# GEOGEBRA: ANALISI MATEMATICA DI OPERE D'ARTE

***Maria Luisa Spreafico[1], Daniele Tavella[2], Leonardo Vesprini[2], Martina Vita[3]***

*[1]Ricercatore di Geometria presso il Dipartimento di Scienze Matematiche, Politecnico di Torino*

*[2]studente di Architettura, Politecnico di Torino*

*[3] studentessa di Scienze della Formazione Primaria, Università degli Studi di Milano-Bicocca (studentessa dell'ultimo anno del Liceo Scientifico "A.Tosi" di Busto Arsizio durante la sperimentazione)*

*maria.spreafico@polito.it*

## Abstract

In questo lavoro mostriamo i risultati di una sperimentazione didattica proposta prevalentemente a studenti del primo anno di Architettura del Politecnico di Torino, nell'ambito all'interno del corso di Istituzioni di Matematiche. Dopo aver scelto l'immagine di un panorama, della mappa di un insediamento urbano o di un'opera d'arte, lo scopo era quello di cogliere alcune linee fondamentali della figura e dedurne, grazie all'uso di GeoGebra, le equazioni matematiche partendo da funzioni elementari e trasformandone i grafici con traslazioni, omotetie, ribaltamenti, per approssimarle al meglio. Il lavoro ha permesso un uso dinamico e applicato della Matematica all'arte.

## Introduzione

Vogliamo presentare in questo report i risultati di un lavoro proposto prevalentemente alle matricole di Architettura del Politecnico di Torino, durante l'anno accademico 2015/2016, all'interno del corso di Istituzioni di Matematiche. Tale corso è attualmente l'unico che tratta di matematica nel corso di studi di Architettura.

L'idea è stata quella di fare utilizzare agli studenti le potenzialità di GeoGebra, software per una matematica dinamica (cfr. Impedovo, (2001)), per leggere in termini matematici alcune caratteristiche architettoniche di opere realizzate, o alcuni dettagli di opere d'arte. In questo contesto di letture artistiche si può anche consultare il video della conferenza delle professoresse Elisa Gallo e Maria Cantoni (2011) e il materiale relativo messo a disposizione in rete. Per quanto riguarda invece altre sperimentazioni didattico-matematiche a sfondo architettonico si può leggere l'interessante pubblicazione di Carlini-Tedeschini Lalli (2011).

Nella nostra sperimentazione, dal punto di vista didattico, si è voluto ribaltare la tradizionale idea di studio di funzione: questa volta non era data l'espressione analitica della funzione della quale tracciare il grafico ma, dal grafico, bisognava risalire alle possibili funzioni elementari approssimanti e modificarne il grafico stesso tramite trasformazioni elementari come le traslazioni lungo i due assi, le omotetie e i ribaltamenti. Volutamente, visto il livello di approfondimento di alcuni concetti previsto nel corso, si è scelto di approssimare puntualmente le curve significative individuate.

Il progetto da noi realizzato prevede varie fasi: per prima cosa ogni studente sceglie la foto di un soggetto che per lui risulti particolarmente interessante.

Una volta importata l'immagine nel foglio di lavoro GeoGebra con la funzione "inserisci immagine da", l'allievo la posiziona nel sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Questo primo passaggio comporta già una lettura matematica di alcuni elementi dell'immagine per sfruttare eventuali simmetrie della figura. Lo studente deve poi individuare alcune curve significative (profili di edifici, strade e piazze, oppure linee di cambio colore in quadri) e trovare rette o porzioni di coniche, oppure grafici di funzioni che meglio approssimano le curve significative trovate in precedenza.

In alcuni casi è stato anche proposto l'uso del calcolo integrale, presente in GeoGebra, per valutare alcune porzioni significative dell'immagine, per esempio: aree edificate e aree verdi in panorami cittadini oppure zone con colori predominanti nel caso di opere d'arte.

In questo report, presentiamo tre lavori particolarmente significativi dal punto di vista dei contenuti matematici, svolti dagli autori Daniele Tavella, Leonardo Vesprini e Martina Vita, sottolineando alcuni punti chiave trattati nei tre elaborati.

Innanzitutto, i loro lavori mostrano diverse scelte di immagini da analizzare; infatti, nell'ordine, vengono proposti: la mappa di un sito (la vista aerea del parlamento di Canberra, Australia; foto tratta da Google maps), un paesaggio urbano (il Gateway di St. Louis: foto tratta da una cartolina) e un quadro (l'Urlo di Munch, terza versione del 1910; foto presa da internet con il filtro "contrassegnata per uso non commerciale"). Per una lettura delle opere di Munch o per ulteriori spunti di opere da indagare si possono consultare manuali di storia dell'arte (per esempio cfr. Cricco, Di Teodoro, (2011)).

In particolare, vedremo come questi studenti hanno fatto scelte opportune del sistema di riferimento, dettate dalla peculiarità dell'immagine scelta. Mostreremo poi metodi diversi per la determinazione dell'equazione di alcune coniche; a questo proposti è interessante il caso della parabola, la cui equazione viene determinata in modo diverso nei tre elaborati. Per quanto riguarda le funzioni illustreremo alcune idee interessanti che sono scaturite durante il lavoro e infine proporremo un'idea per confrontare i campi di colore presenti in un'opera d'arte usando l'integrazione, resa numericamente immediata da GeoGebra.

L'uso di GeoGebra è stato fondamentale. Esso ha infatti permesso di costruire coniche opportune utilizzando sia le funzioni proposte dalla barra degli strumenti, sia considerazioni di carattere geometrico. Inoltre, ha dato la possibilità di modificare velocemente la scrittura analitica delle funzioni visualizzando in tempo reale i relativi grafici. Questo ha permesso agli autori di verificare immediatamente l'esito delle loro scelte di trasformazione e di scegliere quindi i parametri per ottenere la migliore approssimazione.

La proposta di questa attività, facoltativa all'interno del corso, è stata accolta con molto favore da un numero significativo di allievi, coinvolgendoli in una materia, fondamentale per la loro formazione, ma che a volte risulta ostica ed apparentemente lontana dalle loro inclinazioni più artistiche ed architettoniche. Essa ha avuto una ricaduta positiva come motivazione verso i contenuti del corso di Istituzioni di Matematiche e come risultati finali relativi alla valutazione d'esame.

Visti i concetti matematici utilizzati, è possibile proporre questo lavoro nei trienni delle scuole superiori, con richieste modulate a seconda dei programmi svolti.

## Analisi di un'opera architettonica o un'opera d'arte

In questa sezione abbiamo individuato alcuni punti particolarmente significativi per la proposta didattica ed abbiamo analizzato come essi vengono declinati dai tre autori.

### *Scelta del sistema di riferimento*

Una volta importata l'immagine nel foglio di lavoro GeoGebra, ogni studente sceglie in modo opportuno come posizionarlo rispetto al sistema di riferimento cercando, se possibile, di sfruttare le simmetrie della figura, oppure, facendo in modo che, successivamente, si possano descrivere in modo semplice alcune funzioni trascendenti che si vogliono utilizzare. Questo invita  a cogliere le simmetrie di ciò che sta guardando; in particolare, senza ancora averne le equazioni, leggerà la parità o disparità di alcuni grafici.

Le tre scelte fatte dagli studenti sono mostrate nelle Figure 1, 2 e 3:

Per Daniele Tavella la scelta è stata molto naturale perché la vista della mappa presentava due evidenti assi di simmetria ortogonali, che sono stati quindi scelti come assi coordinati. Nella schermata proposta sono anche già evidenziate alcune coniche (che vedremo in seguito) che descrivono strade o che delimitano spazi in cui sono presenti edifici.

*Figura 1 (da Google Maps)*

Per Leonardo Vesprini è stato importante scegliere come origine degli assi il punto centrale della base della cupola. Infatti, come lui ha osservato, questa scelta comporta naturalmente che l'asse delle ordinate diventi asse di simmetria di alcuni elementi in figura, come la cupola stessa, l'arco e alcune aiuole.

*Figura 2 (da cartolina)*

Infine Martina Vita ha deciso di posizionare il quadro in modo che fosse semplice descrivere la funzione il cui grafico approssimava la separazione tra il colore blu e le sfumature del giallo e rosso del cielo, che sembrava la curva più complessa da analizzare. Nella figura appare la funzione elementare considerata, che è stata poi modificata, come verrà mostrato in seguito.

*Figura 3*

## *Lettura di elementi di geometria analitica*

Agli studenti è richiesto di scrivere le equazioni (se possibile anche parametriche) di almeno una retta, una conica (tra ellisse, parabola e iperbole) ed una circonferenza, dopo averle individuate nella figura. Nel nostro caso, per i contenuti svolti nel corso era chiesto di dedurre le equazioni di coniche in forma canonica o semplicemente traslate.

Questo è un ottimo esercizio per mostrare come il nostro occhio possa cogliere alcuni elementi di geometria analitica nel mondo che ci circonda o nell'opera d'arte, semplificando o interpolando alcune linee che naturalmente si sviluppano nell'immagine.

Abbiamo scelto alcune curve per ognuno dei tre lavori, per mostrare diversi procedimenti utilizzati dai tre autori, dando così vari spunti di lavoro al lettore.


*Figura 4*

Vediamo come sono stati determinati alcuni degli elementi disegnati. Per descrivere la circonferenza gialla, lo Tavella sceglie il punto A(6,0) e chiede a GeoGebra la traccia grafica e l'equazione della circonferenza di centro O(0,0) passante per A (utilizzando l'icona con il disegno della circonferenza e poi la scelta "Circonferenza-dati il centro e un punto"). Ovviamente il programma restituisce l'equazione $x^2 + y^2 = 36$. Le equazioni parametriche sono molto semplici: $x = 6\cos(t)\,, y = 6\sin(t)$.

L'equazione della parabola blu è stata invece determinata come segue: lo studente ha scelto la retta verticale (tracciata in arancione nella figura) e ha poi determinato il fuoco in modo tale che la parabola, determinata da GeoGebra, di data direttrice e fuoco, approssimasse al meglio il profilo delle costruzioni. Per una costruzione può precisa si fissa il vertice della parabola, determinandone le coordinate con GeoGebra. Successivamente, si possono fissare: un punto F sull'asse delle ascisse, il suo simmetrico F' rispetto al vertice e la retta perpendicolare all'asse delle ascisse passante per F'. A questo punto, vincolando F all'asse e muovendolo con lo strumento "Muovi", si visualizza una parabola che cambia forma (cambia la sua apertura mantenendo fisso il vertice). Si sceglie poi la parabola che meglio contiene gli edifici del parlamento. Nel nostro caso l'equazione della parabola determinata da Tavella è: $5.76y^2 - 26x = -12.5$. Le equazioni parametriche sono immediate: $x = \frac{76}{26}t^2 + \frac{12.5}{26}, y = t$.

Analogamente l'iperbole disegnata in verde in figura, che limita la porzione arancione della mappa e la sua simmetrica rispetto all'asse delle ascisse. Si fissa arbitrariamente un punto C sull'asse delle ordinate e se ne costruisce il simmetrico C' rispetto all'origine; si fissa inoltre un punto G che apparterrà sicuramente all'iperbole. Si chiede a GeoGebra di determinare l'iperbole di fuochi C e C' e passante per G (utilizzando l'icona coniche e selezionando "iperbole"). A questo punto, muovendo con il comando "Muovi" il primo fuoco C, si può variare l'iperbole e cercare quella desiderata. In questo caso il programma fornisce l'equazione $3.56x^2 - 2.44y^2 = 2.07$ . Tralasciamo la parametrizzazione che richiede, ad esempio, l'uso del coseno e del seno iperbolici.

*Figura 5*

Leonardo Vesprini ha invece utilizzato un altro metodo per ottenere l'equazione di una parabola che approssimasse al meglio l'arco. Ha utilizzato GeoGebra per individuare le coordinate del vertice e di un punto della parabola (nel suo caso il vertice è K(0; 6,65) e il punto della parabola scelto è J(3,96; 0). Per la sua scelta del sistema di riferimento, la parabola risulta simmetrica rispetto all'asse delle ordinate e ha quindi equazione generale $y = ax^2 + c$.

Imponendo le classiche condizioni sul vertice della parabola e il passaggio per K, ha ottenuto l'equazione della parabola cercata $y = -0{,}42x^2 + 6{,}65$ .

Infine consideriamo l'Urlo di Munch:

*Figura 6*

*Figura 7*

Qui si possono fare due osservazioni interessanti. Innanzitutto, Martina Vita è interessata (anche per il problema delle aree che tratteremo successivamente) a determinare l'equazione della retta che "disegna" la balaustra. Inaspettatamente, facendo tracciare a GeoGebra la retta che descrive il limite superiore della balaustra ci si accorge che mentre nella parte a sinistra del volto la retta descrive il limite superiore del bordo, nella parte a destra la stessa retta approssima la parte inferiore della balaustra. La studentessa ha potuto così anche fare considerazioni sulla percezione visiva di alcuni elementi delle opere d'arte.

L'altra osservazione riguarda un approccio diverso per la determinazione dell'equazione di una parabola. Voleva infatti determinare una parabola che contenesse la macchia di colore giallo che rappresentava il mare [Fig. 7].

In questo caso la parabola non è posizionata simmetricamente rispetto agli assi, ma la studentessa ha individuato come vertice il punto P (2.12, -1.29). Ha utilizzato allora la forma generale della parabola di vertice fissato $y = a(x\text{-}\alpha)^2 + \beta$ dove $\alpha = x_P = 2.12$ e $\beta = y_P = -1.29$.

Restava allora da determinare il coefficiente $a$. Questo è stato fatto per tentativi successivi, sfruttando la velocità di GeoGebra nella rappresentazione immediata del grafico di funzioni (in alternativa, si può anche costruire uno slider che parametrizzi $a$).

Nella figura, oltre alla parabola, è già stata evidenziata con l'uso di Paint, la porzione di piano interessante per il calcolo dell'area (vedi sezione successiva).

È interessante notare come, nei lavori dei tre studenti, siano state usate tipologie diverse di equazioni di parabole a seconda della specificità dell'immagine scelta.

## *Trasformazioni di grafici elementari e relative equazioni*

Nel corso di Istituzioni di Matematiche abbiamo lavorato molto sui grafici di funzioni. Lo scopo non era quello di saper studiare e disegnare grafici di funzioni date da leggi particolarmente complicate, perché i tempi del corso non permettono questa scelta, ma era quello di saper manipolare, in modo rapido e dinamico, i grafici delle funzioni elementari. Infatti a lezione era stata posta particolare attenzione alle trasformazioni di grafici facilmente visualizzabili come ribaltamenti, dati dalle espressioni -f(x), f(-x) e |f(x)|, traslazioni lungo gli assi e omotetie, espresse rispettivamente da f(x)+h, f(x+h), e hf(x), f(hx), dove h è un numero reale.

Queste trasformazioni sono state utilizzate da tutti e tre gli studenti per approssimare alcune linee dell'immagine. Vediamo alcune scelte particolarmente significative.

Daniele Tavella ha notato che l'andamento della strada ricorda decisamente il grafico della funzione seno, rappresentato nella figura dalla linea tratteggiata rossa.


*Figura 8*

Per una migliore approssimazione è stato però necessario "comprimere" verticalmente il grafico, moltiplicandolo per un fattore 0< α <1.

Tavella ha trovato, per tentativi successivi, che il valore di 2/5 è quello che meglio approssima l'andamento della strada in esame per il più lungo tratto possibile. Quindi la funzione cercata è:

$$y = \frac{2sinx}{5}, -2\pi < x < \pi.$$

Ecco altri interessanti esempi tratti dal lavoro di Tavella.

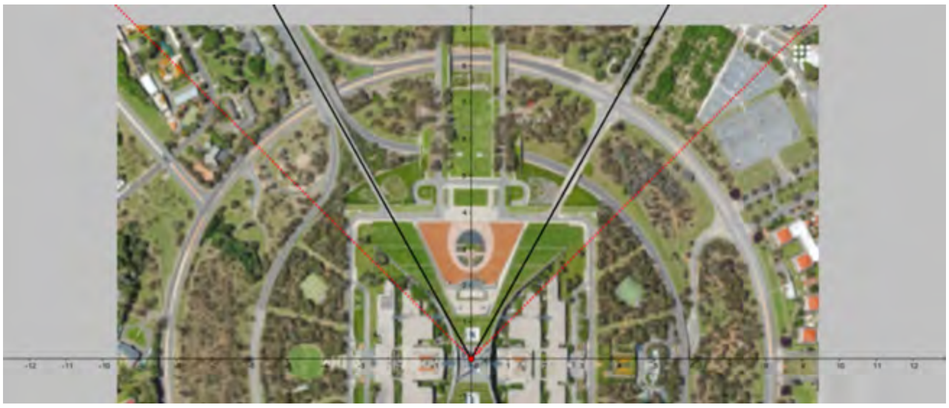

*Figura 9*

Le due strade che da Nord-Ovest e Nord-Est convergono verso il centro della House of Parliament possono essere interpretate come una funzione modulo, schiacciata verso l'asse delle ordinate. In via sperimentale si deduce che la funzione in questione è $y = \frac{9}{5}|x|$.

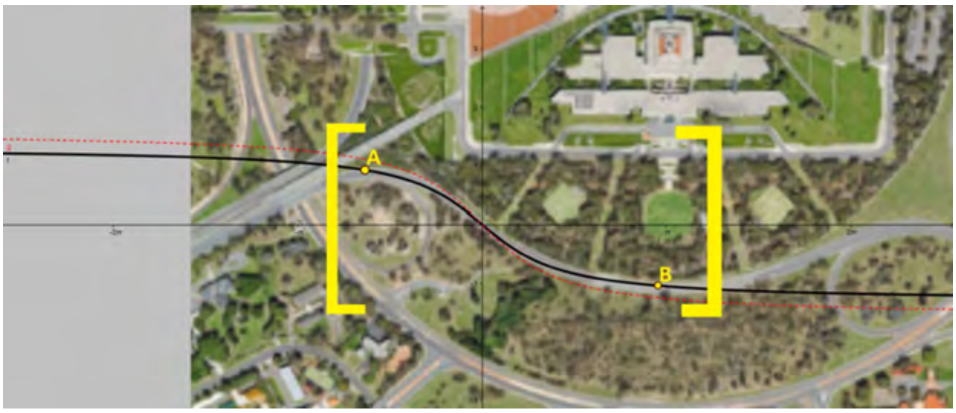


*Figura 10*

La funzione $y = \frac{5}{6}arctg(-x)$ nell'intervallo $\left[-\frac{5}{8}\pi, \pi\right]$, descrive con un'approssimazione abbastanza attendibile l'andamento del percorso e la sua unione con il raccordo stradale.

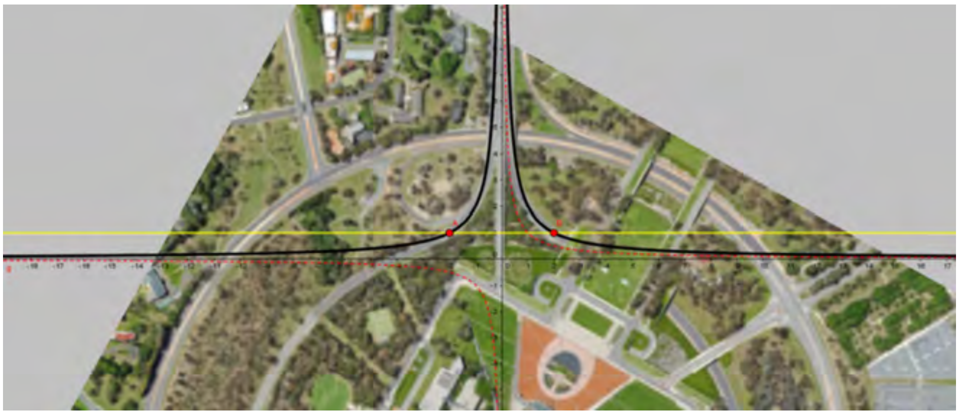

*Figura 11*

Anche se non in maniera completamente soddisfacente, il tratto di strada in questione può essere descritto a partire dall'equazione $y = \frac{1}{x}$ . La migliore approssimazione, al di sopra della linea orizzontale gialla, è data da $y = \frac{2}{|x|}$

*Figura 12*

Questo tratto di strada, almeno per --3<x<0, è ben descritto dall'equazione y=ln(-2x), ottenuta con semplici trasformazioni a partire dalla funzione elementare y=ln(x).

A questo studente è stato chiesto anche di descrivere una funzione a tratti. Questo esercizio è molto utile perché, in genere, per gli studenti, non è naturale la funzione definita a tratti ed essi preferiscono studiare il grafico di funzioni date analiticamente da un'unica espressione. Questi esempi però mostrano come nella descrizione di linee che si colgono nelle immagini che ci circondano, sia proprio necessario uno spezzamento. Ecco il tratto scelto:

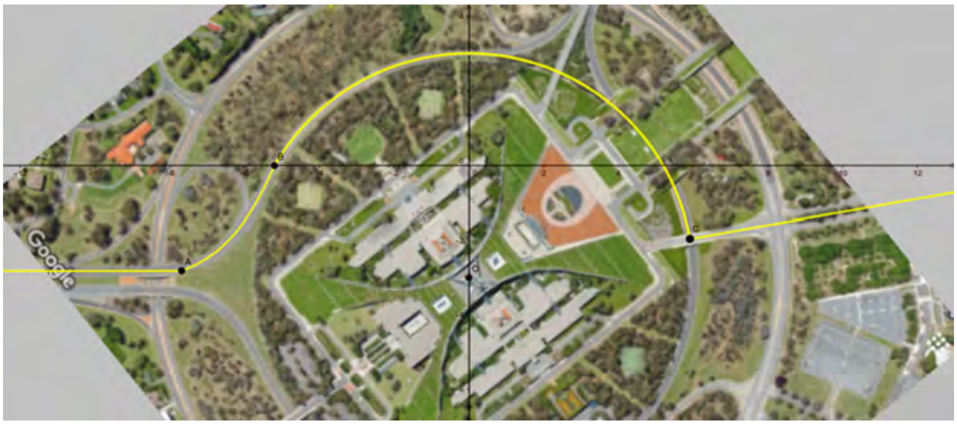

*Figura 13*

Ne omettiamo le equazioni che sono deducibili da alcune funzioni e coniche studiate nell'elaborato dello studente, con conti non sempre banali.

Vesprini ha invece lavorato maggiormente sull'approssimazione dell'arco. Aveva già provato ad approssimarlo con una parabola (cfr. Figura 5), ma non sembrava un'approssimazione ottimale. Ricordando allora che in molte architetture è utilizzata la funzione catenaria, gli è stato proposto di partire dall'equazione di questa funzione. Ecco i risultati ottenuti.

*Figura 14*

*Figura 15*

Inizialmente, partendo dall'equazione della catenaria $y = Acosh\left(\frac{x}{A}\right)$ dove $cosh\left(\frac{x}{A}\right) = \frac{e^{\frac{x}{A}}+e^{\frac{-x}{A}}}{2}$ , con alcune prove sperimentali lo studente ha ottenuto che l'apertura dell'arco era meglio approssimata per A=6,65. La catenaria andava poi ribaltata e traslata. La curva rossa in Figura 14 ha equazione $y = -6{,}65\cosh\left(\frac{2{,}2x}{6{,}65}\right) + 13{,}3$

Ha poi provato a modificare la base dell'esponenziale utilizzato nella formula del coseno iperbolico. Questo è stato un ottimo esercizio di manipolazione e modifica di funzioni elementari assegnate.

Sempre per prove successive lo studente è giunto all'equazione: $y = -6{,}65\frac{8^{\frac{x}{6,65}} + 8^{\frac{-x}{6,65}}}{2} + 13{,}3$ rappresentata dalla linea verde in Figura 15.

Infine, i bordi delle aiuole sono state originalmente approssimate con la funzione arcotangente, come mostra la seguente immagine:


*Figura 16*

La prima funzione individuata è stata $y = arctg(x + 0{,}2) - 1{,}12$: l'altra funzione arcotangente è ottenuta poi per simmetria.

Nel caso della studentessa Vita, mostriamo solo come abbia lavorato sull'approssimazione delle colline. Inizialmente ha provato a partire da una sinusoide (cfr, Figura 3) ma si è accorta che la sinusoide era smorzata. È stato naturale allora considerare la funzione $f(x) = \frac{sinx}{x}$ e, modificando opportunamente con omotetie, traslazioni e ribaltamenti, è giunta all'equazione:

$$r(x) = -1.2\,\frac{sin\big(1.6(x - 7.55)\big)}{1.6(x - 7.55)}$$

che ha come grafico la sinusoide smorzata rossa della Figura 17.


*Figura 17*

## *Calcolo di aree*

Un'ulteriore interessante funzione di GeoGebra è la possibilità di calcolare numericamente gli integrali (con il comando int[<funzione>, <x iniziale>, <x finale>]) e di poter utilizzare questa funzione per il calcolo delle aree.

La studentessa Vita ha provato a suddividere il quadro di Munch in zone in cui vi fosse un colore dominante. Ha poi calcolato l'area compresa tra due curve e confrontato i valori numerici delle "macchie" di colore. In particolare per il calcolo dell'area blu la studentessa ha levato un'approssimazione del mare in giallo ottenuta con la parabola che aveva precedentemente studiato.

Ecco due dettagli della suddivisione dell'immagine:

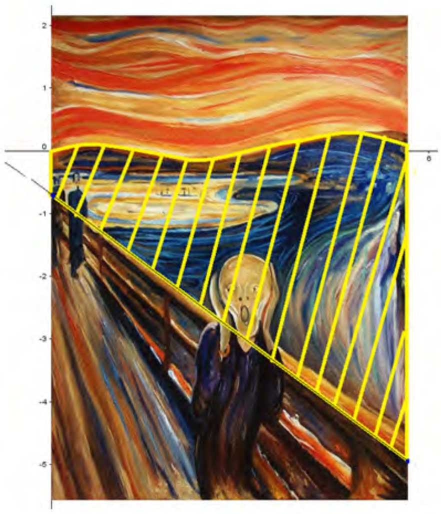

*Figura 18*

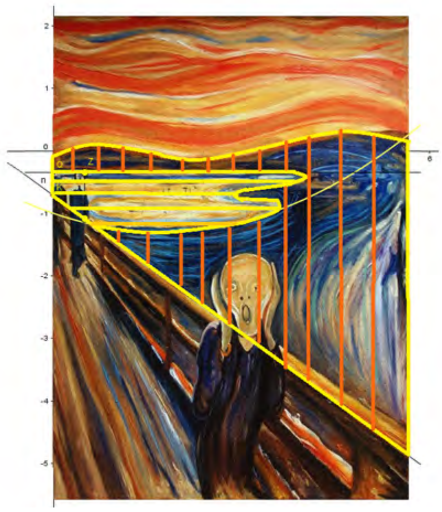

*Figura 19*

Nella Figura 18 si vedono le tre grandi aree (evidenziate con Paint): il cielo rosso (compreso tra la retta orizzontale, bordo superiore del quadro, e la sinusoide smorzata); il mare blu (compreso tra la sinusoide e la retta che definisce la balaustra); la zona marrone (tra la balaustra e la retta orizzontale, bordo inferiore del quadro). Nella Figura 19, è messa in evidenza la macchia gialla da levare a quella blu.

Proprio con le funzioni suggerite nella precedente descrizione, sono stati calcolati le aree come $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$ , dove f(x) e g(x) rappresentano rispettivamente, di volta in volta, la funzione che limita superiormente e inferiormente la zona che interessa.

I calcoli effettuati da GeoGebra hanno portato ai seguenti dati numerici sulle aree: Area Marrone = 15.66 unità, Area Blu = 13.21 unità e l'Area Rossa = 12.04 unità. La studentessa ha poi proposto questa sua interpretazione: l'area rossa è con buona approssimazione equiestesa rispetto a quella blu. Il marrone risulta preponderante secondo i calcoli ma non per l'occhio umano in quanto contiene anche parte degli altri due colori.

Martina Vita propone un'interpretazione della sua percezione visiva; quest'argomento è fonte di studio e ricerca (cfr. Arnheim (1962)) e può essere approfondito poi in lezioni trasversali.

## Conclusioni

Raccolti alcuni commenti a fine corso degli studenti, posso affermare che per tutti questo approccio dinamico della Matematica, applicato ad elementi per loro interessanti e vicini alla loro indole artistica è stato trovato stimolante. La maggior parte degli studenti ha imparato a gestire le trasformazioni dei grafici, che avevamo spiegato a lezione, in modo autonomo sperimentando le trasformazioni con GeoGebra che ha il pregio di restituire immediatamente il risultato finale e di poter modificare velocemente le funzioni. Coloro che hanno aderito a questa proposta didattica hanno affrontato la parte dello scritto d'esame relativa alle funzioni con più sicurezza e ottenendo risultati molto buoni. La sperimentazione in questa direzione, ma con nuove idee, procederà quindi sicuramente anche nei prossimi anni.

La possibilità di ripetere questo lavoro con immagini il cui soggetto sia caratterizzante per un dato corso di studi (per esempio, immagini di auto per un corso di meccanica, di fiori per un corso di agraria, ecc.), rende questa sperimentazione intrigante per ogni scuola superiore. Inoltre, abbiamo mostrato come la lettura matematica possa essere fatta con contenuti didattici diversi, dal solo utilizzo di elementi di geometria analitica piana all'uso delle funzioni elementari con i loro grafici per finire con applicazioni del calcolo integrale. Questo rende l'idea idonea ad essere utilizzata in tutte le classi dei trienni delle scuole secondarie di secondo grado.

Voglio ringraziare tutti i miei studenti, in particolare i co-autori di questo report, per aver partecipato a questa sperimentazione.

## *Bibliografia*

Arnheim, R. (1954), Art and Visual Perception. A Psychology of the creative Eye. Berkeley: University of California Press. Prima traduzione italiana: (1962). *Arte e percezione visiva*. Milano: Feltrinelli.

Cantoni, M., Gallo, E, (2011). *Guarino Guarini. Arte e Matematica.* http://moodle.lacasadegliinsegnanti.it/course/view.php?id=23#section-3

Carlini, A., Tedeschini Lalli, L. (2012). *Interrogare lo spazio. Esperienze di matematica e architettura.* Roma: Gangemi.

Cricco, G., Di Teodoro, F., (2011) *Il Cricco Di Teodoro. Itinerario nell'arte. Edizione. Gialla.* 3. Bologna: Zanichelli.

Impedovo, M. (2001). Computer algebra e insegnamento della matematica. *Quaderni del Ministero della Pubblica Istruzione, Direzione Generale Classica*, 44.