.11) si ottiene un campo elettrico pari a

$$E = \frac{Ze}{R_{ws}^3} \delta$$

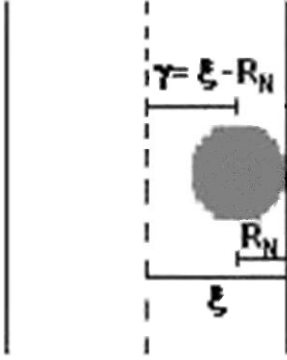


Figura 6.8: **Condizione di pinning.** Un nucleo risulta legato al vortice se si trova completamente al suo interno. In figura mostrato che questa condizione è descritta dal fatto che la distanza tra il suo punto centrale e l'asse di rotazione del vortice deve essere minore o uguale a  $\gamma = \xi - R_N$ .

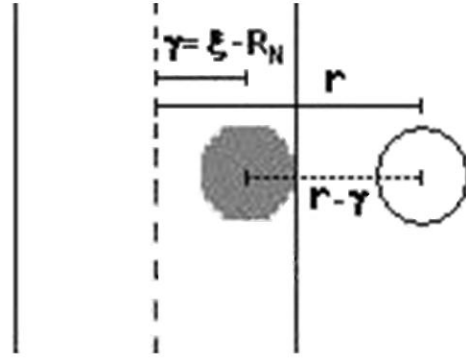


Figura 6.9: **Cattura di un nucleo.** Perché un nucleo contribuisca al legame tra vortice e reticolo è necessario portarlo all'interno della regione di pinning. In figura è mostrato che lo spazio di cui si deve spostare un vortice la cui posizione di equilibrio nel reticolo è a distanza  $r$  dall'asse di rotazione del vortice è  $r - \gamma$ .

e di conseguenza una forza di attrazione pari a

$$F = \frac{Z^2 e^2}{R_{ws}^3} \delta$$

Per calcolare infine l'energia necessaria a spostare il nucleo dalla sua posizione di equilibrio nel reticolo di una distanza pari a  $\delta$  è infine sufficiente integrare questa forza lungo il cammino, trovando che l'energia spesa nella dislocazione del nucleo diventa pari a

$$E_d(\delta) = \frac{Z^2 e^2}{2R_{ws}^3} \delta^2 \quad (6.13)$$

dove tutte le grandezze considerate sono espresse ancora in unità di misura del sistema *cgs*.

### 6.3.3 Energia di legame in condizione di nuclear pinning

Dopo aver calcolato l'energia necessaria a dislocare un nucleo dalla sua posizione di equilibrio nel reticolo, al fine di calcolare l'energia di legame, risulta ora fondamentale studiare di quanto è necessario spostare il nucleo stesso per poterlo considerare legato al vortice.

Uno studio accurato delle esatte condizioni in cui questo legame può avvenire non è possibile in quanto non è possibile effettuare osservazioni in tal senso. Per studiare questo tipo di interazione è quindi necessario fare un'ipotesi sulle condizioni di pinning del nucleo. In questo lavoro si ipotizza che questo risulti catturato quando si trova totalmente all'interno del vortice (Regione di Pinning): quindi, avendo il vortice raggio  $\xi$ , ipotizziamo che il nucleo sarà legato se la distanza tra il centro del nucleo stesso e l'asse di rotazione del vortice è minore o uguale alla grandezza  $\gamma = \xi - R_N$ , dove  $R_N$  è il raggio del nucleo (Fig. 6.8). Un nucleo la cui posizione di equilibrio nel reticolo risulti essere a distanza  $r$  dall'asse di rotazione del vortice dovrà quindi

essere spostato di una distanza pari a  $r - \gamma$  al fine di portarlo all'interno della regione di pinning (Fig. 6.9). Utilizzando quindi l'espressione per l'energia di dislocazione calcolata in precedenza (6.13) l'energia spesa per tale cattura risulta quindi essere in valore assoluto pari a

$$E_l(r) = E_d(r - \gamma) = \frac{Z^2 e^2}{2R_{ws}^3} (r - \gamma)^2 \quad (6.14)$$

Un nucleo la cui posizione di equilibrio nel reticolo risulta già all'interno della regione di pinning ( $r < \gamma$ ) non necessita invece alcuna spesa energetica.

L'energia efficace che lega un nucleo al vortice risulta quindi uguale all'energia di pinning per sito ( $E_p$ ), propria della densità di materia presente in quella zona della stella, a cui viene sottratta l'energia spesa per portarlo nella regione di pinning (6.14)

$$E(r) = E_p - E_l(r) \quad (6.15)$$

dove  $E_p$  può essere considerata costante in quanto la distanza di cui è possibile spostare il nucleo dalla sua posizione di equilibrio non è tale da portare una variazione significativa della densità della materia e quindi dell'energia di pinning per sito.

Quello che si vuole calcolare in questo frangente, come già descritto, non è solamente l'energia dei siti di legame ma l'energia di legame per unità di lunghezza tra il vortice ed il reticolo nucleare presente, assumendo una distribuzione uniforme di nuclei (valida per vortici molto lunghi rispetto al passo reticolare). Per fare ciò è necessario unire tramite un integrale il contributo di tutti i nuclei che saranno legati ad un vortice di lunghezza  $L$

$$E = \int_0^\gamma E_p n_N 2\pi r dr + \int_\gamma^{\gamma+r_0} [E_p - E_l(r)] n_N 2\pi r dr \quad (6.16)$$

dove il primo termine descrive il contributo di tutti i nuclei la cui posizione di equilibrio nel reticolo è già all'interno della regione di pinning e non è quindi necessaria alcuna spesa energetica per creare il legame, mentre il secondo termine descrive invece il contributo dei nuclei che devono essere portati in questa regione, di conseguenza il loro contributo energetico diminuisce all'aumentare dell'energia spesa nel dislocarli dalla loro posizione di equilibrio nel reticolo.  $n_N$  è la densità di nuclei presente ed  $r_0$  è la massima distanza cui un vortice può essere portato dalla sua posizione di equilibrio nel reticolo.

Il valore di  $r_0$  è ricavabile tramite semplici considerazioni energetiche. Infatti l'unica energia che è possibile spendere nella dislocazione del nucleo è quella di pinning, per cui la massima distanza a cui si può portare un nucleo dalla sua posizione di equilibrio nel reticolo non può essere altro che quella per cui viene spesa tutta l'energia di pinning per sito disponibile

$$E_p = E_d(r_0) = \frac{Z^2 e^2}{2R_{ws}^3} r_0^2$$

dove il valore di  $E_d(r_0)$  è dato dalla (6.13). Con un semplice calcolo algebrico è quindi possibile ricavare

$$r_0 = \sqrt{\frac{2|E_p|R_{ws}^3}{Z^2 e^2}} \quad (6.17)$$

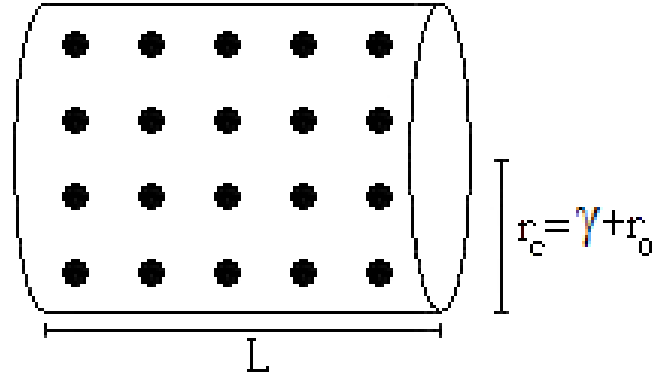


Figura 6.10: **Densità di nuclei.** In figura è rappresentata la regione in cui è possibile catturare nuclei. Questa è formata da un cilindro centrato sull'asse di rotazione del vortice. L'altezza è presa pari alla massima lunghezza di un vortice non deformabile ( $L$ ), in quanto il calcolo è fatto su questa porzione significativa di vortice presa nella sua interezza. La base è invece formata da un cerchio con un raggio pari al raggio di cattura:  $r_c = \gamma + r_0$ .

dove si è considerato il valore assoluto dell'energia di pinning per sito in modo da poter utilizzare questa definizione anche in condizione di interstitial pinning, dove quest'energia è negativa.

È però ora importante considerare che perché il calcolo dell'energia di dislocazione del nucleo (6.13) sia consistente con la configurazione di legame ricavata, risulta necessario che la distanza  $r_0$  sia strettamente minore del raggio della cella di Wigner-Seitz ( $R_{ws}$ ): in caso contrario il vortice potrebbe catturare anche nuclei delle celle contigue, tali nuclei interagirebbero con gli elettroni presenti in nelle celle oltrepassate e l'approssimazione di Wigner-Seitz, che considera le celle come indipendenti, non potrebbe più essere utilizzata. Fortunatamente nella crosta interna delle stelle di neutroni questa condizione è sempre rispettata (Tab. 6.3)

Più complicato è lo studio della densità di nuclei presente nella regione considerata. Questa si studia infatti dividendo il numero di siti che è possibile legare al vortice per il volume in cui questi possono essere catturati. Considerando quindi che il volume in cui il vortice può effettuare la cattura di nuclei è dato dal cilindro avente raggio di base la massima distanza cui può catturare un nucleo, Raggio di Cattura ( $r_c = \gamma + r_0$ ), ed altezza pari alla massima lunghezza di un vortice non deformabile ( $L$ ), è possibile calcolare la densità di nuclei come

$$n_N = \frac{N_N}{L\pi r_c^2} = \frac{N_N}{L\pi(\gamma + r_0)^2} \quad (6.18)$$

dove  $\pi(\gamma + r_0)^2$  è l'area di base del cilindro (Fig 6.10) e  $N_N$  è appunto il numero di nuclei trovato in tale volume. Quest'ultima grandezza in generale dipenderà sia dalle condizioni fisiche della materia presente (principalmente tramite la lunghezza di coerenza del superfluido, l'energia di pinning per sito ed il passo reticolare, che a loro volta dipenderanno dalla densità della materia presente), sia dall'orientamento che il vortice avrà rispetto al reticolo stesso: in termini matematici

$$N_N = N_N(\rho, \theta, \varphi)$$

dove  $\rho$  è la densità della materia presente e  $\theta$  e  $\varphi$  rappresentano l'inclinazione del vortice in un sistema di riferimento polare, che è stato posto per semplicità in modo

che le coordinate di un vortice orientato secondo una delle direzioni preferenziali del reticolo (Fig. 6.5a) assumano il valore  $(\theta, \varphi) = (0, 0)$ .

Un'ulteriore commento merita inoltre la scelta dell'altezza del cilindro utilizzato nel calcolo. Questo cilindro è infatti stato scelto con altezza pari ad  $L$ , invece che unitaria, in quanto vi è una dipendenza significativa rispetto alla lunghezza del vortice su cui vengono svolti i calcoli, di conseguenza la porzione di vortice non deformabile deve essere studiata nella sua interezza per ottenere risultati accettabili.

Utilizzando il valore ricavato per queste due grandezze (6.17)(6.18) è possibile sviluppare il calcolo dell'integrale (6.16) e ricavare quindi una comoda formulazione dell'energia di legame per unità di lunghezza tra il vortice ed il reticolo

$$\begin{aligned}
E &= \int_0^\gamma E_p n_N 2\pi r dr + \int_\gamma^{\gamma+r_0} [E_p - E_l(r)] n_N 2\pi r dr = \\
&= \int_0^\gamma E_p n_N 2\pi r dr + \int_\gamma^{\gamma+r_0} E_p n_N 2\pi r dr - \int_\gamma^{\gamma+r_0} E_l(r) n_N 2\pi r dr = \\
&= \int_0^{\gamma+r_0} E_p n_N 2\pi r dr - \int_\gamma^{\gamma+r_0} E_l(r) n_N 2\pi r dr = \\
&= 2\pi \frac{N_N}{L\pi(\gamma+r_0)^2} \left[ E_p \int_0^{\gamma+r_0} r dr - \frac{E_p}{r_0^2} \int_\gamma^{\gamma+r_0} (r-\gamma)^2 r dr \right]
\end{aligned}$$

dove si è sostituito a  $n_N$  il suo valore calcolato in (6.18) e si sono sfruttate le definizioni di  $E_l(r)$  (6.14) e di  $r_0$  (6.17) per riscrivere l'energia di dislocazione come

$$E_l(r) = \frac{Z^2 e^2}{2R_{ws}^3} (r-\gamma)^2 = \frac{E_p}{r_0^2} (r-\gamma)^2 \quad (6.19)$$

Svolgendo quindi il calcolo di questi semplici integrali polinomiali si ricava infine che

$$E = \frac{N_N}{L} E_p \frac{\gamma^2 + \frac{4}{3}\gamma r_0 + \frac{r_0^2}{2}}{(\gamma+r_0)^2} = N E_{eff} \quad (6.20)$$

dove si sono definiti il numero di siti di pinning per unità di lunghezza  $N = \frac{N_N}{L}$ , valore che risulterà comodo per poter porre a confronto diverse regioni della stella, e l'Energia di Pinning Efficace

$$E_{eff} = E_p \frac{\gamma^2 + \frac{4}{3}\gamma r_0 + \frac{r_0^2}{2}}{(\gamma+r_0)^2} \quad (6.21)$$

che rappresenta il contributo che in media ogni nucleo porta all'energia di legame tra vortice e reticolo. Questa grandezza risulta inoltre molto importante in quanto dipende solamente dalle condizioni fisiche della materia presente, le quali dipendono a loro volta solamente dalla densità ( $E_{eff} = E_{eff}(\rho)$ ), e non dall'orientazione che il vortice studiato ha rispetto al reticolo nucleare, dipendenza che sarà data quindi solamente dal valore del numero di siti di legame per unità di lunghezza  $N$ .

### 6.3.4 Collective pinning

Nel capitolo precedente è stata studiata l'energia di legame per unità di lunghezza tra vortice e reticolo (6.20). Questa rappresenta però l'energia che bisogna fornire al vortice per rompere il legame col reticolo (Energia di Depinning) solamente nella configurazione più semplice: quella di vortice orientato secondo una direzione preferenziale del reticolo dove risulta o legato con intensità massima (Fig. 6.5a) o completamente libero (6.5b).

In generale il vortice si trova, però, in una condizione chiamata Collective Pinning, in cui l'energia di legame col reticolo sarà compresa tra un valore massimo, corrispondente al massimo numero di siti di legame, e un valore minimo, corrispondente al minimo numero di siti di legame, che non risulterà però necessariamente nullo (Fig. 6.4, 6.5c e 6.5d). In questa situazione, analogamente al caso più semplice, il vortice tenderà a legarsi al reticolo nella condizione di massimo legame e potrà quindi considerarsi libero quando avrà energia sufficiente a portarsi nella condizione di minimo legame, in quanto grazie a tale energia gli risulteranno permesse anche tutte le configurazioni caratterizzate da energia di legame intermedia.

In una condizione di questo tipo l'energia per unità di lunghezza necessaria a rompere il legame col reticolo sarebbe notevolmente inferiore all'energia di legame (6.20) in quanto questa è calcolata per permettere la rottura di tutti i siti di legame, mentre per liberare il vortice risulta sufficiente rompere un numero di legami tale da portarlo dalla configurazione di massimo a quella di minimo legame ottenibili traslando il vortice perpendicolarmente alla sua lunghezza, in quanto questo sarà spinto dalla sola Forza di Magnus, che agisce appunto secondo tale direzione. Quest'energia è calcolabile a partire dall'energia di legame del vortice (6.20) come

$$\Delta E = E_{max} - E_{min} = (N_{max} - N_{min})E_{eff} = \Delta N E_{eff}$$

dove  $\Delta N = N_{max} - N_{min}$  è il numero di siti di legame per unità di lunghezza che deve essere rotto al fine di rendere il vortice libero di migrare ed è chiamato Numero di siti di Depinning.

Risulta inoltre, come precedentemente spiegato, che il numero di siti di legame tra vortice e reticolo, e quindi l'energia di legame, avrà una forte dipendenza anche dall'orientazione del vortice rispetto al reticolo stesso. Considerando quindi il sistema di riferimento polare già descritto in precedenza (dove si è posto per semplicità che una delle direzioni preferenziali del reticolo assuma il valore  $(\theta, \varphi) = (0, 0)$ ), si ricava che l'energia di legame avrà una dipendenza angolare definita come

$$E = E(\theta, \varphi) = N(\theta, \varphi)E_{eff}$$

dove si è sfruttata la principale proprietà dell'energia di pinning efficace (6.21), ovvero il fatto che questa risulta dipendente solamente dalle caratteristiche fisiche della materia presente e non dalla posizione del vortice rispetto al reticolo. L'energia di depinning sarà quindi pari a

$$\Delta E(\theta, \varphi) = \Delta N(\theta, \varphi)E_{eff} \quad (6.22)$$

dove

$$\Delta N(\theta, \varphi) = N_{max}(\theta, \varphi) - N_{min}(\theta, \varphi) \quad (6.23)$$



Questa dipendenza dell'energia rispetto all'orientamento del vortice col reticolo porta però alcuni problemi riguardo al suo utilizzo nello studio di processi fisici, quali per esempio il fenomeno dei pulsar glitches che è il fine ultimo del nostro studio. Il problema principale risiede nel fatto che all'interno della crosta della stella non è possibile definire l'orientazione dei vari vortici rispetto al reticolo, innanzitutto perché non è possibile effettuare osservazioni dirette dell'interno delle stelle di neutroni, poi perché il numero di vortici che prendono parte al processo è talmente elevato che risulta impensabile definire ognuno di essi con la sua orientazione, infine l'orientazione del vortice rispetto al reticolo non può essere la stessa per tutta la sua lunghezza. Oltre che alla curvatura del vortice, questo è dovuto al fatto che il reticolo non risulta essere regolare in tutta la crosta della stella: in generale si pensa che questo sia regolare a blocchi mesoscopici, ovvero che sia formato da porzioni regolari di reticolo contenenti un numero elevatissimo di celle di Wigner-Seitz ( $10^5 - 10^7$ ), ma in ogni caso di dimensioni non confrontabili con quelle della crosta delle stelle di neutroni [32].

Per questa ragione il reticolo risulta perfettamente regolare su scala microscopica, per cui i calcoli effettuati risultano consistenti, ma non può essere considerato tale su scala macroscopica, quindi su distanze paragonabili con la lunghezza media di un vortice. L'orientazione del vortice rispetto al reticolo varierà quindi notevolmente nella sua lunghezza e, di conseguenza, il calcolo dell'energia di depinning dell'intero vortice può solamente essere svolto con un approccio statistico: studiando, quindi, l'energia media dei vortici posti nelle possibili orientazioni descritte dall'angolo solido e svolgendo poi lo studio dei fenomeni fisici considerando l'energia di depinning lungo tutto il vortice come pari a quest'energia media. L'energia del vortice preso nella sua interezza si potrà quindi calcolare come

$$E_T = \sum_i L(\rho_i) \langle \Delta E \rangle (\rho_i)$$

dove  $\rho_i$  è la densità delle regioni considerate,  $\langle \Delta E \rangle (\rho_i)$  è l'energia di depinning media per unità di lunghezza di ognuna di queste porzioni e dipende solamente dalla densità della materia presente, mentre la somma è fatta su tutte le porzioni di vortice considerate rettilinee, che quindi avranno tutte lunghezza pari alla massima lunghezza di un vortice perché questo sia considerato non deformabile ( $L(\rho_i)$ ), dipendente dalla densità della materia in quanto data in unità del raggio di Wigner-Seitz.

Resta quindi ora solamente da calcolare il valore di quest'energia di depinning media. Questo studio si effettua per ogni densità semplicemente tramite una media sull'angolo solido così come è classicamente calcolata

$$\langle \Delta E \rangle = \frac{\int \Delta E(\theta, \varphi) d\Omega}{\int d\Omega} = \frac{\int \Delta N(\theta, \varphi) d\Omega}{\int d\Omega} E_{eff} = \langle \Delta N \rangle E_{eff} \quad (6.24)$$

dove è stato definito il numero medio di siti di depinning come

$$\langle \Delta N \rangle = \frac{\int \Delta N(\theta, \varphi) d\Omega}{\int d\Omega} \quad (6.25)$$

Anche se non riportato esplicitamente tutte le grandezze dipenderanno dalla densità della materia presente.

### 6.3.5 Numero di siti di pinning

Il problema dello studio dell'energia di depinning del vortice si sposta quindi al problema del calcolo di qual è il numero medio di legami che risulta necessario rompere per portare il vortice dalla configurazione di massimo a quella di minimo legame, così che sia libero di migrare.

Per svolgere questo calcolo è necessario studiare la differenza tra il massimo e minimo numero di siti di legame che può avere il vortice col reticolo per un gran numero di orientazioni, così da poter calcolare numericamente la (6.25) con la maggiore accuratezza possibile.

Questo studio si svolge separatamente per ogni orientazione, contando qual è il numero di siti di legame che ha una regione di lunghezza  $L$  del vortice sia in una data configurazione, presa come iniziale, che in ogni altra possibile configurazione, ottenuta tramite una traslazione del vortice stesso in ogni direzione perpendicolare al suo asse. Non essendo un calcolo analitico non è stato ovviamente possibile considerare ogni possibile configurazione, in ogni caso il passo scelto ( $\delta r = 0.1 R_{ws}$ ) è sufficientemente ridotto da ottenere un risultato molto preciso.

Si divide poi il numero di siti trovato per la lunghezza  $L$  considerata, così da ottenere il numero di siti di legame per unità di lunghezza. La differenza tra il massimo ed il minimo numero di siti di legame ottenuto dà il numero di siti per unità di lunghezza che un vortice con tale orientazione deve rompere per risultare libero (6.23).

Prendiamo come esempio il caso più semplice: quello di un vortice orientato secondo una direzione caratteristica del reticolo (Fig. 6.5a e 6.5b). Si pone una regione di vortice di lunghezza  $L$  in una configurazione in cui il centro della base sia posto dove è presente un nucleo del reticolo (Fig. 6.11a) e si conta quanti nuclei sono presenti all'interno della regione di cattura del vortice. La dimensione dei nuclei è già stata considerata nel calcolo dell'energia di legame e questi devono quindi essere considerati come puntiformi. Si fanno effettuare poi al vortice tutte le possibili traslazioni nel piano perpendicolare all'asse del vortice stesso (Fig. 6.11b, 6.11c e 6.11d) ed in ogni configurazione trovata si svolge il calcolo fatto per la configurazione iniziale, ottenendo così il numero di siti di legame per unità di lunghezza di ogni possibile configurazione.

Descrivendo il piano delle traslazioni con un grafico cartesiano, come raffigurato in figura 6.11, è quindi possibile catalogare ogni configurazione ottenuta dalle suddette traslazioni tramite la coppia  $(dx, dy)$ , che descrive lo spostamento nel piano perpendicolare al suo asse che deve fare il vortice per ottenere tale configurazione. In tal modo risulta immediata la costruzione di un grafico raffigurante il numero di siti di legame ottenuto in ogni configurazione descritta appunto dalla traslazione  $(dx, dy)$  (Fig. 6.12, 6.13 e 6.15). Questo studio è svolto in una regione di forma quadrata (Quadrato di Depinning) le cui dimensioni sono state studiate in modo che i calcoli svolti risultino indipendenti dalla lunghezza del suo lato.

Questo tipo di grafico (Fig. 6.12, 6.13 e 6.15) risulta molto utile per studiare il legame tra il vortice ed il reticolo in modo qualitativo. Da questo studio è stato infatti possibile dedurre due importanti proprietà di questo legame. La prima, e più importante, riguarda il numero di siti di legame che è necessario rompere nel processo di depinning. In linea generale questo è stato descritto, per ogni orientazione, come

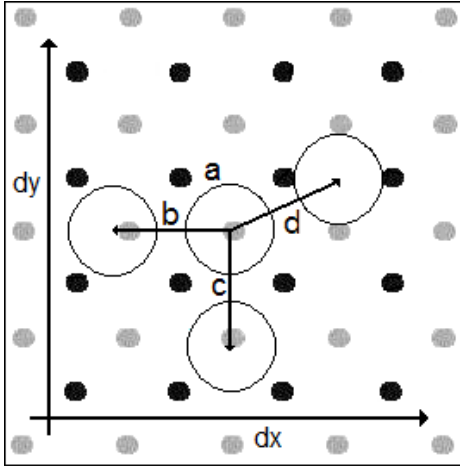


Figura 6.11: **Traslazioni di un vortice nel caso di un vortice allineato con una direzione preferenziale del reticolo.** Sono presentate tre possibili traslazioni della regione di cattura del vortice. Con  $a$  si è indicata la posizione iniziale del vortice mentre con  $b$ ,  $c$  e  $d$  si sono indicate rispettivamente le traslazioni orizzontale, verticale e di direzione generica. Ogni traslazione è caratterizzata da un preciso spostamento lungo  $dx$  e  $dy$  in modo da poter rappresentare i risultati su un grafico analogo a quello disegnato in figura.

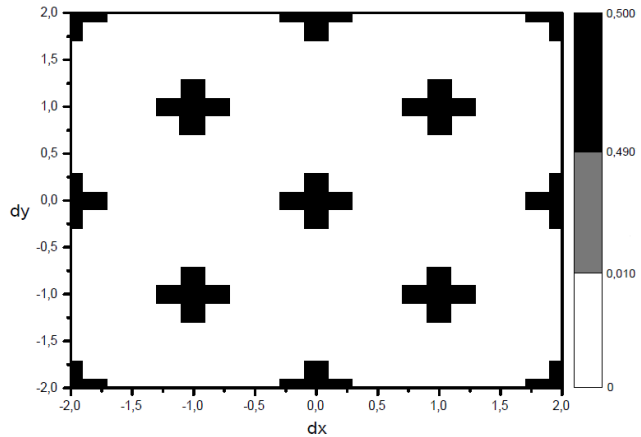


Figura 6.12: **Numero di siti di legame nel caso di un vortice allineato con una direzione preferenziale del reticolo.** È rappresentata la soluzione dello studio del numero di siti rispetto agli spostamenti lungo  $dx$  e  $dy$  per il caso preso come esempio: vortice orientato secondo una direzione preferenziale del reticolo. I colori rappresentano il numero di siti di pinning per unità di lunghezza secondo i valori indicati nella barra laterale, il nero rappresenta le situazioni di massimo legame mentre il bianco quella di minimo legame. Il grafico è stato fatto per un vortice di lunghezza  $L = 200 R_{ws}$  nella regione 3, per  $\beta = 1$ .

la differenza tra il massimo ed il minimo numero di siti di legame cui il vortice risulta legato al reticolo. Questo perché l'energia derivante dalla rottura di un tale numero di legami renderebbe al vortice accessibile ogni possibile configurazione, permettendogli di migrare. Analizzando però un gran numero di orientazioni casuali, di cui quelle presentate nelle figure 6.13 e 6.15 sono solo un esempio, è stato però possibile notare che per una generica orientazione le situazioni di minimo legame sono un numero talmente esiguo che il vortice potrà migrare attraverso la stella pur possedendo un'energia minore di quella inizialmente ipotizzata, semplicemente evitando tali configurazioni ad alta energia.

Grazie a questa considerazione si può quindi concludere che un vortice può essere libero di migrare anche se il numero di siti di legame col reticolo non risulta essere quello minimo riscontrato nell'orientazione studiata: è quindi necessario definire una grandezza  $N_{free}(\theta, \varphi)$  che rappresenta, per ogni orientazione, il massimo numero di siti di legame che un vortice può avere col reticolo per essere considerato libero. Il numero di siti di legame che è necessario rompere per rendere il vortice libero di migrare risulta quindi pari a

$$\Delta N(\theta, \varphi) = N_{bound}(\theta, \varphi) - N_{free}(\theta, \varphi)$$

dove  $N_{bound}(\theta, \varphi)$  rappresenta, per ogni orientazione, il numero di siti di legame di un vortice legato al reticolo e, come vedremo in seguito, risulta essere pari al massimo numero di siti di legame riscontrato per l'orientazione studiata ( $N_{bound}(\theta, \varphi) = N_{max}(\theta, \varphi)$ ) ed  $N_{free}(\theta, \varphi)$  è appunto il massimo numero di siti di legame che un

vortice può avere col reticolo per essere considerato libero di migrare e, come appena descritto, risulta essere maggiore o uguale al minimo numero di siti di legame riscontrato nell'orientazione studiata ( $N_{free}(\theta, \varphi) \geq N_{min}(\theta, \varphi)$ ).

Per comprendere meglio questo legame si sono poi analizzati i risultati ottenuti tramite la costruzione di istogrammi in cui viene rappresentato per ogni orientazione il numero di configurazioni caratterizzate da un determinato numero di siti di legame (Fig. 6.14 e 6.16). Grazie a questo tipo di grafico è stato possibile definire che per una generica orientazione, se si escludono i picchi nelle condizioni di massimo e minimo legame, il numero di siti di pinning tra vortice e reticolo segue una distribuzione simile ad una Gaussiana avente picco nella configurazione con numero di siti di legame medio. Da questa considerazione è quindi possibile assumere che la grande variabilità nel numero di siti di legame abbia un comportamento analogo a quello puramente statistico (descrivibile grossolanamente con una distribuzione Gaussiana) e che, quindi, un vortice avente energia sufficiente a raggiungere le configurazioni con numero di siti di legame pari a quello medio, avrà accesso approssimativamente alla metà delle configurazioni possibili, il che risulta sufficiente a permettergli la migrazione ( $N_{free} = N_{medio}$ ).

Questa condizione potrebbe però risultare troppo restrittiva in quanto al vortice potrebbe essere permesso di migrare anche con un minor numero di configurazioni accessibili, di conseguenza la condizione studiata ( $N_{free} = N_{medio}$ ) può essere considerata solamente come un limite inferiore al numero massimo di siti di legame che può avere un vortice libero di migrare: il che risulta comunque molto importante in quanto permette di imporre una prima restrizione ad  $N_{free}$

$$N_{free}(\theta, \varphi) \geq N_{medio}(\theta, \varphi)$$

Il risultato appena ottenuto è di fondamentale importanza in quanto la mancanza di precise informazioni sulle effettive condizioni di legame del vortice non permette di definire univocamente quando questo risulti effettivamente libero e, quindi, di calcolare l'esatto valore di  $N_{free}$ . Oltre ad un limite inferiore è però ora necessario imporre anche un limite superiore. Questo limite è studiato considerando ancora una volta il numero di siti di legame come soggetto ad una distribuzione Gaussiana e calcolandone la Deviazione Standard

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^A (N_i - N_{medio})^2}{A}} \quad (6.26)$$

dove  $A$  è il numero di configurazioni che formano la distribuzione (tutte quelle che non appartengono ai picchi nelle configurazioni di massimo e minimo legame), gli  $N_i$  sono il numero di siti di legame per unità di lunghezza di queste configurazioni e  $N_{medio}$  è ovviamente la loro media.

Questa grandezza, che nella Teoria degli Errori definisce l'incertezza con cui è possibile associare il valor medio al reale valore che si vuole misurare, descrive anche il range di valori all'interno dei quali si trova la parte significativa delle configurazioni che formano la distribuzione (circa il 68%). Seguendo questa seconda caratteristica della deviazione standard è quindi possibile assumere che le configurazioni che si trovano al di fuori di questa regione di valori siano in numero troppo limitato da permettere la migrazione di un vortice cui queste stesse configurazioni siano le sole accessibili.

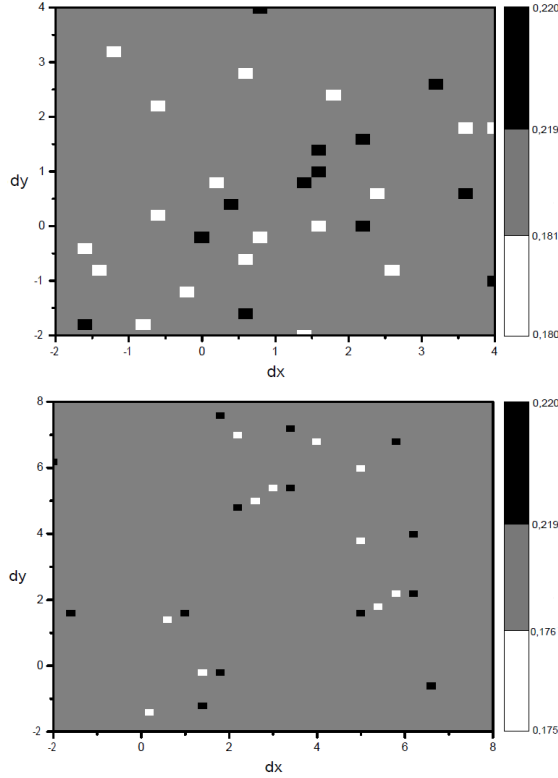


Figura 6.13: **Numero di siti di legame per unità di lunghezza di un'orientazione generica.** Si notano le poche configurazioni con numero di siti di legame minimo (in bianco) e massimo (in nero), le altre configurazioni hanno energia intermedia (in grigio). I grafici sono svolti nella regione 3, per un vortice di lunghezza  $L = 200 R_{ws}$ , con  $\beta = 3$ , mentre le orientazioni considerate sono  $(1.04, 0.52)$  e  $(0.90, 0.20)$ .

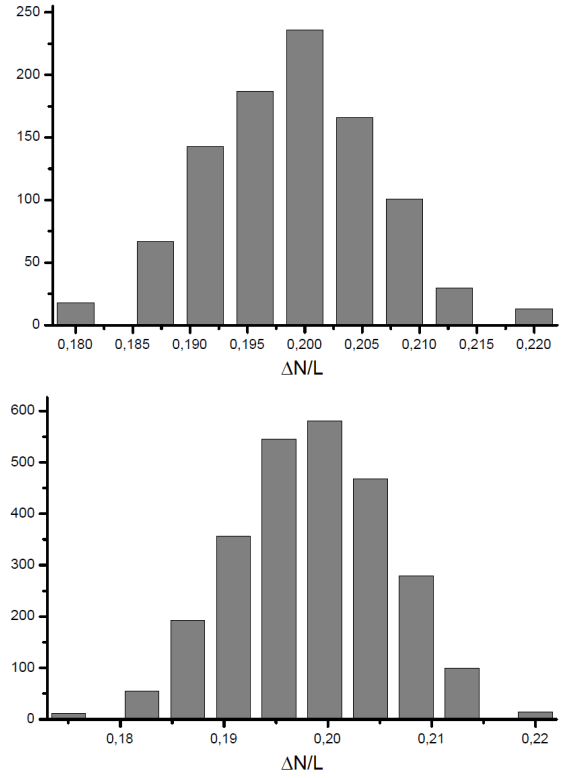


Figura 6.14: **Grafico a istogrammi per un'orientazione generica.** In figura è rappresentato il numero di configurazioni presenti in funzione del numero di siti di depinning che le caratterizzano per le stesse orientazioni utilizzate in figura 6.13, quindi  $(1.04, 0.52)$  e  $(0.90, 0.20)$ , per un vortice di lunghezza  $L = 200 R_{ws}$ , nella regione 3, con  $\beta = 3$ .

Risulta quindi possibile porre anche un limite superiore al massimo numero di siti di legame che permette la migrazione come quello tale da descrivere una configurazione al limite della regione significativa della distribuzione

$$N_{free}(\theta, \varphi) \leq N_{medio}(\theta, \varphi) + \sigma(\theta, \varphi)$$

Unendo le considerazioni fatte sul limite superiore ed inferiore è quindi possibile definire, per ogni data orientazione, che un vortice libero può avere al più un numero di siti di legame pari a  $N_{free}$ , dove

$$N_{medio}(\theta, \varphi) \leq N_{free}(\theta, \varphi) \leq N_{medio}(\theta, \varphi) + \sigma(\theta, \varphi) \quad (6.27)$$

Grande importanza ha inoltre il picco nella condizione di massimo legame che, come già accennato, è presente negli istogrammi studiati (Fig. 6.14 e 6.16). L'esistenza di questo picco, che non è possibile annettere nella distribuzione statistica appena descritta, permette di ipotizzare che per ogni orientazione esistono sempre alcune configurazioni, aventi un gran numero di siti di legame, che tenderanno a legare i vortici in quiete. Si presenta quindi una situazione analoga a quella di vortice

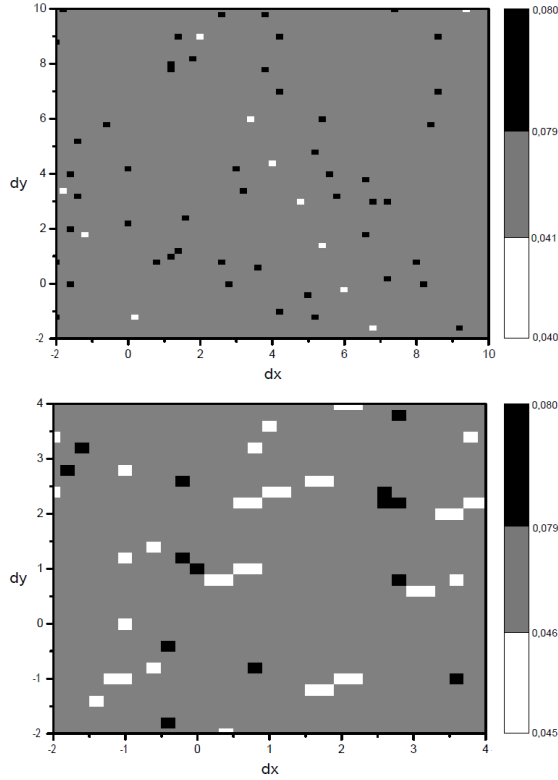


Figura 6.15: **Numero di siti di legame per unità di lunghezza di un'orientazione generica.** Si notano le poche configurazioni con numero di siti di legame minimo (in bianco) e massimo (in nero), le altre configurazioni hanno energia intermedia (in grigio). I grafici sono svolti nella regione 3, per un vortice di lunghezza  $L = 200 R_{ws}$ , con  $\beta = 1$ , mentre le orientazioni considerate sono  $(1.43, 1.00)$  e  $(0.90, 0.20)$ .

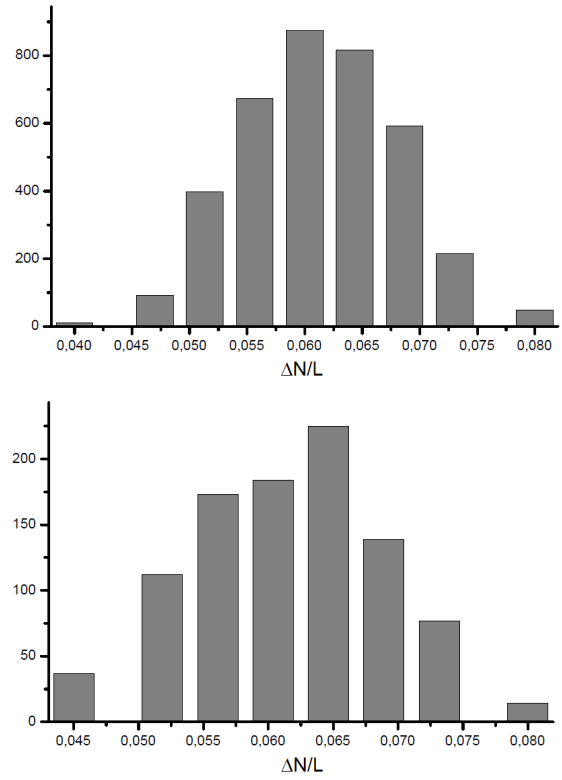


Figura 6.16: **Grafico a istogrammi per un'orientazione generica.** In figura è rappresentato il numero di configurazioni presenti in funzione del numero di siti di depinning che le caratterizzano per le stesse orientazioni utilizzate in figura 6.13, quindi  $(1.43, 1.00)$  e  $(0.68, 0.88)$ , per un vortice di lunghezza  $L = 200 R_{ws}$ , nella regione 3, con  $\beta = 1$ .

allineato col reticolo (Fig. 6.5a e 6.5b) dove sono presenti delle configurazioni che tendono a legare il vortice, quelle come già accennato caratterizzate dal numero di siti di legame massimo, ed altre configurazioni in cui il vortice può essere considerato libero di migrare, quelle aventi numero di siti di legame pari o inferiore a  $N_{free}$ : l'energia di depinning risulterà quindi essere l'energia necessaria a rompere un numero di siti di legame pari alla differenza tra quelli che caratterizzano queste due configurazioni limite ed il suo valore sarà quindi dato da una legge analoga alla (6.22), dove però il numero di siti di depinning è stato definito come

$$\Delta N(\theta, \varphi) = N_{max}(\theta, \varphi) - N_{free}(\theta, \varphi) \quad (6.28)$$

Tramite questo studio è, infine, stato possibile confermare l'esistenza di orientazioni preferenziali in cui la struttura delle configurazioni risulta molto simmetrica ed il numero di siti di depinning molto elevato. Queste configurazioni sono caratterizzate da particolari orientazioni che seguono una distribuzione specifica (Fig. 6.17) e risultano essere un numero molto esiguo, tale che la loro influenza sull'energia di depinning media (calcolata secondo la (6.24) in cui viene ora utilizzato il numero di siti di depinning dato dalla (6.28)) risulta molto limitata.

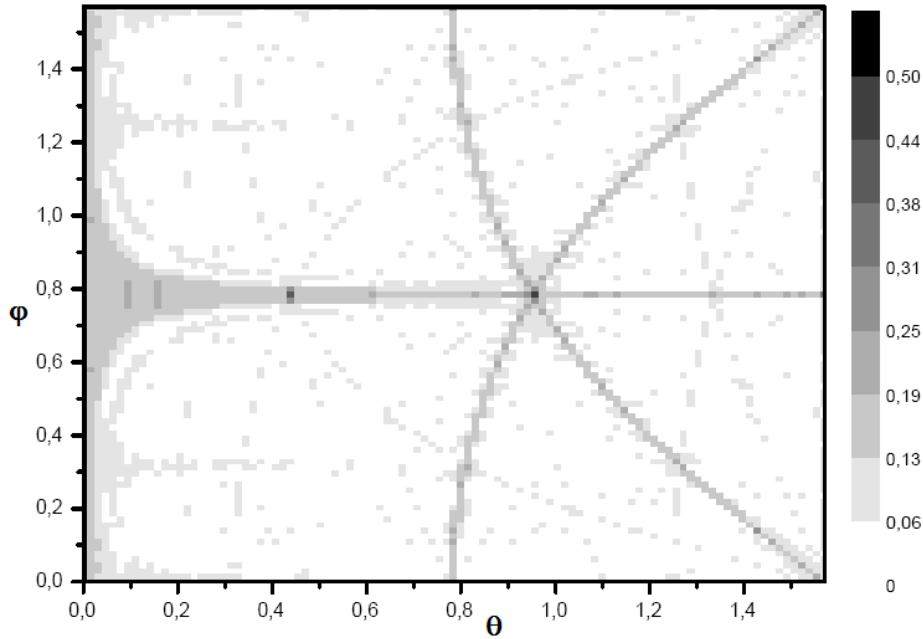


Figura 6.17: **Distribuzione**  $\Delta N(\theta, \varphi)$ . In figura è rappresentato il numero di siti di depinning per unità di lunghezza in funzione degli angoli polari  $\theta$  e  $\varphi$  per  $L = 100 R_{ws}$ . Le regioni più scure rappresentano le orientazioni caratterizzate da un maggior numero di siti di depinning.

### 6.3.6 Forza di pinning

Lo studio dell'energia di depinning risulta molto utile nel confronto coi modelli di pinning precedentemente studiati, ma non è sufficiente per lo studio dei pulsar glitches. Questo perché nello studio del depinning dei vortici, come già descritto, è necessario confrontare la forza di pinning con la forza di Magnus (6.2) e per fare questo confronto è quindi necessario calcolare, anziché l'energia, la forza di legame tra il vortice ed il reticolo per unità di lunghezza.

Questo studio si effettua sfruttando la relazione che classicamente lega forze ed energie

$$F = \frac{E}{d} \quad (6.29)$$

dove  $F$  ed  $E$  sono la forza e l'energia in questione, mentre  $d$  è lo spostamento effettuato dal corpo. Questa relazione è però valida solo nel caso di forza costante durante il tragitto, il che non è necessariamente vero nel caso specifico del depinning di un vortice, ma non essendo attualmente conosciuto l'andamento della forza di pinning in funzione della distanza tra vortice e nucleo, questa risulta essere un'approssimazione accettabile della forza media.

Avendo studiato accuratamente l'energia di depinning, l'unica incognita nel calcolo delle forze risulta essere quindi la distanza percorsa dal vortice nel processo di depinning. Lo studio è stato fatto in analogia col caso di vortice allineato al reticolo, in cui il processo di depinning consiste nello spostare il vortice dalla condizione di massimo legame, in corrispondenza di un nucleo (Fig. 6.5a e 6.18a), a quella di minimo legame, posta a metà tra due nuclei successivi (Fig. 6.5b e 6.18b). La distanza percorsa dal vortice in questo processo non è quindi altro che la semi distanza tra

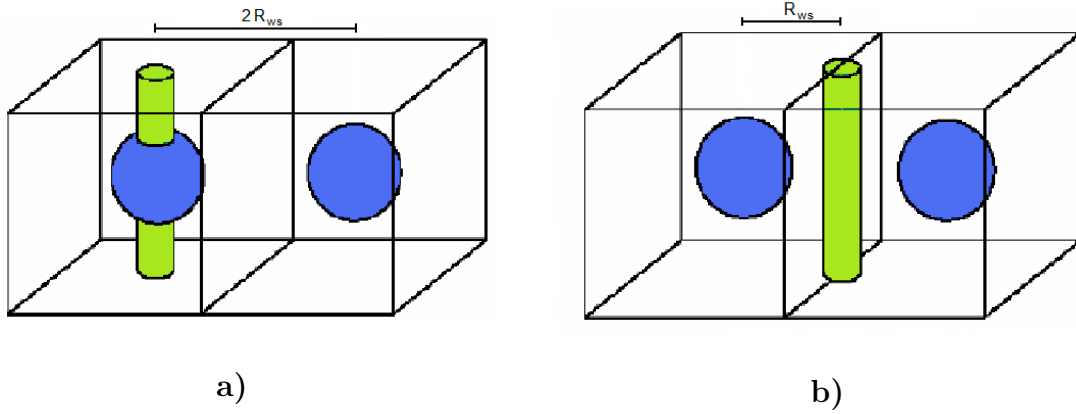


Figura 6.18: **Condizioni di vortice legato e libero nel caso di vortice allineato col reticolo.** Sono presentate le condizioni di vortice legato e libero per un vortice allineato col reticolo (Fig. 6.5a e 6.5b). Si evidenzia che in questo caso la distanza tra due massimi è pari al passo reticolare, ovvero il doppio del raggio di Wigner-Seitz (a), mentre la distanza percorsa dal vortice nel processo di depinning è pari a ad un raggio di Wigner-Seitz (b).

due siti di legame successivi, ovvero in questo semplice caso pari ad un raggio di Wigner-Seitz ( $d = R_{ws}$ ) (Fig. 6.18).

Il caso più generale risulta più complesso in quanto non è presente la grande regolarità riscontrata nella situazione appena descritta e non è quindi possibile definire univocamente la distanza percorsa dal vortice, che deve quindi essere studiata per ogni configurazione come distanza media. Questo calcolo è comunque possibile in quanto, come già descritto, anche in questo tipo di configurazione si riscontrano delle regioni di forte legame, rappresentate col colore nero nelle figure 6.13 e 6.15, e delle regioni in cui il vortice può essere considerato libero, quelle con numero di siti di legame minore o uguale a  $N_{free}$ . A partire dalla densità di questi massimi di legame

$$n_{max} = \frac{B}{A} = \frac{B}{l^2} \quad (6.30)$$

dove  $B$  è il numero di massimi calcolato nella regione di studio, il quadrato di depinning, di cui  $A = l^2$  è l'area ( $l$  è il lato), è quindi possibile definire la distanza media delle posizioni in cui il vortice risulta maggiormente legato semplicemente calcolando l'inverso della radice della densità di massimi calcolata in (6.30)

$$d_{max} = \frac{1}{\sqrt{n_{max}}} = \frac{l}{\sqrt{B}}$$

Ipotizzando quindi che in media la regione in cui il vortice può essere considerato libero si trovi a metà tra due massimi successivi è quindi possibile calcolare la distanza media che deve percorrere il vortice nel processo di depinning

$$d = \frac{1}{2}d_{max} = \frac{l}{2\sqrt{B}} \quad (6.31)$$

che in generale dipenderà dall'orientazione del vortice rispetto al reticolo ( $d = d(\theta, \varphi)$ ), e, utilizzandola quindi nella (6.29), calcolare la forza di pinning per unità di lunghezza, cui il vortice è legato al reticolo, per ogni possibile orientazione

$$F(\theta, \varphi) = \frac{\Delta E(\theta, \varphi)}{d(\theta, \varphi)} = \frac{\Delta N(\theta, \varphi)}{d(\theta, \varphi)} E_{eff} = \frac{2\Delta N(\theta, \varphi)\sqrt{B(\theta, \varphi)}}{l(\theta, \varphi)} E_{eff} \quad (6.32)$$



Come anche per l'energia di depinning non è possibile utilizzare direttamente in calcoli reali il valore della la forza di pinning dipendente dall'orientazione tra vortice e reticolo. Risulta quindi necessario anche in questo caso fare una media e considerare il legame di ogni vortice col reticolo come pari a quello medio, calcolato come

$$\langle F \rangle = \frac{\int F(\theta, \varphi) d\Omega}{\int d\Omega} = \frac{\int \frac{2\Delta N(\theta, \varphi) \sqrt{B(\theta, \varphi)}}{l(\theta, \varphi)} d\Omega}{\int d\Omega} E_{eff} = \left\langle \frac{\Delta N}{d} \right\rangle E_{eff} \quad (6.33)$$

dove

$$\left\langle \frac{\Delta N}{d} \right\rangle = \frac{\int \frac{2\Delta N(\theta, \varphi) \sqrt{B(\theta, \varphi)}}{l(\theta, \varphi)} d\Omega}{\int d\Omega} \quad (6.34)$$

### 6.3.7 Interstitial pinning

Tutti i calcoli svolti finora sono stati fatti ipotizzando di essere in condizione di nuclear pinning, ovvero di avere condizioni di densità tali che l'interazione di pinning presente tra vortice e reticolo sia attrattiva. Come descritto nel paragrafo 6.1, esistono però dei regimi di densità in cui questa interazione risulta repulsiva ( $E_p < 0$ ), dove è quindi presente una condizione di interstitial pinning. In questi casi il vortice tenderà quindi a posizionarsi nelle zone in cui il numero di siti di legame risulta minimo (quelle colorate di bianco nelle figure 6.13 e 6.15), dove, contrariamente a quanto ipotizzato nella teoria classica del modello a vortici, il vortice risulterà legato al reticolo con un'energia che può essere calcolata svolgendo un'integrazione analoga a quella fatta in condizioni di nuclear pinning (6.16). Ovviamente in questo caso le condizioni di legame sono differenti da quelle studiate precedentemente: infatti, mentre in quel caso l'interazione tendeva ad attirare i nuclei vicini all'interno del vortice, in questo caso tende a portare fuori quelli che si trovano all'interno. Risulta quindi necessario studiare questa nuova condizione in modo indipendente rispetto allo studio svolto nel caso di nuclear pinning.

Si deve quindi definire inizialmente, anche in condizione di interstitial pinning, la condizione di vortice libero, per cui si è assunto che il nucleo sia libero quando risulta essere totalmente all'esterno del vortice. Avendo quest'ultimo raggio  $\xi$ , si considera quindi il nucleo come non interagente quando la distanza tra il centro del nucleo stesso e l'asse di rotazione del vortice è maggiore o uguale a  $\gamma = \xi + R_N$  (Fig. 6.19).

Contrariamente al caso di nuclear pinning in cui la presenza del nucleo dà un contributo positivo all'energia di legame tra vortice e reticolo, nel caso di interstitial pinning si avrà un contributo nullo nel caso in cui il nucleo abbia posizione di equilibrio nel reticolo posta all'esterno del vortice ( $r > \gamma$ ) e un contributo negativo nel caso in cui questa posizione di equilibrio sia invece all'interno del vortice ( $r < \gamma$ ), in cui  $r$  è la distanza del nucleo nella sua posizione di equilibrio dall'asse del vortice (Fig. 6.20). In una configurazione di questo tipo i nuclei che prendono parte al legame sono tutti quelli la cui posizione di equilibrio è posta ad una distanza dall'asse del vortice minore o uguale a  $\gamma$ : la regione di cattura, dove sono contenuti i nuclei che contribuiscono al legame, avrà quindi area di base pari a  $\pi\gamma^2$ .

Nel caso in cui il nucleo contribuisca al legame è inoltre necessario distinguere due possibili situazioni: quella in cui la posizione di equilibrio del nucleo è posta ad una distanza dall'asse del vortice minore di  $\gamma - r_0$ , dove  $r_0$  è la massima distanza di cui

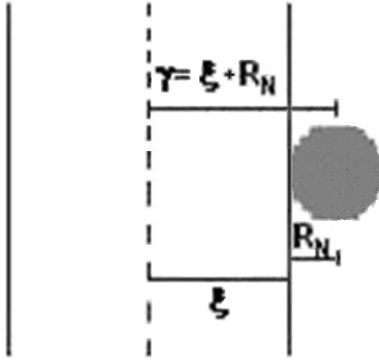


Figura 6.19: **Condizione di legame nel caso di interstitial pinning.** L'interazione tra vortice e nucleo risulta nulla se quest'ultimo si trova interamente all'esterno del vortice. In figura è mostrato che si ha questa condizione quando la distanza tra il centro del nucleo e l'asse di rotazione del vortice risulta maggiore o uguale a  $\gamma = \xi + R_N$

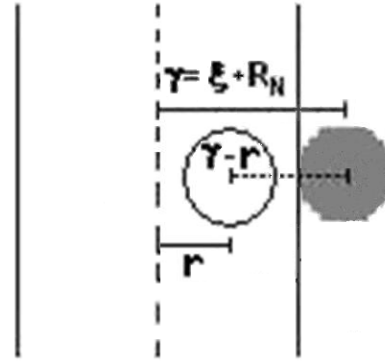


Figura 6.20: **Espulsione di un nucleo dal vortice nel caso di interstitial pinning.** In figura è mostrato che un nucleo la cui posizione di equilibrio nel reticolo si trova a distanza  $r$  dall'asse di rotazione del vortice deve essere spostato di una distanza pari a  $\gamma - r$  per portarlo al di fuori della regione di legame.

si può spostare un nucleo dalla sua posizione di equilibrio nel reticolo (6.17), e quella in cui invece è posta a distanza maggiore di  $\gamma - r_0$ . Mentre nel primo caso si ha che la repulsione tra vortice e nucleo non è sufficientemente intensa per portare il nucleo al di fuori del vortice stesso ed il contributo al legame sarà quindi pari all'energia di pinning per sito ( $E = E_p$ ), che risulta negativa, nel secondo caso la repulsione risulta invece sufficiente ad espellere il nucleo ed il suo contributo al legame risulta quindi pari all'energia che è necessario spendere nello spostamento ( $E = E_l(r) = \frac{E_p}{r_0^2}(\gamma - r)^2$ ), dove si sono sfruttate le relazioni (6.14), (6.17) e (6.19). Molto importante è inoltre notare che anche in quest'ultima condizione il contributo al legame risulta negativo in quanto negativa è l'energia di pinning per sito ( $E_p$ ).

Analogamente al caso di nuclear pinning è ora possibile calcolare qual'è l'effettiva energia di legame tra il vortice ed il reticolo tramite un doppio integrale

$$E = \int_0^{\gamma - r_0} E_p n_N 2\pi r dr + \int_{\gamma - r_0}^{\gamma} E_l(r) n_N 2\pi r dr \quad (6.35)$$

in cui nel primo termine si è sommato il contributo di tutti i nuclei che non è possibile espellere dal vortice, mentre nel secondo il contributo dei nuclei che invece sono stati espulsi.

Calcolando la densità di nuclei così come è stata calcolata in precedenza, ovvero dividendo il numero nuclei presente nella regione di cattura ( $N_N$ ) per il volume di questa stessa regione

$$n_N = \frac{N_N}{L\pi r_c^2} = \frac{N_N}{L\pi\gamma^2}$$

ed utilizzando il risultato ottenuto nell'integrale (6.35), è possibile ricavare anche in questo caso una comoda espressione per l'energia di legame

$$E = \frac{N_N}{L} E_p \frac{\gamma^2 - \frac{4}{3}\gamma r_0 + \frac{r_0^2}{2}}{\gamma^2} = N E_p \frac{\gamma^2 - \frac{4}{3}\gamma r_0 + \frac{r_0^2}{2}}{\gamma^2} \quad (6.36)$$

dove  $N = \frac{N_N}{L}$  è il numero di siti di pinning per unità di lunghezza e si riscontra un valore negativo in quanto negativa è l'energia di pinning per sito ( $E_p$ ).

Questo calcolo è però valido solamente nelle zone in cui  $\gamma - r_0 > 0$ . Dove questo non avviene l'integrale (6.35) non può essere svolto in quanto tutti i nuclei presenti nella regione di interesse contribuiranno al legame venendo espulsi dal vortice e non vi saranno quindi nuclei di legame effettivi. L'integrale (6.35) deve quindi essere sostituito con un'altro integrale che non considera questo tipo di legame

$$E = \int_0^\gamma E_l(r) n_N 2\pi r dr \quad (6.37)$$

il cui calcolo permette di determinare che nelle zone in cui  $\gamma < r_0$

$$E = \frac{N_N}{L} \frac{E_p \gamma^2}{6 r_0^2} = N \frac{E_p \gamma^2}{6 r_0^2}$$

L'energia di legame così calcolata risulta inoltre essere una funzione continua in quanto

$$\lim_{r_0 \rightarrow \gamma^+} E = \lim_{r_0 \rightarrow \gamma^-} E = N \frac{E_p}{6}$$

Come anche in precedenza l'energia di legame non descrive però l'energia che è necessario fornire al vortice per permettergli di migrare, in quanto in generale il vortice si trova in condizione di collective pinning e, come avveniva anche in regime di nuclear pinning, per rompere il legame col reticolo sarà sufficiente una minore energia, che viene chiamata anche in questo caso energia di depinning. Il calcolo di quest'energia è stato svolto in modo analogo a quanto fatto in precedenza, in quanto la condizione di interstitial pinning risulta essere del tutto analoga a quella di nuclear pinning, con la sola differenza che mentre in condizione di nuclear pinning per permettere al vortice di migrare era necessaria la rottura di siti di legame, in condizione di interstitial pinning sarà invece necessaria la formazione di nuovi siti

$$\Delta N(\theta, \varphi) = N_{free}(\theta, \varphi) - N_{bound}(\theta, \varphi)$$

In entrambi i casi comunque il processo di depinning consiste nel portare i vortici dalla condizione in cui sono legati al reticolo a quella in cui invece hanno un numero di configurazioni accessibili tale da permettergli di migrare. In condizione di nuclear pinning la condizione di vortice legato era, però, quella in cui il numero di siti di legame era massimo, mentre in condizione di interstitial pinning sarà, invece, quella in cui il numero di siti è minimo, in quanto la presenza di nuclei aggiuntivi darà un contributo negativo all'energia di legame

$$N_{bound} = N_{min}$$

Allo stesso modo risulta analoga anche la definizione di  $N_{free}$ . Utilizzando, infatti, lo stesso procedimento considerato in regime di nuclear pinning, si può ricavare che il vortice il cui numero di legami risulta pari a quello medio ha un numero di configurazioni sufficiente a poter migrare, mentre non gli sarà sufficiente un numero di configurazioni pari a quelle con un numero di legami inferiore a  $N_{medio} - \sigma$

$$N_{medio}(\theta, \varphi) - \sigma(\theta, \varphi) \leq N_{free}(\theta, \varphi) \leq N_{medio}(\theta, \varphi) \quad (6.38)$$

Risulta quindi infine possibile calcolare l'energia di depinning in modo analogo a quello utilizzato in precedenza (6.22), dove però, contrariamente al caso di nuclear pinning,

$$\Delta N(\theta, \varphi) = N_{free}(\theta, \varphi) - N_{min}(\theta, \varphi) \quad (6.39)$$

$$E_{eff} = E_p \begin{cases} \frac{\gamma^2 - \frac{4}{3}\gamma r_0 + \frac{r_0^2}{2}}{\gamma^2} & \gamma \geq r_0 \\ \frac{1}{6} \frac{\gamma^2}{r_0^2} & \gamma < r_0 \end{cases} \quad (6.40)$$

ed  $N_{free}$  è dato dalla 6.38.

Ultima importante grandezza che richiede uno studio indipendente in condizione di interstitial pinning è la forza di pinning. Come anche in regime di nuclear pinning per questo calcolo si sfrutta la relazione che classicamente lega una forza costante all'energia spesa applicando questa forza per uno spostamento  $d$  (6.29). Le stesse considerazioni fatte nel caso precedente sull'applicabilità di questa relazione risultano tuttora valide, per cui la forza così ricavata sarà solamente un'approssimazione della forza media che in effetti il vortice subisce nelle medesime condizioni, ma finché non sarà possibile studiare accuratamente le condizioni di legame non si potrà sviluppare un calcolo più preciso.

La forza di pinning per unità di lunghezza che lega il vortice al reticolo in regime di interstitial pinning si potrà quindi calcolare nello stesso modo in cui è stata calcolata in regime di nuclear pinning (6.33), in cui però è necessario tenere conto che ora il numero di siti di depinning è dato dalla (6.39) e che nel calcolo di  $B$ , numero di configurazioni in cui il vortice risulta legato, è ora necessario contare le configurazioni in cui il numero di siti di legame è minimo anziché quello in cui è massimo, come invece accadeva in regime di nuclear pinning.

## 6.4 Risultati

I calcoli svolti permettono di ottenere quattro grandezze molto importanti per lo studio dei pulsar glitches: l'energia di depinning per unità di lunghezza (6.24), la forza di pinning per unità di lunghezza (6.33), la distanza media che deve percorrere il vortice nel processo di depinning, calcolata come

$$\langle d \rangle = \frac{\langle \Delta E \rangle}{\langle F \rangle} \quad (6.41)$$

il cui valore è riportato in figura 6.23, ed il gap di velocità tra le due fasi del gas che sarebbe necessario al depinning della porzione di vortice studiata

$$\Delta v = \frac{\langle F \rangle}{k\rho} \quad (6.42)$$

dove  $k = \frac{h}{2m_n}$  è ancora il quanto di circuitazione attorno ad un vortice.

Per il calcolo di queste grandezze sono però necessari i dati riguardanti le proprietà della materia superfluida (in particolare l'energia di pinning per sito e la lunghezza di coerenza) e quelli riguardanti la composizione del reticolo nucleare. La struttura nucleare del reticolo che è stata utilizzata in questo studio è quella calcolata da

Zona	1	2	3	4	5
$\rho$	$1.5 \cdot 10^{12}$	$9.6 \cdot 10^{12}$	$3.4 \cdot 10^{13}$	$7.8 \cdot 10^{13}$	$1.3 \cdot 10^{14}$
$N$	280	1050	1750	1460	950
$Z$	40	50	50	40	32
$R_{ws}$	44.0	35.5	27.0	19.4	13.8
$R_N$	6.0	6.7	7.3	6.7	5.2
$a$	0.77	0.83	0.94	1.12	1.25
$U_0$	52.23	41.51	35.05	30.36	33.76

Tabella 6.1: **Parametri fisici del reticolo.** Sono presentati in tabella i parametri fisici del reticolo nucleare utilizzati nello studio del modello così come calcolati da Negele e Vautherin nel 1973 [41].  $\rho$  descrive la densità media della materia presente nella zona,  $N$  e  $Z$  sono il numero di neutroni e protoni che caratterizzano le celle nelle varie zone,  $R_{ws}$  è il raggio delle celle,  $R_N$  è il raggio del nucleo presente all'interno di ogni cella,  $a$  è la diffusività e  $U_0$  è la profondità del potenziale di Wood-Saxon calcolato con un'interazione Argonne, valore non riportato in [41]. La densità  $\rho$  è espressa in  $g/cm^3$ ,  $U_0$  è espresso in  $MeV$ , mentre  $R_{ws}$ ,  $R_N$  ed  $a$  sono espressi in  $fm$ .

Negele e Vautherin [41], di cui si sono, però, considerate solamente le cinque regioni presentate in tabella 6.1, in quanto come descritto in appendice E sono le uniche per cui sono state poi calcolate anche le energie di pinning per sito, indispensabili per lo studio svolto. Per la stessa ragione non è stata utilizzata la struttura della crosta interna calcolata nel capitolo 4 (Tab. 4.7): non esiste infatti attualmente uno studio in cui siano state calcolate le energie di pinning per sito utilizzando tale struttura.

Lo studio delle proprietà superfluide invece, come presentato in appendice E, è stato fatto da Pizzochero e Donati nel 2004 [46] e nel 2006 [47] in cui, utilizzando la struttura della crosta calcolata da Negele e Vautherin in [41], e ripresa in tabella 6.1, sono state ottenute le energie di pinning per sito e le lunghezze di coerenza riportate in tabella 6.2. Le regioni 1 e 2 sono caratterizzate da un'energia di pinning per sito negativa ( $E_p < 0$ ) e sono quindi in condizione di interstitial pinning, mentre le regioni 3, 4 e 5 sono caratterizzate da un'energia di pinning per sito positiva ( $E_p > 0$ ) e sono quindi in condizione di nuclear pinning. Inoltre si nota che i dati sono espressi in funzione di un parametro  $\beta$ , che descrive l'effetto della polarizzazione sull'interazione nucleare tramite una riduzione del gap superfluido pari a

$$\Delta = \frac{\Delta_0}{\beta} \quad (6.43)$$

dove  $\Delta_0$  è il gap ricavato da un puro calcolo BCS con un'interazione Argonne,  $\Delta$  è il gap effettivo che tiene conto della polarizzazione e  $\beta$  è il fattore di riduzione che si studia essere compreso tra 1 e 3 [50][55]. Come si può facilmente dedurre dalla (6.43) il caso  $\beta = 1$  rappresenta un'interazione nuda, in cui si trascurano tutti gli effetti di polarizzazione, mentre il caso  $\beta = 3$  rappresenta la situazione in cui l'effetto di polarizzazione è massimo.

Altra importante considerazione su questo parametro riguarda il valore che il gap assume nei due casi considerati. Infatti nel caso  $\beta = 1$  il gap ha un massimo attorno a  $3 MeV$ , così come descritto nelle condizioni di Strong Pairing, mentre nel caso  $\beta = 3$  il gap ha un massimo attorno a  $1 MeV$ , così come descritto nelle condizioni di Weak Pairing (Fig. 6.21). Si può quindi concludere che, ai fini del modello costruito, il caso  $\beta = 1$  rappresenta il legame del vortice al reticolo in condizione di strong pairing e il caso  $\beta = 3$  lo stesso legame nel caso di weak pairing (App. A).

Zona	$\rho$	$E_p$		$\xi$	
		$\beta = 1$	$\beta = 3$	$\beta = 1$	$\beta = 3$
5	$1.3 \cdot 10^{14}$	0.4	0.0	38.8	116.4
4	$7.8 \cdot 10^{13}$	5.1	0.7	11.2	33.5
3	$3.4 \cdot 10^{13}$	5.2	2.7	5.2	15.4
2	$9.6 \cdot 10^{12}$	-1.6	-0.3	4.3	13.0
1	$1.5 \cdot 10^{12}$	-2.6	-0.2	6.7	20.0

Tabella 6.2: **Parametri del gas superfluido.** In tabella sono presentati i parametri della materia superfluida necessari al calcolo svolto. L'energia di pinning per sito positiva descrive una condizione di nuclear pinning mentre l'energia di pinning per sito negativa descrive una condizione di interstitial pinning. Con  $\beta = 1$  [46] si è indicato il caso in cui si sono trascurati gli effetti di polarizzazione (descrive una condizione di strong pairing), mentre con  $\beta = 3$  [47] si è indicato il caso in cui si è considerata polarizzazione massima (descrive una condizione di weak pairing). Le densità  $\rho$  sono espresse in  $g/cm^3$ , le energie di pinning per sito  $E_p$  sono espresse in  $MeV$  e le lunghezze di coerenza  $\xi$  sono espresse in  $fm$ .

Lo studio dell'energia di depinning e della forza di pinning per unità di lunghezza viene quindi svolto considerando le stesse 5 zone proposte nel lavoro di Negele e Vautherin [41] e in quelli di Pizzochero e Donati [46][47], di cui in tabella 6.3 sono presentate le regioni di cattura.

I risultati ottenuti dal lavoro svolto dipenderanno quindi da due importanti parametri: il parametro  $\beta$ , che come appena descritto esprime la polarizzazione dell'interazione (6.43), e la lunghezza  $L$  del vortice rispetto al raggio di Wigner-Seitz, che è stata utilizzata nel calcolo (Tab. 6.7, 6.8, 6.9 e 6.10). Come già descritto, inoltre, i risultati ottenuti da questo modello dipenderanno dalla scelta del valore della grandezza  $N_{free}$  (6.27)(6.38): i risultati ottenuti rappresentano quindi il limite superiore ed inferiore alle grandezze calcolate, definendone quindi l'intervallo di attendibilità (Fig. 6.27 e 6.28).

### 6.4.1 Dimensioni del quadrato di depinning

Nei calcoli del modello proposto entra inoltre un ulteriore parametro: il lato del quadrato di depinning, che, come già descritto, in ogni orientazione determina le dimensioni della superficie dove viene traslato il vortice nel calcolo del massimo e del minimo numero di siti di legame.

La dimensione di questa regione deve essere sufficiente a rendere consistenti i calcoli statistici necessari allo studio dell'energia di depinning e della forza di pinning per unità di lunghezza. Per quanto riguarda l'energia di depinning l'unica condizione necessaria è che questa regione sia sufficientemente ampia da poterla considerare un campione statistico: innanzitutto lo studio del numero medio di siti di legame e della deviazione standard deve essere attendibile, poi il massimo ed il minimo ricavati

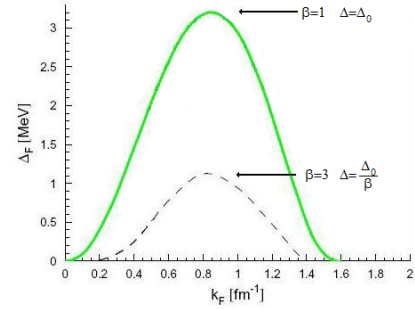


Figura 6.21: **Gap superfluido.** In figura è mostrato il gap superfluido nel caso  $\beta = 1$  e  $\beta = 3$ , che rappresentano rispettivamente il caso senza effetti di polarizzazione ed il caso di polarizzazione massima. Si nota che nel caso  $\beta = 1$  il gap ha un massimo attorno a  $3 MeV$ , così come descritto nelle teorie di strong pairing, mentre nel caso  $\beta = 3$  il gap ha un massimo attorno a  $1 MeV$ , così come descritto nelle teorie di weak pairing.

	Zona	$\rho$	$\gamma$	$r_0$	$r_c$	$R_{ws}$	$\frac{r_c}{R_{ws}}$
$\beta = 1$	1 IP	$1.5 \cdot 10^{12}$	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$1.4 \cdot 10^{-12}$	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$4.40 \cdot 10^{-12}$	0.289
	2 IP	$9.6 \cdot 10^{12}$	$1.1 \cdot 10^{-12}$	$6.3 \cdot 10^{-13}$	$1.1 \cdot 10^{-12}$	$3.55 \cdot 10^{-12}$	0.313
	3 NP	$3.4 \cdot 10^{13}$	0	$7.5 \cdot 10^{-13}$	$7.5 \cdot 10^{-13}$	$2.70 \cdot 10^{-12}$	0.279
	4 NP	$7.8 \cdot 10^{13}$	$4.6 \cdot 10^{-13}$	$5.7 \cdot 10^{-13}$	$1.0 \cdot 10^{-12}$	$1.94 \cdot 10^{-12}$	0.530
	5 NP	$1.3 \cdot 10^{14}$	$3.4 \cdot 10^{-12}$	$1.2 \cdot 10^{-13}$	$3.5 \cdot 10^{-12}$	$1.38 \cdot 10^{-12}$	2.527
$\beta = 3$	1 IP	$1.5 \cdot 10^{12}$	$2.6 \cdot 10^{-12}$	$3.9 \cdot 10^{-13}$	$2.6 \cdot 10^{-12}$	$4.40 \cdot 10^{-12}$	0.591
	2 IP	$9.6 \cdot 10^{12}$	$2.0 \cdot 10^{-12}$	$2.7 \cdot 10^{-13}$	$2.0 \cdot 10^{-12}$	$3.55 \cdot 10^{-12}$	0.555
	3 NP	$3.4 \cdot 10^{13}$	$8.1 \cdot 10^{-13}$	$5.5 \cdot 10^{-13}$	$1.4 \cdot 10^{-12}$	$2.70 \cdot 10^{-12}$	0.503
	4 NP	$7.8 \cdot 10^{13}$	$2.7 \cdot 10^{-12}$	$2.1 \cdot 10^{-13}$	$2.9 \cdot 10^{-12}$	$1.94 \cdot 10^{-12}$	1.492
	5 NP	$1.3 \cdot 10^{14}$	$1.1 \cdot 10^{-11}$	$2.7 \cdot 10^{-14}$	$1.1 \cdot 10^{-11}$	$1.38 \cdot 10^{-12}$	8.095

Tabella 6.3: **Regione di cattura.** In tabella sono riportati i valori delle grandezze coinvolte nel calcolo della regione di cattura dei nuclei. Con *IP* si indica una condizione di interstitial pinning, mentre con *NP* si indica invece una condizione di nuclear pinning.  $\gamma = \xi - R_N$  ( $\gamma = \xi + R_N$ ) è la larghezza della regione di pinning in condizione di nuclear (interstitial) pinning,  $r_0$ , dato dalla (6.17), è la massima distanza cui possono essere portati i nuclei dalla loro posizione di equilibrio nel reticolo,  $r_c$  e  $\frac{r_c}{R_{ws}}$  sono rispettivamente il raggio della regione di cattura e lo stesso raggio in unità del raggio di Wigner-Seitz, dove  $r_c = \gamma + r_0$  in regime di nuclear pinning e  $r_c = \gamma$  in regime di interstitial pinning e  $R_{ws}$  è il raggio di Wigner-Seitz. I valori riportati sono dati in unità *cgs*.

devono essere effettivamente il massimo ed il minimo numero di siti di legame che è possibile ottenere per quella data orientazione.

Nel calcolo della forza di pinning si richiede però una condizione ulteriore. Questo studio si basa infatti sul calcolo statistico dei massimi e dei minimi presenti nel quadrato di depinning, in modo da definirne la distanza media e, da questa, lo spostamento del vortice. Questo procedimento richiede però un numero sufficiente di configurazioni caratterizzate da legame massimo e minimo in modo da rendere attendibile la valutazione statistica della distanza media.

Per fare ciò è stato necessario ingrandire il quadrato di depinning fino a trovare un numero di massimi e minimi almeno superiore ad una soglia studiata appositamente per ottenere un calcolo consistente. Questo lavoro è stato inoltre svolto lavorando in una regione di dimensioni variabili a seconda dell'orientazione: in questo modo è stato possibile rendere attendibile il calcolo dove è necessaria un'area più ampia e allo stesso tempo non fare calcoli inutili dove invece è sufficiente un'area più limitata.

In questo procedimento, raffigurato in figura 6.22, è stato considerato inizialmente un quadrato di depinning di lato pari a  $4 R_{ws}$  in cui si sono contati il numero di massimi e di minimi. Dove questo numero di massimi e minimi è risultato troppo limitato (inferiore al valore limite) si è quindi svolto lo stesso studio in una regione attigua in modo che la regione totale risultasse un quadrato di lato  $6 R_{ws}$ . Dove poi ciò era ancora insufficiente si è quindi effettuato un ulteriore calcolo in una regione prossima a quella studiata e così via fino a che il numero di massimi e minimi calcolato non è risultato superiore a quello di soglia (Fig. 6.22). In questo calcolo si è dovuto tenere conto sia del numero di massimi che di quello di minimi in entrambi i regimi (nuclear ed interstitial pinning) così che lo studio di  $N_{free}$  potesse essere fatto tenendo conto della sola distribuzione statistica: rimuovendo quindi tutte le configurazioni aventi massimo e minimo numero di siti di legame.

Resta quindi solamente da definire quale dovrebbe essere il valore di soglia per il

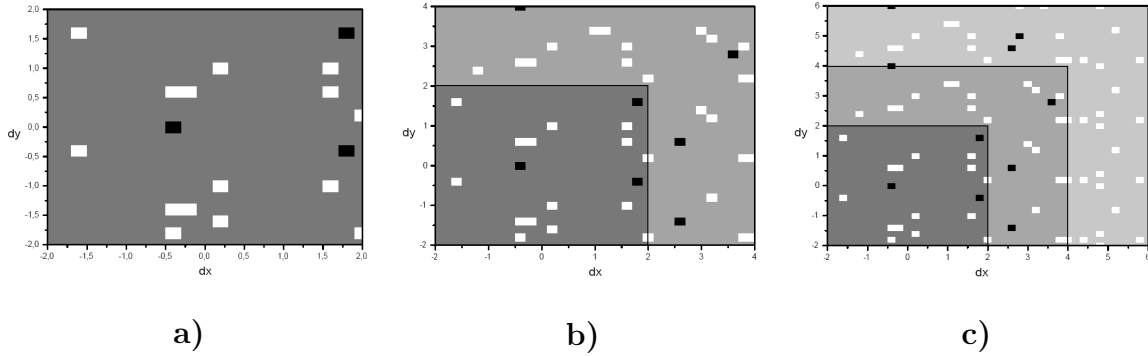


Figura 6.22: **Variazione del quadrato di depinning.** In figura è mostrato come viene ingrandito il quadrato di depinning per ottenere il numero desiderato di massimi e di minimi. Si nota che nei casi *a* e *b* non si è ancora raggiunta la soglia nel numero di massimi, che in questo caso è stata posta pari a 10, soglia raggiunta in figura *c*. Mentre le condizioni di massimo e minimo legame sono state rappresentate sempre in nero e bianco, alla condizione di legame intermedio è stata cambiata la tonalità di grigio per evidenziare come è stata ingrandita l'area di studio: a gradazione di grigio uguale corrisponde quindi la stessa area nelle 3 figure.

minimo numero di configurazioni avente massimo e minimo legame. Questo è stato studiato svolgendo il calcolo per un vortice di lunghezza pari a  $100 R_{ws}$ , considerando valori di soglia a partire da un numero di massimi e minimi pari a 5 ed aumentandolo fino a che i valori di  $\langle \Delta N \rangle$  e  $\langle \frac{\Delta N}{d} \rangle$  ottenuti non diventano sufficientemente stabili ad un ulteriore aumento. Il risultato del calcolo, espresso in tabella 6.4, permette di definire un valore soglia pari a 10 massimi in modo da ottenere un calcolo sufficientemente preciso, senza però rallentarlo eccessivamente.

## 6.4.2 Approssimazione per lo studio di vortici con $L > 1000 R_{ws}$

Il maggior ostacolo allo studio di questo modello risiede nella dipendenza dalla lunghezza del vortice ( $L$ ): lo studio di un vortice di lunghezza considerevole richiede, infatti, un tempo di calcolo troppo elevato. Per questa ragione, come già descritto alla fine del paragrafo 6.3.1, non risulta possibile coprire con un calcolo esatto tutto il range di lunghezze considerate accettabili e per lo studio di vortici con lunghezza  $L > 1000 R_{ws}$  è stato quindi necessario ricorrere ad un'approssimazione statistica.

Questa approssimazione è stata costruita osservando che su vortici di lunghezza minore o uguale a  $1000 R_{ws}$ , analizzando un numero sufficientemente elevato di possibili orientazioni tra vortice e reticolo, ma comunque di alcuni ordini di grandezza inferiore a quello che sarebbe necessario per il calcolo dell'integrale, e mediando il valore del rapporto di  $\Delta E(\theta, \varphi)$  (6.22) con lo stesso valore calcolato per un vortice di lunghezza  $100 R_w$ , è possibile ricavare una buona approssimazione del rapporto tra gli stessi valori medi calcolati in modo consistente (6.24). Calcolando, ad esempio, la media del rapporto tra l'energia di depinning ottenuta per un vortice di lunghezza pari a  $200 R_{ws}$  con quella ottenuta per un vortice di lunghezza pari a  $100 R_{ws}$  si è infatti osservato che questo risulta essere molto simile alla media di questo stesso rapporto su  $N \sim 30$  orientazioni casuali

$$P_{200} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta E(\theta_i, \varphi_i)_{200}}{\Delta E(\theta_i, \varphi_i)_{100}} \approx \frac{\langle \Delta E \rangle_{200}}{\langle \Delta E \rangle_{100}} \quad (6.44)$$



	Zona	$\frac{r_c}{R_{ws}}$	$\langle \Delta N \rangle$				$\langle \frac{\Delta N}{d} \rangle$			
			5	10	15	20	5	10	15	20
$\beta = 1$	1	0.289	0.038	0.038	0.038	0.038	0.096	0.097	0.097	0.097
	2	0.313	0.040	0.041	0.041	0.041	0.095	0.096	0.096	0.096
	3	0.279	0.036	0.036	0.036	0.037	0.051	0.052	0.052	0.053
	4	0.530	0.054	0.055	0.056	0.056	0.061	0.063	0.063	0.063
	5	2.527	0.124	0.126	0.128	0.129	0.118	0.116	0.116	0.116
$\beta = 3$	1	0.591	0.060	0.061	0.061	0.062	0.082	0.083	0.083	0.083
	2	0.555	0.058	0.059	0.060	0.060	0.086	0.086	0.087	0.087
	3	0.503	0.053	0.054	0.054	0.054	0.062	0.062	0.062	0.062
	4	1.492	0.090	0.091	0.092	0.093	0.077	0.076	0.076	0.076
	5	8.095	0.216	0.220	0.226	0.226	0.226	0.237	0.241	0.242

Tabella 6.4: **Dipendenza dalle dimensioni del quadrato di depinning.** In tabella sono raffigurati i valori del numero medio di siti di depinning per unità di lunghezza (6.25) e il valor medio del rapporto tra questo stesso numero di siti e la distanza media percorsa dal vortice nel processo di depinning, anche questa in unità del raggio di Wigner-Seitz (6.34). Il calcolo è stato fatto per un vortice di lunghezza pari a  $L = 100 R_{ws}$ .

dove i numeri indicati in pedice rappresentano la lunghezza del vortice in unità del raggio di Wigner-Seitz. Lo stesso risultato ovviamente si ottiene con vortici di lunghezza pari a  $500 R_{ws}$  e  $1000 R_{ws}$  ed è stato quindi induttivamente ipotizzato che questa relazione fosse valida anche per un vortice di lunghezza superiore: in questo modo si è potuta calcolare approssimativamente l'energia di depinning anche per vortici di lunghezza tale che, come già spiegato, non sarebbe stato possibile farlo altrimenti (Tab. 6.5).

Si è inoltre cercato di utilizzare una trattazione analoga anche per lo studio della forza di pinning (6.33), ricavando

$$Q_L = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{F(\theta_i, \varphi_i)_L}{F(\theta_i, \varphi_i)_{100}} \approx \frac{\langle F \rangle_L}{\langle F \rangle_{100}} \quad (6.45)$$

dove  $L$  indica la lunghezza del vortice considerato.

Dai risultati di questo calcolo, rappresentati in tabella 6.6, si può facilmente notare, però, che quest'approssimazione, che pur risultava più che valida per il calcolo di  $\langle \Delta E \rangle$ , non risulta sufficientemente accurata per utilizzarla nel calcolo di  $\langle F \rangle$ . Il calcolo della forza di pinning per un vortice di lunghezza superiore a  $1000 R_{ws}$  deve quindi essere svolto con una diversa approssimazione.

Questo studio è stato fatto partendo dalla definizione di distanza media percorsa dal vortice nel processo di depinning, così come è stata descritta all'inizio di questo paragrafo (6.41), da cui è possibile ricavare che il rapporto tra la forza media per una lunghezza arbitraria ( $L$ ) e la forza media per un vortice di lunghezza  $100 R_{ws}$  è pari a

$$\frac{\langle F \rangle_L}{\langle F \rangle_{100}} = \frac{\langle \Delta E \rangle_L}{\langle d \rangle_L} \frac{\langle d \rangle_{100}}{\langle \Delta E \rangle_{100}} = \frac{\langle d \rangle_{100}}{\langle d \rangle_L} \frac{\langle \Delta E \rangle_L}{\langle \Delta E \rangle_{100}} \approx \frac{\langle d \rangle_{100}}{\langle d \rangle_L} P_L \quad (6.46)$$

dove nell'ultimo passaggio si è sostituito il rapporto tra le Energie di Depinning col suo valore approssimato ( $P_L$ ) calcolato in (6.44).

		Zona	$\frac{r_c}{R_{ws}}$	$P_{200}$	$\frac{\langle \Delta E \rangle_{200}}{\langle \Delta E \rangle_{100}}$	$P_{500}$	$\frac{\langle \Delta E \rangle_{500}}{\langle \Delta E \rangle_{100}}$	$P_{1000}$	$\frac{\langle \Delta E \rangle_{1000}}{\langle \Delta E \rangle_{100}}$
$N_{free} = N_{medio}$	$\beta = 1$	1	0.289	0.70	0.67	0.37	0.39	0.24	0.26
		2	0.313	0.67	0.66	0.39	0.39	0.26	0.26
		3	0.279	0.68	0.66	0.37	0.37	0.23	0.24
		4	0.530	0.65	0.63	0.33	0.35	0.20	0.22
		5	2.527	0.63	0.62	0.34	0.34	0.22	0.21
	$\beta = 3$	1	0.591	0.64	0.64	0.35	0.37	0.22	0.24
		2	0.555	0.64	0.65	0.37	0.37	0.24	0.24
		3	0.503	0.65	0.63	0.35	0.35	0.22	0.22
		4	1.492	0.62	0.63	0.33	0.34	0.20	0.21
		5	8.095	0.63	0.62	0.34	0.34	0.20	0.22
$N_{free} = N_{medio} \pm \sigma$	$\beta = 1$	1	0.289	0.73	0.68	0.41	0.41	0.27	0.28
		2	0.313	0.66	0.67	0.40	0.41	0.26	0.29
		3	0.279	0.69	0.66	0.39	0.38	0.25	0.25
		4	0.530	0.67	0.63	0.35	0.35	0.20	0.22
		5	2.527	0.61	0.61	0.32	0.33	0.20	0.20
	$\beta = 3$	1	0.591	0.66	0.65	0.36	0.37	0.22	0.24
		2	0.555	0.66	0.65	0.37	0.38	0.26	0.25
		3	0.503	0.66	0.63	0.37	0.35	0.23	0.22
		4	1.492	0.61	0.62	0.33	0.33	0.20	0.21
		5	8.095	0.63	0.61	0.34	0.34	0.21	0.21
		Zona	$\frac{r_c}{R_{ws}}$	$N_{free} = N_{medio}$			$N_{free} = N_{medio} \pm \sigma$		
				$P_{1500}$	$P_{2000}$	$P_{3000}$	$P_{1500}$	$P_{2000}$	$P_{3000}$
$\beta = 1$	1	0.289	0.18	0.16	0.12	0.20	0.17	0.13	
	2	0.313	0.20	0.16	0.12	0.20	0.17	0.13	
	3	0.279	0.19	0.15	0.12	0.20	0.16	0.12	
	4	0.530	0.15	0.12	0.10	0.16	0.12	0.10	
	5	2.527	0.16	0.12	0.10	0.15	0.11	0.09	
$\beta = 3$	1	0.591	0.16	0.13	0.10	0.16	0.13	0.10	
	2	0.555	0.19	0.15	0.12	0.19	0.15	0.12	
	3	0.503	0.16	0.13	0.10	0.16	0.13	0.10	
	4	1.492	0.15	0.12	0.10	0.14	0.11	0.09	
	5	8.095	0.14	0.11	0.09	0.14	0.11	0.09	

Tabella 6.5: **Approssimazione utilizzata per lo studio di  $\langle \Delta E \rangle$  in vortici di lunghezza superiore a  $L = 1000 R_{ws}$ .** Sono presentati in tabella i valori calcolati nell'approssimazione utilizzata per il calcolo dell'energia di depinning per un vortice di lunghezza superiore a  $1000 R_{ws}$ .  $P_L$  (6.44) è la media su 30 angoli del rapporto tra le energie di depinning,  $L$  è la lunghezza del vortice in unità del raggio di Wigner-Seitz e  $\langle \Delta E \rangle_L$  rappresenta l'energia di depinning per unità di lunghezza calcolata per un vortice di lunghezza  $L$ .

Sebbene quest'ultima approssimazione (6.46) risulti più precisa rispetto a quella precedentemente studiata (6.45), il suo utilizzo richiederebbe la conoscenza del valor medio della distanza percorsa dal vortice nel processo di depinning, il cui calcolo sarebbe però possibile solamente dopo aver ricavato i valori dell'energia di depinning e della forza di pinning, che sono appunto le grandezze che si vogliono calcolare con questa approssimazione. Per applicare questo studio ad un vortice di tale lunghezza

		Zona	$\frac{r_c}{R_{ws}}$	$R_{200}$	$Q_{200}$	$\frac{\langle F \rangle_{200}}{\langle F \rangle_{100}}$	$R_{500}$	$Q_{500}$	$\frac{\langle F \rangle_{500}}{\langle F \rangle_{100}}$	$R_{1000}$	$Q_{1000}$	$\frac{\langle F \rangle_{1000}}{\langle F \rangle_{100}}$
$N_{free} = N_{medio}$	$\beta = 1$	1	0.289	0.63	0.76	0.58	0.33	0.20	0.32	0.21	0.11	0.23
		2	0.313	0.66	0.63	0.59	0.39	0.33	0.34	0.25	0.16	0.26
		3	0.279	0.67	0.66	0.61	0.36	0.27	0.35	0.23	0.18	0.23
		4	0.530	0.77	0.66	0.64	0.40	0.28	0.37	0.24	0.17	0.26
		5	2.527	0.94	0.92	0.71	0.51	0.50	0.45	0.33	0.36	0.32
	$\beta = 3$	1	0.591	0.79	0.80	0.62	0.43	0.37	0.40	0.27	0.21	0.29
		2	0.555	0.82	0.63	0.64	0.47	0.48	0.40	0.31	0.38	0.31
		3	0.503	0.76	0.69	0.64	0.41	0.44	0.37	0.26	0.25	0.26
		4	1.492	0.95	1.07	0.70	0.51	0.57	0.46	0.31	0.34	0.33
		5	8.095	0.86	0.83	0.66	0.46	0.44	0.42	0.27	0.23	0.29
$N_{free} = N_{medio} \pm \sigma$	$\beta = 1$	1	0.289	0.74	0.77	0.61	0.41	0.21	0.37	0.28	0.12	0.29
		2	0.313	0.73	0.62	0.62	0.44	0.34	0.40	0.29	0.17	0.32
		3	0.279	0.71	0.64	0.60	0.40	0.26	0.35	0.26	0.19	0.25
		4	0.530	0.77	0.68	0.62	0.40	0.29	0.34	0.23	0.17	0.25
		5	2.527	0.87	0.88	0.69	0.45	0.47	0.41	0.28	0.31	0.39
	$\beta = 3$	1	0.591	0.82	0.85	0.62	0.44	0.38	0.40	0.28	0.22	0.30
		2	0.555	0.89	0.65	0.65	0.49	0.45	0.42	0.34	0.37	0.34
		3	0.503	0.73	0.68	0.62	0.41	0.49	0.34	0.25	0.27	0.24
		4	1.492	0.90	1.03	0.67	0.48	0.54	0.42	0.30	0.34	0.31
		5	8.095	0.87	0.83	0.64	0.47	0.45	0.41	0.29	0.23	0.29
		Zona	$\frac{r_c}{R_{ws}}$	$N_{free} = N_{medio}$			$N_{free} = N_{medio} \pm \sigma$					
				$R_{1500}$	$R_{2000}$	$R_{3000}$	$R_{1500}$	$R_{2000}$	$R_{3000}$			
$\beta = 1$	1	0.289	0.16	0.14	0.11	0.20	0.18	0.12				
	2	0.313	0.19	0.16	0.12	0.22	0.19	0.14				
	3	0.279	0.18	0.15	0.12	0.20	0.16	0.12				
	4	0.530	0.18	0.15	0.12	0.17	0.14	0.11				
	5	2.527	0.24	0.19	0.15	0.21	0.16	0.13				
$\beta = 3$	1	0.591	0.19	0.16	0.13	0.20	0.17	0.13				
	2	0.555	0.23	0.19	0.15	0.26	0.20	0.16				
	3	0.503	0.19	0.16	0.12	0.18	0.15	0.11				
	4	1.492	0.22	0.18	0.15	0.21	0.16	0.14				
	5	8.095	0.19	0.16	0.12	0.19	0.16	0.12				

Tabella 6.6: **Approssimazione utilizzata per lo studio di  $\langle F \rangle$  in vortici di lunghezza superiore a  $L = 1000 R_{ws}$ .** Sono presentati in figura i valori calcolati nell'approssimazione utilizzata per il calcolo della forza di pinning per un vortice di lunghezza superiore a  $1000 R_{ws}$ .  $Q_L$  si riferisce all'approssimazione descritta in (6.45), mentre  $R_L$  si riferisce all'approssimazione descritta in (6.47).  $L$  è la lunghezza del vortice in unità del raggio di Wigner-Seitz e i numeri indicati in pedice si riferiscono alla lunghezza del vortice sempre in unità del raggio di Wigner-Seitz.

è quindi richiesta un'ulteriore approssimazione, così da poter utilizzare un valore di  $\langle d \rangle_L$  accettabile senza doverlo calcolare in modo esatto.

Per fare ciò si è osservato, nelle tabelle 6.7 e 6.8 ed in figura 6.23, che questa distanza media non varia drasticamente all'aumentare della lunghezza del vortice. Inoltre, se si esclude il caso  $L = 100 R_{ws}$ , l'andamento del valore della distanza risulta molto regolare: si nota infatti che la distanza media diminuisce di un fattore che

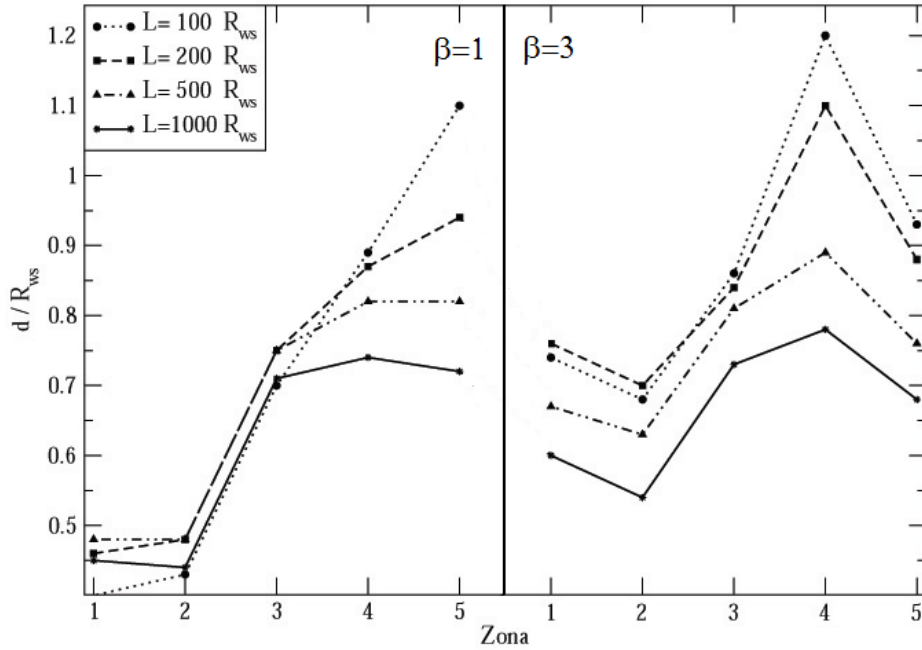


Figura 6.23: **Andamento della distanza media percorsa dal vortice nel processo di depinning in funzione della lunghezza del vortice stesso.** In figura è rappresentato, per i regimi di densità studiati, l'andamento della distanza percorsa dal vortice nel processo di depinning in funzione appunto della lunghezza del vortice, per le due condizioni di polarizzazione utilizzate ( $\beta = 1$  e  $\beta = 3$ ). La distanza percorsa dal vortice è data in unità del raggio di Wigner-Seitz e le zone indicate si riferiscono ai regimi di densità studiati da Negele e Vautherin [41].

risulta in prima approssimazione indipendente dalla zona in cui si effettua il calcolo. Si nota poi che questo stesso fattore tende a diminuire all'aumentare della lunghezza del vortice: il che porta ad ipotizzare che aumentando ulteriormente questa lunghezza si otterranno valori sempre più precisi. Per queste ragioni, e non potendo effettuare un calcolo più accurato, risulta possibile approssimare la distanza media percorsa da un vortice di lunghezza maggiore di  $1000 R_{ws}$ , come pari a questa stessa distanza calcolata per un vortice lungo esattamente  $1000 R_{ws}$ , che è appunto la condizione più prossima a quella dei vortici che si vogliono studiare con quest'approssimazione,

$$\langle d \rangle_L \approx \langle d \rangle_{1000}$$

In questo modo è infine possibile calcolare

$$R_L = \frac{\langle d \rangle_{100}}{\langle d \rangle_{1000}} P_L \approx \frac{\langle F \rangle_L}{\langle F \rangle_{100}} \quad (6.47)$$

Come si nota in tabella 6.6, in generale, questa approssimazione non risulta essere molto più precisa di quella calcolata in (6.45), presenta però alcuni indubbi vantaggi. In primo luogo l'approssimazione utilizzata (6.47) diventa sempre più precisa all'aumentare della lunghezza del vortice, il che risulta molto utile in quanto ciò che si vuole calcolare è il valore della forza di pinning per vortici di lunghezza superiore a  $1000 R_{ws}$ . Inoltre, contrariamente al caso descritto dall'approssimazione (6.45), in cui il valore ricavato può essere maggiore o minore del valore dato dal calcolo esatto, l'errore introdotto in questa approssimazione (6.47) risulta controllabile in quanto dipende direttamente dal valore della distanza media percorsa dal vortice nel processo di

depinning, grandezza che tende a diminuire all'aumentare della lunghezza del vortice (per  $L > 1000 R_{ws}$ ,  $\langle d \rangle_L \leq \langle d \rangle_{1000}$ ) e, di conseguenza, sempre per  $L > 1000 R_{ws}$ ,

$$\frac{\langle F \rangle_L}{\langle F \rangle_{100}} \approx \frac{\langle d \rangle_{100}}{\langle d \rangle_L} P_L \geq \frac{\langle d \rangle_{100}}{\langle d \rangle_{1000}} P_L$$

Le forze così ricavate risultano quindi essere un limite inferiore delle forze di pinning che verrebbero calcolate con uno studio esatto. Grazie alle proprietà di  $\langle d \rangle$  appena descritte, è però lecito supporre che il risultato così ricavato sia prossimo all'effettivo valore che questa forza assume.

L'energia di depinning e la forza di pinning per un vortice di lunghezza superiore a  $1000 R_{ws}$  si calcolano quindi come

$$\langle \Delta E \rangle_L \approx P_L \langle \Delta E \rangle_{100} \quad (6.48)$$

e

$$\langle F \rangle_L \approx R_L \langle \Delta F \rangle_{100} \quad (6.49)$$

dove  $P_L$  e  $R_L$  sono dati rispettivamente dalla (6.44) e dalla (6.47).

### 6.4.3 Dipendenza dai parametri del modello

I risultati ricavati in questo modello (Tab. 6.7, 6.8, 6.9 e 6.10) dipendono principalmente da due importanti parametri: la lunghezza del vortice considerato ( $L$ ), che come già descritto rappresenta la massima lunghezza di un vortice non deformabile (6.10), e il parametro  $\beta$ , che descrive la riduzione del gap superfluido derivante dalla polarizzazione della materia nucleare (6.43) e che discrimina tra la condizione di strong pairing ( $\beta = 1$ ) e quella di weak pairing ( $\beta = 3$ ).

Lo studio dell'andamento dei risultati rispetto alla variazione di questi due parametri è molto importante in quanto queste due grandezze entrano in ogni aspetto dello studio effettuato: la lunghezza del vortice perché lo studio è svolto considerando un vortice di lunghezza  $L$  e dividendo poi il risultato ottenuto per la lunghezza considerata, così da ottenere la forza di pinning e l'energia di depinning per unità di lunghezza, e la polarizzazione  $\beta$  perché da questo parametro dipendono direttamente sia l'energia di pinning per sito che la lunghezza di coerenza del superfluido, due tra le grandezze più importanti di quelle utilizzate nel calcolo.

Il parametro che influenza maggiormente i risultati ottenuti è indubbiamente la lunghezza del vortice. La dipendenza da questo parametro è già stata descritta qualitativamente parlando dell'ipotesi fatta da Jones [33], secondo cui all'aumentare della lunghezza del vortice stesso si avrà una diminuzione dell'energia di pinning fino a che questa non risulti trascurabile.

Lo studio del modello presentato permette di verificare quantitativamente che, come ipotizzò Jones, all'aumentare della lunghezza del vortice considerato vi è in effetti una diminuzione dell'energia di depinning e della forza di pinning per unità di lunghezza (Fig. 6.29 e 6.30). Come già descritto, però, contrariamente all'ipotesi fatta da Jones, in questo modello il vortice non può essere considerato indefinitamente lungo e questo limite alla sua lunghezza fa sì che la diminuzione nell'energia di depinning e nella forza di pinning, sebbene sia consistente (un fattore 10 tra un vortice di lunghezza  $100 R_{ws}$  e  $3000 R_{ws}$ ), non è sufficiente a poterle considerare trascurabili.

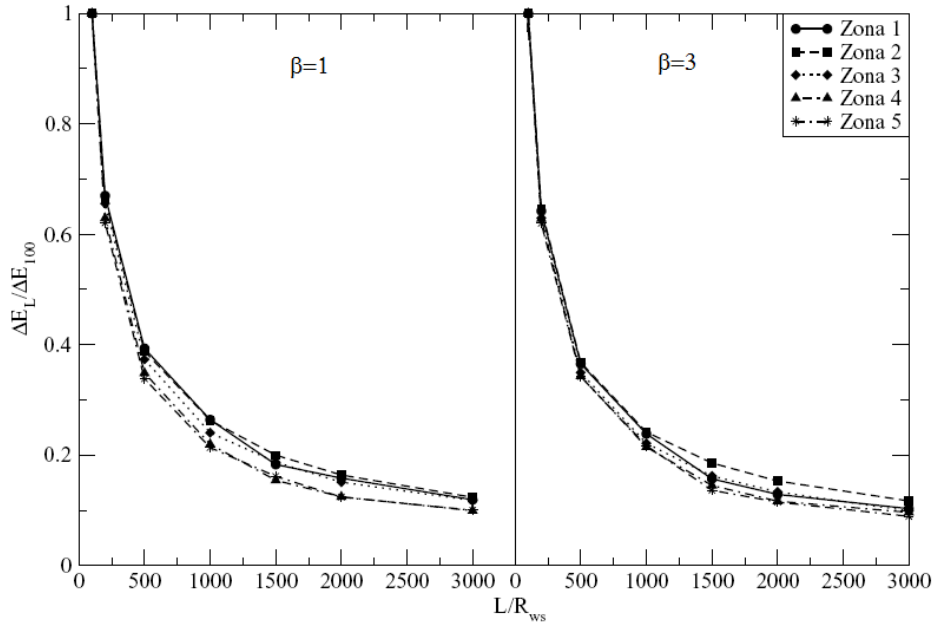


Figura 6.24: **Fattore di riduzione dell'energia di depinning.** In figura è rappresentato l'andamento del fattore di riduzione dell'energia di depinning dovuto alla lunghezza del vortice in funzione di questa stessa lunghezza.

Di minore intensità ma comunque consistente è la dipendenza dalla polarizzazione  $\beta$ . Come si può osservare in figura 6.31, il valore di questo parametro risulta infatti poco importante nelle tre regioni meno dense della crosta interna (le zone chiamate 1, 2 e 3), ma diventa sempre più influente al crescere della densità della materia, fino a portare ad una riduzione di un ordine di grandezza nella zona più densa (zona 5, con  $\rho = 1.3 \cdot 10^{14} \text{g/cm}^3$ ).

Vi è inoltre una grossa differenza nella dipendenza data da questo parametro rispetto quella data dalla lunghezza del vortice. Nello studio della dipendenza da quest'ultima grandezza si è infatti osservata una grande riduzione sia nell'energia di depinning che nella forza di pinning, riduzione che risultava, però, quasi indipendente dalla densità della materia presente (Fig. 6.24): per una stessa lunghezza del vortice in ogni zona considerata il fattore risultava essere molto simile. Questa particolarità può risultare molto importante qualora fosse necessario studiare vortici di lunghezza maggiore dei  $3000 R_{ws}$  che sono stati analizzati in questo modello. Questo perché un fit di questa curva permetterebbe di stimare il valore che questo fattore avrebbe per la lunghezza desiderata senza dover utilizzare l'approssimazione descritta in precedenza, che, per vortici di lunghezza maggiore di quella studiata, richiederebbe tempi di calcolo comunque molto elevati.

L'influenza della polarizzazione  $\beta$  sui risultati ottenuti risulta invece dipendere dalla densità della materia presente al punto da cambiare addirittura l'andamento della forza di pinning e dell'energia di depinning rispetto alla densità (Fig. 6.31): il massimo di queste due grandezze, che per  $\beta = 1$  risulta essere nella zona 4 ( $\rho = 7.8 \cdot 10^{13} \text{g/cm}^3$ ), viene infatti spostato per  $\beta = 3$  nella zona 3 ( $\rho = 3.4 \cdot 10^{13} \text{g/cm}^3$ ).

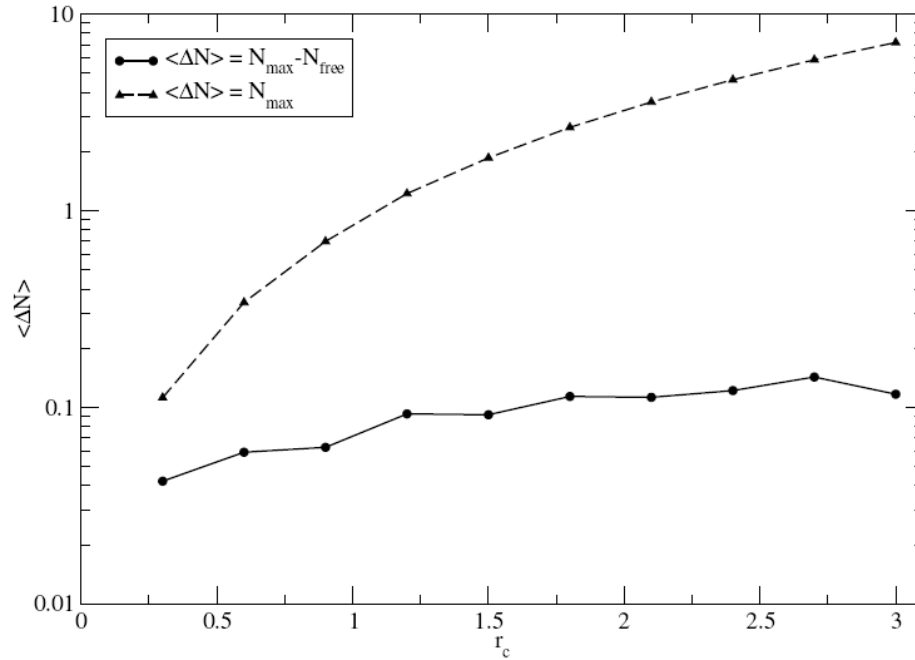


Figura 6.25: **Dipendenza del numero di siti di depinning dalla larghezza della regione di cattura.** In figura è rappresentato il numero di siti di depinning calcolato in un raggio di Wigner-Seitz ( $\langle \Delta N \rangle$ ) in funzione della larghezza della regione di cattura ( $r_c$ ) per un vortice di  $100 R_{ws}$  (linea continua). Nel grafico, rappresentato in scala semilogaritmica, è anche riportato il risultato ottenuto trascurando l'effetto che è stato chiamato collective pinning (Par. 6.3.4), imponendo quindi che per liberare il vortice è necessario rompere tutti i siti di legame col reticolo (linea tratteggiata).

#### 6.4.4 Confronto coi modelli precedenti

È infine possibile confrontare i risultati del modello che abbiamo costruito con quelli dati dai modelli già esistenti. Il primo e più importante confronto è quello con l'ipotesi di Jones [33] (6.8), che è però già stato analizzato all'inizio del paragrafo precedente (Par. 6.4.3) studiando l'effetto della lunghezza del vortice.

Molto importante, è anche il confronto col modello di superweak pinning proposto da Alpar [3], secondo cui se la lunghezza di coerenza del superfluido risulta maggiore del raggio di Wigner-Seitz l'energia di depinning diventa trascurabile (6.6). Da questo confronto si ricava infatti che quest'ipotesi, proposta a seguito di un'analisi qualitativa dell'interazione vortice-reticolo, viene contraddetta dai risultati ricavati utilizzando il modello quantitativo proposto in questo capitolo (Tab. da 6.7 a 6.10), dove risulta evidente che il numero medio di siti di depinning in unità del raggio di Wigner-Seitz ( $\langle \Delta N \rangle$ ), contrariamente a quanto ipotizzato da Alpar, tende ad essere maggiore nelle zone in cui è maggiore anche la lunghezza di coerenza del superfluido.

Al fine di ottenere un'ulteriore conferma di questo importante risultato, è stato fatto inoltre uno studio sistematico dell'energia di depinning per unità di lunghezza all'aumentare del raggio della regione di cattura ( $r_c$ ), che risulta fortemente dipendente dalla lunghezza di coerenza (Par. 6.3.3). Dai risultati di questo studio, presentati in figura 6.25, si nota, come ci si era aspettato, che all'aumentare del raggio della regione considerata si ha mediamente un aumento del numero di siti di depinning: si può quindi concludere che la teoria qualitativa del superweak pinning non risulta coerente con uno studio quantitativo del sistema vortice-reticolo.

Nella stessa figura (Fig. 6.25) si è cercato inoltre di evidenziare l'importanza del fenomeno che è stato da noi chiamato *collective pinning* (Par. 6.3.4). Per fare ciò sono stati riportati in figura anche i risultati di un calcolo svolto trascurando tale fenomeno: imponendo cioè che il vortice sarà libero di migrare solamente a seguito della rottura di tutti i legami che ha col reticolo ( $\Delta N = N_{max}$ ). Dal confronto di questo risultato con quello ricavato invece applicando il modello finora descritto si nota la grande importanza di questo particolare effetto, che porta ad una riduzione considerevole nel numero di siti di *depinning* sia quando il raggio della regione di cattura è maggiore del raggio di Wigner-Seitz, sia quando invece è minore, effetto totalmente trascurato nella teoria del *superweak pinning*.

Altra importante conseguenza dell'utilizzo del modello di *superweak pinning* è una notevole riduzione del range di densità in cui è presente il legame tra vortice e reticolo. L'imposizione che la forza di *pinning* si annulli qualora la lunghezza di coerenza superfluida sia maggiore del raggio di Wigner-Seitz comporta infatti che nelle regioni caratterizzate da densità elevata (5 per  $\beta = 1$ , 4 e 5 per  $\beta = 3$ ) il vortice non sia legato al reticolo. Utilizzando però il modello di legame proposto in questo lavoro per quelle stesse regioni si ottiene, invece, una forza di legame non nulla (Fig. 6.32 e 6.33).

Altro fattore che aumenta notevolmente il range di densità in cui il vortice risulta legato al reticolo è la nuova trattazione del regioni in regime di *interstitial pinning*. Nei modelli di *weak* e *strong pinning*, infatti, i vortici che si trovavano in questa particolare condizione di legame erano considerati liberi, in quanto si ipotizzava che, essendo l'interazione repulsiva, il vortice potesse muoversi nella stella evitando i nuclei del reticolo, da cui era respinto. Nel modello proposto invece, come descritto nel paragrafo 6.3.7, le regioni in regime di *interstitial pinning* contribuiscono attivamente al legame col reticolo, aumentando quindi notevolmente il range di densità in cui il vortice risulta legato.

L'importanza delle regioni caratterizzate da *interstitial pinning* si può verificare anche tramite il calcolo i cui risultati sono rappresentati in figura 6.26. In questo studio sono state confrontate le energie di *depinning* e le forze di *pinning* ricavate utilizzando le energie di *pinning* per sito riportate in [47] e le stesse energie ma col segno opposto, in modo da portare in regime di *interstitial pinning* le regioni che in [47] sono state calcolate essere caratterizzate da *nuclear pinning* e viceversa. Dai risultati di questo confronto si nota che non vi è una grande differenza tra i risultati ottenuti nei due casi e si può quindi dedurre che le energie di *depinning* e le forze di *pinning* non dipendono fortemente dal fatto che la forza tra il vortice ed i singoli nuclei sia attrattiva o repulsiva.

Poca importanza ha invece l'effetto di dislocazione dei nuclei. Questo è evidente se si analizza nelle figure 6.32 e 6.33 la zona 3 per  $\beta = 1$  e  $L = 100 R_{ws}$ , in cui i risultati ottenuti col modello proposto e col modello di *weak pinning* sono molto simili. In questa regione, infatti, l'effetto del *collective pinning* è molto limitato in quanto le piccole dimensioni del vortice gli permettono quasi per ogni orientazione di trovare una configurazione in cui  $N_{free} = 0$  e, di conseguenza,  $\Delta N = N_{max}$ : in queste condizioni il modello studiato e quello di *weak pinning* differiscono quindi principalmente per effetto della dislocazione dei nuclei. Ottenere quindi in questa regione un risultato così simile per questi due modelli implica, come accennato, che l'effetto della dislocazione dei nuclei sui risultati ottenuti è molto limitato.



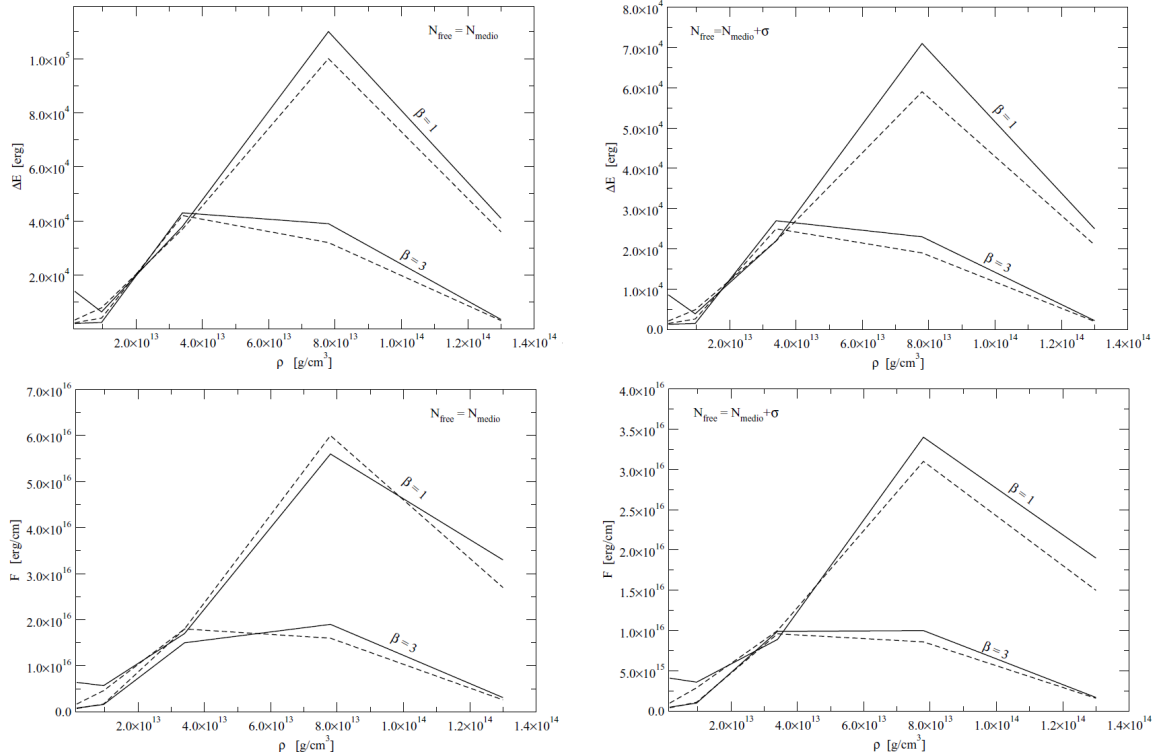


Figura 6.26: **Confronto dei risultati invertendo il segno dell'energia di pinning per sito.** In figura è presentato un confronto tra l'energia di depinning ricavata utilizzando il modello di legame che è stato proposto (linea continua) e quella ricavata sempre col modello proposto ma invertendo il segno dell'energia di pinning per sito (linea tratteggiata). Lo stesso confronto è riportato anche per la forza di pinning. I calcoli sono stati svolti per un vortice di lunghezza pari a  $L = 200 R_{ws}$

Un'ultima considerazione è da farsi sul modello di strong pinning (6.4). Questo modello non tiene conto della larghezza del vortice, rendendolo completamente inutilizzabile nelle regioni in cui la lunghezza di coerenza risulta molto elevata ed il numero di siti di legame presenti all'interno del vortice risulta quindi già molto superiore a quello calcolato imponendo la dislocazione di tutti i nuclei vicini. Questo stesso effetto di dislocazione dei nuclei, introdotto per la prima volta in questo modello, risulta inoltre enormemente sovrastimato: innanzitutto si ipotizza infatti di poter spostare tutti i nuclei la cui distanza dal vortice è minore o uguale ad un raggio di Wigner-Seitz, mentre la massima dislocazione calcolata risulta in ogni regione strettamente inferiore (Tab. 6.3), poi non si considera che lo spostamento di un nucleo dalla sua posizione di equilibrio necessita una spesa energetica a danno dell'intensità del legame e che quindi i nuclei che contribuiscono al legame a seguito di una dislocazione daranno un contributo inferiore a quelli che già si trovano nella regione di pinning.

Confrontando infine le forze di pinning ottenute dall'utilizzo del modello proposto con la massima forza di legame per unità di lunghezza che deve essere presente nella crosta interna al fine di generare un pulsar glitch analogo a quelli osservati nella rotazione di Vela (6.5), si nota un notevole miglioramento rispetto ai risultati ottenuti con i precedenti modelli di legame. Le forze di pinning ricavate per un vortice di lunghezza pari a  $2000 R_{ws}$  e  $3000 R_{ws}$  risultano infatti essere sufficientemente ridotte da permettere la formazione del glitch: le massime forze di pinning ottenute sono infatti dello stesso ordine di grandezza di quella che è stata stimata come massima

(6.5). Questo risultato è inoltre coerente con la stima della massima lunghezza di un vortice non deformabile, che nel paragrafo 6.3.1 è stata appunto calcolata dell'ordine dei  $10^3 R_{ws}$ .

## 6.5 Conclusioni

In questo lavoro si è costruito un modello quantitativo, che si basa su una simulazione numerica realistica per contare i nuclei contenuti in un cilindro di raggio  $r_c$  e lunghezza  $L$ , al fine di calcolare la forza di legame tra un vortice ed il reticolo nucleare presente nella crosta interna delle stelle di neutroni.

Il principale risultato di questo modello è una notevole riduzione delle forze di pinning per unità di lunghezza rispetto a quelle calcolate utilizzando i modelli qualitativi precedentemente proposti. Altra grande differenza rispetto ai modelli precedenti è il range di densità in cui queste forze agiscono: la trattazione quantitativa, che è stata utilizzata nel calcolo delle energie di depinning per unità di lunghezza, unita all'analoga trattazione delle zone in regime di interstitial pinning, che erano precedentemente trascurate, ha infatti fatto sì che l'interazione tra vortice e reticolo sia risultata consistente in tutte e cinque le regioni per cui sono state calcolate le energie di pinning per sito (corrispondenti a quasi tutta la crosta interna).

Questi due importanti effetti, riscontrati nei risultati ottenuti, fanno quindi sì che le forze di pinning per unità di lunghezza calcolate tramite l'utilizzo di questo modello, oltre ad essere sufficientemente realistiche, abbiano anche un ordine di grandezza tale da poter essere utilizzate in un eventuale futuro studio della dinamica dei vortici, studio che potrebbe portare ad un calcolo quantitativo dei processi cui è dovuta la formazione di un pulsar glitch.

**Tabella 6.7:** Risultati del calcolo esatto per  $N_{free} = N_{medio}$ .

	Zona	$\frac{r_c}{R_{ws}}$	$\langle \Delta N \rangle$	$\langle \Delta E \rangle$	$\langle \frac{\Delta N}{d} \rangle$	$\langle F \rangle$	$\langle \Delta v \rangle$	$\langle d \rangle$	
$L = 100 R_{ws}$	$\beta = 1$	1	0.289	0.038	$5.05 \cdot 10^3$	0.097	$2.90 \cdot 10^{15}$	$9.77 \cdot 10^5$	0.40
		2	0.313	0.041	$1.19 \cdot 10^4$	0.096	$7.85 \cdot 10^{15}$	$4.13 \cdot 10^5$	0.43
		3	0.279	0.036	$5.61 \cdot 10^4$	0.052	$2.98 \cdot 10^{16}$	$4.43 \cdot 10^5$	0.70
		4	0.530	0.055	$1.59 \cdot 10^5$	0.063	$9.26 \cdot 10^{16}$	$6.00 \cdot 10^5$	0.89
		5	2.527	0.126	$5.73 \cdot 10^4$	0.117	$3.85 \cdot 10^{16}$	$1.50 \cdot 10^5$	1.08
	$\beta = 3$	1	0.591	0.061	$3.78 \cdot 10^3$	0.083	$1.17 \cdot 10^{15}$	$3.93 \cdot 10^5$	0.74
		2	0.555	0.059	$6.40 \cdot 10^3$	0.086	$2.64 \cdot 10^{15}$	$1.39 \cdot 10^5$	0.68
		3	0.503	0.054	$6.61 \cdot 10^4$	0.062	$2.85 \cdot 10^{16}$	$4.23 \cdot 10^5$	0.86
		4	1.492	0.091	$5.13 \cdot 10^4$	0.076	$2.22 \cdot 10^{16}$	$1.44 \cdot 10^5$	1.19
		5	8.095	0.220	$5.11 \cdot 10^3$	0.236	$3.98 \cdot 10^{15}$	$1.55 \cdot 10^4$	0.93
$L = 200 R_{ws}$	$\beta = 1$	1	0.289	0.026	$3.38 \cdot 10^3$	0.056	$1.69 \cdot 10^{15}$	$5.69 \cdot 10^5$	0.46
		2	0.313	0.027	$7.89 \cdot 10^3$	0.056	$4.63 \cdot 10^{15}$	$2.44 \cdot 10^5$	0.48
		3	0.279	0.024	$3.68 \cdot 10^4$	0.032	$1.81 \cdot 10^{16}$	$2.69 \cdot 10^5$	0.75
		4	0.530	0.035	$1.00 \cdot 10^5$	0.040	$5.96 \cdot 10^{16}$	$3.86 \cdot 10^5$	0.87
		5	2.527	0.078	$3.56 \cdot 10^4$	0.083	$2.74 \cdot 10^{16}$	$1.06 \cdot 10^5$	0.94
	$\beta = 3$	1	0.591	0.039	$2.43 \cdot 10^3$	0.052	$7.29 \cdot 10^{14}$	$2.45 \cdot 10^5$	0.76
		2	0.555	0.038	$4.14 \cdot 10^3$	0.055	$1.68 \cdot 10^{15}$	$8.82 \cdot 10^4$	0.70
		3	0.503	0.034	$4.16 \cdot 10^4$	0.040	$1.83 \cdot 10^{16}$	$2.73 \cdot 10^5$	0.84
		4	1.492	0.057	$3.22 \cdot 10^4$	0.053	$1.56 \cdot 10^{16}$	$1.01 \cdot 10^5$	1.07
		5	8.095	0.136	$3.17 \cdot 10^3$	0.155	$2.61 \cdot 10^{15}$	$1.02 \cdot 10^4$	0.88
$L = 500 R_{ws}$	$\beta = 1$	1	0.289	0.015	$1.99 \cdot 10^3$	0.031	$9.32 \cdot 10^{14}$	$3.14 \cdot 10^5$	0.48
		2	0.313	0.016	$4.62 \cdot 10^3$	0.033	$2.69 \cdot 10^{15}$	$1.41 \cdot 10^5$	0.48
		3	0.279	0.014	$2.10 \cdot 10^4$	0.018	$1.03 \cdot 10^{16}$	$1.53 \cdot 10^5$	0.75
		4	0.530	0.019	$5.55 \cdot 10^4$	0.023	$3.47 \cdot 10^{16}$	$2.25 \cdot 10^5$	0.82
		5	2.527	0.043	$1.94 \cdot 10^4$	0.052	$1.72 \cdot 10^{16}$	$6.69 \cdot 10^4$	0.82
	$\beta = 3$	1	0.591	0.022	$1.38 \cdot 10^3$	0.033	$4.67 \cdot 10^{14}$	$1.57 \cdot 10^5$	0.67
		2	0.555	0.022	$2.36 \cdot 10^3$	0.035	$1.06 \cdot 10^{15}$	$5.58 \cdot 10^4$	0.63
		3	0.503	0.019	$2.31 \cdot 10^4$	0.023	$1.06 \cdot 10^{16}$	$1.57 \cdot 10^5$	0.81
		4	1.492	0.031	$1.76 \cdot 10^4$	0.035	$1.02 \cdot 10^{16}$	$6.60 \cdot 10^4$	0.89
		5	8.095	0.075	$1.75 \cdot 10^3$	0.099	$1.67 \cdot 10^{15}$	$6.50 \cdot 10^3$	0.76
$L = 1000 R_{ws}$	$\beta = 1$	1	0.289	0.010	$1.33 \cdot 10^3$	0.023	$6.80 \cdot 10^{14}$	$2.29 \cdot 10^5$	0.45
		2	0.313	0.011	$3.12 \cdot 10^3$	0.025	$2.01 \cdot 10^{15}$	$1.06 \cdot 10^5$	0.44
		3	0.279	0.009	$1.35 \cdot 10^4$	0.012	$7.08 \cdot 10^{15}$	$1.05 \cdot 10^5$	0.71
		4	0.530	0.012	$3.49 \cdot 10^4$	0.016	$2.43 \cdot 10^{16}$	$1.58 \cdot 10^5$	0.74
		5	2.527	0.027	$1.22 \cdot 10^4$	0.037	$1.24 \cdot 10^{16}$	$4.81 \cdot 10^4$	0.72
	$\beta = 3$	1	0.591	0.015	$9.02 \cdot 10^2$	0.024	$3.44 \cdot 10^{14}$	$1.16 \cdot 10^5$	0.60
		2	0.555	0.014	$1.55 \cdot 10^3$	0.027	$8.10 \cdot 10^{14}$	$4.26 \cdot 10^4$	0.54
		3	0.503	0.012	$1.46 \cdot 10^4$	0.016	$7.40 \cdot 10^{15}$	$1.10 \cdot 10^5$	0.73
		4	1.492	0.019	$1.10 \cdot 10^4$	0.025	$7.32 \cdot 10^{15}$	$4.74 \cdot 10^4$	0.78
		5	8.095	0.048	$1.11 \cdot 10^3$	0.070	$1.18 \cdot 10^{15}$	$4.59 \cdot 10^3$	0.68

**Tabella 6.8:** Risultati del calcolo esatto per  $N_{free} = N_{medio} \pm \sigma$ .

	Zona	$\frac{r_c}{R_{ws}}$	$\langle \Delta N \rangle$	$\langle \Delta E \rangle$	$\langle \frac{\Delta N}{d} \rangle$	$\langle F \rangle$	$\langle \Delta v \rangle$	$\langle d \rangle$	
$L = 100 R_{ws}$	$\beta = 1$	1	0.289	0.023	$3.04 \cdot 10^3$	0.057	$1.71 \cdot 10^{15}$	$5.76 \cdot 10^5$	0.40
		2	0.313	0.025	$7.21 \cdot 10^3$	0.057	$4.72 \cdot 10^{15}$	$2.48 \cdot 10^5$	0.43
		3	0.279	0.022	$3.34 \cdot 10^4$	0.030	$1.70 \cdot 10^{16}$	$2.52 \cdot 10^5$	0.73
		4	0.530	0.033	$9.44 \cdot 10^4$	0.034	$5.10 \cdot 10^{16}$	$3.31 \cdot 10^5$	0.95
		5	2.527	0.077	$3.49 \cdot 10^4$	0.065	$2.16 \cdot 10^{16}$	$8.40 \cdot 10^4$	1.17
	$\beta = 3$	1	0.591	0.037	$2.30 \cdot 10^3$	0.050	$6.99 \cdot 10^{14}$	$2.35 \cdot 10^5$	0.75
		2	0.555	0.036	$3.91 \cdot 10^3$	0.053	$1.63 \cdot 10^{15}$	$8.58 \cdot 10^4$	0.68
		3	0.503	0.032	$3.91 \cdot 10^4$	0.034	$1.56 \cdot 10^{16}$	$2.32 \cdot 10^5$	0.93
		4	1.492	0.055	$3.12 \cdot 10^4$	0.044	$1.28 \cdot 10^{16}$	$8.29 \cdot 10^4$	1.26
		5	8.095	0.138	$3.22 \cdot 10^3$	0.145	$2.44 \cdot 10^{15}$	$9.50 \cdot 10^3$	0.96
$L = 200 R_{ws}$	$\beta = 1$	1	0.289	0.016	$2.07 \cdot 10^3$	0.035	$1.05 \cdot 10^{15}$	$3.53 \cdot 10^5$	0.45
		2	0.313	0.017	$4.86 \cdot 10^3$	0.036	$2.93 \cdot 10^{15}$	$1.54 \cdot 10^5$	0.47
		3	0.279	0.014	$2.19 \cdot 10^4$	0.018	$1.02 \cdot 10^{16}$	$1.51 \cdot 10^5$	0.80
		4	0.530	0.021	$5.91 \cdot 10^4$	0.021	$3.15 \cdot 10^{16}$	$2.04 \cdot 10^5$	0.97
		5	2.527	0.047	$2.13 \cdot 10^4$	0.045	$1.48 \cdot 10^{16}$	$5.77 \cdot 10^4$	1.04
	$\beta = 3$	1	0.591	0.024	$1.49 \cdot 10^3$	0.031	$4.34 \cdot 10^{14}$	$1.46 \cdot 10^5$	0.78
		2	0.555	0.024	$2.56 \cdot 10^3$	0.034	$1.05 \cdot 10^{15}$	$5.54 \cdot 10^4$	0.69
		3	0.503	0.020	$2.45 \cdot 10^4$	0.021	$9.63 \cdot 10^{15}$	$1.43 \cdot 10^5$	0.94
		4	1.492	0.034	$1.93 \cdot 10^4$	0.029	$8.57 \cdot 10^{15}$	$5.55 \cdot 10^4$	1.16
		5	8.095	0.085	$1.97 \cdot 10^3$	0.092	$1.55 \cdot 10^{15}$	$6.03 \cdot 10^3$	0.92
$L = 500 R_{ws}$	$\beta = 1$	1	0.289	0.009	$1.25 \cdot 10^3$	0.021	$6.32 \cdot 10^{14}$	$2.13 \cdot 10^5$	0.45
		2	0.313	0.010	$2.94 \cdot 10^3$	0.023	$1.86 \cdot 10^{15}$	$9.81 \cdot 10^4$	0.44
		3	0.279	0.008	$1.26 \cdot 10^4$	0.010	$5.99 \cdot 10^{15}$	$8.90 \cdot 10^4$	0.78
		4	0.530	0.011	$3.26 \cdot 10^4$	0.012	$1.76 \cdot 10^{16}$	$1.14 \cdot 10^5$	0.96
		5	2.527	0.025	$1.14 \cdot 10^4$	0.027	$8.93 \cdot 10^{15}$	$3.47 \cdot 10^4$	0.93
	$\beta = 3$	1	0.591	0.014	$8.53 \cdot 10^2$	0.020	$2.77 \cdot 10^{14}$	$9.34 \cdot 10^4$	0.70
		2	0.555	0.014	$1.48 \cdot 10^3$	0.022	$6.82 \cdot 10^{14}$	$3.59 \cdot 10^4$	0.61
		3	0.503	0.011	$1.36 \cdot 10^4$	0.012	$5.33 \cdot 10^{15}$	$7.92 \cdot 10^4$	0.94
		4	1.492	0.018	$1.04 \cdot 10^4$	0.018	$5.35 \cdot 10^{15}$	$3.47 \cdot 10^4$	1.01
		5	8.095	0.047	$1.08 \cdot 10^3$	0.060	$1.00 \cdot 10^{15}$	$3.90 \cdot 10^3$	0.78
$L = 1000 R_{ws}$	$\beta = 1$	1	0.289	0.007	$8.72 \cdot 10^2$	0.017	$4.97 \cdot 10^{14}$	$1.67 \cdot 10^5$	0.40
		2	0.313	0.007	$2.07 \cdot 10^3$	0.018	$1.51 \cdot 10^{15}$	$7.94 \cdot 10^4$	0.39
		3	0.279	0.005	$8.25 \cdot 10^3$	0.008	$4.30 \cdot 10^{15}$	$6.39 \cdot 10^4$	0.71
		4	0.530	0.007	$2.05 \cdot 10^4$	0.008	$1.26 \cdot 10^{16}$	$8.14 \cdot 10^4$	0.84
		5	2.527	0.016	$7.15 \cdot 10^3$	0.019	$6.37 \cdot 10^{15}$	$2.48 \cdot 10^4$	0.82
	$\beta = 3$	1	0.591	0.009	$5.59 \cdot 10^2$	0.015	$2.09 \cdot 10^{14}$	$7.05 \cdot 10^4$	0.61
		2	0.555	0.009	$9.88 \cdot 10^2$	0.018	$5.50 \cdot 10^{14}$	$2.90 \cdot 10^4$	0.51
		3	0.503	0.007	$8.57 \cdot 10^3$	0.008	$3.79 \cdot 10^{15}$	$5.63 \cdot 10^4$	0.84
		4	1.492	0.012	$6.56 \cdot 10^3$	0.014	$3.94 \cdot 10^{15}$	$2.55 \cdot 10^4$	0.86
		5	8.095	0.029	$6.81 \cdot 10^2$	0.042	$7.17 \cdot 10^{14}$	$2.79 \cdot 10^3$	0.69

Tabella 6.9: Risultati finali del calcolo esatto.

		Zona	$\frac{r_c}{R_{ws}}$	$\langle \Delta E \rangle$	$\langle F \rangle$	$\langle \Delta v \rangle$
$L = 100 R_{ws}$	$\beta = 1$	1	0.289	$3.04 \cdot 10^3 - 5.05 \cdot 10^3$	$1.71 \cdot 10^{15} - 2.90 \cdot 10^{15}$	$5.76 \cdot 10^5 - 9.77 \cdot 10^5$
		2	0.313	$7.21 \cdot 10^3 - 1.19 \cdot 10^4$	$4.72 \cdot 10^{15} - 7.85 \cdot 10^{15}$	$2.48 \cdot 10^5 - 4.13 \cdot 10^5$
		3	0.279	$3.34 \cdot 10^4 - 5.61 \cdot 10^4$	$1.70 \cdot 10^{16} - 2.98 \cdot 10^{16}$	$2.52 \cdot 10^5 - 4.43 \cdot 10^5$
		4	0.530	$9.44 \cdot 10^4 - 1.59 \cdot 10^5$	$5.10 \cdot 10^{16} - 9.26 \cdot 10^{16}$	$3.31 \cdot 10^5 - 6.00 \cdot 10^5$
		5	2.527	$3.49 \cdot 10^4 - 5.73 \cdot 10^4$	$2.16 \cdot 10^{16} - 3.85 \cdot 10^{16}$	$8.40 \cdot 10^4 - 1.50 \cdot 10^5$
	$\beta = 3$	1	0.591	$2.30 \cdot 10^3 - 3.78 \cdot 10^3$	$6.99 \cdot 10^{14} - 1.17 \cdot 10^{15}$	$2.35 \cdot 10^5 - 3.93 \cdot 10^5$
		2	0.555	$3.91 \cdot 10^3 - 6.40 \cdot 10^3$	$1.63 \cdot 10^{15} - 2.64 \cdot 10^{15}$	$8.58 \cdot 10^4 - 1.39 \cdot 10^5$
		3	0.503	$3.91 \cdot 10^4 - 6.61 \cdot 10^4$	$1.56 \cdot 10^{16} - 2.85 \cdot 10^{16}$	$2.32 \cdot 10^5 - 4.23 \cdot 10^5$
		4	1.492	$3.12 \cdot 10^4 - 5.13 \cdot 10^4$	$1.28 \cdot 10^{16} - 2.22 \cdot 10^{16}$	$8.29 \cdot 10^4 - 1.44 \cdot 10^5$
		5	8.095	$3.22 \cdot 10^3 - 5.11 \cdot 10^3$	$2.44 \cdot 10^{15} - 3.98 \cdot 10^{15}$	$9.50 \cdot 10^3 - 1.55 \cdot 10^4$
$L = 200 R_{ws}$	$\beta = 1$	1	0.289	$2.07 \cdot 10^3 - 3.38 \cdot 10^3$	$1.05 \cdot 10^{15} - 1.69 \cdot 10^{15}$	$3.53 \cdot 10^5 - 5.69 \cdot 10^5$
		2	0.313	$4.86 \cdot 10^3 - 7.89 \cdot 10^3$	$2.93 \cdot 10^{15} - 4.63 \cdot 10^{15}$	$1.54 \cdot 10^5 - 2.44 \cdot 10^5$
		3	0.279	$2.19 \cdot 10^4 - 3.68 \cdot 10^4$	$1.02 \cdot 10^{16} - 1.81 \cdot 10^{16}$	$1.51 \cdot 10^5 - 2.69 \cdot 10^5$
		4	0.530	$5.91 \cdot 10^4 - 1.00 \cdot 10^5$	$3.15 \cdot 10^{16} - 5.96 \cdot 10^{16}$	$2.04 \cdot 10^5 - 3.86 \cdot 10^5$
		5	2.527	$2.13 \cdot 10^4 - 3.56 \cdot 10^4$	$1.48 \cdot 10^{16} - 2.74 \cdot 10^{16}$	$5.77 \cdot 10^4 - 1.06 \cdot 10^5$
	$\beta = 3$	1	0.591	$1.49 \cdot 10^3 - 2.43 \cdot 10^3$	$4.34 \cdot 10^{14} - 7.29 \cdot 10^{14}$	$1.46 \cdot 10^5 - 2.45 \cdot 10^5$
		2	0.555	$2.56 \cdot 10^3 - 4.14 \cdot 10^3$	$1.05 \cdot 10^{15} - 1.68 \cdot 10^{15}$	$5.54 \cdot 10^4 - 8.82 \cdot 10^4$
		3	0.503	$2.45 \cdot 10^4 - 4.16 \cdot 10^4$	$9.63 \cdot 10^{15} - 1.83 \cdot 10^{16}$	$1.43 \cdot 10^5 - 2.73 \cdot 10^5$
		4	1.492	$1.93 \cdot 10^4 - 3.22 \cdot 10^4$	$8.57 \cdot 10^{15} - 1.56 \cdot 10^{16}$	$5.55 \cdot 10^4 - 1.01 \cdot 10^5$
		5	8.095	$1.97 \cdot 10^3 - 3.17 \cdot 10^3$	$1.55 \cdot 10^{15} - 2.61 \cdot 10^{15}$	$6.03 \cdot 10^3 - 1.02 \cdot 10^4$
$L = 500 R_{ws}$	$\beta = 1$	1	0.289	$1.25 \cdot 10^3 - 1.99 \cdot 10^3$	$6.32 \cdot 10^{14} - 9.32 \cdot 10^{14}$	$2.13 \cdot 10^5 - 3.14 \cdot 10^5$
		2	0.313	$2.94 \cdot 10^3 - 4.62 \cdot 10^3$	$1.86 \cdot 10^{15} - 2.69 \cdot 10^{15}$	$9.81 \cdot 10^4 - 1.41 \cdot 10^5$
		3	0.279	$1.26 \cdot 10^4 - 2.10 \cdot 10^4$	$5.99 \cdot 10^{15} - 1.03 \cdot 10^{16}$	$8.90 \cdot 10^4 - 1.53 \cdot 10^5$
		4	0.530	$3.26 \cdot 10^4 - 5.55 \cdot 10^4$	$1.76 \cdot 10^{16} - 3.47 \cdot 10^{16}$	$1.14 \cdot 10^5 - 2.25 \cdot 10^5$
		5	2.527	$1.14 \cdot 10^4 - 1.94 \cdot 10^4$	$8.93 \cdot 10^{15} - 1.72 \cdot 10^{16}$	$3.47 \cdot 10^4 - 6.69 \cdot 10^4$
	$\beta = 3$	1	0.591	$8.53 \cdot 10^2 - 1.38 \cdot 10^3$	$2.77 \cdot 10^{14} - 4.67 \cdot 10^{14}$	$9.34 \cdot 10^4 - 1.57 \cdot 10^5$
		2	0.555	$1.48 \cdot 10^3 - 2.36 \cdot 10^3$	$6.82 \cdot 10^{14} - 1.06 \cdot 10^{15}$	$3.59 \cdot 10^4 - 5.58 \cdot 10^4$
		3	0.503	$1.36 \cdot 10^4 - 2.31 \cdot 10^4$	$5.33 \cdot 10^{15} - 1.06 \cdot 10^{16}$	$7.92 \cdot 10^4 - 1.57 \cdot 10^5$
		4	1.492	$1.04 \cdot 10^4 - 1.76 \cdot 10^4$	$5.35 \cdot 10^{15} - 1.02 \cdot 10^{16}$	$3.47 \cdot 10^4 - 6.60 \cdot 10^4$
		5	8.095	$1.08 \cdot 10^3 - 1.75 \cdot 10^3$	$1.00 \cdot 10^{15} - 1.67 \cdot 10^{15}$	$3.90 \cdot 10^3 - 6.50 \cdot 10^3$
$L = 1000 R_{ws}$	$\beta = 1$	1	0.289	$8.72 \cdot 10^2 - 1.33 \cdot 10^3$	$4.97 \cdot 10^{14} - 6.80 \cdot 10^{14}$	$1.67 \cdot 10^5 - 2.29 \cdot 10^5$
		2	0.313	$2.07 \cdot 10^3 - 3.12 \cdot 10^3$	$1.51 \cdot 10^{15} - 2.01 \cdot 10^{15}$	$7.94 \cdot 10^4 - 1.06 \cdot 10^5$
		3	0.279	$8.25 \cdot 10^3 - 1.35 \cdot 10^4$	$4.30 \cdot 10^{15} - 7.08 \cdot 10^{15}$	$6.39 \cdot 10^4 - 1.05 \cdot 10^5$
		4	0.530	$2.05 \cdot 10^4 - 3.49 \cdot 10^4$	$1.26 \cdot 10^{16} - 2.43 \cdot 10^{16}$	$8.14 \cdot 10^4 - 1.58 \cdot 10^5$
		5	2.527	$7.15 \cdot 10^3 - 1.22 \cdot 10^4$	$6.37 \cdot 10^{15} - 1.24 \cdot 10^{16}$	$2.48 \cdot 10^4 - 4.81 \cdot 10^4$
	$\beta = 3$	1	0.591	$5.59 \cdot 10^2 - 9.02 \cdot 10^2$	$2.09 \cdot 10^{14} - 3.44 \cdot 10^{14}$	$7.05 \cdot 10^4 - 1.16 \cdot 10^5$
		2	0.555	$9.88 \cdot 10^2 - 1.55 \cdot 10^3$	$5.50 \cdot 10^{14} - 8.10 \cdot 10^{14}$	$2.90 \cdot 10^4 - 4.26 \cdot 10^4$
		3	0.503	$8.57 \cdot 10^3 - 1.46 \cdot 10^4$	$3.79 \cdot 10^{15} - 7.40 \cdot 10^{15}$	$5.63 \cdot 10^4 - 1.10 \cdot 10^5$
		4	1.492	$6.56 \cdot 10^3 - 1.10 \cdot 10^4$	$3.94 \cdot 10^{15} - 7.32 \cdot 10^{15}$	$2.55 \cdot 10^4 - 4.74 \cdot 10^4$
		5	8.095	$6.81 \cdot 10^2 - 1.11 \cdot 10^3$	$7.17 \cdot 10^{14} - 1.18 \cdot 10^{15}$	$2.79 \cdot 10^3 - 4.59 \cdot 10^3$

Tabella 6.7: **Risultati del calcolo esatto per  $N_{free} = N_{medio}$ .** Sono qui riportati i risultati ottenuti dall'utilizzo del modello per vortici di lunghezza tale da poter svolgere il calcolo in modo esatto ( $L \leq 1000 R_{ws}$ ). La condizione di vortice libero imposta è  $N_{free} = N_{medio}$ . Le zone 1 e 2 sono sempre in condizione di interstitial pinning, mentre tutte le altre sono in condizione di nuclear pinning. Tutte le grandezze sono date in unità di misura del sistema *cgs*, tranne  $\langle d \rangle$ , che è la distanza media che deve percorrere il vortice nel processo di depinning in unità del raggio di Wigner-Seitz,  $\langle \Delta N \rangle$  e  $\langle \frac{\Delta N}{d} \rangle$ , che sono dati per unità di lunghezza, dove l'unità di lunghezza considerata è il raggio di Wigner-Seitz.

Tabella 6.8: **Risultati del calcolo esatto per  $N_{free} = N_{medio} \pm \sigma$ .** Sono qui riportati i risultati ottenuti dall'utilizzo del modello per vortici di lunghezza tale da poter svolgere il calcolo in modo esatto ( $L \leq 1000 R_{ws}$ ). La condizione di vortice libero imposta è  $N_{free} = N_{medio} \pm \sigma$ . Le zone 1 e 2 sono sempre in condizione di interstitial pinning, mentre tutte le altre sono in condizione di nuclear pinning. Tutte le grandezze sono date in unità di misura del sistema *cgs*, tranne  $\langle d \rangle$ , che è la distanza media che deve percorrere il vortice nel processo di depinning in unità del raggio di Wigner-Seitz,  $\langle \Delta N \rangle$  e  $\langle \frac{\Delta N}{d} \rangle$ , che sono dati per unità di lunghezza, dove l'unità di lunghezza considerata è il raggio di Wigner-Seitz.

Tabella 6.9: **Risultati finali del calcolo esatto.** Nella tabella sono riportati i range in cui risiedono i valori accettabili delle grandezze calcolate per vortici di lunghezza tale da poter svolgere il calcolo in modo esatto ( $L \leq 1000 R_{ws}$ ). Questo range è calcolato semplicemente imponendo il limite superiore ed inferiore riportati in precedenza. Tutte le grandezze sono date in unità di misura del sistema *cgs*.

		Zona	$\frac{r_c}{R_{ws}}$	$\langle \Delta E \rangle$	$\langle F \rangle$	$\langle \Delta v \rangle$
$L = 1500 R_{ws}$	$\beta = 1$	1	0.289	$6.11 \cdot 10^2 - 9.24 \cdot 10^2$	$3.48 \cdot 10^{14} - 4.71 \cdot 10^{14}$	$1.17 \cdot 10^5 - 1.59 \cdot 10^5$
		2	0.313	$1.46 \cdot 10^3 - 2.38 \cdot 10^3$	$1.07 \cdot 10^{15} - 1.53 \cdot 10^{15}$	$5.62 \cdot 10^4 - 8.06 \cdot 10^4$
		3	0.279	$6.63 \cdot 10^3 - 1.05 \cdot 10^4$	$3.46 \cdot 10^{15} - 5.51 \cdot 10^{15}$	$5.14 \cdot 10^4 - 8.19 \cdot 10^4$
		4	0.530	$1.47 \cdot 10^4 - 2.46 \cdot 10^4$	$8.97 \cdot 10^{15} - 1.71 \cdot 10^{16}$	$5.81 \cdot 10^4 - 1.11 \cdot 10^5$
		5	2.527	$5.07 \cdot 10^3 - 9.26 \cdot 10^3$	$4.51 \cdot 10^{15} - 9.35 \cdot 10^{15}$	$1.75 \cdot 10^4 - 3.63 \cdot 10^4$
	$\beta = 3$	1	0.591	$3.72 \cdot 10^2 - 5.93 \cdot 10^2$	$1.39 \cdot 10^{14} - 2.26 \cdot 10^{14}$	$4.70 \cdot 10^4 - 7.62 \cdot 10^4$
		2	0.555	$7.49 \cdot 10^2 - 1.19 \cdot 10^3$	$4.17 \cdot 10^{14} - 6.22 \cdot 10^{14}$	$2.19 \cdot 10^4 - 3.28 \cdot 10^4$
		3	0.503	$6.44 \cdot 10^3 - 1.07 \cdot 10^4$	$2.85 \cdot 10^{15} - 5.43 \cdot 10^{15}$	$4.23 \cdot 10^4 - 8.06 \cdot 10^4$
		4	1.492	$4.45 \cdot 10^3 - 7.44 \cdot 10^3$	$2.68 \cdot 10^{15} - 4.94 \cdot 10^{15}$	$1.73 \cdot 10^4 - 3.20 \cdot 10^4$
		5	8.095	$4.41 \cdot 10^2 - 6.97 \cdot 10^2$	$4.64 \cdot 10^{14} - 7.41 \cdot 10^{14}$	$1.80 \cdot 10^3 - 2.88 \cdot 10^3$
$L = 2000 R_{ws}$	$\beta = 1$	1	0.289	$5.33 \cdot 10^2 - 7.99 \cdot 10^2$	$3.03 \cdot 10^{14} - 4.07 \cdot 10^{14}$	$1.02 \cdot 10^5 - 1.37 \cdot 10^5$
		2	0.313	$1.24 \cdot 10^3 - 1.95 \cdot 10^3$	$9.04 \cdot 10^{14} - 1.26 \cdot 10^{15}$	$4.76 \cdot 10^4 - 6.61 \cdot 10^4$
		3	0.279	$5.31 \cdot 10^3 - 8.48 \cdot 10^3$	$2.77 \cdot 10^{15} - 4.45 \cdot 10^{15}$	$4.11 \cdot 10^4 - 6.61 \cdot 10^4$
		4	0.530	$1.15 \cdot 10^4 - 1.98 \cdot 10^4$	$7.04 \cdot 10^{15} - 1.38 \cdot 10^{16}$	$4.56 \cdot 10^4 - 8.92 \cdot 10^4$
		5	2.527	$3.85 \cdot 10^3 - 7.11 \cdot 10^3$	$3.42 \cdot 10^{15} - 7.18 \cdot 10^{15}$	$1.33 \cdot 10^4 - 2.79 \cdot 10^4$
	$\beta = 3$	1	0.591	$3.11 \cdot 10^2 - 4.87 \cdot 10^2$	$1.16 \cdot 10^{14} - 1.86 \cdot 10^{14}$	$3.92 \cdot 10^4 - 6.26 \cdot 10^4$
		2	0.555	$5.89 \cdot 10^2 - 9.81 \cdot 10^2$	$3.28 \cdot 10^{14} - 5.13 \cdot 10^{14}$	$1.73 \cdot 10^4 - 2.70 \cdot 10^4$
		3	0.503	$5.26 \cdot 10^3 - 8.82 \cdot 10^3$	$2.33 \cdot 10^{15} - 4.46 \cdot 10^{15}$	$3.46 \cdot 10^4 - 6.63 \cdot 10^4$
		4	1.492	$3.48 \cdot 10^3 - 5.98 \cdot 10^3$	$2.09 \cdot 10^{15} - 3.97 \cdot 10^{15}$	$1.35 \cdot 10^4 - 2.57 \cdot 10^4$
		5	8.095	$3.69 \cdot 10^2 - 5.88 \cdot 10^2$	$3.88 \cdot 10^{14} - 6.25 \cdot 10^{14}$	$1.51 \cdot 10^3 - 2.43 \cdot 10^3$
$L = 3000 R_{ws}$	$\beta = 1$	1	0.289	$3.87 \cdot 10^2 - 6.02 \cdot 10^2$	$2.21 \cdot 10^{14} - 3.07 \cdot 10^{14}$	$7.43 \cdot 10^4 - 1.03 \cdot 10^5$
		2	0.313	$9.29 \cdot 10^2 - 1.47 \cdot 10^3$	$6.77 \cdot 10^{14} - 9.46 \cdot 10^{14}$	$3.57 \cdot 10^4 - 4.98 \cdot 10^4$
		3	0.279	$4.04 \cdot 10^3 - 6.62 \cdot 10^3$	$2.11 \cdot 10^{15} - 3.47 \cdot 10^{15}$	$3.13 \cdot 10^4 - 5.16 \cdot 10^4$
		4	0.530	$9.35 \cdot 10^3 - 1.58 \cdot 10^4$	$5.72 \cdot 10^{15} - 1.10 \cdot 10^{16}$	$3.71 \cdot 10^4 - 7.11 \cdot 10^4$
		5	2.527	$3.19 \cdot 10^3 - 5.74 \cdot 10^3$	$2.84 \cdot 10^{15} - 5.80 \cdot 10^{15}$	$1.10 \cdot 10^4 - 2.25 \cdot 10^4$
	$\beta = 3$	1	0.591	$2.48 \cdot 10^2 - 3.89 \cdot 10^2$	$9.28 \cdot 10^{13} - 1.48 \cdot 10^{14}$	$3.13 \cdot 10^4 - 5.00 \cdot 10^4$
		2	0.555	$4.54 \cdot 10^2 - 7.50 \cdot 10^2$	$2.53 \cdot 10^{14} - 3.92 \cdot 10^{14}$	$1.33 \cdot 10^4 - 2.06 \cdot 10^4$
		3	0.503	$3.89 \cdot 10^3 - 6.54 \cdot 10^3$	$1.72 \cdot 10^{15} - 3.31 \cdot 10^{15}$	$2.55 \cdot 10^4 - 4.92 \cdot 10^4$
		4	1.492	$2.88 \cdot 10^3 - 4.94 \cdot 10^3$	$1.73 \cdot 10^{15} - 3.28 \cdot 10^{15}$	$1.12 \cdot 10^4 - 2.12 \cdot 10^4$
		5	8.095	$2.88 \cdot 10^2 - 4.56 \cdot 10^2$	$3.03 \cdot 10^{14} - 4.84 \cdot 10^{14}$	$1.18 \cdot 10^3 - 1.88 \cdot 10^3$

Tabella 6.10: **Risultati del calcolo approssimato per  $L > 1000 R_{ws}$ .** Nella tabella sono riportati i range in cui risiedono i valori accettabili delle grandezze calcolate per vortici di lunghezza tale da non poter svolgere il calcolo in modo esatto ( $L > 1000 R_{ws}$ ). I valori riportati sono stati calcolati utilizzando le approssimazioni (6.48) e (6.49) rispettivamente per l'energia di depinning ( $\langle \Delta E \rangle$ ) e per la forza di pinning ( $\langle F \rangle$ ).  $\langle \Delta v \rangle$  è calcolato sempre utilizzando la (6.42). I limiti superiori sono stati calcolati applicando le approssimazioni sui risultati ottenuti per  $N_{free} = N_{medio}$ , mentre i limiti inferiori applicandole sui risultati ottenuti per  $N_{free} = N_{medio} \pm \sigma$ . Tutte le grandezze sono date in unità di misura del sistema *cgs*.

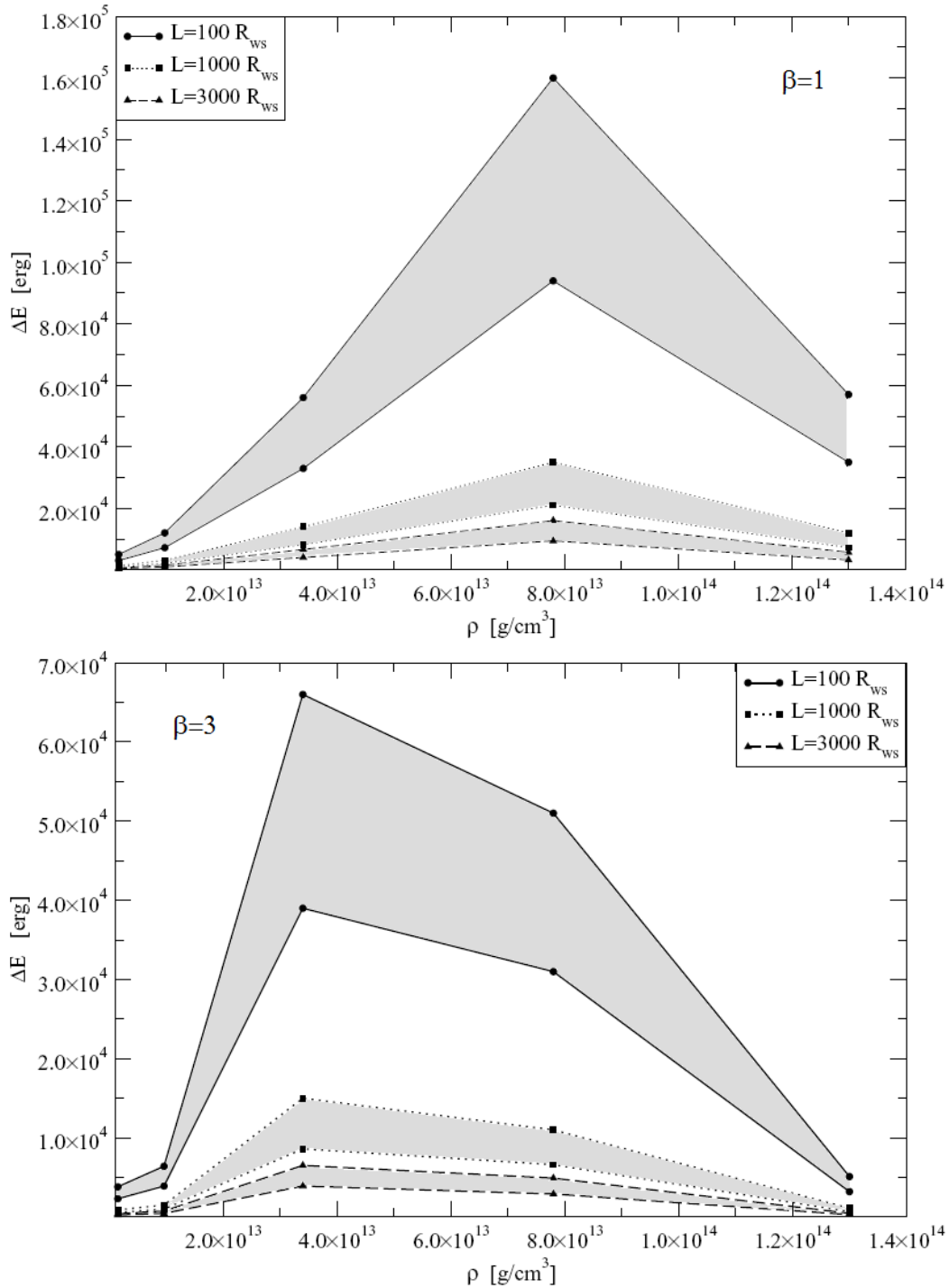


Figura 6.27: **Intervallo di attendibilità per l'energia di depinning.** In figura è rappresentato l'intervallo di attendibilità per l'energia di depinning ( $\langle \Delta E \rangle$ ) nelle due condizioni di polarizzazione studiate,  $\beta = 1$  e  $\beta = 3$ . Questo intervallo è definito dal valore che quest'energia assume al variare di  $N_{free}$ . La regione rappresentata in grigio è quella considerata attendibile in quanto compresa tra il valore massimo e quello minimo che l'energia di depinning può assumere, dati rispettivamente considerando  $N_{free} = N_{medio}$  ed  $N_{free} = N_{medio} + \sigma$  ( $N_{free} = N_{medio} - \sigma$ ) in regime di nucleare (interstitial) pinning. Per maggior chiarezza si sono rappresentati i risultati solamente per vortici di lunghezza pari a  $L = 100 R_{ws}$ ,  $L = 1000 R_{ws}$  e  $L = 3000 R_{ws}$ , lunghezze che sono considerate particolarmente significative in quanto delimitano il range di lunghezza dei vortici studiati e quello dei vortici il cui calcolo è stato svolto in modo esatto. Le grandezze sono date in unità di misura del sistema *cgs*.



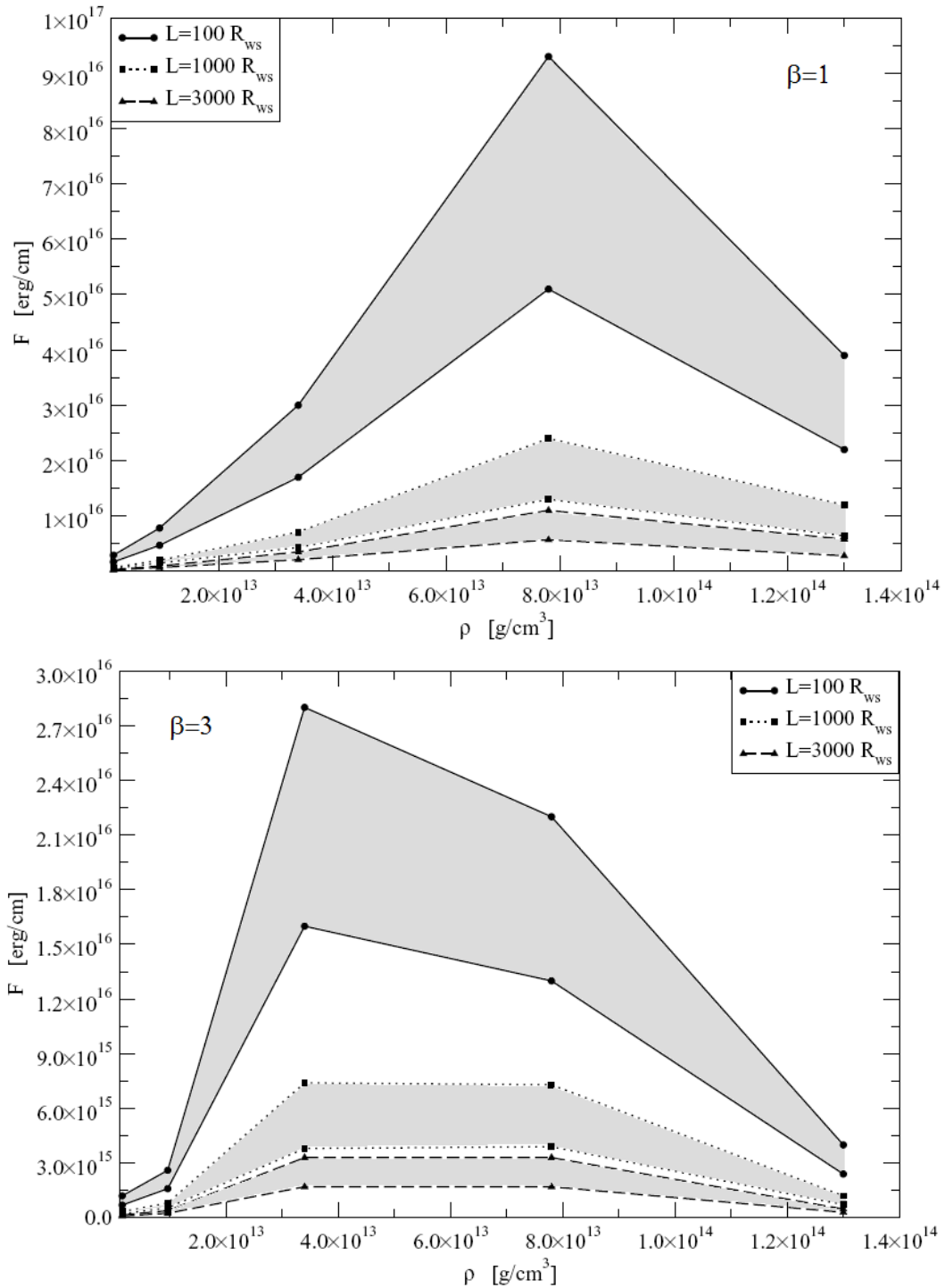


Figura 6.28: **Intervallo di attendibilità per la forza di pinning.** In figura è rappresentato l'intervallo di attendibilità per la forza di pinning ( $\langle F \rangle$ ) nelle due condizioni di polarizzazione studiate,  $\beta = 1$  e  $\beta = 3$ . Questo intervallo è definito dal valore che questa forza assume al variare di  $N_{free}$ . La regione rappresentata in grigio è quella considerata attendibile in quanto compresa tra il valore massimo e quello minimo che la forza di pinning può assumere, dati rispettivamente considerando  $N_{free} = N_{medio}$  ed  $N_{free} = N_{medio} + \sigma$  ( $N_{free} = N_{medio} - \sigma$ ) in regime di nuclear (interstitial) pinning. Per maggior chiarezza si sono rappresentati i risultati solamente per vortici di lunghezza pari a  $L = 100 R_{ws}$ ,  $L = 1000 R_{ws}$  e  $L = 3000 R_{ws}$ , lunghezze che sono considerate particolarmente significative in quanto delimitano il range di lunghezza dei vortici studiati e quello dei vortici il cui calcolo è stato svolto in modo esatto. Le grandezze sono date in unità di misura del sistema *cgs*.

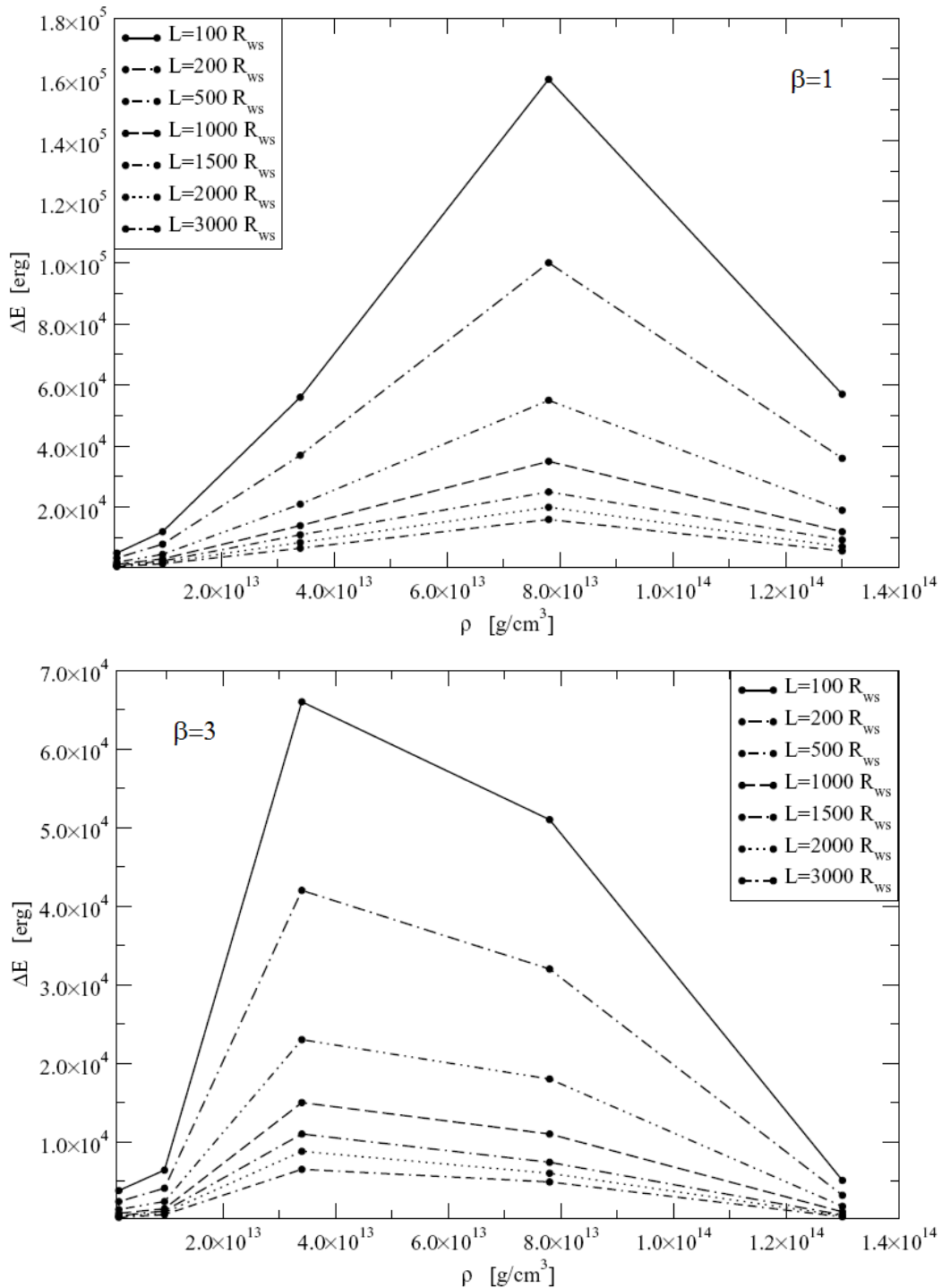


Figura 6.29: **Dipendenza dell'energia di depinning dalla lunghezza del vortice  $L$ .** In figura è rappresentato l'andamento dell'energia di depinning in funzione della lunghezza del vortice per ogni lunghezza che è stata studiata, sia in quelle in cui il calcolo è stato fatto in modo esatto che in quelle in cui è invece stata utilizzata l'approssimazione (6.48). Le grandezze sono date in unità di misura del sistema *cgs*.

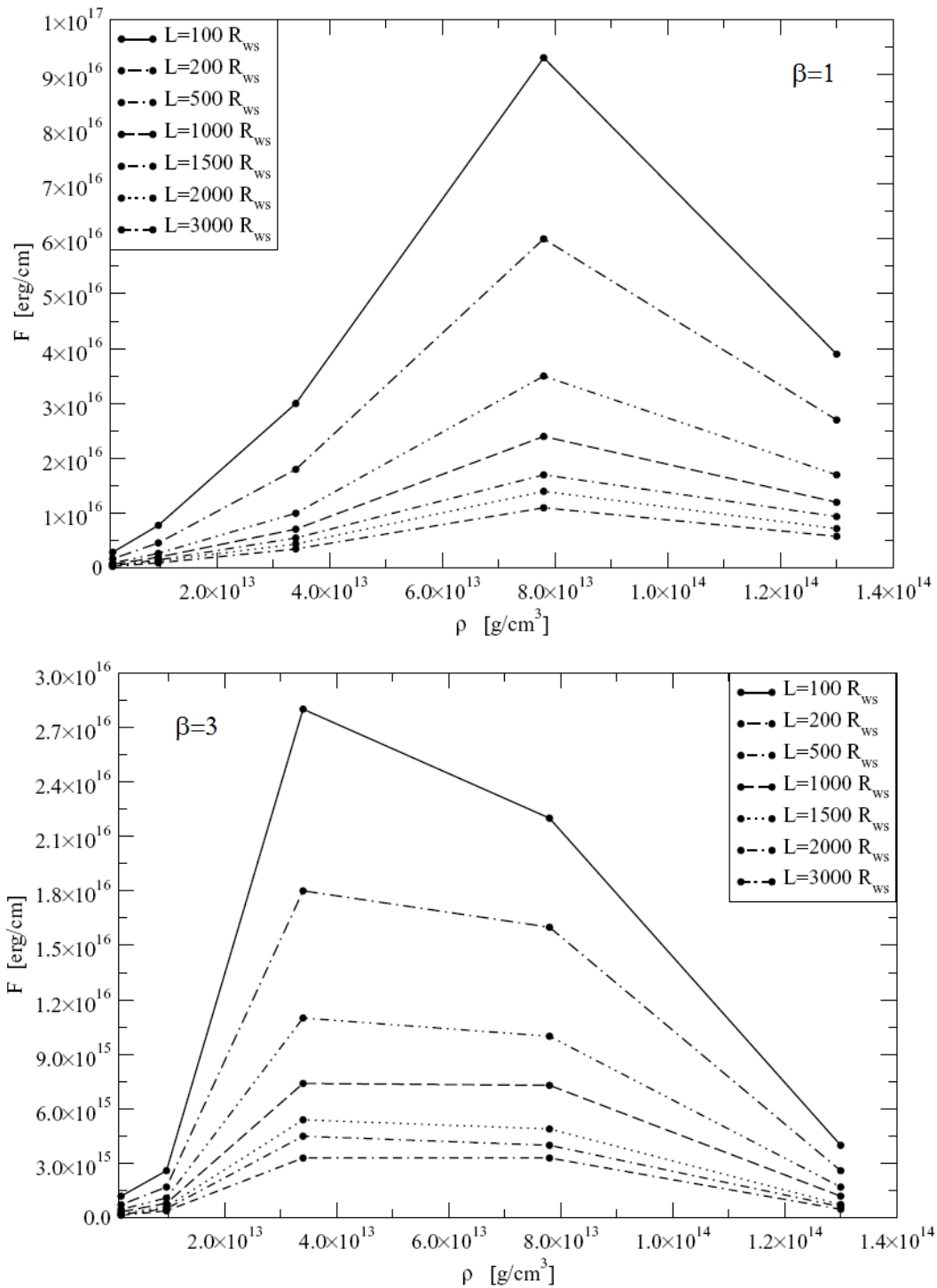


Figura 6.30: Dipendenza della forza di pinning dalla lunghezza del vortice  $L$ . In figura è rappresentato l'andamento della forza di pinning in funzione della lunghezza del vortice per ogni lunghezza che è stata studiata, sia in quelle in cui il calcolo è stato fatto in modo esatto che in quelle in cui è invece stata utilizzata l'approssimazione (6.49). Le grandezze sono date in unità di misura del sistema *cgs*.

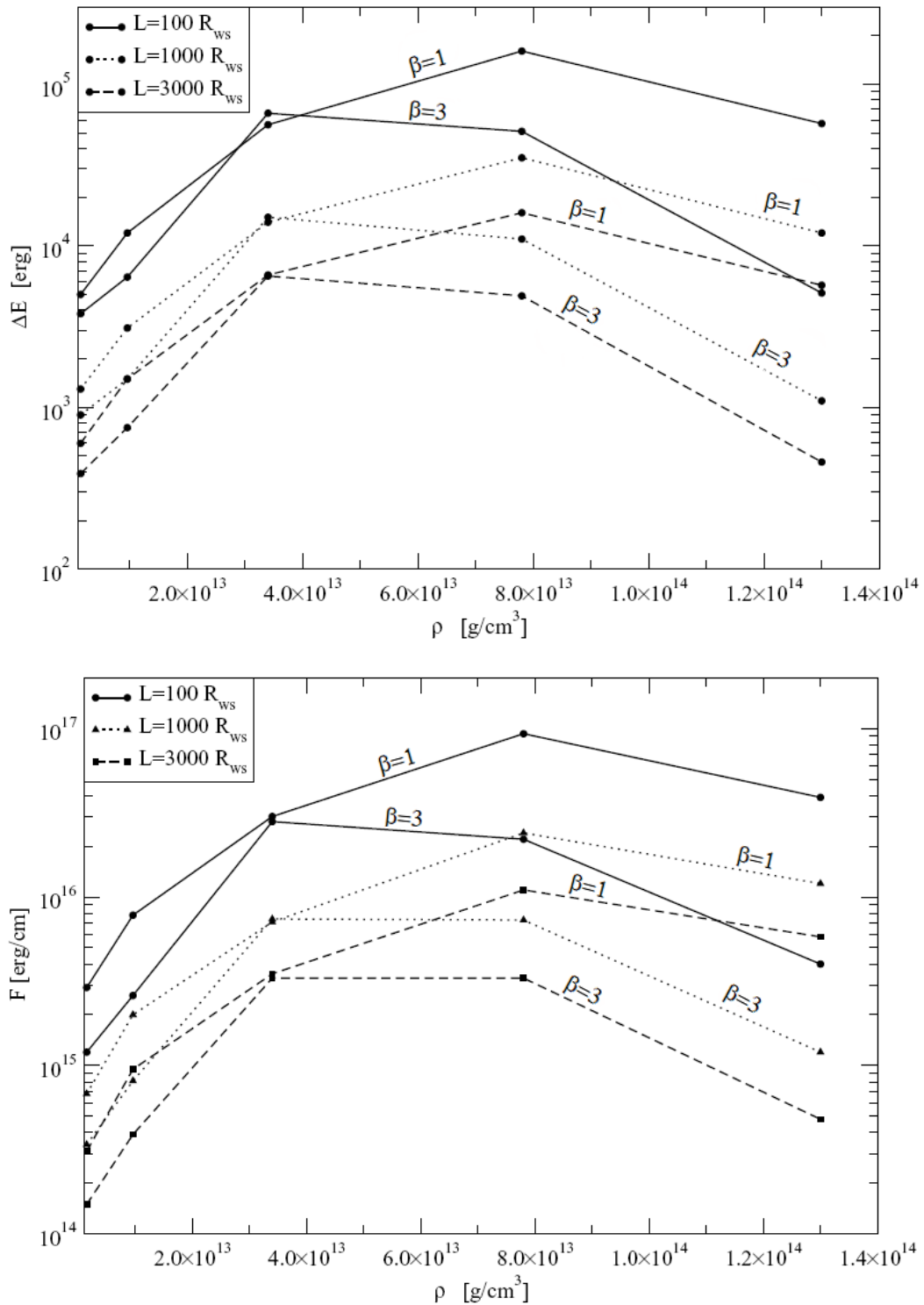


Figura 6.31: Dipendenza dell'energia di depinning e della forza di pinning dalla polarizzazione ( $\beta$ ). In figura è rappresentato l'andamento dell'energia di depinning e della forza di pinning in funzione della polarizzazione per  $\beta = 1$  e  $\beta = 3$ . Anche in questo caso per maggior chiarezza si sono rappresentati solamente i valori ricavati per vortici di lunghezza pari a  $L = 100 R_{ws}$ ,  $L = 1000 R_{ws}$  e  $L = 3000 R_{ws}$ . La condizione di vortice libero imposta è  $N_{free} = N_{medio}$ . Le grandezze sono date in unità di misura del sistema *cgs*.

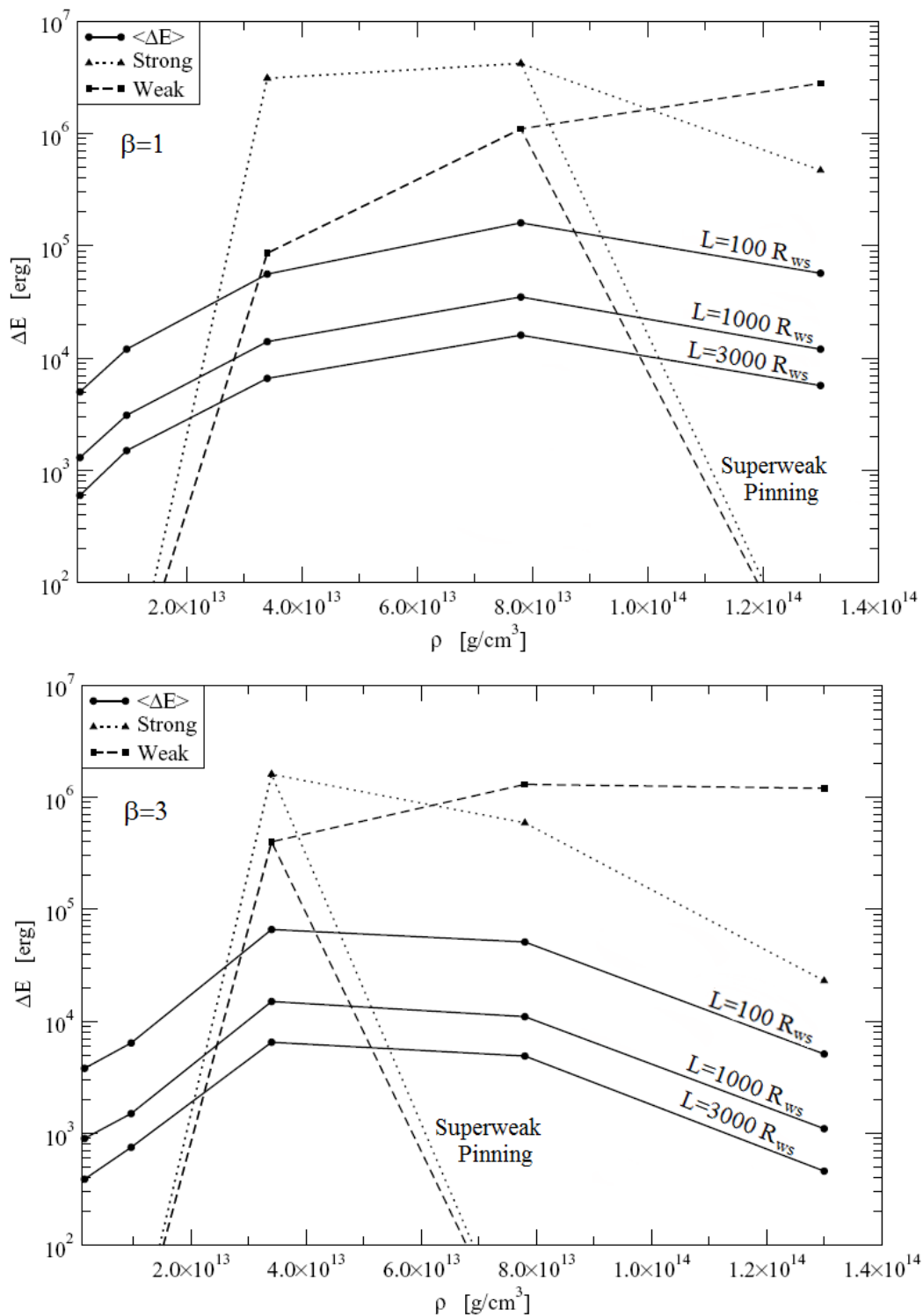


Figura 6.32: **Confronto dell'energia di depinning coi precedenti modelli di legame.** In figura è rappresentato il confronto tra le energie di depinning ricavate dal modello studiato ( $N_{free} = N_{medio}$ ) con le energie di depinning calcolate, invece, utilizzando i modelli di strong pinning (6.4) e weak pinning (6.3), sia così come sono state descritte nel paragrafo 6.2, sia applicando un taglio sull'energia così come ipotizzato da Alpar nel modello del superweak pinning (6.6). Anche in questo caso per maggior chiarezza si sono rappresentati solamente i valori ricavati per vortici di lunghezza pari a  $L = 100 R_{ws}$ ,  $L = 1000 R_{ws}$  e  $L = 3000 R_{ws}$ . Le grandezze sono date in unità di misura del sistema  $cgs$ .

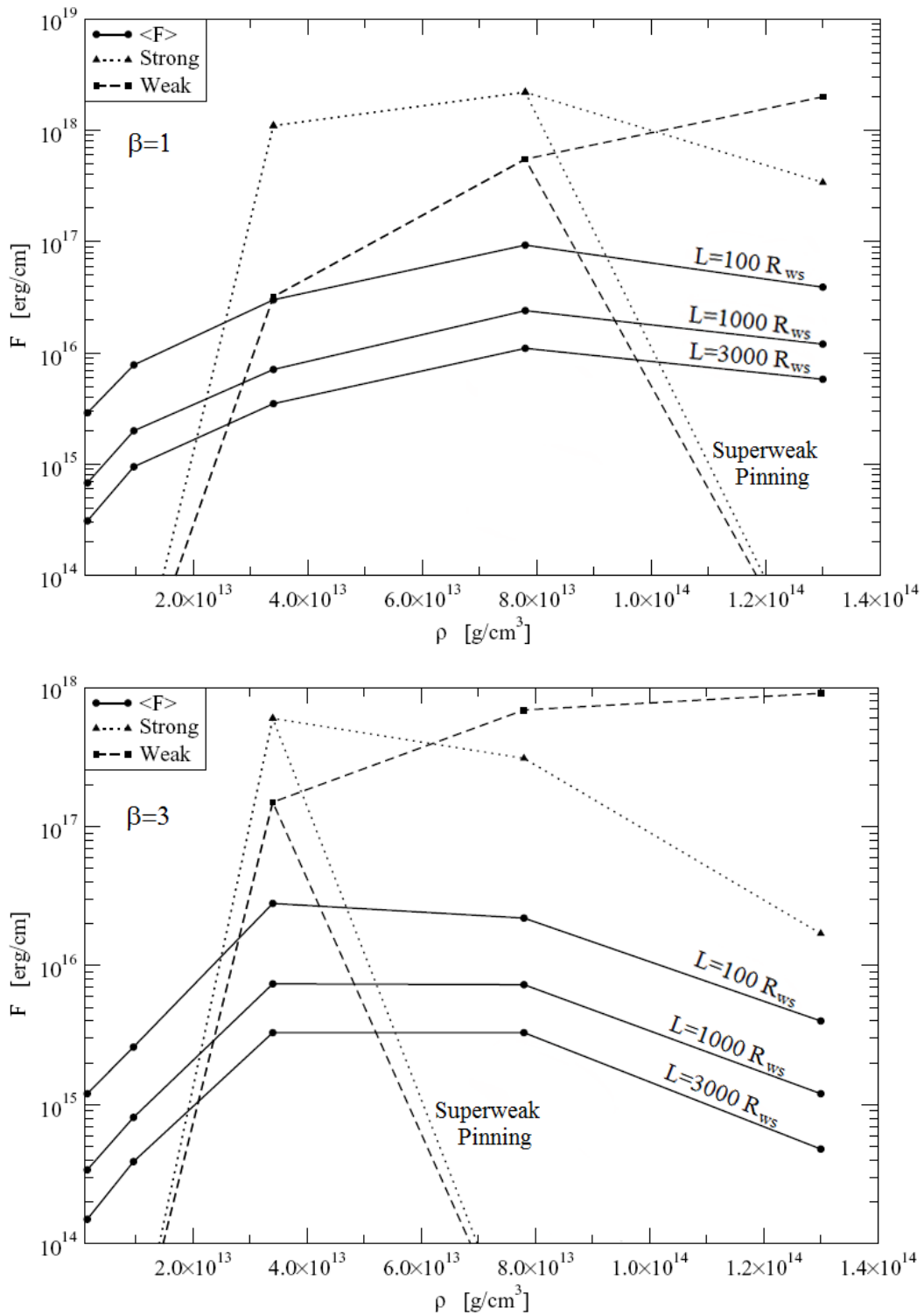


Figura 6.33: **Confronto della forza di pinning coi precedenti modelli di legame.** In figura è rappresentato il confronto tra le forze di pinning ricavate dal modello studiato ( $N_{free} = N_{medio}$ ) con le forze di pinning calcolate, invece, utilizzando i modelli di strong pinning (6.4) e weak pinning (6.3), sia così come sono state descritte nel paragrafo 6.2, sia applicando un taglio sull'energia così come ipotizzato da Alpar nel modello del superweak pinning (6.6). Anche in questo caso per maggior chiarezza si sono rappresentati solamente i valori ricavati per vortici di lunghezza pari a  $L = 100 R_{ws}$ ,  $L = 1000 R_{ws}$  e  $L = 3000 R_{ws}$ . Le grandezze sono date in unità di misura del sistema *cgs*.

# Appendice A

## Parametrizzazione dell'interazione

Lo studio della materia tramite l'utilizzo della teoria HFB presuppone una descrizione accurata dell'interazione nucleare presente tra i nucleoni. Sfortunatamente questa interazione non è ad oggi conosciuta con precisione ed il calcolo delle equazioni HFB può essere quindi svolto solamente tramite una trattazione fenomenologica in cui il termine particella-buca ed il termine di pairing dell'interazione nucleare vengono trattati separatamente, utilizzando quindi due diverse parametrizzazioni.

### A.1 Interazione di Skyrme

Per il termine particella-buca viene utilizzata una parametrizzazione di Skyrme, secondo cui l'interazione viene descritta come

$$\begin{aligned} V_{Skyrme}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = & t_0(1 + x_0 P_\sigma) \delta(\mathbf{r}_{ij}) \\ & + \frac{1}{2} t_1 (1 + x_1 P_\sigma) \frac{1}{\hbar^2} [\mathbf{p}_{ij}^2 \delta(\mathbf{r}_{ij}) + \delta(\mathbf{r}_{ij}) \mathbf{p}_{ij}^2] \\ & + t_2 (1 + x_2 P_\sigma) \frac{1}{\hbar^2} \mathbf{p}_{ij} \cdot \delta(\mathbf{r}_{ij}) \mathbf{p}_{ij} \\ & + \frac{1}{6} t_3 (1 + x_3 P_\sigma) \rho(r)^\gamma \delta(\mathbf{r}_{ij}) \\ & + \frac{i}{\hbar^2} W_0 (\boldsymbol{\sigma}_i + \boldsymbol{\sigma}_j) \cdot [\mathbf{p}_{ij} \times \delta(\mathbf{r}_{ij}) \mathbf{p}_{ij}] \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

dove  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$  è la distanza tra le particelle in esame,  $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j}{2}$  è il punto medio tra le particelle,  $\mathbf{p}_{ij} = -\frac{i}{2} \hbar (\nabla_i - \nabla_j)$  è il momento relativo,  $P_\sigma = \frac{1}{2} (1 + \sigma_i \sigma_j)$  è l'operatore che scambia le coordinate di spin e  $x_0, x_1, x_2, x_3, t_0, t_1, t_2, t_3, W_0$  e  $\gamma$  sono dei parametri che dipendono dal modello studiato (Tab. 3.1).

I termini in cui è divisa questa interazione hanno tutti una forte dipendenza dallo spin delle particelle coinvolte, ma un diverso comportamento rispetto alla loro reciproca posizione: il primo è il termine centrale, che dipende solamente dalla distanza tra le particelle, il secondo ed il terzo sono i termini non-locali, che dipendono anche dal momento relativo, il quarto termine descrive invece la dipendenza dalla densità della materia, mentre il quinto ed ultimo termine descrive l'interazione di spin-orbita.

A partire da questa interazione si può quindi ottenere un hamiltoniana di particella singola dipendente dalla densità di particelle ( $\rho$ ), dalla densità di energia cinetica ( $\tau$ )

e dalla densità di spin ( $J$ )

$$h(r) = \mathcal{K}(r) + h_{coul}(r) + h_0(r) + h_3(r) + h_{eff}(r) + h_{fin}(r) + h_{so}(r) + h_{sg}(r) \quad (\text{A.2})$$

in cui i primi due termini, indipendenti dall'interazione di Skyrme, sono  $\mathcal{K}(r) = \frac{\hbar^2}{2m}\tau$ , il termine cinetico, e  $h_{coul}(r)$ , il termine Coulombiano. Gli ulteriori termini, derivanti dall'interazione (A.1), sono invece il termine a zero range

$$h_0(r) = \frac{1}{4}t_0 \left[ (2 + x_0)\rho^2 - (2x_0 + 1)(\rho_n^2 + \rho_p^2) \right]$$

il termine contenente la dipendenza dalla densità

$$h_3(r) = \frac{1}{24}t_3\rho^\gamma \left[ (2 + x_3)\rho^2 - (2x_3 + 1)(\rho_n^2 + \rho_p^2) \right]$$

quello di massa efficace

$$\begin{aligned} h_{eff} &= \frac{1}{8} [t_2(2 + x_2) + t_1(2 + x_1)] \tau \rho \\ &+ \frac{1}{2} [t_2(1 + 2x_2) - t_1(1 + 2x_1)] (\tau_p \rho_p + \tau_n \rho_n) \end{aligned}$$

quello a range finito

$$\begin{aligned} h_{fin}(r) &= \frac{1}{32} [3t_1(2 + x_1) - t_2(2 + x_2)] (\nabla \rho)^2 \\ &- [3t_1(1 + 2x_1) + t_2(1 + 2x_2)] \left[ (\nabla_p \rho_p)^2 + (\nabla_n \rho_n)^2 \right] \end{aligned}$$

quello di spin-orbita

$$h_{so}(r) = \frac{1}{2}W_0 [\mathbf{J} \cdot \nabla \rho + \mathbf{J}_p \cdot \nabla \rho_p + \mathbf{J}_n \cdot \nabla \rho_n]$$

ed infine quello dovuto all'accoppiamento tensoriale tra spin e gradiente

$$h_{sg}(r) = \frac{1}{16} \left\{ (t_1 - t_2)[J_p^2 + J_n^2] - (t_1x_1 + t_2x_2) \right\}$$

La densità totale di particelle, di energia cinetica e di spin sono rispettivamente definite come somma del contributo dovuto ai neutroni ed ai protoni,  $\rho = \rho_n + \rho_p$ ,  $\tau = \tau_n + \tau_p$  e  $J = J_n + J_p$ , che a temperatura nulla sono descritti come

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \frac{1}{4\pi} \sum_k (2j_k + 1) V_k(r) V_k^*(r) \\ \tau(r) &= \frac{1}{4\pi} \sum_k (2j_k + 1) \left[ \left( \frac{dV_k}{dr} - \frac{V_k}{r} \right)^2 + \frac{l_k(l_k + 1)}{r^2} V_k^2 \right] \\ J(r) &= \frac{1}{4\pi} \sum_k (2j_k + 1) \left[ j_k(j_k + 1) - l_k(l_k + 1) - \frac{3}{4} \right] V_k^2 \end{aligned}$$



mentre a temperatura finita come

$$\begin{aligned}\rho_T(r) &= \frac{1}{4\pi} \sum_k (2j_k + 1) [V_k(r)V_k^*(r)(1 - f_k) + U_k(r)U_k^*(r)f_k] \\ \tau_T(r) &= \frac{1}{4\pi} \sum_k (2j_k + 1) \left\{ \left[ \left( \frac{dV_k}{dr} - \frac{V_k}{r} \right)^2 + \frac{l_k(l_k + 1)}{r^2} V_k^2 \right] (1 - f_k) \right. \\ &\quad \left. + \left[ \left( \frac{dU_k}{dr} - \frac{U_k}{r} \right)^2 + \frac{l_k(l_k + 1)}{r^2} U_k^2 \right] f_k \right\} \\ J_T(r) &= \frac{1}{4\pi} \sum_k (2j_k + 1) \left[ j_k(j_k + 1) - l_k(l_k + 1) - \frac{3}{4} \right] [V_k^2(1 - f_k) + U_k^2 f_k]\end{aligned}$$

dove  $f_k = [1 + \exp(E_k/T)]^{-1}$  è l'unico termine direttamente dipendente dalla temperatura.

Un'ulteriore menzione merita infine il termine coulombiano. Questo termine deriva dall'interazione coulombiana che coinvolge i protoni del nucleo e può essere diviso in due contributi

$$h_{coul}(r) = U_{pp}(r) + U_{pe}(r)$$

che descrivono rispettivamente l'interazione protone-protone ( $U_{pp}(r)$ ) e l'interazione con gli elettroni della cella ( $U_{pe}(r)$ ). Il contributo dell'interazione protone-protone si può calcolare come

$$U_{pp}(r) = e^2 \int d^3r' \rho_p(r') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \hbar c e^2 \left[ \frac{3}{\pi} \rho_p(r) \right]^{1/3}$$

dove il secondo termine è il contributo di scambio calcolato in approssimazione di Slater. Il contributo dell'interazione con gli elettroni si può calcolare, invece, come

$$U_{pe}(r) = -e^2 \rho_e \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -2\pi e^2 \rho_e \left( R_{ws}^2 - \frac{r^2}{3} \right) = -\frac{3}{2} \frac{e^2 Z}{R_{ws}} + \frac{e^2 Z}{2} \frac{r^2}{R_{ws}^3}$$

dove si è utilizzato il risultato dell'integrazione fatta in appendice B (B.1).  $R_{ws}$  è il raggio della cella considerata e  $\rho_e$  è la densità del gas omogeneo di elettroni (4.7).

## A.2 Interazione di Pairing

Le correlazioni di pairing invece vengono descritte da un'interazione a zero range dipendente dalla densità della materia presente

$$v_P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\rho_n(r), \rho_p(r)) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (\text{A.3})$$

dove  $r$  è sempre il punto medio tra le coordinate considerate e  $V(\rho_n(r), \rho_p(r))$  è un funzionale dipendente dalla densità dei protoni e dei neutroni. Il termine di pairing in queste condizioni, risulta, quindi, essere pari a

$$\Delta(r) = \frac{1}{2} V(\rho_n(r), \rho_p(r)) k(r)$$

dove

$$k(r) = \frac{1}{4\pi} \sum_k (2j_k + 1) U_k(r) V_k^*(r)$$

è la densità di pairing a temperatura nulla, mentre

$$k_T(r) = \frac{1}{4\pi} \sum_k (2j_k + 1) U_k^*(r) V_k(r) (1 - 2f_k)$$

è la densità di pairing a temperatura finita.

Nel lavoro svolto sono state fatte due differenti scelte riguardo alla forma del funzionale usato nell'interazione di pairing. Nella prima, chiamata interazione isoscalare (IS), la forma del funzionale non dipende dalla natura delle particelle accoppiate, ma solamente dalla densità totale della materia presente ( $\rho(r) = \rho_n(r) + \rho_p(r)$ ). Sia per l'accoppiamento dei neutroni che per accoppiamento dei protoni si è quindi utilizzato

$$V(\rho_n(r), \rho_p(r)) = V(\rho(r)) = V_0 \left[ 1 - \eta \left( \frac{\rho(r)}{\rho_0} \right)^\alpha \right] \quad (\text{A.4})$$

dove  $\rho_0$  è la densità di saturazione della materia nucleare,  $\eta$  e  $\alpha$  sono dei parametri che determinano la forma del pairing field e  $V_0$  è un parametro che ne determina, invece, l'intensità.

La scelta di questi parametri è stata fatta in modo che l'interazione ottenuta potesse simulare due possibili scenari di accoppiamento della materia nucleare, corrispondenti il primo ad un calcolo BCS utilizzando una realistica interazione a due corpi ricavata studiando lo scattering nucleone-nucleone [22][38], mentre il secondo ad un analogo calcolo in cui si è però tenuto conto anche degli effetti di polarizzazione sull'interazione e sulla self-energy, effetti dovuti alla presenza di un mezzo in cui avviene l'interazione stessa [50][55]. Questi due scenari sono stati chiamati rispettivamente Strong Pairing (ISS), con un massimo gap medio dell'ordine di 3 MeV, e Weak Pairing (ISW), con un massimo gap medio dell'ordine di 1 MeV. I parametri utilizzati per l'interazione ISS sono

$$\begin{aligned} V_0 &= -570 \\ \alpha &= 0.45 \\ \eta &= 0.7 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

mentre per l'interazione ISW

$$\begin{aligned} V_0 &= -430 \\ \alpha &= 0.45 \\ \eta &= 0.7 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

che descrive un'interazione di forma analoga a quella descritta dai parametri ISS, infatti  $\alpha$  ed  $\eta$  sono uguali, ma di intensità inferiore.

La seconda formulazione utilizzata per descrivere l'interazione di pairing, chiamata interazione isovettoriale (IV) [39], considera invece un trattamento differente a seconda che le particelle accoppiate siano neutroni o protoni. L'accoppiamento per i neutroni è definito da un funzionale

$$V_n(\rho(r), \beta) = V_0 \left[ 1 - f_s(\beta) \eta_s \left( \frac{\rho(r)}{\rho_0} \right)^{\alpha_s} - f_n(\beta) \eta_n \left( \frac{\rho(r)}{\rho_0} \right)^{\alpha_n} \right] \quad (\text{A.7})$$

dove sono presenti due funzioni di interpolazione  $f_n(\beta) = \beta$  ed  $f_s(\beta) = 1 - f_n(\beta)$ , scelte in modo da riprodurre il pairing gap sia per materia nucleare omogenea che per materia nucleare simmetrica e  $\beta = \frac{\rho_n(r) - \rho_p(r)}{\rho(r)}$  è un fattore che determina il grado di asimmetria della materia. Analogamente al caso precedente, i parametri  $\eta_s$ ,  $\eta_n$ ,  $\alpha_s$  e  $\alpha_n$  descrivono la forma del pairing field, mentre il parametro  $V_0$  ne descrive l'intensità

$$\begin{aligned}
 V_0 &= -703.86 \\
 \alpha_s &= 0.3865 \\
 \eta_s &= 0.7115 \\
 \alpha_n &= 0.3906 \\
 \eta_n &= 0.9727
 \end{aligned}
 \tag{A.8}$$

Contrariamente a quanto fatto per l'interazione isoscalare, nella scelta dei parametri per l'interazione isovettoriale si è tenuto conto solamente di uno scenario di strong pairing, dove si ottiene un massimo gap medio di circa  $3 \text{ MeV}$ , trascurando lo scenario di weak pairing che viene quindi rappresentato solamente dall'interazione ISW.

La scelta del funzionale per i protoni

$$V_p(\rho(r), \beta) = V_n(\rho(r), -\beta)$$

è stata, invece, fatta al fine di ottenere una totale simmetria di isospin: di fare cioè in modo che la dipendenza dall'abbondanza di neutroni del pairing field per i protoni sia identica alla dipendenza dall'abbondanza di protoni del pairing field per i neutroni. In altre parole, prendendo due sistemi caratterizzati dalla stessa densità totale ed ipotizzando che la densità di protoni del sistema A sia pari alla densità di neutroni del sistema B ( $\rho_p^A = \rho_n^B$ ), tramite questa parametrizzazione si otterranno dei pairing fields tali che

$$\Delta_p^A = \Delta_n^B \quad \text{e} \quad \Delta_n^A = \Delta_p^B$$



# Appendice B

## Calcolo dell'energia coulombiana

In quest'appendice verranno descritti i calcoli svolti per ricavare l'energia coulombiana delle celle di Wigner-Seitz, che sarà poi utilizzata nello studio della struttura della crosta interna delle stelle di neutroni.

L'energia coulombiana può essere calcolata come

$$\begin{aligned}
 E_C &= \frac{1}{2A} \int d^3r d^3r' (\rho_p(r) - \rho_e(r)) \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (\rho_p(r') - \rho_e(r')) = \\
 &= \frac{1}{2A} \int d^3r d^3r' \rho_p(r) \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho_p(r') + \\
 &+ \frac{1}{2A} \int d^3r d^3r' \rho_e(r) \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho_e(r') - \\
 &- \frac{1}{A} \int d^3r d^3r' \rho_p(r) \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho_e(r')
 \end{aligned}$$

dove il primo termine, chiamato  $E_{pp}$ , descrive l'energia di interazione tra i protoni presenti nel nucleo e, come descritto nel testo, deve essere trascurato in quanto già considerato nel calcolo HFB. Il secondo termine, chiamato  $E_{ee}$ , descrive invece l'energia di interazione tra gli elettroni presenti nella cella ed il terzo termine, chiamato  $E_{ep}$ , descrive infine l'energia dell'interazione tra i protoni e gli elettroni.

Calcoliamo innanzitutto il contributo dovuto all'interazione tra gli elettroni

$$E_{ee} = \frac{1}{2A} \int d^3r d^3r' \rho_e(r) \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho_e(r')$$

utilizzando un gas di elettroni omogeneo di densità  $\rho_e(r) = \rho_e$  si può ottenere che

$$\begin{aligned}
 E_{ee} &= \frac{1}{2A} e^2 \rho_e^2 \int d^3r \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\
 &= \frac{1}{2A} e^2 \rho_e^2 \int d^3r \left[ 2\pi \int_0^{R_{ws}} dr' r'^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta}} \right] = \\
 &= \frac{1}{2A} e^2 \rho_e^2 \int d^3r \left[ 2\pi \int_0^{R_{ws}} dr' r'^2 \int_{-1}^1 du \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'u}} \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2A} e^2 \rho_e^2 \int d^3 r \left[ 2\pi \int_0^{R_{ws}} dr' r'^2 \left( -\frac{2}{2rr'} \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'u} \right)_{-1}^1 \right] = \\
&= \frac{1}{2A} e^2 \rho_e^2 \int d^3 r \left[ \frac{2\pi}{r} \int_0^{R_{ws}} dr' r' (|r + r'| - |r - r'|) \right] = \\
&= \frac{1}{2A} e^2 \rho_e^2 \int d^3 r \left[ \frac{2\pi}{r} \left( \int_0^r dr' 2r'^2 + \int_r^{R_{ws}} dr' 2rr' \right) \right] = \\
&= \frac{1}{2A} e^2 \rho_e^2 \int d^3 r \left[ \frac{2\pi}{r} \left( \frac{2}{3} r^3 + r R_{ws}^2 - r^3 \right) \right] = \\
&= \frac{1}{2A} e^2 \rho_e^2 \int d^3 r 2\pi (R_{ws}^2 - \frac{1}{3} r^2) = \\
&= \frac{1}{2A} e^2 \rho_e^2 8\pi^2 \int_0^{R_{ws}} dr r^2 (R_{ws}^2 - \frac{1}{3} r^2) = \\
&= 4\pi^2 \frac{e^2 \rho_e^2}{A} \left[ \frac{R_{ws}^5}{3} - \frac{R_{ws}^5}{15} \right] = \\
&= 4\pi^2 \frac{e^2 \rho_e^2}{A} \frac{4}{15} R_{ws}^5
\end{aligned}$$

sostituendo quindi alla densità di elettroni il suo valore numerico (4.7) è infine possibile ricavare che

$$E_{ee} = \frac{1}{A} \frac{3}{5} \frac{e^2 Z^2}{R_{ws}}$$

È poi anche possibile calcolare il contributo dell'interazione tra gli elettroni ed i protoni del nucleo

$$E_{ep} = -\frac{1}{A} \int d^3 r d^3 r' \rho_p(r) \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho_e(r')$$

utilizzando ancora una distribuzione di elettroni costante, si ricava che

$$\begin{aligned}
E_{ep} &= -\frac{1}{A} e^2 \rho_e \int d^3 r \rho_p(r) \int d^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\
&= -\frac{1}{A} e^2 \rho_e 2\pi \int d^3 r \rho_p(r) (R_{ws}^2 - \frac{1}{3} r^2) = \\
&= -2\pi \frac{e^2 \rho_e}{A} \left[ R_{ws}^2 \int d^3 r \rho_p(r) - \frac{1}{3} \int d^3 r \rho_p(r) r^2 \right]
\end{aligned}$$

dove l'integrale in  $dr'$  è stato sostituito col suo valore numerico

$$\int d^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 2\pi (R_{ws}^2 - \frac{1}{3} r^2) \quad (\text{B.1})$$

così come è stato ricavato nel calcolo dell'energia di interazione tra gli elettroni.

Svolgendo quindi i calcoli dell'integrale nell'unica variabile ancora presente è quindi possibile calcolare che

$$E_{ep} = -2\pi \frac{e^2 \rho_e}{A} \left[ Z R_{ws}^2 - \frac{4\pi}{3} \int_0^{R_{ws}} dr r^4 \rho_p(r) \right]$$

dove si è sfruttato il fatto che il primo dei due integrali descrive semplicemente il numero di protoni della cella ( $\int d^3r \rho_p(r) = Z$ ). Sostituendo, infine, il valore numerico della densità di elettroni (4.7) si ricava, quindi, che

$$E_{ep} = -\frac{1}{A} \frac{3}{2} \frac{Z^2 e^2}{R_{ws}} + \frac{2\pi}{A} \frac{e^2 Z}{R_{ws}^3} \int_0^{R_{ws}} dr \rho_p(r) r^4$$





# Appendice C

## Parametrizzazione del calore specifico

In quest'appendice viene presentata la procedura utilizzata nel calcolo del raffreddamento per interpolare il calore specifico della materia nucleare calcolato tramite la teoria HFB. La dipendenza del calore specifico dalla densità e dalla temperatura è parametrizzata come

$$C_v^n = x_{\text{cl}} R C_v^q + (1 - x_{\text{cl}}) C_v^{\text{cl}}, \quad (\text{C.1})$$

dove  $R$  e  $x_{\text{cl}}$  sono delle funzioni del fit che verranno descritte in seguito,  $C_v^q$  è il calore specifico della materia nucleare in fase normale e  $C_v^{\text{cl}}$  è il limite classico.

Il calore specifico per la materia non superfluida a basse temperature è descritto come

$$C_v^q(T, N, R_{ws}, \rho_n) = \frac{1}{6} \left( \frac{2m_n^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon_F^{1/2} T \left[ 1 - \frac{7}{40} \left( \frac{\pi T}{\varepsilon_F} \right)^2 - \frac{155}{896} \left( \frac{\pi T}{\varepsilon_F} \right)^4 \right] \quad (\text{C.2})$$

dove  $m_n^*$  è la massa efficace dei neutroni ed  $\varepsilon_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m_n^*$  è l'energia di Fermi calcolata a temperatura nulla.

Il limite classico per il calore specifico è raggiunto quando  $T \gg \varepsilon_F$  e può essere descritto come

$$C_v^{\text{cl}}(T, N, R_{ws}, \rho_n) = \frac{3}{2} \rho_{\text{gas}}(T, N, R_{ws}, \rho_n) \quad (\text{C.3})$$

dove  $\rho_{\text{gas}}$  è la densità del gas di neutroni (ricavato analizzando gli estremi della cella) ed ha una forte dipendenza dalla temperatura ( $T$ ), dal numero di neutroni presenti ( $N$ ), dal raggio della cella ( $R_{ws}$ ) e, ovviamente, dalla densità del gas di neutroni a temperatura nulla ( $\rho_n$ ), diversa da quella ricavata a temperatura  $T$  a causa del fenomeno di drip, in cui alcuni neutroni del nucleo avranno energia sufficiente a raggiungere gli stati del continuo, diventando di fatto neutroni liberi. Per  $T < T_{\text{gas}} = 5.5 \text{ MeV}$  il gas di neutroni può essere calcolato come

$$\rho_{\text{gas}}(T, N, R_{ws}, \rho_n) = \rho_n(T = 0) + \frac{T}{T_{\text{gas}}} (\rho_{\text{max}}(N, R_{ws}) - \rho_n(T = 0)) \quad (\text{C.4})$$

mentre per  $T > T_{\text{gas}} = 5.5 \text{ MeV}$  come

$$\rho_{\text{gas}}(T, N, R_{ws}, \rho_n) = \rho_{\text{max}}(N, R_{ws}) \quad (\text{C.5})$$

$N_{cell}$	Weak					Strong				
	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\Delta_0$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\Delta_0$
10	0.567	1.00	1.00	0.001	0.01	0.500	1.000	1.00	0.005	0.02
9	0.567	1.00	1.00	0.001	0.01	0.500	1.000	1.00	0.005	0.03
8	0.567	1.00	1.00	0.001	0.01	0.500	1.000	1.00	0.005	0.08
7	0.567	1.10	1.10	0.001	0.05	0.567	1.000	1.00	0.015	0.15
6	0.400	1.40	1.40	0.001	0.09	0.567	1.100	1.10	0.025	0.36
5	0.567	0.90	0.78	0.005	0.30	0.600	1.000	1.00	0.025	0.87
4	0.567	0.83	0.75	0.010	0.45	0.620	1.000	1.00	0.025	1.18
3	0.567	0.84	0.70	0.010	0.69	0.567	0.970	0.91	0.020	1.75
2	0.567	0.89	0.80	0.010	1.24	0.530	0.930	0.86	0.015	3.10
1	0.567	0.84	0.72	0.010	1.86	0.540	0.935	0.88	0.015	3.95

Tabella C.1: **Parametri usati per descrivere il calore specifico.** In tabella sono riportati i parametri utilizzati per riprodurre il calore specifico in condizioni rispettivamente di weak e strong pairing. Nell'ultima colonna per ogni interazione è riportato inoltre anche il pairing field del gas di neutroni liberi ottenuto a temperatura nulla ( $\Delta_0$ ), il cui valore è espresso in  $MeV$ .

dove  $\rho_{max}(N, R_{ws})$  è la densità che si otterrebbe se i neutroni presenti formassero un gas omogeneo nella cella e  $T_{gas}$  è la temperatura in cui si è ipotizzato che questo avvenga. L'influenza che questo parametro ha sul risultato finale è trascurabile e la scelta del suo valore numerico, purché realistica, risulta quindi arbitraria.

La funzione  $x_{cl}$ , che governa il limite tra regime classico e regime quantistico in (C.1), è definita come

$$x_{cl} = \left(1 + e^{5\left(\frac{\pi T}{\varepsilon_F} - 1\right)}\right)^{-1} \quad (C.6)$$

mentre la funzione  $R$ , che riproduce gli effetti di pairing, per le interazioni trattate è stata parametrizzata come

$$R = R_{YL}(u)f_1(T, \Delta_o, a_0, a_1, a_3) + (1 - f_2(T, \Delta_o, a_0, a_2, a_3)) \quad (C.7)$$

dove

$$R_{YL}(u) = \left(0.4186 + \sqrt{1.007^2 + (0.501u)^2}\right)^{5/2} e^{1.456 - \sqrt{1.456^2 + u^2}} \quad (C.8)$$

è un fattore analogo a quello descritto in [36]. La grandezza  $u$  è funzione di  $x = T/T_c$  dove  $T_c$  è la temperatura critica associata alla transizione tra fase normale e fase superfluida. Per  $x < 1$  la funzione  $u(x)$  è data da

$$u(x) = \sqrt{1-x} \left[1.456 - \frac{0.157}{\sqrt{x}} + \frac{1.764}{x}\right] \quad (C.9)$$

mentre per  $x > 1$  si annulla ( $u(x > 1) = 0$ ).

Le funzioni  $f_1$  e  $f_2$  sono invece introdotte per descrivere la prima transizione, osservata nei calori specifici ricavati dal calcolo HFB, che, come descritto, risulta più graduale di quella ottenuta per gas un omogeneo (descritto in [36]) e sono calcolati come

$$f_1(T, \Delta_o, a_0, a_1, a_3) = \frac{\left(1 + e^{-a_1 a_0 \Delta_o / a_3}\right)}{\left(1 + e^{(T - a_1 a_0 \Delta_o) / a_3}\right)}, \quad (C.10)$$

$$f_2(T, \Delta_o, a_0, a_2, a_3) = \frac{(1 + e^{-a_2 a_0 \Delta_o / a_3})}{(1 + e^{(T - a_2 a_0 \Delta_o) / a_3})}. \quad (\text{C.11})$$

dove  $\Delta_0$  è il gap del gas di neutroni liberi ottenuto a temperatura nulla, il suo valore è collegato alla temperatura critica dalla relazione ( $T_c = a_0 \Delta_0$ ), ed i parametri  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  ed  $a_3$  sono calcolati in modo che il calore specifico ottenuto possa riprodurre accuratamente i risultati ottenuti dal calcolo HFB. I loro valori numerici, che sono stati ricavati dal fit, sono riportati in tabella C.1.

È infine importante osservare che in questa parametrizzazione si è quasi sempre trascurata la seconda transizione, quella dovuta al pairing dei neutroni posti sulla superficie del nucleo. Questa scelta è stata fatta perché questo ulteriore fattore avrebbe imposto nuovi parametri che avrebbero complicato notevolmente la ricerca di un fit accurato. D'altra parte si è considerato che questa transizione, benché di grande importanza teorica, non ha un effetto rilevante sul valore del calore specifico della materia nucleare e che quindi, ai fini di uno studio del raffreddamento, può essere trascurata. Gli unici casi in cui è stata invece considerata sono quelli in cui, a causa della bassa densità dei neutroni liberi, non era presente la prima transizione. In questi casi infatti il comportamento del calore specifico della materia è infatti fortemente influenzato dalla seconda transizione che deve quindi essere considerata (Fig. 5.6).



# Appendice D

## Rotazione superfluida

Per lo studio svolto risulta fondamentale la particolare rotazione dei gas superfluidi, che si dimostra avvenire tramite la formazione di vortici. Questa caratteristica deriva da un'importante proprietà della materia superfluida ed è una diretta conseguenza della condensazione sullo stato fondamentale delle coppie di Cooper, che fa sì che queste siano descritte da una singola funzione d'onda

$$\Psi(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r})e^{i\varphi(\mathbf{r})} \quad (\text{D.1})$$

dove  $|F(\mathbf{r})|^2 \propto n(\mathbf{r})$  e  $\nabla\varphi(\mathbf{r}) \propto \mathbf{v}(\mathbf{r})$ ,  $n(\mathbf{r})$  è la densità di coppie di Cooper e  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  è la velocità macroscopica del superfluido. Questo particolare comportamento porta il superfluido ad essere irrotazionale, infatti

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\nabla\varphi) = 0$$

e, di conseguenza, gli impedisce di avere una classica rotazione di corpo rigido, in cui la velocità della materia dipende direttamente dalla velocità angolare  $\Omega$

$$\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r}$$

da cui deriva direttamente che non ammette irrotazionalità, in quanto

$$\nabla \times \mathbf{v} = 2\Omega \neq 0$$

La rotazione di un superfluido può quindi avvenire solamente in presenza di singolarità che possono essere definite a partire dalla circuitazione della velocità attorno alle singolarità stesse

$$k = \oint_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{v} \quad (\text{D.2})$$

in cui  $k$  ne identifica l'intensità, che per una singolarità isolata risulta essere pari a  $\frac{h}{2m_n}$ , e  $C$  è un qualunque cammino chiuso a cui la singolarità considerata deve essere concatenata. Integrando, ora, la (D.2) su una circonferenza di raggio  $r$  centrata sulla singolarità si potrà ricavare una soluzione axi-simmetrica in cui la velocità di rotazione risulterà pari a

$$\mathbf{v} = \frac{k}{2\pi r} \hat{\theta} \quad (\text{D.3})$$

da cui deriva direttamente che

$$\nabla \times \mathbf{v} = k\delta^2(\mathbf{r})$$

Considerando ora una circonferenza di raggio  $x$  avente origine sull'asse di rotazione della stella, a cui sarà concatenata quindi più di una singolarità, si potrà calcolare che su di essa la circuitazione della velocità vale

$$\begin{aligned}\Gamma &= \oint \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = \sum_i k \int \delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) d\mathbf{S} = \\ &= k \int_0^x n(r') 2\pi r' dr' = kN(x)\end{aligned}\quad (\text{D.4})$$

dove  $N(x)$  è il numero di singolarità concatenate alla circonferenza,  $n(r)$  è la loro densità ed i vari  $r_i$  identificano la posizione dell' $i$ -esima singolarità. Da questo risultato (D.4) si ricava una delle più importanti proprietà della rotazione superfluida: ovvero che la sua circuitazione risulta quantizzata e che il suo valore a distanza  $x$  dall'asse di rotazione della stella risulta proporzionale al numero di singolarità concatenate alla circonferenza avente raggio pari allo stesso  $x$ . Si ricava inoltre che la velocità della materia descritta in (D.3) risulta analoga a quella di un vortice classico rettilineo e si è quindi concluso che i gas superfluidi simulino una rotazione di corpo rigido tramite la formazione di un fascio di vortici quantizzati, ognuno con circuitazione pari a  $k$ . In uno scenario di questo tipo si ricava inoltre, da un semplice calcolo algebrico, che anche la velocità angolare del superfluido risulta essere proporzionale al numero di vortici concatenati alla circonferenza, infatti

$$\Gamma = kN(x) = \oint \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = 2\pi x v(x) = 2\pi x^2 \Omega_s(x) \rightarrow \Omega_s(x) = \frac{kN(x)}{2\pi^2} \quad (\text{D.5})$$

L'unico modo per modificare la velocità di rotazione è quindi una variazione del numero di vortici ( $N(x)$ ), in particolare per avere una decelerazione è necessaria una perdita di vortici o, comunque, una migrazione di questi al di fuori del raggio considerato.

# Appendice E

## Energia di pinning per sito

I vortici presenti all'interno della stella sono soggetti, come descritto nel testo, ad un'interazione, detta di pinning, che li mette in relazione con i nuclei presenti nella crosta interna e che può essere repulsiva o attrattiva a seconda della densità presente. Mentre nel caso repulsivo, dove si parla di interstitial pinning, i vortici tendono a fraporsi fra i nuclei e l'energia del sistema diminuirà all'aumentare della distanza tra questi ed il vortice stesso, nel caso attrattivo, dove si parla di nuclear pinning, i vortici sono attratti dai nuclei e risultano quindi legati ad essi.

Nel lavoro svolto si è utilizzata l'energia di pinning per sito studiata da Pizzochero e Donati nel 2004 [46] e nel 2006 [47], in cui questa è calcolata come differenza dell'energia del sistema nelle due configurazioni estreme: quella in cui il vortice è legato ad un nucleo, che descrive una condizione di nuclear pinning (NP), e quella in cui il vortice è esterno al nucleo, che descrive una condizione di interstitial pinning (IP).

Per calcolare questa energia si è studiata la materia utilizzando l'approssimazione di Wigner-Seitz. Si è inoltre fatta l'approssimazione LDA (Local Density Approximation) secondo cui tutte le proprietà della materia presente dipendono dalla densità della materia stessa e, fissata tale densità, possono quindi essere calcolate univocamente.

In questo scenario la densità di energia del sistema, in funzione della distanza dal centro della stella ( $\mathbf{x}$ ), si ricava dalla somma di quattro contributi [46]. Il primo di questi contributi è quello dell'energia di Fermi del gas superfluido di neutroni, che è considerato totalmente degenere,

$$\varepsilon_F(\mathbf{x}) = \alpha \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_F^2(\mathbf{x})}{2m_n} n(\mathbf{x}) \quad (\text{E.1})$$

dove  $k_F^2(\mathbf{x}) = (3\pi^2 n(\mathbf{x}))^{1/3}$  è il momento di Fermi e dipende, come già accennato, dalla densità del gas ( $n(x)$ ) e  $\alpha \approx 0.5$  è un fattore di correzione che descrive la riduzione dell'energia del gas derivante dalla componente attrattiva dell'interazione nucleone-nucleone [47]. Il secondo è il termine di energia nucleare calcolato secondo il modello di Woods-Saxon

$$\varepsilon_{nuc}(\mathbf{x}) = - \frac{U_0}{1 + e^{\frac{r-R_N}{a}}} n(\mathbf{x}) \quad (\text{E.2})$$

dove  $U_0$  descrive l'intensità dell'interazione ed è calcolata a partire dal numero di neutroni legati al nucleo,  $r$  è la distanza dal centro del nucleo,  $R_N$  è il raggio del

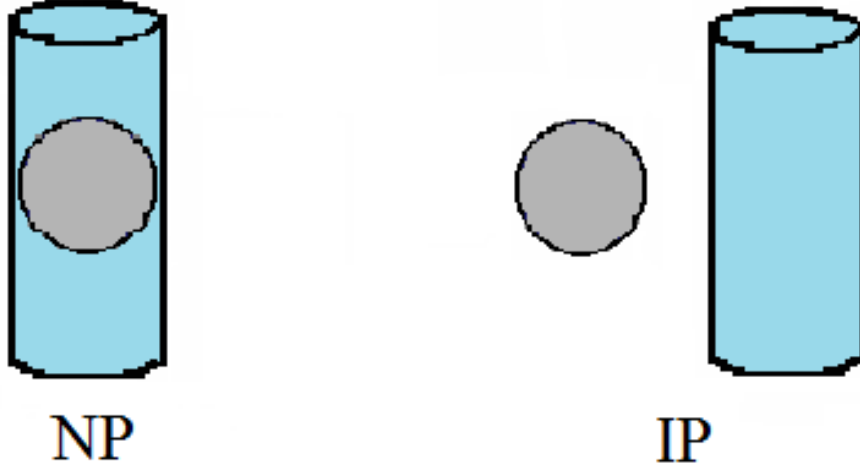


Figura E.1: **Configurazioni considerate nel calcolo dell'energia di pinning per sito.** In figura sono raffigurate le condizioni considerate in [46] ed in [47] per calcolare le energie di pinning per sito. Con NP ed IP si identificano rispettivamente le configurazioni in cui il vortice è rispettivamente legato e non legato al nucleo.

nucleo stesso ed  $a$  è la diffusività (Tab. 6.1). Il terzo termine è quello cinetico dovuto al moto irrotazionale del superfluido attorno al vortice

$$\varepsilon_{kin}(\mathbf{x}) = \frac{\hbar^2}{8m_n R^2} n(\mathbf{x}) \quad (\text{E.3})$$

dove  $R$  è la distanza dall'asse del vortice stesso. Infine c'è il termine di condensazione

$$\varepsilon_{con}(\mathbf{x}) = -\frac{3}{8} \frac{\Delta^2(\mathbf{x})}{\mu_F(\mathbf{x})} n(\mathbf{x}) \quad (\text{E.4})$$

dove  $\Delta(\mathbf{x})$  è l'energia di gap, che come descritto nel paragrafo 6.4 deve tenere conto degli effetti di polarizzazione del mezzo, e  $\mu_F(\mathbf{x}) = \frac{\delta \varepsilon_F(\mathbf{x})}{\delta n(\mathbf{x})}$  è il potenziale chimico di Fermi.

L'energia di pinning di questo sistema si ricava, come già accennato, calcolando la differenza tra l'energia delle due configurazioni estreme: quella di nuclear pinning e quella di interstitial pinning

$$E_p = \Delta E = E_{NP} - E_{IP} = \Delta E_F + \Delta E_{nuc} + \Delta E_{kin} + \Delta E_{con} \quad (\text{E.5})$$

dove, però è necessario tenere conto di alcuni fattori correttivi dovuti alla possibile non conservazione del numero di particelle, alla presenza di nuclei all'interno del gas superfluido e alla presenza di materia in fase normale all'interno del core del vortice.

La prima correzione che è necessario introdurre è il termine che descrive la possibile non conservazione del numero di particelle, che, da un calcolo termodinamico a potenziale chimico ( $\mu$ ) costante, si ricava pari a

$$\Delta E_\mu = -\mu \Delta N \quad (\text{E.6})$$

dove  $\Delta N$  è la variazione nel numero di particelle presenti.



Altrettanto importante è la correzione dovuta alla presenza di nuclei all'interno del gas superfluido

$$\Delta K_N \approx -\frac{3}{2} M_d \frac{\lambda - 1}{\lambda + 2} \left( \frac{\hbar}{2m_n} \right)^2 \frac{1}{R^2} \quad (\text{E.7})$$

grandezza già calcolata in [24], in cui però il segno era opposto a causa di una diversa definizione data all'energia di pinning. Le grandezze considerate sono  $\lambda = \frac{\rho_N}{\rho_G}$ ,  $M_d = \frac{4}{3} \pi R_{ws}^3 \rho_G$ , dove  $\rho_G$  è la densità del gas di neutroni superfluidi,  $\rho_N$  è la densità della materia presente nel nucleo e  $R$  rappresenta ancora la distanza del nucleo dall'asse del vortice.

L'ultima correzione all'energia del sistema è dovuta alla rotazione della materia in fase normale presente all'interno del core del vortice. Nel calcolo dell'energia cinetica (E.3) si è infatti considerata la materia della cella come formata solamente dal gas superfluido. La materia all'interno core del vortice, però, si dimostra essere in fase normale e si dovrà quindi comportare come un corpo rigido, in cui la velocità di rotazione della materia è proporzionale alla distanza dall'asse di rotazione

$$v(R) = \omega R$$

dove  $\omega$ , velocità angolare, è stato calcolato come pari a

$$\omega = \frac{\hbar}{2m_n \xi^2} \quad (\text{E.8})$$

in modo che non siano presenti discontinuità nella velocità di rotazione sul bordo del core (a distanza  $\xi$  dall'asse del vortice). In sintesi  $v(R)$  è una funzione continua, linearmente crescente fino alla fine del core del vortice e decrescente oltre il core stesso, con una proporzionalità inversa alla distanza dall'asse di rotazione ( $v(R) \sim \frac{1}{R}$ ).  $\xi = \frac{\hbar v_F}{\sqrt{6} \Delta(n)}$  è la lunghezza di coerenza del gas superfluido, che rappresenta il raggio del core del vortice, ed è stata definita come quella distanza dall'asse del vortice in cui la densità di energia cinetica eguaglia quella di condensazione ( $\varepsilon_F = \varepsilon_{con}$ ).  $v_F = \frac{\hbar k_F}{m_n}$  è la velocità di Fermi del gas.

Utilizzando questo modello di rotazione è infine possibile calcolare il contributo richiesto. L'influenza di questa correzione sulla differenza di energia tra la configurazione di nuclear ed interstitial pinning è, però, dovuto solamente alla differenza di energia cinetica di rotazione della materia nella regione occupata dal nucleo: al di fuori di questo infatti le due configurazioni sono identiche e la loro differenza di energia è quindi in ogni caso nulla. Essendo  $K(\rho) = \frac{\pi \hbar^2 \rho R_N^5}{15 m_n \xi^4}$  l'energia cinetica di rotazione di una sfera a densità costante, si può infine calcolare che

$$\Delta K_\xi = K(\rho_N) - K(\rho_G) \approx -\frac{\pi \hbar^2}{15 m_n} \frac{R_N^5}{\xi_G^4} \rho_G \quad (\text{E.9})$$

dove si è tenuto conto che  $\xi_N \gg \xi_G$ , e che quindi  $K(\rho_G) \gg K(\rho_N)$ .  $\rho_N$  e  $\rho_G$  sono ancora la densità della materia nel nucleo e dei neutroni liberi.

L'energia di pinning per sito sarà quindi calcolata come

$$E_p = \Delta E_F + \Delta E_{nuc} + \Delta E_{kin} + \Delta E_{con} + \Delta E_\mu + \Delta K_N + \Delta K_\xi \quad (\text{E.10})$$

dove i fattori di correzione  $\Delta E_\mu$ ,  $\Delta K_N$  e  $\Delta K_\xi$  sono dati rispettivamente da (E.6), (E.7) e (E.9). Il vortice tenderà quindi a legarsi al nucleo, condizione di nuclear pinning, se l'energia ottenuta considerando il vortice legato al nucleo stesso avrà minor energia di quella in cui il vortice ne è invece lontano ( $E_p = E_{NP} - E_{IP} < 0$ ), in caso contrario il vortice tenderà a fraporsi fra i nuclei, condizione di interstitial pinning ( $E_p = E_{NP} - E_{IP} > 0$ ). Nel calcolo svolto è stato però sfortunatamente necessario utilizzare una notazione completamente opposta a quella utilizzata in [47]: invece che l'energia così come è stata calcolata è stato infatti necessario considerare il guadagno energetico derivante dal legame col nucleo, che risulta ovviamente positivo in condizione di nuclear pinning e negativo in condizione di interstitial pinning.

# Elenco delle figure

2.1	<b>Reazioni del ciclo p-p.</b> Sono rappresentate solo le reazioni più probabili. Esisteranno altri rami, ma la loro influenza nel complesso energetico è minima. . . .	9
2.2	<b>Reazioni del ciclo CNO.</b> È rappresentato solo il ramo principale, il ramo alternativo ha una probabilità molto bassa e coinvolge il fluoro ( $^{17}F$ ) che ha massa maggiore degli elementi coinvolti nel ramo principale. . . . .	9
2.3	<b>Struttura a cipolla.</b> Sono anche indicate la temperatura e la tipica densità a cui fondono gli elementi. . . . .	12
2.4	<b>Confronto tra la velocità di caduta della materia e la velocità del suono.</b> La velocità del suono è superiore a quella di caduta della materia fino al punto sonico, dove si accumuleranno le onde di pressione. . . . .	12
2.5	<b>Struttura delle stelle di neutroni.</b> Le equazioni di stato sono dette più o meno rigide a seconda dell'intensità della pressione che contrasta l'autogravitazione (Par. 2.4.2). Un modello con equazione di stato più rigida (b) darà una pressione maggiore, quindi una stella avente raggio maggiore e crosta più spessa rispetto ad un modello con equazione di stato morbida (a). . . . .	15
2.6	<b>Pasta Phase.</b> In figura è rappresentata la regione di Pasta Phase, in cui la materia passa dall'essere al suo interno un reticolo nucleare, nella crosta interna (destra), all'essere formata solamente da un gas n-p-e, nel core (sinistra). . . . .	19
2.7	<b>Dipendenza della massa dalla densità centrale.</b> In figura è presentata la dipendenza della massa della stella dalla scelta della densità centrale ottenuta utilizzando tre diverse equazioni di stato, una molto rigida (a), una intermedia (b) ed una, invece, molto morbida (c). . . . .	21
2.8	<b>Rappresentazione di un pulsar glitch.</b> In figura è rappresentato l'andamento della velocità angolare della stella ( $\Omega$ ) in funzione del tempo (t) durante un pulsar glitch. A seguito al repentino aumento di velocità angolare caratteristico dei pulsar glitches ( $\Delta\Omega$ ), è rappresentato anche il periodo di rilassamento in cui la velocità angolare della stella diminuisce fino a tornare ad un valore solo lievemente maggiore di quella che avrebbe avuto se il glitch non fosse avvenuto, questa differenza di velocità angolare in figura è chiamata $\delta\Omega$ . . . . .	21
3.1	<b>Densità di particelle.</b> In figura raffigurata la densità di particelle in funzione dell'energia di particella singola per un sistema soggetto a pairing (linea continua) e non soggetto a pairing (linea tratteggiata). Mentre il primo caso è tipico dello stato fondamentale ricavato dalle teorie BCS ed HFB, il secondo caso è tipico della teoria HF. . . . .	25

- 3.2 **Formazione di coppie di Cooper nelle teorie BCS ed HFB.** In figura è raffigurato il processo di accoppiamento nella formazione delle coppie di Cooper. Si nota che nella teoria BCS si possono accoppiare solamente particelle dello stesso stato energetico mentre nella teoria HFB le particelle accoppiate possono avere energia anche molto diversa tra loro. In figura è inoltre rappresentata la conseguente occupazione di stati con energia maggiore di quella di Fermi. . . . . 25
- 4.1 **Densità di protoni e neutroni nelle celle di Wigner-Seitz.** In figura è rappresentata la densità di protoni e neutroni, così come è stata calcolata in [41]. Sono rappresentate due celle adiacenti al fine di mostrare l'andamento del gas di neutroni al bordo della cella. Le regioni rappresentate sono quelle considerate più significative (0, 1, 2, 4, 7 e 10, descritte dalla loro densità barionica). . . . . 34
- 4.2 **Output del programma di calcolo del beta equilibrio.** In figura è rappresentata parte della schermata di output del programma per il calcolo del  $\beta$ -equilibrio per una regione caratterizzata da alta densità (a) ed una regione caratterizzata invece da bassa densità (b). I valori riportati sono il numero di protoni ( $Z$ ), il numero di neutroni ( $N$ ), il raggio della cella (Rad), il potenziale chimico di elettroni ( $\mu_e$ ), protoni ( $\mu_p$ ) e neutroni ( $\mu_n$ ), il termine  $\mu_c$  che compare in (4.10) (corr) ed il valore di  $\delta\mu$  (4.9)(eq.beta). Si nota che le celle più prossime alla condizione di  $\beta$ -equilibrio sono quelle evidenziate in quanto il valore di  $\delta\mu$  è il minore in valore assoluto. . . . . 38
- 4.3 **Confronto tra le due procedure nel calcolo del  $\beta$ -equilibrio.** In figura è rappresentata parte della schermata di output del programma per il calcolo del  $\beta$ -equilibrio utilizzando le due diverse procedure descritte nel testo, quella in cui si impone uno step nel raggio della cella (a) e quella in cui si impone invece lo step nel numero di neutroni (b). Dai risultati raffigurati, che derivano dal calcolo per la stessa densità (Cell 2), si nota che la condizione di  $\beta$ -equilibrio ha caratteristiche molto simili utilizzando le due diverse procedure. . . . . 39
- 4.4 **Energia delle celle ricavata con un approccio HF.** In figura è rappresentata l'energia per particella delle celle di in condizione di  $\beta$ -equilibrio ( $E_T$ ), data in  $MeV$ , in funzione del numero di protoni presente ( $Z$ ). Il calcolo è svolto, trascurando gli effetti di pairing, per le due interazioni considerate: rispettivamente Sly4 ed LNS. 41
- 4.5 **Densità di protoni e neutroni in un approccio HF.** In figura è rappresentata la densità di protoni (linea tratteggiata) e neutroni (linea continua) per tutte le regioni studiate. Il calcolo è svolto, trascurando gli effetti di pairing, per le due interazioni considerate: rispettivamente Sly4 ed LNS. La densità è data in  $fm^{-3}$ , mentre la coordinata radiale in  $fm$ . . . . . 42
- 4.6 **Energia delle celle ricavata con un approccio HFB.** In figura è rappresentata l'energia per particella delle celle di in condizione di  $\beta$ -equilibrio ( $E_T$ ), data in  $MeV$ , in funzione del numero di protoni presente ( $Z$ ). Il calcolo è svolto utilizzando la teoria HFB, per tutte le tre interazioni di pairing considerate: rispettivamente ISS (A.5), ISW (A.6) ed IV (A.8). . . . . 46
- 4.7 **Densità di protoni e neutroni in un approccio HFB.** In figura è rappresentata la densità di protoni (linea tratteggiata) e neutroni (linea continua) per tutte le regioni studiate. Il calcolo è svolto utilizzando la teoria HFB, per tutte le tre interazioni di pairing considerate: rispettivamente ISS (A.5), ISW (A.6) ed IV (A.8). La densità è data in  $fm^{-3}$ , mentre la coordinata radiale in  $fm$ . . . . . 47

4.8 **Pairing field di protoni e neutroni in un approccio HFB.** In figura è rappresentata il pairing field di protoni (linea tratteggiata) e neutroni (linea continua) per tutte le regioni studiate. Il calcolo è svolto utilizzando la teoria HFB, per tutte le tre interazioni di pairing considerate: rispettivamente ISS (A.5), ISW (A.6) ed IV (A.8). Il pairing field ( $\Delta$ ) è dato in  $MeV$ , mentre la coordinata radiale in  $fm$ . 48

4.9 **Finite size correction.** In figura sono riportati i grafici inerenti lo studio della finite size correction svolto in [40]. In figura (a) è rappresentata l'energia  $B_{WS-hom}$  in funzione del raggio della cella. In figura (b) viene invece rappresentata la differenza di energia tra il valore ricavato analiticamente e quello calcolato. Infine, in figura (c) è rappresentato l'errore rimanente nello studio del sistema dopo che è stata applicata la correzione. Lo studio è stato svolto per un gas omogeneo avente densità pari a quelle che identificano le regioni 5, 6 e 7 del lavoro svolto (in [40] identificate come 6, 7 e 8). . . . . 50

4.10 **Energia delle celle ricavata utilizzando la finite size correction.** In figura è rappresentata l'energia per particella delle celle in condizione di  $\beta$ -equilibrio ( $E_T$ ), data in  $MeV$ , in funzione del numero di protoni presente ( $Z$ ). Il calcolo è svolto utilizzando la finite size correction rispettivamente in condizione HF e IV. . . . . 52

4.11 **Energia delle celle ricavata utilizzando la finite size correction.** In figura è rappresentata l'energia per particella delle celle in condizione di  $\beta$ -equilibrio ( $E_T$ ), data in  $MeV$ , in funzione del numero di protoni presente ( $Z$ ). Il calcolo è svolto utilizzando la finite size correction rispettivamente in condizione ISS e ISW. . . . . 53

5.1 **Fattore di correzione per il calore specifico della materia superfluida.** In figura è riportato il risultato del calcolo svolto in [36] sul fattore di correzione per il calore specifico della materia superfluida ( $R(\tau)$ ).  $\tau = \frac{T}{T_c}$  è una variabile adimensionale che definisce la temperatura in funzione della temperatura critica della transizione in fase superfluida. . . . . 58

5.2 **Calore specifico della regione 6.** In figura è rappresentato il calore specifico trovato nella regione 6, calcolato fino ad una temperatura tale che il gas di neutroni non sia più in fase superfluida (Fig. 5.3). Il calore specifico è dato in unità della costante di Boltzman. . . . . 61

5.3 **Pairing field dei neutroni nella regione 6.** In figura è rappresentato il pairing field dei neutroni per le temperature che sono state considerate nell'analisi del comportamento del calore specifico (Fig. 5.2). . . . . 61

5.4 **Calore specifico della regione 1.** In figura è rappresentato il calore specifico trovato nella regione 1, calcolato fino ad una temperatura tale che i neutroni non siano più in fase superfluida (Fig. 5.5). Il calore specifico è dato in unità della costante di Boltzman. . . . . 62

5.5 **Pairing field dei neutroni nella regione 1.** In figura è rappresentato il pairing field dei neutroni per le temperature che sono state considerate nell'analisi del comportamento del calore specifico (Fig. 5.4). . . . . 62

5.6 **Calore specifico della regione 10.** In figura è rappresentato il calore specifico trovato nella regione 10, calcolato fino ad una temperatura tale che il gas di neutroni non sia più in fase superfluida (Fig. 5.7). Il calore specifico è dato in unità della costante di Boltzman. . . . . 63

- 5.7 **Pairing field dei neutroni nella regione 10.** In figura è rappresentato il pairing field dei neutroni per le temperature che sono state considerate nell'analisi del comportamento del calore specifico (Fig. 5.6). . . . . 63
- 5.8 **Calore specifico della regione 6 per pairing ISW.** In figura è rappresentato il calore specifico trovato nella regione 6 utilizzando l'interazione di pairing ISW (linea continua). Il confronto è fatto col calore specifico ottenuto dall'interazione ISS (linea tratteggiata). I calori specifici sono dati in unità della costante di Boltzman. 64
- 5.9 **Pairing field dei neutroni ricavato tramite l'interazione ISW nella regione 6.** In figura è rappresentato il confronto tra il pairing field dei neutroni ricavato dall'interazione ISW (linea continua) e dall'interazione ISS (linea tratteggiata). . 64
- 5.10 **Calore specifico della regione 10 per pairing ISW.** In figura è rappresentato il calore specifico trovato nella regione 10 utilizzando l'interazione di pairing ISW (linea continua). Il confronto è fatto col calore specifico ottenuto dall'interazione ISS (linea tratteggiata). I calori specifici sono dati in unità della costante di Boltzman. 64
- 5.11 **Pairing field dei neutroni ricavato tramite l'interazione ISW nella regione 10.** In figura è rappresentato il confronto tra il pairing field dei neutroni ricavato dall'interazione ISW (linea continua) e dall'interazione ISS (linea tratteggiata). . 64
- 5.12 **Calore specifico della regione 6 per pairing IV.** In figura è rappresentato il calore specifico trovato nella regione 6 utilizzando l'interazione di pairing IV (linea continua). Il confronto è fatto col calore specifico ottenuto dall'interazione ISS (linea tratteggiata). I calori specifici sono dati in unità della costante di Boltzman. 65
- 5.13 **Pairing field dei neutroni ricavato tramite l'interazione IV nella regione 6.** In figura è rappresentato il confronto tra il pairing field dei neutroni ricavato dall'interazione IV (linea continua) e dall'interazione ISS (linea tratteggiata). . . 65
- 5.14 **Calore specifico della regione 1 per pairing IV.** In figura è rappresentato il calore specifico trovato nella regione 1 utilizzando l'interazione di pairing IV (linea continua). Il confronto è fatto col calore specifico ottenuto invece per la regione 2 (linea tratteggiata). I calori specifici sono dati in unità della costante di Boltzman. 66
- 5.15 **Pairing field dei neutroni ricavato tramite l'interazione IV nella regione 1.** In figura è rappresentato il confronto tra il pairing field dei neutroni ricavato dall'interazione IV per la regione 1 (linea continua) e per la regione 2 (linea tratteggiata). . . . . 66
- 5.16 **Calore specifico della regione 6 calcolato utilizzando la struttura della crosta ricavata dall'utilizzo della teoria HFB.** In figura è rappresentato il calore specifico calcolato nella regione 6 utilizzando la struttura della crosta ricavata dall'utilizzo della teoria HFB (linea continua). Il confronto è fatto col calore specifico ottenuto dalla stessa interazione IV ma utilizzando la struttura della crosta calcolata in [41] (linea tratteggiata). I calori specifici sono dati in unità della costante di Boltzman. . . . . 67
- 5.17 **Pairing field dei neutroni calcolato utilizzando la struttura della crosta ricavata dall'utilizzo della teoria HFB nella regione 6.** In figura è rappresentato il pairing field dei neutroni per le temperature che sono state considerate nell'analisi del comportamento del calore specifico (Fig. 5.16). È rappresentato inoltre, come confronto, il pairing field ricavato con la stessa interazione ma utilizzando la struttura della crosta interna calcolato in [41] a  $T = 0.0 \text{ MeV}$  (linea puntinata). . . . . 67

<p>5.18 <b>Calore specifico della regione 10 calcolato utilizzando la struttura della crosta ricavata dall'utilizzo della teoria HFB.</b> In figura è rappresentato il calore specifico calcolato nella regione 10 utilizzando la struttura della crosta ricavata dall'utilizzo della teoria HFB (linea continua). Il confronto è fatto col calore specifico ottenuto dalla stessa interazione IV ma utilizzando la struttura della crosta calcolata in [41] (linea tratteggiata). I calori specifici sono dati in unità della costante di Boltzman. . . . .</p>	<p>68</p>
<p>5.19 <b>Pairing field dei neutroni calcolato utilizzando la struttura della crosta ricavata dall'utilizzo della teoria HFB nella regione 10.</b> In figura è rappresentato il confronto tra il pairing field dei neutroni della regione 10 ricavato dall'interazione IV ed utilizzando la struttura della crosta ricavata dall'utilizzo della teoria HFB (linea continua) ed il pairing field dei neutroni ricavato dalla stessa interazione ma utilizzando la struttura della crosta calcolata in [41] (linea tratteggiata). . . . .</p>	<p>68</p>
<p>5.20 <b>Conducibilità termica nella stella.</b> In figura è rappresentata la conducibilità termica della materia in funzione della densità per tre temperature caratteristiche negli scenari di cooling (<math>10^7 K</math>, <math>10^8 K</math> e <math>10^9 K</math>). Sono presentati infine, tramite righe verticali, i limiti della crosta interna. . . . .</p>	<p>71</p>
<p>5.21 <b>Calore specifico nella stella.</b> In figura è rappresentata il calore specifico delle diverse componenti della materia presente nella stella di neutroni in funzione della densità. Lo studio è stato svolto per una temperatura pari a <math>T = 10^9 K</math>. Sono presentati infine, tramite righe verticali, i limiti della crosta interna. . . . .</p>	<p>71</p>
<p>5.22 <b>Evoluzione temporale della temperatura di redshift.</b> In figura è rappresentata l'evoluzione temporale della temperatura di redshift nella crosta interna di una stella di neutroni considerando una temperatura iniziale di <math>T_i = 500 keV</math>. <math>r</math> rappresenta la distanza dal centro della stella in <math>km</math>. La transizione core-crosta avviene per <math>r = 10.75 km</math>. . . . .</p>	<p>72</p>
<p>5.23 <b>Evoluzione temporale della superficie della stella.</b> In figura è rappresentata l'evoluzione temporale della superficie della stella per le due temperature iniziali considerate <math>T_i = 300 keV</math> e <math>T_i = 500 keV</math>. NC indica i risultati ottenuti utilizzando la parametrizzazione data in [36]. . . . .</p>	<p>73</p>
<p>5.24 <b>Calore specifico ricavato utilizzando l'interazione di pairing ISS per tutte le regioni considerate.</b> In figura è rappresentato il calore specifico calcolato per le temperature raggiungibili nella crosta interna delle stelle di neutroni (<math>T &lt; 0.5 MeV</math>). Le prime cinque regioni sono riportate nella figura in alto mentre le successive cinque in quella in basso. I calori specifici sono dati in unità della costante di Boltzman. . . . .</p>	<p>76</p>
<p>5.25 <b>Calore specifico ricavato utilizzando l'interazione di pairing ISW per tutte le regioni considerate.</b> In figura è rappresentato il calore specifico calcolato per le temperature raggiungibili nella crosta interna delle stelle di neutroni (<math>T &lt; 0.5 MeV</math>). Le prime cinque regioni sono riportate nella figura in alto mentre le successive cinque in quella in basso. I calori specifici sono dati in unità della costante di Boltzman. . . . .</p>	<p>77</p>

- 5.26 **Calore specifico ricavato utilizzando l'interazione di pairing IV per tutte le regioni considerate.** In figura è rappresentato il calore specifico calcolato per le temperature raggiungibili nella crosta interna delle stelle di neutroni ( $T < 0.5 \text{ MeV}$ ). Le prime cinque regioni sono riportate nella figura in alto mentre le successive cinque in quella in basso. I calori specifici sono dati in unità della costante di Boltzman. . . . . 78
- 5.27 **Calore specifico ricavato per l'interazione IV utilizzando la struttura di Wigner-Seitz riportata in tabella 4.7.** In figura è rappresentato il calore specifico calcolato per le temperature raggiungibili nella crosta interna delle stelle di neutroni ( $T < 0.5 \text{ MeV}$ ). Le prime cinque regioni sono riportate nella figura in alto mentre le successive cinque in quella in basso. I calori specifici sono dati in unità della costante di Boltzman. . . . . 79
- 6.1 **Vortice in moto rispetto al superfluido.** Sono rappresentate separatamente le due componenti del moto del gas: quella locale attorno al vortice nella prima figura e quella globale del gas rispetto al vortice stesso nella seconda figura. . . . 82
- 6.2 **Vortice in moto rispetto al superfluido.** Sono rappresentate entrambe le componenti del moto. Nella regione raffigurata sopra il vortice la velocità effettiva del gas risulta essere la differenza delle componenti dei due differenti moti, mentre nella regione posta sotto il vortice la velocità risultante ne è la somma. Si avrà quindi una maggior pressione nella regione superiore rispetto a quella inferiore con una conseguente forza sul vortice diretta verso il basso. . . . . 82
- 6.3 **Dislocazione dei nuclei in configurazione di strong pinning.** In figura *a* è rappresentato un reticolo *BCC*, ripreso poi nelle figure *b* e *c*, dove i diversi colori descrivono la profondità in accordo con quelli in figura *a*. Il vortice rappresentato in figura *b* attrae i nuclei vicini al suo interno, così da portare il sistema in una configurazione come quella di figura *c*, dove si nota che la separazione tra i siti di legame è pari a metà del passo reticolare, quindi un raggio di Wigner-Seitz. . . . 84
- 6.4 **Superweak pinning.** In figura è rappresentato un vortice con raggio maggiore del raggio di Wigner-Seitz posto in tre diverse configurazioni rispetto al reticolo. . . 85
- 6.5 **Estensione di Jones al superweak pinning.** In figura *a* e *b* è rappresentato un vortice orientato secondo una direzione preferenziale del reticolo, come considerato nelle teorie precedenti quella di Jones. In figura *c* e *d* è rappresentato invece un vortice con un orientazione casuale rispetto al reticolo. . . . . 86
- 6.6 **Deformazione del vortice.** In figura sono rappresentate le due condizioni ipotizzate nel calcolo della lunghezza limite del vortice non deformabile. Il cammino *a* rappresenta un vortice non deformato, mentre il cammino *b* è il modello di un vortice deformato al fine di aggiungere un nucleo al legame col reticolo. . . . . 87
- 6.7 **Dislocazione del nucleo.** É qui raffigurata la cella di Wigner-Seitz come considerata nel calcolo dell'energia di dislocazione del nucleo. Questa è formata da una distribuzione elettronica omogenea di forma sferica e raggio  $R_{ws}$ , al cui centro è posto un nucleo di carica  $Ze$ . Lo spostamento del nucleo di una distanza  $\delta$  impone una spesa energetica pari a  $E_d(\delta)$ . . . . . 89
- 6.8 **Condizione di pinning.** Un nucleo risulta legato al vortice se si trova completamente al suo interno. In figura mostrato che questa condizione è descritta dal fatto che la distanza tra il suo punto centrale e l'asse di rotazione del vortice deve essere minore o uguale a  $\gamma = \xi - R_N$ . . . . . 90



6.9 **Cattura di un nucleo.** Perché un nucleo contribuisca al legame tra vortice e reticolo è necessario portarlo all'interno della regione di pinning. In figura è mostrato che lo spazio di cui si deve spostare un vortice la cui posizione di equilibrio nel reticolo è a distanza  $r$  dall'asse di rotazione del vortice è  $r - \gamma$ . . . . . 90

6.10 **Densità di nuclei.** In figura è rappresentata la regione in cui è possibile catturare nuclei. Questa è formata da un cilindro centrato sull'asse di rotazione del vortice. L'altezza è presa pari alla massima lunghezza di un vortice non deformabile ( $L$ ), in quanto il calcolo è fatto su questa porzione significativa di vortice presa nella sua interezza. La base è invece formata da un cerchio con un raggio pari al raggio di cattura:  $r_c = \gamma + r_0$ . . . . . 92

6.11 **Traslazioni di un vortice nel caso di un vortice allineato con una direzione preferenziale del reticolo.** Sono presentate tre possibili traslazioni della regione di cattura del vortice. Con  $a$  si è indicata la posizione iniziale del vortice mentre con  $b$ ,  $c$  e  $d$  si sono indicate rispettivamente le traslazioni orizzontale, verticale e di direzione generica. Ogni traslazione è caratterizzata da un preciso spostamento lungo  $dx$  e  $dy$  in modo da poter rappresentare i risultati su un grafico analogo a quello disegnato in figura. . . . . 97

6.12 **Numero di siti di legame nel caso di un vortice allineato con una direzione preferenziale del reticolo.** È rappresentata la soluzione dello studio del numero di siti rispetto agli spostamenti lungo  $dx$  e  $dy$  per il caso preso come esempio: vortice orientato secondo una direzione preferenziale del reticolo. I colori rappresentano il numero di siti di pinning per unità di lunghezza secondo i valori indicati nella barra laterale, il nero rappresenta le situazioni di massimo legame mentre il bianco quella di minimo legame. Il grafico è stato fatto per un vortice di lunghezza  $L = 200 R_{ws}$  nella regione 3, per  $\beta = 1$ . . . . . 97

6.13 **Numero di siti di legame per unità di lunghezza di un'orientazione generica.** Si notano le poche configurazioni con numero di siti di legame minimo (in bianco) e massimo (in nero), le altre configurazioni hanno energia intermedia (in grigio). I grafici sono svolti nella regione 3, per un vortice di lunghezza  $L = 200 R_{ws}$ , con  $\beta = 3$ , mentre le orientazioni considerate sono (1.04,0.52) e (0.90,0.20). . . . . 99

6.14 **Grafico a istogrammi per un'orientazione generica.** In figura è rappresentato il numero di configurazioni presenti in funzione del numero di siti di depinning che le caratterizzano per le stesse orientazioni utilizzate in figura 6.13, quindi (1.04,0.52) e (0.90,0.20), per un vortice di lunghezza  $L = 200 R_{ws}$ , nella regione 3, con  $\beta = 3$ . . . . . 99

6.15 **Numero di siti di legame per unità di lunghezza di un'orientazione generica.** Si notano le poche configurazioni con numero di siti di legame minimo (in bianco) e massimo (in nero), le altre configurazioni hanno energia intermedia (in grigio). I grafici sono svolti nella regione 3, per un vortice di lunghezza  $L = 200 R_{ws}$ , con  $\beta = 1$ , mentre le orientazioni considerate sono (1.43,1.00) e (0.90,0.20). . . . . 100

6.16 **Grafico a istogrammi per un'orientazione generica.** In figura è rappresentato il numero di configurazioni presenti in funzione del numero di siti di depinning che le caratterizzano per le stesse orientazioni utilizzate in figura 6.13, quindi (1.43,1.00) e (0.68,0.88), per un vortice di lunghezza  $L = 200 R_{ws}$ , nella regione 3, con  $\beta = 1$ . . . . . 100

6.17 **Distribuzione  $\Delta N(\theta, \varphi)$ .** In figura è rappresentato il numero di siti di depinning per unità di lunghezza in funzione degli angoli polari  $\theta$  e  $\varphi$  per  $L = 100 R_{ws}$ . Le regioni più scure rappresentano le orientazioni caratterizzate da un maggior numero di siti di depinning. . . . . 101

- 6.18 **Condizioni di vortice legato e libero nel caso di vortice allineato col reticolo.** Sono presentate le condizioni di vortice legato e libero per un vortice allineato col reticolo (Fig. 6.5a e 6.5b). Si evidenzia che in questo caso la distanza tra due massimi è pari al passo reticolare, ovvero il doppio del raggio di Wigner-Seitz ( $a$ ), mentre la distanza percorsa dal vortice nel processo di depinning è pari a ad un raggio di Wigner-Seitz ( $b$ ). . . . . 102
- 6.19 **Condizione di legame nel caso di interstitial pinning.** L'interazione tra vortice e nucleo risulta nulla se quest'ultimo si trova interamente all'esterno del vortice. In figura è mostrato che si ha questa condizione quando la distanza tra il centro del nucleo e l'asse di rotazione del vortice risulta maggiore o uguale a  $\gamma = \xi + R_N$  . . . . . 104
- 6.20 **Espulsione di un nucleo dal vortice nel caso di interstitial pinning.** In figura è mostrato che un nucleo la cui posizione di equilibrio nel reticolo si trova a distanza  $r$  dall'asse di rotazione del vortice deve essere spostato di una distanza pari a  $\gamma - r$  per portarlo al di fuori della regione di legame. . . . . 104
- 6.21 **Gap superfluido.** In figura è mostrato il gap superfluido nel caso  $\beta = 1$  e  $\beta = 3$ , che rappresentano rispettivamente il caso senza effetti di polarizzazione ed il caso di polarizzazione massima. Si nota che nel caso  $\beta = 1$  il gap ha un massimo attorno a  $3 \text{ MeV}$ , così come descritto nelle teorie di strong pairing, mentre nel caso  $\beta = 3$  il gap ha un massimo attorno a  $1 \text{ MeV}$ , così come descritto nelle teorie di weak pairing. . . . . 108
- 6.22 **Variazione del quadrato di depinning.** In figura è mostrato come viene ingrandito il quadrato di depinning per ottenere il numero desiderato di massimi e di minimi. Si nota che nei casi  $a$  e  $b$  non si è ancora raggiunta la soglia nel numero di massimi, che in questo caso è stata posta pari a 10, soglia raggiunta in figura  $c$ . Mentre le condizioni di massimo e minimo legame sono state rappresentate sempre in nero e bianco, alla condizione di legame intermedio è stata cambiata la tonalità di grigio per evidenziare come è stata ingrandita l'area di studio: a gradazione di grigio uguale corrisponde quindi la stessa area nelle 3 figure. . . . . 110
- 6.23 **Andamento della distanza media percorsa dal vortice nel processo di depinning in funzione della lunghezza del vortice stesso.** In figura è rappresentato, per i regimi di densità studiati, l'andamento della distanza percorsa dal vortice nel processo di depinning in funzione appunto della lunghezza del vortice, per le due condizioni di polarizzazione utilizzate ( $\beta = 1$  e  $\beta = 3$ ). La distanza percorsa dal vortice è data in unità del raggio di Wigner-Seitz e le zone indicate si riferiscono ai regimi di densità studiati da Negele e Vautherin [41]. . . . . 114
- 6.24 **Fattore di riduzione dell'energia di depinning.** In figura è rappresentato l'andamento del fattore di riduzione dell'energia di depinning dovuto alla lunghezza del vortice in funzione di questa stessa lunghezza. . . . . 116
- 6.25 **Dipendenza del numero di siti di depinning dalla larghezza della regione di cattura.** In figura è rappresentato il numero di siti di depinning calcolato in un raggio di Wigner-Seitz ( $\langle \Delta N \rangle$ ) in funzione della larghezza della regione di cattura ( $r_c$ ) per un vortice di  $100 R_{ws}$  (linea continua). Nel grafico, rappresentato in scala semilogaritmica, è anche riportato il risultato ottenuto trascurando l'effetto che è stato chiamato collective pinning (Par. 6.3.4), imponendo quindi che per liberare il vortice è necessario rompere tutti i siti di legame col reticolo (linea tratteggiata). 117

- 6.26 **Confronto dei risultati invertendo il segno dell'energia di pinning per sito.** In figura è presentato un confronto tra l'energia di depinning ricavata utilizzando il modello di legame che è stato proposto (linea continua) e quella ricavata sempre col modello proposto ma invertendo il segno dell'energia di pinning per sito (linea tratteggiata). Lo stesso confronto è riportato anche per la forza di pinning. I calcoli sono stati svolti per un vortice di lunghezza pari a  $L = 200 R_{ws}$  . . . . . 119
- 6.27 **Intervallo di attendibilità per l'energia di depinning.** In figura è rappresentato l'intervallo di attendibilità per l'energia di depinning ( $\langle \Delta E \rangle$ ) nelle due condizioni di polarizzazione studiate,  $\beta = 1$  e  $\beta = 3$ . Questo intervallo è definito dal valore che quest'energia assume al variare di  $N_{free}$ . La regione rappresentata in grigio è quella considerata attendibile in quanto compresa tra il valore massimo e quello minimo che l'energia di depinning può assumere, dati rispettivamente considerando  $N_{free} = N_{medio}$  ed  $N_{free} = N_{medio} + \sigma$  ( $N_{free} = N_{medio} - \sigma$ ) in regime di nuclear (interstitial) pinning. Per maggior chiarezza si sono rappresentati i risultati solamente per vortici di lunghezza pari a  $L = 100 R_{ws}$ ,  $L = 1000 R_{ws}$  e  $L = 3000 R_{ws}$ , lunghezze che sono considerate particolarmente significative in quanto delimitano il range di lunghezza dei vortici studiati e quello dei vortici il cui calcolo è stato svolto in modo esatto. Le grandezze sono date in unità di misura del sistema *cgs*. . . . . 126
- 6.28 **Intervallo di attendibilità per la forza di pinning.** In figura è rappresentato l'intervallo di attendibilità per la forza di pinning ( $\langle F \rangle$ ) nelle due condizioni di polarizzazione studiate,  $\beta = 1$  e  $\beta = 3$ . Questo intervallo è definito dal valore che questa forza assume al variare di  $N_{free}$ . La regione rappresentata in grigio è quella considerata attendibile in quanto compresa tra il valore massimo e quello minimo che la forza di pinning può assumere, dati rispettivamente considerando  $N_{free} = N_{medio}$  ed  $N_{free} = N_{medio} + \sigma$  ( $N_{free} = N_{medio} - \sigma$ ) in regime di nuclear (interstitial) pinning. Per maggior chiarezza si sono rappresentati i risultati solamente per vortici di lunghezza pari a  $L = 100 R_{ws}$ ,  $L = 1000 R_{ws}$  e  $L = 3000 R_{ws}$ , lunghezze che sono considerate particolarmente significative in quanto delimitano il range di lunghezza dei vortici studiati e quello dei vortici il cui calcolo è stato svolto in modo esatto. Le grandezze sono date in unità di misura del sistema *cgs*. 127
- 6.29 **Dipendenza dell'energia di depinning dalla lunghezza del vortice  $L$ .** In figura è rappresentato l'andamento dell'energia di depinning in funzione della lunghezza del vortice per ogni lunghezza che è stata studiata, sia in quelle in cui il calcolo è stato fatto in modo esatto che in quelle in cui è invece stata utilizzata l'approssimazione (6.48). Le grandezze sono date in unità di misura del sistema *cgs*. 128
- 6.30 **Dipendenza della forza di pinning dalla lunghezza del vortice  $L$ .** In figura è rappresentato l'andamento della forza di pinning in funzione della lunghezza del vortice per ogni lunghezza che è stata studiata, sia in quelle in cui il calcolo è stato fatto in modo esatto che in quelle in cui è invece stata utilizzata l'approssimazione (6.49). Le grandezze sono date in unità di misura del sistema *cgs*. . . . . 129

- 6.31 **Dipendenza dell'energia di depinning e della forza di pinning dalla polarizzazione ( $\beta$ ).** In figura è rappresentato l'andamento dell'energia di depinning e della forza di pinning in funzione della polarizzazione per  $\beta = 1$  e  $\beta = 3$ . Anche in questo caso per maggior chiarezza si sono rappresentati solamente i valori ricavati per vortici di lunghezza pari a  $L = 100 R_{ws}$ ,  $L = 1000 R_{ws}$  e  $L = 3000 R_{ws}$ . La condizione di vortice libero imposta è  $N_{free} = N_{medio}$ . Le grandezze sono date in unità di misura del sistema *cgs*. . . . . 130
- 6.32 **Confronto dell'energia di depinning coi precedenti modelli di legame.** In figura è rappresentato il confronto tra le energie di depinning ricavate dal modello studiato ( $N_{free} = N_{medio}$ ) con le energie di depinning calcolate, invece, utilizzando i modelli di strong pinning (6.4) e weak pinning (6.3), sia così come sono state descritte nel paragrafo 6.2, sia applicando un taglio sull'energia così come ipotizzato da Alpar nel modello del superweak pinning (6.6). Anche in questo caso per maggior chiarezza si sono rappresentati solamente i valori ricavati per vortici di lunghezza pari a  $L = 100 R_{ws}$ ,  $L = 1000 R_{ws}$  e  $L = 3000 R_{ws}$ . Le grandezze sono date in unità di misura del sistema *cgs*. . . . . 131
- 6.33 **Confronto della forza di pinning coi precedenti modelli di legame.** In figura è rappresentato il confronto tra le forze di pinning ricavate dal modello studiato ( $N_{free} = N_{medio}$ ) con le forze di pinning calcolate, invece, utilizzando i modelli di strong pinning (6.4) e weak pinning (6.3), sia così come sono state descritte nel paragrafo 6.2, sia applicando un taglio sull'energia così come ipotizzato da Alpar nel modello del superweak pinning (6.6). Anche in questo caso per maggior chiarezza si sono rappresentati solamente i valori ricavati per vortici di lunghezza pari a  $L = 100 R_{ws}$ ,  $L = 1000 R_{ws}$  e  $L = 3000 R_{ws}$ . Le grandezze sono date in unità di misura del sistema *cgs*. . . . . 132
- E.1 **Configurazioni considerate nel calcolo dell'energia di pinning per sito.** In figura sono raffigurate le condizioni considerate in [46] ed in [47] per calcolare le energie di pinning per sito. Con NP ed IP si identificano rispettivamente le configurazioni in cui il vortice è rispettivamente legato e non legato al nucleo. . . 150

# Elenco delle tabelle

2.1	<b>Elementi che compongono la crosta esterna.</b> La densità ( $\rho$ ) è espressa in $g\text{ cm}^{-3}$ . $A$ , $N$ e $Z$ sono rispettivamente il numero di massa, di neutroni e protoni del nucleo. . . . .	16
2.2	<b>Struttura della materia stellare nella crosta interna.</b> La densità ( $\rho$ ) è espressa in $g\text{ cm}^{-3}$ , i momenti di Fermi del gas di neutroni ( $k$ ) e del nucleo ( $k_N$ ) sono espressi in $fm^{-1}$ e la densità di nuclei ( $n_N$ ) è espressa in $fm^{-3}$ . . . . .	17
3.1	<b>Tabelle riassuntive delle interazioni di Skyrme.</b> Nella prima tabella sono riportati i parametri caratteristici delle interazioni di Skyrme utilizzate, quella chiamata Sly4 [20] e quella chiamata LNS [18]. $V_0$ e $t_0$ sono dati in $MeV\text{ fm}^3$ , $t_1$ , $t_2$ e $W_0$ sono dati in $MeV\text{ fm}^5$ , $t_3$ è dato in $MeV\text{ fm}^{3+3\gamma}$ . Nella seconda sono invece riportate le principali proprietà della materia nucleare ottenute a densità di saturazione utilizzando le date parametrizzazioni: $\rho_0$ , dato in $fm^{-3}$ , è la densità di saturazione, $E/A$ , $E_s/A$ e $K$ , dati in MeV, sono rispettivamente l'energia per barione, l'energia di simmetria per barione ed il coefficiente di incompressibilità, mentre $m_{is}^*/m$ ed $m_{iv}^*/m$ descrivono rispettivamente la massa efficace isoscalare ed isovettoriale dei nucleoni. . . . .	30
4.1	<b>Tabella dei risultati ricavati da Negele e Vautherin.</b> In tabella è riportata la struttura di Wigner-Seitz della crosta interna così come è stata calcolata in [41]. La nomenclatura delle regioni è stata riscritta per mantenere una corrispondenza con quella usata nel lavoro svolto, dove la zona chiamata 0 non è stata considerata. La densità ( $\rho$ ) è espressa in $g\text{ cm}^{-3}$ ed il raggio della cella ( $R_{ws}$ ) in $fm$ . $Z$ ed $N$ sono rispettivamente il numero di protoni e neutroni. . . . .	35
4.2	<b>Tabella dei risultati ricavati da Baldo et al.</b> In tabella è riportata la struttura di Wigner-Seitz della crosta interna così come è stata calcolata in [13]. Con $BC1$ e $BC2$ sono indicate le due diverse scelte delle condizioni al contorno, $Z$ indica il numero di protoni, mentre il numero di neutroni è calcolabile a partire dalla densità della regione. Purtroppo le densità scelte per questo calcolo non sono le stesse utilizzate in [41] e riprese poi nel lavoro svolto. La densità ( $\rho$ ) è espressa in $g\text{ cm}^{-3}$ ed il raggio della cella ( $R_{ws}$ ) in $fm$ . . . . .	35
4.3	<b>Risultati per interazione Sly4 trascurando il pairing.</b> In tabella sono riportati i risultati del calcolo svolto con l'interazione Sly4 trascurando gli effetti di pairing. Con $\rho$ si indica la densità della regione studiata, espressa in $g\text{ cm}^{-3}$ , $Z$ e $N$ sono rispettivamente il numero di protoni e neutroni, con $R_{ws}$ si indica il raggio della cella, espresso in $fm$ , ed $E$ , $E_N$ , $T_e$ , $E_M$ e $E_C$ sono rispettivamente l'energia per particella totale, quella nucleare, quella cinetica degli elettroni, quella di massa e quella coulombiana, espresse in $MeV$ . . . . .	40

- 4.4 **Confronto tra la struttura ricavata dall'interazione Sly4 e dall'interazione LNS.** In figura sono riportati i risultati del calcolo HF utilizzando la parametrizzazione dell'interazione nucleare Sly4 e LNS. Con  $\rho$  si indica la densità della regione studiata, espressa in  $g\text{ cm}^{-3}$ ,  $Z$  e  $N$  sono rispettivamente il numero di protoni e neutroni, con  $R_{ws}$  si indica il raggio della cella, espresso in  $fm$ , ed  $E$  è l'energia per particella della cella, espressa in  $MeV$ . . . . . 43
- 4.5 **Struttura della crosta calcolata in approccio HFB.** In tabella sono riportati i risultati del calcolo per i diversi modelli di interazione di pairing utilizzati: ISS (A.5), ISW (A.6) ed IV (A.8). Con  $\rho$  si indica la densità della regione studiata, espressa in  $g\text{ cm}^{-3}$ ,  $Z$  e  $N$  sono rispettivamente il numero di protoni e neutroni, con  $R_{ws}$  si indica il raggio della cella, espresso in  $fm$ , ed  $E$ ,  $E_N$ ,  $T_e$ ,  $E_M$  e  $E_C$  sono rispettivamente l'energia per particella totale, quella nucleare, quella cinetica degli elettroni, quella di massa e quella coulombiana, espresse in  $MeV$ . . . . . 45
- 4.6 **Confronto tra la struttura ricavata dai diversi modelli di pairing.** In figura è riportata la struttura della crosta ricavata per i diversi modelli di interazione di pairing utilizzati: rispettivamente  $HF$  (pairing nullo), ISS (A.5), ISW (A.6) e IV (A.8).  $Z$  e  $N$  sono rispettivamente il numero di protoni e neutroni, con  $R_{ws}$  si indica il raggio della cella, espresso in  $fm$ . . . . . 49
- 4.7 **Struttura della crosta calcolata in approccio HFB dopo l'applicazione della finite size correction.** In tabella sono riportati i risultati del calcolo per i diversi modelli di interazione di pairing utilizzati: rispettivamente  $HF$  (pairing nullo), ISS (A.5), ISW (A.6) e IV (A.8). Con  $\rho$  si indica la densità della regione studiata, espressa in  $g\text{ cm}^{-3}$ ,  $Z$  e  $N$  sono rispettivamente il numero di protoni e neutroni, con  $R_{ws}$  si indica il raggio della cella, espresso in  $fm$ , ed  $E$ ,  $E_N$ ,  $T_e$ ,  $E_M$ ,  $E_C$  e  $\Delta E$  sono rispettivamente l'energia per particella totale, quella nucleare, quella cinetica degli elettroni, quella di massa, quella coulombiana e la finite size correction, espresse in  $MeV$ . . . . . 55
- 6.1 **Parametri fisici del reticolo.** Sono presentati in tabella i parametri fisici del reticolo nucleare utilizzati nello studio del modello così come calcolati da Negele e Vautherin nel 1973 [41].  $\rho$  descrive la densità media della materia presente nella zona,  $N$  e  $Z$  sono il numero di neutroni e protoni che caratterizzano le celle nelle varie zone,  $R_{ws}$  è il raggio delle celle,  $R_N$  è il raggio del nucleo presente all'interno di ogni cella,  $a$  è la diffusività e  $U_0$  è la profondità del potenziale di Wood-Saxon calcolato con un'interazione Argonne, valore non riportato in [41]. La densità  $\rho$  è espressa in  $g/cm^3$ ,  $U_0$  è espresso in  $MeV$ , mentre  $R_{ws}$ ,  $R_N$  ed  $a$  sono espressi in  $fm$ . 107
- 6.2 **Parametri del gas superfluido.** In tabella sono presentati i parametri della materia superfluida necessari al calcolo svolto. L'energia di pinning per sito positiva descrive una condizione di nuclear pinning mentre l'energia di pinning per sito negativa descrive una condizione di interstitial pinning. Con  $\beta = 1$  [46] si è indicato il caso in cui si sono trascurati gli effetti di polarizzazione (descrive una condizione di strong pairing), mentre con  $\beta = 3$  [47] si è indicato il caso in cui si è considerata polarizzazione massima (descrive una condizione di weak pairing). Le densità  $\rho$  sono espresse in  $g/cm^3$ , le energie di pinning per sito  $E_p$  sono espresse in  $MeV$  e le lunghezze di coerenza  $\xi$  sono espresse in  $fm$ . . . . . 108

- 6.3 **Regione di cattura.** In tabella sono riportati i valori delle grandezze coinvolte nel calcolo della regione di cattura dei nuclei. Con *IP* si indica una condizione di interstitial pinning, mentre con *NP* si indica invece una condizione di nuclear pinning.  $\gamma = \xi - R_N$  ( $\gamma = \xi + R_N$ ) è la larghezza della regione di pinning in condizione di nuclear (interstitial) pinning,  $r_0$ , dato dalla (6.17), è la massima distanza cui possono essere portati i nuclei dalla loro posizione di equilibrio nel reticolo,  $r_c$  e  $\frac{r_c}{R_{ws}}$  sono rispettivamente il raggio della regione di cattura e lo stesso raggio in unità del raggio di Wigner-Seitz, dove  $r_c = \gamma + r_0$  in regime di nuclear pinning e  $r_c = \gamma$  in regime di interstitial pinning e  $R_{ws}$  è il raggio di Wigner-Seitz. I valori riportati sono dati in unità *cgs*. . . . . 109
- 6.4 **Dipendenza dalle dimensioni del quadrato di depinning.** In tabella sono raffigurati i valori del numero medio di siti di depinning per unità di lunghezza (6.25) e il valor medio del rapporto tra questo stesso numero di siti e la distanza media percorsa dal vortice nel processo di depinning, anche questa in unità del raggio di Wigner-Seitz (6.34). Il calcolo è stato fatto per un vortice di lunghezza pari a  $L = 100 R_{ws}$ . . . . . 111
- 6.5 **Approssimazione utilizzata per lo studio di  $\langle \Delta E \rangle$  in vortici di lunghezza superiore a  $L = 1000 R_{ws}$ .** Sono presentati in tabella i valori calcolati nell'approssimazione utilizzata per il calcolo dell'energia di depinning per un vortice di lunghezza superiore a  $1000 R_{ws}$ .  $P_L$  (6.44) è la media su 30 angoli del rapporto tra le energie di depinning,  $L$  è la lunghezza del vortice in unità del raggio di Wigner-Seitz e  $\langle \Delta E \rangle_L$  rappresenta l'energia di depinning per unità di lunghezza calcolata per un vortice di lunghezza  $L$ . . . . . 112
- 6.6 **Approssimazione utilizzata per lo studio di  $\langle F \rangle$  in vortici di lunghezza superiore a  $L = 1000 R_{ws}$ .** Sono presentati in figura i valori calcolati nell'approssimazione utilizzata per il calcolo della forza di pinning per un vortice di lunghezza superiore a  $1000 R_{ws}$ .  $Q_L$  si riferisce all'approssimazione descritta in (6.45), mentre  $R_L$  si riferisce all'approssimazione descritta in (6.47).  $L$  è la lunghezza del vortice in unità del raggio di Wigner-Seitz e i numeri indicati in pedice si riferiscono alla lunghezza del vortice sempre in unità del raggio di Wigner-Seitz. . . . . 113
- 6.7 **Risultati del calcolo esatto per  $N_{free} = N_{medio}$ .** Sono qui riportati i risultati ottenuti dall'utilizzo del modello per vortici di lunghezza tale da poter svolgere il calcolo in modo esatto ( $L \leq 1000 R_{ws}$ ). La condizione di vortice libero imposta è  $N_{free} = N_{medio}$ . Le zone 1 e 2 sono sempre in condizione di interstitial pinning, mentre tutte le altre sono in condizione di nuclear pinning. Tutte le grandezze sono date in unità di misura del sistema *cgs*, tranne  $\langle d \rangle$ , che è la distanza media che deve percorrere il vortice nel processo di depinning in unità del raggio di Wigner-Seitz,  $\langle \Delta N \rangle$  e  $\langle \frac{\Delta N}{d} \rangle$ , che sono dati per unità di lunghezza, dove l'unità di lunghezza considerata è il raggio di Wigner-Seitz. . . . . 124

- 6.8 **Risultati del calcolo esatto per  $N_{free} = N_{medio} \pm \sigma$ .** Sono qui riportati i risultati ottenuti dall'utilizzo del modello per vortici di lunghezza tale da poter svolgere il calcolo in modo esatto ( $L \leq 1000 R_{ws}$ ). La condizione di vortice libero imposta è  $N_{free} = N_{medio} \pm \sigma$ . Le zone 1 e 2 sono sempre in condizione di interstitial pinning, mentre tutte le altre sono in condizione di nuclear pinning. Tutte le grandezze sono date in unità di misura del sistema *cgs*, tranne  $\langle d \rangle$ , che è la distanza media che deve percorrere il vortice nel processo di depinning in unità del raggio di Wigner-Seitz,  $\langle \Delta N \rangle$  e  $\langle \frac{\Delta N}{d} \rangle$ , che sono dati per unità di lunghezza, dove l'unità di lunghezza considerata è il raggio di Wigner-Seitz. . . . . 124
- 6.9 **Risultati finali del calcolo esatto.** Nella tabella sono riportati i range in cui risiedono i valori accettabili delle grandezze calcolate per vortici di lunghezza tale da poter svolgere il calcolo in modo esatto ( $L \leq 1000 R_{ws}$ ). Questo range è calcolato semplicemente imponendo il limite superiore ed inferiore riportati in precedenza. Tutte le grandezze sono date in unità di misura del sistema *cgs*. . . . . 124
- 6.10 **Risultati del calcolo approssimato per  $L > 1000 R_{ws}$ .** Nella tabella sono riportati i range in cui risiedono i valori accettabili delle grandezze calcolate per vortici di lunghezza tale da non poter svolgere il calcolo in modo esatto ( $L > 1000 R_{ws}$ ). I valori riportati sono stati calcolati utilizzando le approssimazioni (6.48) e (6.49) rispettivamente per l'energia di depinning ( $\langle \Delta E \rangle$ ) e per la forza di pinning ( $\langle F \rangle$ ).  $\langle \Delta v \rangle$  è calcolato sempre utilizzando la (6.42). I limiti superiori sono stati calcolati applicando le approssimazioni sui risultati ottenuti per  $N_{free} = N_{medio}$ , mentre i limiti inferiori applicandole sui risultati ottenuti per  $N_{free} = N_{medio} \pm \sigma$ . Tutte le grandezze sono date in unità di misura del sistema *cgs*. . . 125
- C.1 **Parametri usati per descrivere il calore specifico.** In tabella sono riportati i parametri utilizzati per riprodurre il calore specifico in condizioni rispettivamente di weak e strong pairing. Nell'ultima colonna per ogni interazione è riportato inoltre anche il pairing field del gas di neutroni liberi ottenuto a temperatura nulla ( $\Delta_0$ ), il cui valore è espresso in *MeV*. . . . . 144



# Ringraziamenti

Vorrei innanzitutto ringraziare i professori con cui ho lavorato in questi tre anni di dottorato: Pierre Pizzochero, Nicolae Sandulescu e Jerome Margueron, in quanto grazie alla loro collaborazione il lavoro svolto è stato molto piacevole e proficuo.

Vorrei ringraziare inoltre Daniel Peña Arteaga per l'aiuto che mi ha dato nella parallelizzazione del programma utilizzato nel calcolo delle forze di pinning, Brynmor Haskell per i preziosi consigli sulla stesura del sesto capitolo e Morgane Fortin per la collaborazione nel lavoro svolto al fine di scrivere l'articolo sul raffreddamento.

Un grande ringraziamento va poi ai miei genitori e a Valentina per il fondamentale sostegno che mi hanno dato durante questi anni di dottorato, specialmente in alcuni momenti di sconforto.

Un ringraziamento infine va ad Anthea, Domenico, Riccardo, Simona, Stefano e ancora a Brynmor, Daniel, Morgane e Valentina per i bei momenti di svago, grazie ai quali ho potuto sfruttare al meglio il tempo che invece è stato dedicato al lavoro.



# Bibliografia

- [1] P.W.Anderson and N.Itoh, *Nature* **256**, 25 (1975).
- [2] P.W.Anderson, M.A.Alpar, D.Pines and J.Shaham, *Phil.Mag.* **A45**, 227 (1982).
- [3] M.A.Alpar, P.W.Anderson, D.Pines and J.Shaham, *Ap.J.* **276**, 325 (1984).
- [4] M.A.Alpar, P.W.Anderson, D.Pines and J.Shaham, *Ap.J.* **278**, 791 (1984).
- [5] P.Avogadro, F.Barranco, R.A.Brogia and E.Vigezzi, *Phys.Rev.* **C75**, 012805 (2007).
- [6] P.Avogadro, F.Barranco, R.A.Brogia and E.Vigezzi, *Nucl.Phys.* **A811**, 378 (2008).
- [7] D.A.Baiko, P.Haensel and D.G.Yakovlev, *Astron.Astrophys.* **374**, 151 (2001).
- [8] D.A.Baiko, A.Y.Potekhin and D.G.Yakovlev, *Phys.Rev.* **E64**, 057402 (2001).
- [9] M.Baldo, U.Lombardo, E.E.Saperstein and S.V.Tolokonnikov, *JETP Lett.* **80**, 595 (2004).
- [10] M.Baldo, E.E.Saperstein and S.V.Tolokonnikov, *Nucl.Phys.* **A749**, 42 (2005).
- [11] M.Baldo, U.Lombardo, E.E.Saperstein and S.V.Tolokonnikov, *Nucl.Phys.* **A750**, 409 (2005).
- [12] M.Baldo, U.Lombardo, E.E.Saperstein and S.V.Tolokonnikov, *Phys.At.Nucl.* **68**, 1812 (2005).
- [13] M.Baldo, E.E.Saperstein and S.V.Tolokonnikov, *Nucl.Phys.* **A775**, 235 (2006).
- [14] J.Bardeen, L.N.Cooper and J.R.Shrieffer, *Phys.Rev.* **108**, 1175 (1984).
- [15] G.Baym, H.A.Bethe and C.Pethick, *Nucl.Phys.* **A175**, 225 (1971).
- [16] G.Baym, C.Pethick and P.Sutherland, *Ap.J.* **170**, 299 (1971).
- [17] I.Bombaci, *Nuclear Methods and the Nuclear Equation of State*, edited by M.Baldo (World Scientific, Singapore, 1999), pp. 381-557.
- [18] L.G.Cao, U.Lombardo, C.W.Shen and N.Van Giai, *Phys.Rev.* **C73**, 14313 (2006).
- [19] W. J. Carr, *Phys. Rev.* **122**, 1437 (1961).

- [20] E. Chabanat, P. Bonche, P. Haensel, J. Meyer, and R. Schaeffer, *Nucl.Phys.* **A627**, 710 (1997).
- [21] L.N.Cooper, *Phys.Rev.* **104**, 1189 (1956).
- [22] J.Deschargé and D.Gogny, *Phys.Rev.* **C21**, 1568 (1980).
- [23] J.Dobaczewski, H.Flocard and J.Treiner, *Nucl.Phys.* **A422**, 103 (1984).
- [24] R.I.Epstein and G.Baym, *Ap.J.* **328**, 680 (1988).
- [25] S.A.Fayans, S.V.Tolokonnikov, E.L.Trykov and D.Zawischa *Nucl.Phys.* **A676**, 49 (2000).
- [26] A.L.Fetter and J.D.Walecka, *Quantum theory of many-particle system* (1971).
- [27] V.A.Fock, *Z.Phys.* **61**, 126 (1930).
- [28] M.Fortin, F.Grill, J.Margueron, D.Page and N.Sandulescu, *Phys.Rev.* **C82**, 065804 (2010).
- [29] O.Y.Gnedin, D.G.Yakovlev and A.Y.Potekhin, *Mont.Not.R.Astron.Soc.* **324**, 725 (2001).
- [30] D.R.Hartree, *Proc.Camb.Phil.Soc.* **24**, 89 (1928).
- [31] P.B.Jones, *Mon.Not.R.astr.Soc.* **243**, 257 (1990).
- [32] P.B.Jones, *Ap.J* **373**, 208 (1991).
- [33] P.B.Jones, *Phys.Rev.Lett.* **79**, 792 (1997).
- [34] J.M.Lattimer, K.A.Van Riper, M.Prakash and M.Prakash, *Ap.J.* **425**, 802 (1994).
- [35] L.B.Leinson and A.Perez, *Phys.Lett.* **B638**, 114 (2006).
- [36] K.P.Levenfish and D.G.Yakovlev, *Astron.Rep.* **38**, 247 (1994).
- [37] B.K.Link and R.I.Epstein, *Ap.J.* **373**, 592 (1991).
- [38] U.Lombardo, *Nuclear Methods and the Nuclear Equation of State*, edited by M.Baldo (World Scientific, Singapore, 1999), pp. 458-510.
- [39] J. Margueron, H. Sagawa and K. Hagino, *Phys.Rev.* **C77**, 54309 (2008).
- [40] J.Margueron, N.Van Giai and N.Sandulescu, arXiv:0711.0106.
- [41] J.N.Negele and D.Vautherin, *Nucl.Phys.* **A207**, 298 (1973).
- [42] J.Oppenheimer and G.Volkoff, *Phys.Rev.* **55**, 374 (1939).
- [43] D.Page, J.M.Lattimer, M.Prakash and A.W.Steiner, *Ap.J.Suppl.* **155**, 623 (2004).

- [44] C.J.Pethick and D.G.Ravenhall, *Annu.Rev.Nucl.Part.Sci* **45**, 429 (1995).
- [45] A.Y.Potekhin and G.Chabrier, *Contributions to Plasma Phys.* **50**, 82 (2010).
- [46] P.M.Pizzochero and P.Donati, *Nucl.Phys.* **A742**, 363 (2004).
- [47] P.M.Pizzochero and P.Donati, *Phys.Lett.* **B640**, 74 (2006).
- [48] P.Ring and P.Schuck, *The nuclear many-body problem* (1980).
- [49] S.L.Shapiro and S.A.A.Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars* (1983).
- [50] C.Shen, U.Lombardo, P.Schuck, W.Zuo, and N.Sandulescu, *Phys.Rev.* **C67**, 061302 (2003).
- [51] P.S.Shternin and D.G.Yakovlev, *Phys.Rev.* **D74**, 043004 (2006).
- [52] T.Takatsuka, *Prog.Theor.Phys.* **50**, 1754 (1973).
- [53] K.S.Thorne, *Ap.J.* **212**, 825 (1977).
- [54] R.C.Tolman, *Proc.Nat.Acad.Sci.USA* **20**, 3 (1934).
- [55] J.Wambach, T.L.Ainsworth, and D.Pines, *Nucl.Phys.* **A555**, 128 (1993).
- [56] D.G.Yakovlev, A.D.Kaminker, O.Y.Gnedin and P.Haensel, *Phys.Rep.* **354**, 1 (2001).