

Il carteggio Padoa-Vailati. Un'introduzione alle lettere inviate da Chioggia

di Paola Cantù

1. Introduzione

Le quattro lettere inedite qui di seguito pubblicate sono state inviate dal logico e matematico Alessandro Padoa a Giovanni Vailati tra il 1904 e il 1905 dalla città di Chioggia, ove Padoa, nativo di Venezia, lavorò tra il 1904 e il 1906 come docente del Regio Istituto Nautico. Le lettere fanno parte di una più consistente corrispondenza conservata nell'Archivio Vailati presso la Biblioteca di Filosofia dell'Università di Milano: si tratta di una trentina tra lettere e cartoline di Padoa, prive purtroppo delle risposte di Vailati. Proprio per questa ragione le lettere non sono state incluse nell'edizione dell'*Epistolario* di Giovanni Vailati curata da Giorgio Lanaro nel 1971.¹ Tuttavia, poiché le lettere inviate da Chioggia sono particolarmente interessanti da un punto di vista scientifico, ho accolto con grande interesse la proposta di Cinzio Gibin di pubblicazione su questa *Rivista*, non solo per documentare da un punto di vista storico il soggiorno di Padoa a Chioggia ma anche e soprattutto per rendere noto il contenuto logico-matematico dello scambio epistolare tra Padoa e Vailati.

Poiché non sono disponibili né una biografia né una bibliografia complete di Padoa, mi sembra opportuno tracciare innanzitutto un quadro biografico un po' più esaustivo, che meglio ci permetta di comprendere le ragioni del soggiorno di Padoa a Chioggia e i risultati scientifici risalenti a tale periodo.² Le informazioni biografiche qui riportate sono state ricostruite integrando precedenti biografie con le indicazioni rinvenute nella corrispondenza tra Padoa e Vailati e con le notizie desunte dallo spoglio di alcuni periodici di matematica e di didattica dell'epoca.

1. Cenni biografici

Alessandro Padoa nacque a Venezia il 14 ottobre 1868. Dopo aver frequentato le scuole superiori a Venezia e aver intrapreso a Padova gli studi di ingegneria, si laureò in matematica all'Università di Torino nel 1895. Quindi si sposò ed ebbe, a quanto ho potuto desumere dalle lettere, almeno due figli: Baldo e Giovanna (nata nel 1901).

Per buona parte della sua vita Padoa insegnò nella scuola secondaria, pur aspirando ad un posto come docente universitario, che ottenne solo nel 1932. La sua attività scientifica comprende un centinaio di titoli, in prevalenza articoli e conferenze. Fu in contatto con numerosi matematici e filosofi della scienza italiani e stranieri, tra i quali ricordiamo Peano, Vailati, D'Ovidio, Mascarelli, Masci, Volterra, Vacca, Villa, Mannei, Lazzeri, Enriques, Couturat e Huntington. Fu membro dell'Accademia delle Scienze di Torino e dell'Associazione Mathesis; vinse un premio ministeriale dell'Accademia dei Lincei e intervenne alle adunanze dell'Istituto Veneto. Partecipò a numerosi congressi italiani e stranieri di matematica, di filosofia, di didattica della matematica, di storia.³ Dopo la laurea Padoa ebbe un incarico annuale come insegnante a Pinerolo, ove fu confermato per un triennio con 2000 lire lorde annue di compenso. Fin dal 1896 fu in contatto con l'Associazione Mathesis degli insegnanti di matematica, partecipò alle adunanze della sezione

¹ Le lettere di Padoa a Vailati sono conservate presso l'Archivio Giovanni Vailati dell'Università degli Studi di Milano, archivio che ho potuto consultare grazie alla gentile autorizzazione del Prof. Amedeo Vigorelli. Una parte considerevole della corrispondenza di Vailati è stata pubblicata in G. Vailati, *Epistolario 1891-1909*, a cura di G. Lanaro, Torino, Einaudi, 1971. Altri carteggi sono stati pubblicati singolarmente. Recentemente è in corso un progetto di pubblicazione integrale delle lettere in formato digitale a cura del Centro Studi Giovanni Vailati di Crema sotto la direzione di Mauro De Zan. Per una bibliografia aggiornata delle opere di Vailati e degli studi critici si veda G. Vailati, *Gli strumenti della ragione* (a cura di M. Quaranta), Il Poligrafo: Padova 2003.

² Desidero ringraziare a questo proposito Giorgio Lanaro e Silvio Bozzi per i preziosi suggerimenti di natura storica e logico-matematica.

³ Ricordiamo ad esempio la sua partecipazione ai congressi internazionali di Filosofia (I. Parigi: 1900; IV. Bologna 1911), di Matematica (II. Parigi 1900; IV. Roma: 1908; V. Cambridge 1912; Bologna: 1928), di Filosofia Scientifica (Parigi: 1935), di Scienze Storiche (Roma: 1903), e ai congressi nazionali della Società Filosofica italiana (Parma: 1907), della Mathesis e della Unione Matematica Italiana (tra il 1898 e il 1937).

di Torino e al *Primo Congresso tenuto dai Professori di matematica delle scuole secondarie ad iniziativa dell'associazione Mathesis*, che si svolse a Torino tra il 9 e il 14 settembre 1898. A questo periodo risalgono i suoi contributi alla seconda edizione del *Formulario* e le sue pubblicazioni sulla *Rivista di matematica* diretta da Peano ([2], [3], [4]). Nell'autunno del 1898 ottenne un permesso di congedo di un paio di mesi da Pinerolo per tenere un ciclo di conferenze a Bruxelles e offerse a Giovanni Vailati la possibilità di candidarsi come suo sostituto. Nell'ottobre del 1898 fu nominato reggente di scuola tecnica a Sondrio.⁴ Nonostante la notevole riduzione di stipendio (1500 lire lorde annue), Padoa accettò l'incarico, anche perché si trattava non più di una supplenza, ma di un posto fisso, seppur soggetto a conferma. Poiché Padoa aveva già ottenuto il permesso di congedo fino alla fine del mese di novembre, la nomina fu fatta decorrere a partire dal 1 dicembre 1898. Da metà ottobre a fine novembre 1898 Padoa tenne una serie di conferenze sulla logica matematica alla Université Nouvelle di Bruxelles, di cui pubblicò le dispense ([5]). Da Bruxelles scrisse due articoli ([6], [7]) apparsi sulla rivista *Vita internazionale* fondata da E. T. Moneta a Milano. Padoa si trasferì poi a Sondrio con la famiglia, come testimonia una frase della lettera inviata a Vailati il 31 dicembre:

Con altra mia le dirò qualche cosa di Sondrio, dei suoi dintorni incantevoli e della vita meschina che vi si conduce. Fortunatamente, mia moglie ed i miei bimbi stanno bene e la vita intima familiare mi compensa della vita appartata che si conduce in questo romitaggio.⁵

Nel 1899 dopo aver tenuto un ciclo di conferenze all'Università di Pavia su *L'Algebra elementare logicamente esposta*, Padoa si trasferì a Roma, ove tenne diversi altri corsi: un ciclo di conferenze su *L'algebra e la geometria quali teorie deduttive* ([11]) nell'Università di Roma a partire dalla fine di gennaio del 1900,⁶ una lezione di Matematica elementare all'Università Popolare e un corso di letture scientifiche *Sui principi della geometria* in S. Pietro in Vincoli a partire dalla fine di gennaio del 1901: qui lesse una prolusione intitolata *Di alcuni recenti studi intorno alle idee geometriche fondamentali*.⁷ Nel 1900 Padoa partecipò al Congresso internazionale di Filosofia, che si svolse a Parigi dal 1 al 5 agosto e al Congresso internazionale dei matematici, che si svolse a Parigi dal 6 al 12 agosto.⁸ In quest'occasione egli affermò che una teoria deduttiva logicamente perfetta dovrebbe soddisfare due condizioni fondamentali: avere un sistema di assiomi irriducibili, vale a dire tali che non sia possibile dedurre uno di essi dall'insieme degli altri, e avere un sistema di simboli primitivi irriducibili, vale a dire tali che non sia possibile dedurre la definizione di uno di essi dalle definizioni dei rimanenti. Entrambe le condizioni possono essere verificate attraverso l'esibizione di opportune interpretazioni concrete: nel primo caso occorre esibire numerose interpretazioni concrete differenti, ciascuna delle quali sia in grado di soddisfare tutti gli assiomi tranne quello di cui si vuole dimostrare l'irriducibilità. Nel secondo caso occorre esibire due interpretazioni, soddisfacenti gli stessi assiomi, in cui tutti i simboli primitivi mantengono lo stesso significato ad eccezione di uno di essi, che assume due significati distinti. Questo secondo risultato è ancora oggi noto come criterio di definibilità di Padoa e costituisce il suo più importante contributo alla logica matematica. Al Congresso dei matematici Padoa presentò anche un lavoro sui principi della geometria che fu poi pubblicato in italiano sul «Periodico di matematica» e in spagnolo sulla rivista «El Progreso Matemático» ([19]). Nel 1901 Padoa partecipò al Congresso dei Professori di matematica delle Scuole Secondarie promosso dall'Associazione Mathesis, fondata e diretta da Rodolfo Bettazzi, che si tenne a Livorno dal 17 al 22 agosto ([14]).⁹

Durante il periodo di insegnamento a Roma Padoa cercò sempre di rientrare a Torino:

⁴ Cfr. la lettera a Giovanni Vailati datata *Pinerolo, 9 ottobre 1898*.

⁵ Cfr. la lettera a G. Vailati datata *Sondrio, 31 dicembre 1898*.

⁶ Si vedano le lettere a G. Vailati datate *Roma 4 dicembre 1899, Roma, 31 gennaio 1900*.

⁷ Cfr. la lettera a G. Vailati datata *Roma, 12 gennaio 1901*.

⁸ Cfr. le lettere a G. Vailati datate *Roma 4 dicembre 1899, Roma 22 giugno 1900, Roma 12 luglio 1900, Ancona 18 luglio 1900, Ancona 24 luglio 1900, Crema 28 luglio 1900, Bologna 18 agosto 1900*. Si vedano i seguenti scritti di Padoa: [12], [18], [19]. Si veda anche il resoconto del congresso di filosofia redatto da L. Couturat, *Les mathématiques au Congrès de Philosophie*, in «L'enseignement Mathématique», n. 6, II, novembre 1900, pp. 397-410 e il numero della «Revue de Métaphysique et de Morale» dedicato al Congresso di Filosofia, VIII (1900), pp. 503-699.

⁹ Cfr. la cartolina postale inviata a G. Vailati in data *11 luglio 1901* e la lettera datata *Roma 14 febbraio 1902*.

nel 1902 aveva espresso a Vailati l'intenzione di chiedere la libera docenza in logica matematica per titoli nella Facoltà matematica di Torino;¹⁰ nel 1903 aveva ricevuto da Peano l'offerta di lavorare come suo assistente all'Università di Torino e aveva perciò progettato uno scambio con un collega che aveva chiesto al Ministero il trasferimento a Roma, ma lo scambio non andò in porto.¹¹ Da Roma Padoa ottenne invece il trasferimento a Chioggia, dove trascorse l'anno scolastico 1904-1905 al Regio Istituto Nautico, soddisfatto per l'avvicinamento ai suoi genitori, ancora residenti a Venezia:¹² a tale periodo risalgono le lettere inedite qui pubblicate. In seguito Padoa insegnò a Cagliari, ove trascorse l'anno scolastico 1907-1908. A partire dal 1902 e fino al termine della sua vita Padoa pubblicò con regolarità note e brevi articoli sul «Periodico di Matematica» e sul «Bollettino di Matematica»; più saltuaria fu invece la collaborazione al «Bollettino della Mathesis».

Nell'aprile 1903 Padoa intervenne, pur senza presentare alcuna comunicazione, al II Congresso internazionale di scienze storiche, che si tenne a Roma e al quale parteciparono Tannery, Lampe, Günther, Müller, Loria, Millosevich, Pittarelli, Somigliana, Vacca, Vailati, Amodeo, Castelnuovo, Cerruti, D'Ovidio, Fano, Tonelli, Volterra.¹³ Nel 1906, durante il soggiorno a Chioggia, Padoa tenne due comunicazioni all'Ateneo Veneto sulla *Ideografia logica* e sulla *Logica matematica* ([30]); nel settembre 1907 partecipò al II Congresso della Società Filosofica Italiana svoltosi a Parma con una conferenza sul concetto di astrazione matematica ([32]); nel 1908 partecipò al primo congresso della neocostituita Società Italiana di Matematica, che si svolse in ottobre a Firenze e al quarto Congresso Internazionale dei Matematici di Roma.

Nel 1909, dopo ben 11 anni di prova, Padoa fu nominato Professore (con posto di ruolo confermato) prima all'Istituto Tecnico e poi al Liceo "Colombo" di Genova, ove tenne dal 1911 al 1930 anche l'insegnamento di Analisi matematica alla Regia Scuola navale. L'iter professionale di un docente di scuola superiore non era dunque a inizio secolo così dissimile da quello attuale: il percorso di Padoa iniziò con un'assunzione come docente incaricato (oggi diremmo come docente precario), seguito da una nomina a reggente, cioè come professore non confermato, con un periodo di prova di 11 anni (!) seguito infine dalla nomina a professore confermato. Padoa ottenne cioè la conferma in ruolo dopo circa 13 anni dall'inizio dell'attività di insegnamento!¹⁴

Tra il 9 e il 20 gennaio 1911 Padoa tenne un ciclo di conferenze all'Università di Ginevra sui più recenti sviluppi della logica deduttiva, argomento sviluppato poi nel lavoro pubblicato dapprima sulla «Revue de Métaphysique et de Morale» nel 1911 e ristampato con una prefazione di Giuseppe Peano nel 1912 ([46]).¹⁵ Nel 1912 partecipò al V Congresso Internazionale dei matematici, che si svolse a Cambridge intervenendo in due distinte sezioni

¹⁰ Cfr. la lettera a G. Vailati datata Roma 24 febbraio 1902.

¹¹ Cfr. la lettera a G. Vailati datata Roma 23 novembre 1903.

¹² Presumibilmente Padoa trascorse a Chioggia anche l'anno scolastico 1905-1906: l'articolo *Chc cos'è una relazione?* ([29]) è infatti datato «Chioggia, apr 06».

¹³ Cfr. G. Vailati, *Il II Congresso internazionale di scienze storiche*, in «Il Bollettino di matematica», II, 5, maggio 1903, rist. in G. Vailati, *Scritti*, cit., pp. 210-211.

¹⁴ Sulla situazione del corpo docenti all'inizio del secolo e sulle forti somiglianze con la situazione attuale è interessante leggere alcuni stralci da un discorso di Gaetano Salvemini del 1902: «Un professore, dopo aver fatto otto anni di studi secondari e quattro di studi universitari, che coi nuovi regolamenti diventeranno cinque, deve aspettare ancora non pochi anni prima di essere ammesso all'insegnamento. Salvo rare eccezioni privilegiate, la massima parte comincia la dolorosa via crucis della carriera nelle scuole inferiori, con lo stipendio iniziale di L. 1800 e col grado di reggente, per non parlare degli'incaricati che stanno anche peggio e dei quali parleremo in seguito. [...] La condizione misera e disagiata degli insegnanti è, poi, inasprita e resa addirittura intollerabile da una congerie di irregolarità, di arbitri, di abusi, di soprusi, d'ingiustizie, che, aggiunte al fondamentale disagio economico, acuiscono il malcontento e l'hanno ormai portato a tal punto, che un rimedio radicale e definitivo è diventato una urgentissima necessità. Si comincia anzitutto con la piaga dolorosa degli'incaricati e dei comandati. [...] Finalmente dopo la dolorosa aspettazione, che per alcuni infelici dura per quattro, cinque, dieci anni, l'incaricato è ammesso nei ruoli: dignus est intrari; diventa reggente. Ed eccoci alla seconda lunghissima stazione! In nessun impiego esiste la reggenza, ma per le scuole essa si giustifica con la considerazione che è un periodo di prova, durante il quale lo Stato vuole sincerarsi dell'attitudine didattica dell'insegnante. E sia! ma la prova deve avere dei limiti di tempo: un anno, due anni, tre anni al massimo. Invece la reggenza non dura quasi mai per tre anni, sale per i più a cinque o sei anni, tocca non di rado i dieci anni. A furia di provarlo questo povero insegnante, il governo finisce per consumarlo! [...] Saltata la siepe della reggenza, si arriva alla titolarità, la quale rappresenta sulla reggenza il lautissimo guadagno di lire 200 annue!». Il testo è citato sul sito Web: http://www.graffinrete.it/tracciati/articolo.php?id_vol=308.

¹⁵ Un resoconto del programma delle conferenze è riportata in [38] e [44].

con una memoria sull'induzione matematica e con un saggio sui minimi di una funzione ([52], [51]). Durante il periodo genovese Padoa pubblicò alcuni lavori sulla «Revue de Métaphysique et de Morale» ([43], [45], [56], [101]), scrisse un manuale di Aritmetica intuitiva per le scuole medie di primo grado [59]), collaborò alla *Enciclopedia delle Matematiche elementari* edita da Berzolari, Vivanti e Gigli (74).

Nel 1925 Padoa aderì al Manifesto pubblicato da Benedetto Croce su «Il Mondo» in risposta al Manifesto degli Intellettuali del Fascismo pubblicato da Giovanni Gentile.¹⁶ Nel 1932 (all'età di 64 anni) Padoa ottenne la libera docenza in Logica matematica presso l'Università di Genova, dove insegnò soltanto per quattro anni: nel 1936 dovette infatti abbandonare l'insegnamento per sopraggiunti limiti d'età. In quel periodo Padoa pubblicò il saggio *Logica ideografica* sulla «Rivista di Filosofia Neo-scolastica» ([87]) e partecipò al Congresso Internazionale di Filosofia scientifica che si tenne a Parigi nel 1935 intervenendo in tre diverse sezioni: Linguaggio, Storia della logica, Logica ([94], [95], [96]). Alessandro Padoa morì a Genova il 25 novembre 1937, all'età di 69 anni.

2. Il carteggio Padoa-Vailati: le lettere inviate da Chioggia

Pur in assenza delle risposte di Vailati a Padoa, la corrispondenza tra i due autori rivela un fitto scambio intellettuale e testimonia l'abitudine di inviarsi i rispettivi lavori e di segnalarsi nuovi articoli apparsi su giornali italiani e stranieri. La prima lettera conservata nel fondo Vailati è datata 7 marzo 1896 e sfiora anche temi politici: Padoa, «in qualità di propagandista», invia alcune schede a Vailati (con preghiera di distribuirle anche a Porro, Volterra, Pieri)¹⁷ rivolgendo alle donne italiane un appello per una sottoscrizione «estranea ad ogni considerazione di partito». Padoa accenna in proposito ad un articolo pubblicato dalla moglie sul *Grido del popolo* del 7 marzo 1896. Rare sono invece le discussioni di questioni logico-scientifiche nell'epistolario: in una cartolina postale del 5 settembre 1901 inviata da Bologna Padoa accenna all'articolo *Numeri interi relativi* [12], apparso sulla «Rivista di Matematica» diretta da Peano, e spiega di aver adottato la locuzione 'numeri interi relativi' anziché 'numeri interi qualificati' (con un segno) – come aveva pensato di fare in un primo momento per contrapporli ai numeri 'assoluti', «altrimenti gli 'assoluti' bisognerebbe dirlti 'squalificati', come i corridori di mala fede!». Lo scambio di vedute più consistente a proposito di questioni logico-matematiche è contenuto in tre lettere inviate da Chioggia il 19, il 23 e il 31 marzo 1905 – di cui riportiamo qui integralmente il testo, insieme alle parole che accompagnano la bella cartolina illustrata (novembre 1904) raffigurante il Canale Vena.

2.1 Il Commento a Sforza

Nella lettera del 19 marzo 1905 si fa cenno ad un breve articolo scritto da Padoa e intitolato *Commento*. Poiché l'articolo non è contenuto nell'Archivio Vailati né mi risulta essere stato pubblicato, è alquanto difficile intuirne il contenuto. Sfogliando il «Bollettino della Mathesis», sul quale l'articolo avrebbe dovuto essere pubblicato in seguito all'approvazione di Vailati e all'invio dell'articolo al direttore Enrico de Amicis, ho potuto stabilire che si trattava di un Commento alle *Osservazioni* di G. Sforza sul libro di testo pubblicato da Peano nel 1902: *Aritmetica generale ed algebra elementare*. Nel numero 2-3-4 dell'anno 1904-1905 del «Bollettino», Sforza – un docente che aveva adottato il manuale di Peano nella prima classe dell'Istituto Tecnico – aveva pubblicato una nota critica, contestando tra le altre cose la dimostrazione della proposizione che esprime la compatibilità

¹⁶ Cfr. il catalogo della mostra *Un itinerario attraverso la matematica contemporanea* a cura di E. Giusti e L. Pepe.

¹⁷ *Francesco Porro de' Somenzi* (1861-1937) si laureò in Fisica all'Università di Pavia e fu il più giovane direttore dell'Osservatorio astronomico di Torino. Dal 1903 ottenne l'incarico come professore di Astronomia all'Università di Genova, dove diresse anche il locale osservatorio astronomico. *Vito Volterra* (1860-1940) si laureò in Fisica a Pisa nel 1882 e insegnò Fisica matematica e Meccanica dapprima a Pisa, poi a Torino, infine a Roma, ove fu obbligato ad abbandonare l'insegnamento nel 1931, avendo rifiutato di aderire al fascismo. Egli ottenne importanti risultati nel campo delle equazioni differenziali e integrali. Nel 1919 Volterra diresse i lavori della Commissione per la costituzione del Consiglio Nazionale delle Ricerche, di cui fu preside dal 1923 al 1927. *Mario Pieri* (1860-1911) si laureò in matematica alla Scuola Normale Superiore di Pisa nel 1884; quattro anni dopo ottenne l'insegnamento di geometria proiettiva alla Scuola Militare di Torino ed entrò in contatto con Peano e Burali-Forti. Il suo nome è legato a interessanti ricerche sui fondamenti della geometria e in particolare alla prima presentazione assiomatica della geometria proiettiva complessa.

dell'uguaglianza con l'operazione di addizione aritmetica tra numeri naturali: se a, b, c sono numeri naturali e $a=b$, si deduce che $a+c=b+c$. In simboli:

$$a, b, c \in N_0. a = b. \supset. a + c = b + c.$$

Sforza suggerisce di dimostrare tale proposizione per mezzo dell'induzione aritmetica, mentre Peano ne dà una dimostrazione basata sul solo concetto di uguaglianza. Poiché questo tema è stato ripreso e discusso in numerosi scritti successivi di Padoa, è possibile intuire il tipo di critica che Padoa muoveva a Sforza nel *Commento* citato: la proposizione citata può essere dimostrata in generale per ogni a, b, c sui quali sia definita una funzione espressa dal segno $+$ e non soltanto per l'addizione tra numeri naturali: usare il principio di induzione per dimostrare la proposizione significherebbe misconoscere la natura logica di tale verità e porterebbe erroneamente a ritenere che tale proposizione sia valida soltanto in aritmetica.¹⁸

Perché allora il *Commento* di Padoa non fu pubblicato, nonostante il parere positivo di Vailati? A pagina 8 del numero 1-2 (anno X, 1905) del «Bollettino» compare una breve nota contenente *Due rettifiche*, in una delle quali Sforza «si riferisce alle sue Osservazioni sull'Aritmetica generale ed Algebra elementare di G. Peano» e riconosce che la dimostrazione della proposizione in questione «è correttissima». Una nota redazionale ci illumina sulla sorte del *Commento* di Padoa:

(N.d.R.) «Lessi con vivo piacere la recensione dello Sforza». Così, fin dal 17 marzo, ci scriveva, molto cortesemente, il chiarissimo prof. Peano, a proposito di quelle osservazioni. In relazione alle medesime, fin dal 19 marzo, il prof. A. Padoa ci inviava un acuto suo *Commento* e il prof. Catania ci chiedeva di accogliere nel *Bollettino* una sua risposta: ma, dopo la presente rettifica, dello stesso prof. Sforza, crediamo che anche gli egregi colleghi Catania e Padoa sarebbero per ritenere inopportuno ritornare sullo stesso argomento; almeno per ora.¹⁹

Il *Commento* di Padoa non fu pubblicato nemmeno in seguito; d'altra parte, dopo le dimissioni di Bettazzi e la nomina di De Amicis a presidente dell'associazione nel marzo del 1905, il «Bollettino» uscì in maniera irregolare e interruppe definitivamente le pubblicazioni qualche anno dopo.²⁰

2.2 Sulla definizione della relazione di eguaglianza

La lettera del 23 marzo 1905 rivela che Padoa già dal 1905 (e non soltanto dal 1911, anno di pubblicazione sulla «Revue de Métaphysique et de Morale» dell'ampio articolo dedicato alla logica deduttiva) riteneva opportuno definire l'uguaglianza logica mediante la proprietà sostitutiva:

$$x = y. \supset. w = (y|x)w$$

che possiamo leggere: se $x=y$ e w è un'espressione contenente x , si deduce che w resta uguale se a x sostituisco y .

Tale definizione differisce considerevolmente rispetto alla definizione di uguaglianza proposta nel *Formulario* di Peano, che è basata sul concetto di appartenenza ad una stessa classe: x è uguale ad y significa che se x appartiene alla classe a , allora anche y appartiene alla classe a , o in altre parole, che se x ha una certa proprietà, allora anche y ha quella stessa proprietà. Peano, contrariamente a Frege, non è interessato ad una definizione unica di eguaglianza logica, quanto piuttosto a molteplici definizioni locali di eguaglianza, ciascuna pienamente determinata soltanto in relazione al dominio di enti ai quali si applica e alle proprietà di tali enti che è significativo prendere in considerazione:

Si suol definire in geometria l'eguaglianza di due aree, di due volumi, l'eguaglianza di due vettori, ecc. Col progredire della scienza si sente sempre più la necessità di estendere il significato della formula $a=b$. I vari significati di essa hanno proprietà comuni; ma io non veggo come bastino a precisare tutti i significati possibili

¹⁸ Si vedano ad esempio [46] e [74]. Cfr. anche P. Cantù, *Padoa and the concept of equality*, di prossima pubblicazione.

¹⁹ «Bollettino della Associazione "Mathesis" fra gli insegnanti di matematica delle scuole medie», anno X, num. 1-2 (1905-1906), 1905, p. 9, nota.

²⁰ Si vedano in proposito le note di Riboni, Bettazzi e Lazzeri sul numero XXIII (1908) del «Periodico di matematica» e le critiche rivolte alla inadeguatezza della presidenza di De Amicis.

dell'eguaglianza.²¹

Padoa sembra assumere una posizione intermedia tra Peano e Frege: con quest'ultimo condivide l'esigenza di una definizione di eguaglianza logica che sia chiaramente distinta dalle altre relazioni di equivalenza (caratterizzabili, come è noto, mediante le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva). A tal fine egli assume come definizione dell'uguaglianza due sole proprietà: riflessiva e sostitutiva, dalle quali deriva poi anche le proprietà simmetrica e transitiva. Se nelle opere di Peano e di Burali-Forti la sostituzione compare ora come notazione ora come principio metodologico della deduzione, solo in Padoa essa è usata per la prima volta come caratteristica definitoria dell'eguaglianza. Con ciò Padoa appare molto più vicino a David Hilbert di quanto non si possa pensare, giacché Hilbert nel 1904 in uno scritto *Sui fondamenti della logica e dell'aritmetica* presentato al Congresso dei Matematici di Heidelberg (alla presenza di Vailati) aveva caratterizzato la relazione dell'uguaglianza mediante due assiomi analoghi. Ecco i due enunciati che costituiscono per Hilbert gli assiomi dell'uguaglianza:

1. $x=x$
2. $(x=y \text{ e } w(x)) / w(y)$.²²

Lo scambio tra Padoa e Vailati avviene nel marzo 1905: nelle lettere pervenuteci il nome di Hilbert non compare, Padoa non vi fa alcun riferimento né nel suo commento né negli scritti successivi, per quanto ho potuto vedere. Ciononostante mi sembra che la corrispondenza quasi perfetta tra il simbolismo usato nella lettera tra Padoa e Vailati e il simbolismo hilbertiano possa costituire un indizio significativo: non si può escludere che il tema della discussione nel carteggio tra Padoa e Vailati sia connesso proprio all'esposizione di Hilbert del 1904. L'influenza hilbertiana d'altra parte potrebbe anche spiegare la formulazione sintattica della proprietà sostitutiva che Padoa adotta negli scritti successivi.

Le due lettere a Vailati del 23 e del 31 marzo 1905 contengono altre precisazioni sulla natura della proprietà sostitutiva e rivelano in particolare la dimestichezza di Padoa con l'indagine sulla compatibilità, l'indipendenza e la derivabilità delle proprietà che definiscono l'uguaglianza, tema caro sia a Vailati, che aveva toccato l'argomento in un articolo del 1891, sia ad Enrico de Amicis, che, stimolato dall'articolo di Vailati, aveva studiato le proprietà delle relazioni di uguaglianza nel 1892.²³ È interessante osservare che nel citato testo di Hilbert non si fa alcun cenno alla possibilità di derivare dagli assiomi le proprietà simmetrica e transitiva, mentre l'argomento è esplicitamente affrontato da Padoa nelle lettere. Se Vailati sembra credere alla possibilità di derivare la proprietà riflessiva dalla proprietà sostitutiva, Padoa mostra che ciò non è possibile sia ricorrendo al calcolo deduttivo sia mediante un controesempio. Nel primo caso mostra che dalla proprietà sostitutiva è possibile ottenere « $x=x \cdot \supset \cdot x=x$ » (che si legge «da $x=x$ si deduce $x=x$ »), ma non l'affermazione « $x=x$ ».²⁴ Nel secondo caso mostra che interpretando l'uguale come un segno che significhi «ha forma diversa ma il medesimo significato di», cioè come una relazione non riflessiva, la proprietà sostitutiva resta vera.²⁵

²¹ Cfr. G. Peano, *Risposta ad una lettera di G. Frege*, in «Rivista di Matematica», VI (1906-1899), pp. 53-61, rist. in G. Peano, *Opere scelte*, vol. II, Cremonese: Roma 1958.

²² Cfr. D. Hilbert, *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*, in *Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker Kongresses in Heidelberg 1904*, a cura di A. Kraser, Leipzig, Teubner, 1905, pp. 174-185. Trad. it. in *Ricerche sui fondamenti della matematica*, a cura di V. Abrusci, Bibliopolis, Napoli: 1978, pp. 163-175. Cfr. spec. p. 178, trad. it. p. 167.

²³ Cfr. G. Vailati, *Le proprietà fondamentali delle operazioni della Logica deduttiva studiate dal punto di vista d'una teoria generale delle operazioni*, «Rivista di matematica», vol. 1 (1891), pp. 127-134. Cfr. S. Bozzi, *Vailati e la logica*, in M. De Zan (a cura di), *I mondi di carta di Giovanni Vailati*, Franco Angeli: Milano 2000, pp. 88-111. Si veda anche E. de Amicis, *Dipendenza fra alcune proprietà notevoli delle relazioni fra enti di un medesimo sistema*, in «Rivista di Matematica», VII, n. 2, 1901, pp. 113-127.

²⁴ La derivabilità delle proprietà simmetrica e transitiva dalle proprietà riflessiva e sostitutiva può essere mostrata facilmente: si veda ad es. la dimostrazione della proposizione 2.24 data in E. Mendelson, *Introduzione alla logica matematica*, Bollati Boringhieri: Torino 2002, p. 97.

²⁵ Un altro semplice controesempio che mostra che la validità della proprietà sostitutiva non implica la validità della proprietà riflessiva è costituito dalla relazione vuota R su un dominio costituito da un solo elemento *a*. Non si dà mai « $x=y$ », poiché il dominio contiene un solo elemento, dunque l'implicazione espressa dalla sostitutiva è sempre valida; tuttavia, poiché la relazione è vuota, non si ha aRa e dunque non vale la proprietà riflessiva.

Nelle lettere citate Padoa risponde anche ad alcune obiezioni di Vailati in merito alla possibilità di individuare nella proprietà sostitutiva una caratteristica della sola eguaglianza e non anche di altri simboli. Peano, ad esempio, aveva introdotto un caso particolare di ciò che Padoa chiama proprietà sostitutiva come proprietà dell'addizione tra numeri naturali: $a, b, c \in N_0 . a = b . \supset . a + c = b + c$. Questa proposizione, che abbiamo visto essere già al centro dell'interesse di Sforza, non esprime secondo Padoa un caso particolare di proprietà sostitutiva, ma una proprietà generale dell'eguaglianza: essa esprime una verità logica e non una verità aritmetica. Al contrario l'inversa di tale proposizione $a, b, c \in N_0 . a + c = b + c . \supset . a = b$ (nota anche come legge di cancellazione dell'addizione) è una proprietà dell'addizione tra numeri naturali e non una proprietà valida per qualunque funzione ([46]: p. 53). Nella lettera a Vailati Padoa introduce dunque un tema che è già presente nel discorso tenuto al Congresso di Filosofia nel 1900 e che ricorrerà più volte nei suoi scritti successivi: l'opportunità di distinguere tra una proprietà generale dell'eguaglianza logica (la proprietà che noi oggi chiamiamo *funzionalità di una relazione*) e una proprietà specifica di alcune funzioni (*l'iniettività*).

Nella lettera del 31 marzo, difficile da commentare proprio perché manca il testo della precedente lettera di Vailati, Padoa sembra confutare possibili obiezioni alla validità generale della proprietà sostitutiva. Possiamo supporre che Vailati avesse in mente un esempio simile al seguente: consideriamo il caso in cui $\langle x = -4 \cdot (-4) \rangle$, $\langle y = 4 \cdot 4 \rangle$, $\langle w(z) = \sqrt{z} \rangle$. Sappiamo inoltre che $\langle x = y \rangle$, poiché $\langle -4 \cdot (-4) = 16 = 4 \cdot 4 \rangle$. Cosa possiamo inferire a proposito di $w(x)$ e di $w(y)$? Si potrebbe dire che $w(x) = -4$ e che $w(y) = +4$ rispettivamente. Se così fosse, avremmo però che $w(x) \neq w(y)$ e dunque avremmo un controesempio alla validità generale della proprietà sostitutiva. Padoa risponde che il valore di $w(x)$ è determinato in questo caso da un insieme di due elementi ($+4$ e -4) e non da uno dei due a piacere; analogamente il valore di $w(y)$. Dunque il principio di sostituzione resta valido anche per le funzioni non iniettive. A questo proposito Padoa osserva tra l'altro che le funzioni non iniettive potrebbero anche essere considerate iniettive, a condizione che esse siano definite in modo da avere come valore non un individuo ma una classe.

2.3 Osservazioni conclusive

Come si è mostrato più ampiamente altrove,²⁶ il contenuto di queste lettere di Padoa a Vailati è interessante per diverse ragioni: 1) testimonia che già dal 1905 Padoa aveva adottato la proprietà sostitutiva come caratteristica definitoria della relazione logica di eguaglianza e chiaramente compreso i rapporti di dipendenza reciproca tra proprietà sostitutiva, riflessiva, simmetrica e transitiva dell'eguaglianza; 2) mostra perché è concettualmente diverso dimostrare la proposizione citata da Sforza mediante l'induzione sui naturali o mediante le proprietà dell'eguaglianza; 3) permette di intuire una vicinanza, se non addirittura un'influenza diretta, tra Hilbert e Padoa.

La lettura delle lettere associata ad una più ampia indagine delle altre opere permette anche di comprendere le ragioni che hanno indotto Padoa ad allontanarsi da Peano alla ricerca di una definizione unica e generale di uguaglianza basata sulla proprietà sostitutiva: a) l'esigenza di distinguere tra verità puramente logiche (la funzionalità) e verità aritmetiche (l'iniettività dell'addizione, per esempio) adottando una definizione sintattica che sia indipendente dalle interpretazioni dei simboli funzionali e dai domini su cui tali simboli sono definiti; b) l'esigenza di distinguere tra eguaglianza ed equivalenze, che altrove ([32]) Padoa chiama anche relazioni «egualiformi».

3. Il testo delle lettere spedite a Vailati da Chioggia

Chioggia 14.11.04

Carissimo,

ho ricevuto con piacere la tua lettera e le tue pubblicazioni, che leggerò con interesse. Mi affretto a ringraziarti della tua comunicazione, di cui però non [farò] uso: il soggiorno attuale riuscendomi gradito in modo speciale per la vicinanza a Venezia, dove dimorano i miei

²⁶ Cfr. il citato P. Cantù, *Padoa and the definition of equality*.

genitori. Ma intanto mi rallegro molto con te del trasferimento lusinghiero e ben meritato.²⁷ Mia moglie e Baldo desiderano esserti rammentati. Io ti rinnovo ringraziamenti e congratulazioni, salutandoti cordialmente. Tuo aff.mo
A. Padoa

Grazie della notizia che mi dai riguardo ad Enriques col quale ebbi recentemente (a Roma) un colloquio abbastanza fruttuoso per le nostre idee.

Chioggia 19.3.05

Caro Vailati,

poiché fai parte del Comitato di redazione di Mathesis (e spero sarai confermato in tale ufficio) invio a te per l'inserzione nel Bollettino l'unito Commento, di cui mando copia a Peano. Dimmi se ti persuade e, nel caso affermativo, quando ritieni (approssimativamente) che potrà esser pubblicato. Noi siamo sempre più contenti di questo soggiorno e non dubito che tu pure sarai soddisfatto dell'attuale tua residenza.

Mia moglie e Baldo desiderano esserti ricordati.

Ti saluto affettuosamente.

A. Padoa

Publicando, è prudente ch'io riveda le bozze. Ti autorizzo a cancellare un "m" in "Commento" se ti sembrasse di troppo; io sono rimasto un momento indeciso e... nel dubbio ho abbondato.

Chioggia 23.3.05

Caro Vailati,

rispondo immediatamente alla cara tua di ieri.

Poiché il mio articoletto ti sembra opportuno, mandalo senz'altro al De Amicis (e scusa il disturbo). Peano non mi ha scritto ancora in proposito; ma, se egli desiderasse qualche ritocco, potrei farlo sulle bozze. Al De Amicis non accennare all'eventualità di mutamenti (che probabilmente non avrò bisogno di fare o saranno lievi); digli soltanto che desidero rivedere le bozze io stesso e che ti incarico di porgergli i miei saluti cordiali.

Avevo pensato anch'io a dedurre dalla proprietà sostitutiva, oltre alla simmetrica e transitiva, anche la riflessiva; ma vi ho rinunciato perché, mentre usando le tue parole pare che tutto vada bene, i simboli mostrano che si cade in un circolo vizioso. Infatti particolarizzando la

$$(1) \quad x = y \cdot \mathcal{D} \cdot w = (y|x)w \quad \{\text{prop[riet]à sostitutiva}\}$$

col sostituire \underline{x} a \underline{y} ed \underline{x} a \underline{w} , si ottiene « $x = x \cdot \mathcal{D} \cdot x = x$ », ma non « $x = x$ ». Te capacita? (come dicono a Roma).

Né mi pare giusta l'altra tua osservazione, che cioè non sempre la sostituibilità sia proprietà della sola eguaglianza e possa essere in certo modo condivisa dagli altri simboli che figurano nella notazione sulla quale si opera. Se così fosse, cadrebbe la mia critica. Ma per convincermi, bisognerebbe che tu mi trovassi un esempio qualunque d'una notazione w tale da non esser vera la (1): il che a me sembra impossibile. Per me non vi sono diverse proprietà sostitutive; la (1) compendia tutti i casi possibili. Se, dopo aver riflettuto alla mia replica attuale, trovi che sia il caso di insistere nei tuoi dubbi, scrivimi perché lo scopo principale del mio articolo è stato quello di eliminare tali dubbi, che non sono mai riuscito a far dileguare nel Peano e che egli ha fatto sorgere nello Sforza. Se nel manoscritto vi fosse qualche punto che ancora giustificasse tali dubbi, vorrei modificare e chiarire. Saluti affettuosi.

A. Padoa

²⁷ Nel 1904 il Ministro della Pubblica Istruzione V. E. Orlando dispose il trasferimento di Vailati a Firenze con l'incarico di curare l'edizione degli scritti di Evangelista Torricelli. Il trasferimento a Firenze fu particolarmente significativo per Vailati, che ebbe occasione di entrare in contatto diretto con Giovanni Papini e Giuseppe Prezzolini, fondatori della rivista «Il Leonardo» (1903-1907).

Avendo tardato tanto credevo che Enriques non attendesse più la lettera che gli avevo promesso, e che fra breve gli scriverò.

Tanti saluti dall'amico Baldo. [altra calligrafia]

Chioggia 31.3.05

Caro Vailati,

altre occupazioni mi hanno distolto dal rispondere immediatamente alla tua cart.^a del 26 corr., così abbondantemente accompagnata da cartoline ill[ustra]te delle quali io pure ti ringrazio. Non escludo che si possa definire il simbolo = in modo che anche la proprietà riflessiva risulti dimostrabile; ma tale questione sarà da esaminare quando si vorrà dare un assetto più organico alla logica come teoria deduttiva. Per ora, considerando il gruppo delle proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva e sostitutiva del simbolo =, ho rilevato che dalla 1 e 4 si deducono le 2 e 3. E non mi pare che dalla 4 si possa dedurre la 1. Invero: se considerassimo soltanto notazioni in cui appare esplicitamente la lettera x e se = significasse «ha forma diversa ma il medesimo significato di», allora « $x = y \cdot \supset \cdot w = (y | x) w$ » mentre « $x = x$ » sarebbe falsa. Quanto all'esempio che, secondo te, limiterebbe la generalità della proprietà sostitutiva, devo muovere un'obiezione pregiudiziale. «Che cosa sono le funzioni nonunivoche?» Per me quelle che si chiamano così, sono anch'esse funzioni univoche, soltanto che ad individui esse fan corrispondere classi invece che individui. Tali sono pure i così detti simboli indeterminati (ad es. $0 / 0$ è indeterminato se pretendo che rappresenti un numero; è invece determinato se lo eguaglio a numero). I doppi segni dell'algebra (ad es. nella risoluz.^e delle equaz.ⁱ di 2° grado) non sono simboli di libera scelta ma di somma logica obbligatoria (ad es. la soluzione di $x^2 - 8x + 15 = 0$ non è uno dei numeri 3 e 5, nel senso che Tizio possa dire è 3 e Caio possa dire è 5, ma « $\iota 3 \cup \iota 5$ » così per Tizio come per Caio). Il tuo «w16» non sarebbe un simbolo indeterminato (nel senso detto sopra) ma facoltativo (sia pure parzialmente); esso potrà rappresentare a piacer tuo 4 o -4 o $\iota 4$ o $\iota -4$ o $\iota 4 \cup \iota 4$, ma devi fixare il significato in modo che debba essere lo stesso così per Tizio come per Caio; e nel fissare il significato non puoi fare a meno che abbia lo stesso significato anche w (2×8). Ti pare? Frattanto Peano mi ha risposto «Le osservazioni sono tutte giuste ed espone chiaramente secondo il solito. Anche la forma va; se trovi il modo di renderla più lieve allo Sforza, farai bene, perché non bisogna correre il pericolo di offenderlo. Ma non saprei nemmeno che cosa suggerirti.» Mi pare di non aver usato frasi che possano ferire. In ogni modo, se ne sarà il caso, mitigherò anche più nelle bozze. Qui ci troviamo splendidamente. Saluti aff[ettuos]i.

A. Padoa

Grazie delle belle e molte cartoline. Cordiali saluti.

Baldo [altra calligrafia]

4. Bibliografia

4.1. Opere di Alessandro Padoa

Non esiste una bibliografia completa degli scritti di Alessandro Padoa: la bibliografia che qui riportiamo è la più completa che sia stata finora redatta ed è stata compilata integrando e correggendo le seguenti fonti (molto diverse fra loro e spesso generiche o imprecise):

- “Publications of Alessandro Padoa”, curata da Umberto Lucia (Società Italiana di Storia delle Matematiche di Torino) per il *MacTutor History of Mathematics* (il testo è consultabile sul sito Web http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Extras/Padoa_Publications.html),
- voce “A. Padoa” nella Bibliografia filosofica italiana (pp. 50-51),
- la bibliografia allegata da A. Giannattasio all'articolo “Due inediti di A. Padoa” pubblicato su *Physis* nel 1968 (vol. 10, pp. 309-336);
- la bibliografia riportata da Church nella *Bibliography of Symbolic Logic* apparsa sul *Journal of Symbolic Logic* del 1936 (pp. 146-147).

Indicazioni nuove sono emerse dall'analisi degli estratti contenuti nel Fondo Vailati, dalla consultazione dei cataloghi delle biblioteche italiane incluse nel catalogo SBN e dalla consultazione di numerose annate delle seguenti riviste: «Periodico di matematica» (e supplementi), «Rivista di Matematica», «Bollettino di Matematica», «Ateneo Veneto», «L'Enseignement mathématique», «Revue de Métaphysique et de Morale», «Atti dell'Accademia Reale delle Scienze di Torino», «Rivista Filosofica» (Rivista di Filosofia e scienze affini), «Revue de Philosophie», «Bollettino della Mathesis», «Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche».

- [1] *Riforma generale didattica proposta ed approvata nelle sedute generali dei giorni 16 e 17 aprile 1894 del III congresso universitario nazionale*, Candeletti: Torino 1894, 28 pp.
- [2] *Di alcune proposizioni fondamentali relative al mutuo separarsi di coppie di punti*, in «Rivista di Matematica», vol. 6 (1898), pp. 35-41.
- [3] *Ideografia delle frazioni irriducibili*, in «Rivista di Matematica», vol. 6 (1896-1899), pp. 90-94.
- [4] *Note di logica matematica. Modificazioni ed aggiunte a F_2 §1 proposte da Alessandro Padoa*, in «Rivista di Matematica», vol. 6 (1896-1899), pp. 105-121.
- [5] *Conférences sur la logique mathématique*, Université nouvelle de Bruxelles: Bruxelles 1898.
- [6] *Dall'Université Nouvelle di Bruxelles. L'insegnamento del diritto*, in «Vita internazionale», anno I (1898), n. 21, p. 274.
- [7] *Vita belga. L'Université Nouvelle e la libertà della scienza*, in «Vita internazionale», anno I (1898), n. 24, pp. 362-365.
- [8] *Note critiche agli elementi di geometria di Giuseppe Veronese*, Chiantore-Mascarelli: Pinerolo 1899, 22 pp.
- [9] *Note critiche al libro di aritmetica e di algebra elementare di Paolo Gazzaniga*, Chiantore-Mascarelli: Pinerolo 1899, 17 pp.
- [10] *Algebra elementare logicamente esposta. Conferenze tenute nella R. Università di Pavia*, Pavia 1899, 35 pp.
- [11] *Riassunto delle conferenze su l'algebra e la geometria quali teorie deduttive tenute nella R. Università di Roma l'anno 1900. Parte I*, Roma 1900, 60 pp.
- [12] *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque*, in *Bibliothèque du congrès international de philosophie*, Paris 1900, vol. III, 1901, pp. 309-365; trad. ingl. dell'introduzione in *From Frege to Gödel*, a cura di van Heijenoort, 1967, pp. 119-123.
- [13] *Numeri interi relativi*, in «Rivista di Matematica», vol. 7 (1900-1901), pp. 73-84.
- [14] *Albino Nagy*, in «Rivista Filosofica», (1901), n. 3.
- [15] *Albino Nagy*, in «Rivista di Matematica», vol. 7 (1900-1901), p. 111.
- [16] (et al.), *Additions et corrections au Formulaire a. 1901*, in «Rivista di Matematica», vol. 7 (1900-1901), pp. 85-110.
- [17] *Logica matematica e matematica elementare*, in *Atti del II Congresso dei Professori di Matematica delle Scuole secondarie, promosso dall'Associazione Mathesis. Livorno 1901*, Giusti: Livorno 1902, pp. 186-200.
- [18] *Un nouveau système irréductible de postulats pour l'algèbre*, in *Compte Rendu du deuxième Congrès International des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900*, Gauthier-Villars: Paris 1902, pp. 249-256.
- [19] *Un nouveau système des définitions pour la géométrie euclidienne*, in *Compte Rendu du deuxième Congrès International des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900*, Gauthier-Villars: Paris 1902, pp. 353-363. Trad. italiana *Un nuovo sistema di definizioni per la geometria euclidea*, in «Periodico di Matematica», ser. 3, XIX (1904), n. 2, pp. 74-80. Trad. spagnola *Un nuevo sistema de definiciones para la geometria euclidea*, in «El Progreso Matemático», ser. 2, n. 2 (1900), pp. 364-368.
- [20] *Lezione di matematica elementare (tenuta all'Università Popolare di Roma)*, in «L'Università Popolare», anno I (1901), n. 11, pp. 1-6.
- [21] *Per la compilazione di un dizionario di matematica*, in «Periodico di Matematica», ser. 2, XVII, n. 4 (1902), pp. 262-269.
- [22] *Théorie des nombres entiers absolus (remarques et modifications au Formulaire)*, in «Rivista di Matematica», vol. 8 (1902-06), pp. 45-54.
- [23] *Nuove relazioni sulle soluzioni solide e sugli isomorfismi*, in «Atti dell'Accademia dei Lincei», ser. 5, vol. XII (1903), pp. 391-397.
- [24] *Poligoni regolari di 34 lati*, in «Il Bollettino di Matematica. Giornale scientifico-didattico per l'incremento degli Studi Matematici nelle scuole Medie», II (1903), n. 1.
- [25] *Le problème n. 2 de M. David Hilbert*, in «L'Enseignement mathématique», V (1903), n. 2, pp. 85-91.
- [26] *Quistione 633*, in «Periodico di Matematica», ser. 2, XVIII, (1903), pp. 290-299.
- [27] *Esposizione elementare del metodo di Steiner per la risoluzione grafica delle equazioni di secondo grado*, in «Il Bollettino di Matematica. Giornale scientifico-didattico per l'incremento degli Studi Matematici nelle scuole Medie», III (1904), n. 1, pp. 1-4.
- [28] *Le formole per l'addizione e la sottrazione degli archi dedotte dal teorema di Tolomeo*, in «Il Bollettino di Matematica. Giornale scientifico-didattico per l'incremento degli Studi Matematici nelle scuole Medie»,

- III (1904), n. 1, pp. 4-5.
- [29] *Che cosa è una relazione?*, in «Atti della Accademia Reale delle Scienze di Torino», XLI (1905-06), pp. 818-826.
- [30] *Ideografia logica. Riassunto della comunicazione fatta dal prof. Alessandro Padoa nell'adunanza accademica del 1 marzo 1906*, in «Ateneo Veneto», ser. 3, XIX (1906), pp. 323-340.
- [31] *Sul teorema Cantor-Bernstein-Peano*, in «Periodico di Matematica», ser. 3, XXII (1907), pp. 23-28.
- [32] *Dell'astrazione matematica. Concetto ed applicazioni*, in *Questioni filosofiche a cura della Società Filosofica Italiana, Relazioni al II Congresso della Società Filosofica Italiana (Parma 1907)*, Chiantore-Formiggini: Bologna 1908, pp. 91-104.
- [33] *Une question de maximum (Méthode synthétique)*, in «Nouvelles Annales de Mathématiques» ser. 4, n. 8 (1898), pp. 529-535.
- [34] *Necrologio di Giovanni Vailati. Estratto da il Secolo XIX (di Genova) del 17 maggio 1909*, in «Il Bollettino di Matematica. Giornale scientifico-didattico per l'incremento degli Studi Matematici nelle Scuole Medie», VIII (1909), nn. 6-7-8, pp. 211-212.
- [35] *Inscriptibilité des polygones articulés dans une circonférence*, in «L'enseignement mathématique», n. 11 (1909), pp. 105-109.
- [36] *Introduzione alla teoria delle frazioni*, in «Bollettino della "Mathesis"», I (1909), n. 7-8-9, pp. 66-81.
- [37] *Appendice alla teoria delle frazioni*, in «Bollettino della "Mathesis"», II (1910), nn. 1-2-3, pp. 4-7.
- [38] *Conferenze di A. Padoa. Programma delle Conferenze, tenute sotto gli auspici dell'Università di Ginevra, dal prof. Alessandro Padoa del R. Istituto tecnico di Genova (9-20 gennaio 1911)*, in «Il Bollettino di Matematica. Giornale scientifico-didattico per l'incremento degli Studi Matematici nelle Scuole Medie», IX (1910), n. 11-12, pp. 310-312.
- [39] *Frazioni, relazioni ed astrazioni*, in «Periodico di Matematica», ser. 3, XXV (1910), n. 7, pp. 257-58.
- [40] *Dalle frazioni alla libertà d'insegnamento*, in «Il Bollettino di Matematica. Giornale scientifico-didattico per l'incremento degli Studi Matematici nelle Scuole Medie», IX (1910), nn. 4-5-6-7, pp. 124-128.
- [41] *Osservazioni e proposte circa l'insegnamento della matematica nelle scuole elementari, medie e di magistero*, in «Il Bollettino di Matematica. Giornale scientifico-didattico per l'incremento degli Studi Matematici nelle Scuole Medie», IX (1910), nn. 4-5-6-7, pp. 73-94.
- [42] *Alcune considerazioni di geometria elementare*, in «Bollettino della "Mathesis"», n. 2 (1910), pp. 38-44.
- [43] *D'où convient-il commencer l'arithmétique*, in «Revue de Métaphysique et de Morale», XIX (1911), n. 4, pp. 549-554.
- [44] *Università di Ginevra. Conferenze tenute dal Prof. Alessandro Padoa nel Gennaio 1911*, «Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche», XIII (1911), pp. 37-44.
- [45] *Sur le principe de l'induction mathématique*, in «Revue de Métaphysique et de Morale», XIX (1911), n. 2, pp. 246-249; n. 3, p. 395.
- [46] *La logique déductive dans sa dernière phase de développement*, in «Revue de Métaphysique et de Morale», XIX, n. 6 (1911), pp. 549-554; XX, nn. 1-2 (1912), pp. 48-67, 207-231; rist. con prefazione di Giuseppe Peano, Gauthiers-Villars: Paris 1912, 106 pp.
- [47] *Frequenza, previsione, probabilità*, in «Atti della Accademia Reale delle Scienze di Torino», XLVII (1912).
- [48] *Analisi della sillogistica*, Tip. S. Giuseppe: Firenze 1912.
- [49] *Che cos'è la matematica?*, in «Il Bollettino di Matematica. Giornale scientifico-didattico per l'incremento degli Studi Matematici nelle Scuole Medie», XI (1912), nn. 9-10-11-12, pp. 209-221.
- [50] *Sui massimi e minimi delle funzioni algebriche elementari*, in «Il Bollettino di Matematica. Giornale scientifico-didattico per l'incremento degli Studi Matematici nelle Scuole Medie», XII (1913), nn. 10-11-12, pp. 194-213.
- [51] *Une question de maximum ou de minimum*, in *Proceedings of the 5th International Congress of Math.*, Cambridge University Press: Cambridge 1913, vol. I, pp. 337-340; rist. Kraus, Nendeln / Liechtstein.
- [52] *La valeur et les rôles du principe d'induction mathématique*, in *Proceedings of the 5th International Congress of Math.*, Cambridge University Press: Cambridge 1913, vol. II, Section IV (a) Philosophy and History, pp. 471-79; rist. Kraus, Nendeln / Liechtstein.
- [53] *Legittimità ed importanza del metodo introspettivo*, in «Rivista di Filosofia», nn. 2-3, 1913.
- [54] *Progresso scientifico e progresso morale. Conferenza fatta dall'Autore per iniziativa della L.I.A.A. all'Università Popolare di Genova il 7 novembre 1915*. Coop. grafica Bellini: Genova 1916, 20 pp.
- [55] *Corrispondenze duali*, in «Atti della Accademia Reale delle Scienze di Torino», L (1916-17).
- [56] *Des conséquences d'un changement d'idées primitives dans une théorie déductive quelconque*, in «Revue de Métaphysique et de Morale», XXIV (1917), n. 3, pp. 315-325.
- [57] *Radici razionali delle equazioni intere a coefficienti interi*, in «Periodico di Matematica», ser. 3, XIV (1917), pp. 163-167.
- [58] *Risoluzione del parallogismo di Russell*, Genova 1923.
- [59] *Aritmetica intuitiva per le scuole medie di primo grado*, Remo Sandron: Milano [etc.] 1923-25, 3 voll. Comprende: I. *Aritmetica intuitiva per le scuole medie*, 1923, 203 pp.; I.1 *Appendice al volume I*, 1923,

- 102 p.; II. I numeri razionali in conformità dei Programmi ufficiali del 14 ottobre 1923, 1924, 316 p.; III. I numeri reali in conformità dei Programmi ufficiali del 14 ottobre 1923, 1925, 280 p.
- [60] *Sui Massimi e Minimi delle Funzioni Algebriche Elementari*, in *Questioni riguardanti le matematiche elementari raccolte e coordinate dal prof. F. Enriques*, 3 voll., Zanichelli: Bologna 1924-27. P. III: pp. 99-199.
- [61] *Una questione di minimo*, in «Periodico di Matematiche», ser. 4, V (1925), pp. 80-85.
- [62] *Velocità nel moto uniformemente vario*, in «Rassegna», n. 5 (1925), pp. 119-129.
- [63] *Una nuova dimostrazione di un vecchio teorema*, in «Rassegna», n. 5 (1925), p. 240.
- [64] *Sezioni triangolari di un cono circolare, retto od obliquo*, in «Periodico di Matematiche», ser. 4, V (1925), pp. 347-359.
- [65] *Numeri e figure per la 1. classe del corso integrativo in conformità dei programmi ufficiali del 1 ottobre 1923 : l'arte dei computi e la geometria...*, Palermo: Roma: Remo Sandron, 1926, 252 pp.
- [66] *Postilla ad una questione di minimo*, in «Periodico di Matematiche», ser. 4, VI (1926), pp. 38-40.
- [67] *Aree e volumi calcolati col metodo del Cavalieri*, in «Il Bollettino di Matematica. Giornale scientifico-didattico per l'incremento degli Studi Matematici nelle Scuole Medie», ser. 2, V (1926), pp. 1-17.
- [68] *Due osservazioni didattiche sul calcolo differenziale*, in «Periodico di Matematiche», ser. 4, VI (1926), pp. 350-351.
- [69] *Un'equazione indeterminata di nono grado*, in «Periodico di Matematiche», ser. 4, VII (1927), pp. 349-350.
- [70] *Quadrangoli piani e sghembi*, in «Periodico di Matematiche», ser. 4, X (1930), pp. 31-35.
- [71] *Un problema insidioso*, in «Periodico di Matematiche», ser. 4, X (1930), pp. 123-124.
- [72] *Un duplice sistema indeterminato*, Atti del Congresso di Bologna 1928, vol. II, 1930, pp. 25-30.
- [73] *Proposizioni assiomatiche*, Atti del Congresso di Bologna 1928, vol. III, 1930, pp. 381-387.
- [74] *Logica*, in *Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, a cura di L. Berzolari, G. Vivanti e G. Gigli, vol. I, parte I, Hoepli: Milano 1930, pp. 1-79.
- [75] *Il problema di Alhazen studiato elementarmente*, in «Periodico di Matematiche», ser. 4, XII (1932), pp. 113-118.
- [76] *Il metodo deduttivo*, in «Rendiconti del Regio Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti», ser. 2, LXV (1932), pp. 666-672.
- [77] *L'Asteroido studiato elementarmente*, in «Periodico di Matematiche», ser. 4, XII (1932), pp. 270-274.
- [78] *Una regola generale di divisibilità*, in «Periodico di Matematiche», ser. 4, XII (1932), pp. 52-55.
- [79] *Un antico problema insidioso*, in «Il Bollettino di Matematica. Giornale scientifico-didattico per l'incremento degli Studi Matematici nelle Scuole Medie», ser. 2, XI (1932), pp. 127-134, XII (1933), pp. 21-28.
- [80] *Confronto di numeri complessi*, in «Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze», 1933, pp. 126-127.
- [81] *Il contributo di G. Peano all'ideografia logica*, in «Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze», 1933, p. 99.
- [82] *Il contributo di G. Peano all'ideografia logica*, in «Periodico di Matematiche», ser. 4, XIII (1933), pp. 15-22.
- [83] *Le unità frazionarie*, in «Periodico di Matematiche», ser. 4, XIII (1933), pp. 87-98.
- [84] *Proposizioni primitive indipendenti*, in «Periodico di Matematiche», ser. 4, XIII (1933), pp. 244-248.
- [85] *Una proprietà dei numeri naturali*, in «Periodico di Matematiche», ser. 4, XIII (1933), pp. 292-295.
- [86] *Una proposizione di Erone ridimostrata e completata*, in «Periodico di Matematiche», ser. 4, XIII (1933), pp. 114-118.
- [87] *Logica ideografica. I. Che cosa sia ed a che cosa giovi. II. Idee indefinibili e idee primitive. III. Proposizioni indimostrabili e proposizioni postulate. IV. Eguaglianze*, in «Rivista di Filosofia Neo-Scolastica», XXV (1933), pp. 75-90, pp. 188-190, XXVI (1934), pp. 277-284.
- [88] *Le frazioni scindibili in due unità frazionarie*, in «Periodico di Matematiche», ser. 4, XIV (1934), pp. 47-53.
- [89] *Due postulati geometrici*, in «Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze», 1934, A, p. 181.
- [90] *Intensità della risultante*, in «Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze», 1935, A, p. 203.
- [91] *Lunule quadrabili*, in «Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze», 1935, A, p. 203.
- [92] *Sui poligoni incostruibili*, in «Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze», 1935, A, p. 203.
- [93] *Sull'impossibilità di estendere il corpo dei numeri complessi ordinari*, in «Periodico di Matematiche», ser. 4, XV (1935), pp. 63-64.
- [94] *Classes et pseudoclasses*, in *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique, Paris 1935*, Hermann: Paris 1936, vol. III: Langage et pseudo-problèmes, pp. 26-28.
- [95] *Les extensions successives des ensembles des nombres au point de vue déductif*, in *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique, Paris 1935*, Hermann: Paris 1936, vol. VII: Logique, pp. 52-59.
- [96] *Ce que la logique doit à Peano*, in *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique, Paris*

- 1935, Hermann: Paris 1936, vol. VIII: Histoire de la logique et de la philosophie scientifique, pp. 31-37.
- [97] *Automatismo deduttivo*, in «Il Bollettino di Matematica. Giornale scientifico-didattico per l'incremento degli Studi Matematici nelle Scuole Medie», ser. 2, XVI (1937), pp. 51-55.
- [98] *Automatismo deduttivo*, in *Atti del primo Congresso dell'Unione Matematica Italiana, Firenze 1937, 1937*, pp. 503-507.
- [99] *Un teorema esistenziale concernente i poligoni*, in *Atti del primo Congresso dell'Unione Matematica Italiana, Firenze 1937*, pp. 318-320.
- [100] *Come si deduce*, in «Periodico di Matematiche», ser. 4, XVIII (1938), pp. 228-236.
- [101] *La loi de la causalité*, in «Revue de Métaphysique et de Morale», L (1938), n. 2, pp. 203-212.
- [102] *Interpretazione aritmetica della logica (Teoria dei numeri primi a fattori fra loro diversi)*, in A. Giattanasio, *Due inediti di A. Padoa*, in «Physis», X (1968), pp. 317-321.
- [103] *Saggio di una teoria delle proposizioni. Considerazioni generali*, in A. Giattanasio, *Due inediti di A. Padoa*, in «Physis», X (1968), pp. 322-336.
- [104] *Le imprese di Buccari, Pola, Premuda*, Tipografia Commerciale: Genova, 19??, 8 pp.

4.2 Riferimenti bio-bibliografici:

- a) le lettere inedite di Alessandro Padoa a Giovanni Vailati conservate nell'Archivio Giovanni Vailati dell'Università degli Studi di Milano;
- b) il necrologio apparso nel 1937 sul «Bollettino dell'Unione matematica italiana» (vol. 37: p. 248),
- c) la biografia curata da H C. Kennedy per il Dictionary of Scientific Biography (p. 274),
- d) la notizia biografica riportata in F.G. Tricomi, «Matematici italiani del primo secolo dello stato unitario», in «Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino», 4 ser., vol. 81 n. 1, 1962 (ora disponibile all'indirizzo http://www.dm.unito.it/sism/m_italiani/biografie/tricomi/padoa.html),
- e) la biografia redatta da J.J.O⁷ Connor e da E.F. Robertson per il MacTutor History of Mathematics (<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Padoa.html>),
- f) la biografia curata da C.S. Roero per l'Accademia delle Scienze di Torino (http://www.torinoscienza.it/accademia/personaggi/apri?obj_id=547).
- g) A. Giattanasio, *Due inediti di A. Padoa*, in «Physis», X (1968).