Atti del VI GEOGEBRA ITALIAN DAY - 2016

# L'ATTIVITÀ DEI DOCENTI CON GEOGEBRA NELLA FORMAZIONE E NELLA SPERIMENTAZIONE

6 ottobre 2016, Liceo Classico M. D'Azeglio, Torino

A cura di:
***Ornella Robutti***

**Ledizioni**

Via Alamanni, 11 - 20141 Milano - Italy

www.ledizioni.it

info@ledizioni.it

*L'ATTIVITÀ DEI DOCENTI CON GEOGEBRA NELLA FORMAZIONE E NELLA SPERIMENTAZIONE*
Atti del VI GeoGebra Italian Day 2016

A cura di: Ornella Robutti, Ledizioni 2018
Revisione testo: Elisa Gentile

**Comitato scientifico-organizzativo:** Ferdinando Arzarello, Silvia Beltramino, Alessio Drivet, Elisa Gentile, Miranda Mosca, Giuseppina Rinaudo, Ornella Robutti, Cristina Sabena, Ada Sargenti, Claudia Testa, Germana Trinchero

**Responsabile del Convegno:** Ornella Robutti

**Esperto tecnico:** Tiziana Armano

**Coordinamento rapporti con le scuole:** Daniela Truffo (Città metropolitana di Torino, CE.SE.DI.)

ISBN: 9788867058075
In copertina: immagine creata con GeoGebra dalla prof.ssa Ada Sargenti

## INDICE

# Relazioni in plenaria



# Comunicazioni

## Workshop

# VI GEOGEBRA ITALIAN DAY – 2016

*L'attività dei docenti con GeoGebra nella formazione e nella sperimentazione*

*6 ottobre 2016*

*Aula Magna Liceo Classico M. D'Azeglio, Torino*

| | | |
|---|---|---|
| h. 14.00 | Autorità istituzionali | Università di Torino, USR Piemonte, Dipartimento di Matematica, Dipartimento di Fisica, Scuola di Scienze della Natura, Città metropolitana Torino, Liceo D'Azeglio |
| h. 14.15 | Markus Hohenwarter | Presentazione delle novità di GeoGebra |
| h. 14.30 | Aitzol Lasa | The progression on algebraization levels with GeoGebra |
| h. 15.15 | Giovannina Albano, Umberto Dello Iacono | GeoGebra, E-learning e Digital Storytelling: una possibile integrazione per l'apprendimento in matematica |
| h. 16.00 – 16.30 | Intervallo | |
| h. 16.30 – 18.30 | Sessioni Parallele Comunicazioni e workshop | |
| h.18.30 | Chiusura | |

# GEOGEBRA, MATEMATICA E DISEGNO ARCHITETTONICO. ANALISI MATEMATICA E GEOMETRICA NEI PROFILI DEGLI ORDINI ARCHITETTONICI: ESEMPI DALLA "REGOLA DELLI CINQUE ORDINI D'ARCHITETTURA DI M. IACOMO BAROZZIO DA VIGNOLA"

***Martino Pavignano*[1], *Maria Luisa Spreafico*[2], *Ursula Zich*[3]**
*[1]dottorando BAP, Politecnico di Torino, DAD,*
*[2]RC Geometria, Politecnico di Torino, DISMA,*
*[3]RC Disegno, Politecnico di Torino, DAD*
*maria.spreafico@polito.it*

## Abstract

Il contributo propone l'utilizzo di GeoGebra come strumento per indagare dinamicamente il disegno architettonico dal punto di vista matematico. Le applicazioni presentate sono state realizzate da un gruppo interdisciplinare di ricercatori e dottorandi dei dipartimenti di Scienze Matematiche e di Architettura e Design del Politecnico di Torino. La scelta di un'opportuna fonte grafica, criticamente desunta dalla sterminata mole di "dati grafici e testuali" che il contesto architettonico mette a disposizione degli studenti, permette infatti di sperimentare attivamente sia un processo di studio delle fonti, che più fasi di indagine geometrica e matematica.

## 1. Introduzione

I software di matematica dinamica come GeoGebra[1] possono rappresentare un'interessante ed efficace strumento di sintesi, critica e rappresentativa, tra gli aspetti tecnici-estetici e tra la sfera artistica-scientifica (Serpe Frassia 2015, 365) che caratterizzano gran parte dell'ambiente costruito. Ma questi software, espressamente progettati per studiare e rappresentare la matematica, quali innovazioni, o nuovi approcci critici, sono in grado di apportare se applicati in ambito puramente architettonico? Ad una prima indagine, permettono, ad esempio, di confrontare rapidamente la 'geometria teorica' che sottende la forma architettonica ideale con la geometria effettivamente disegnata e/o costruita.

Se, come suggerisce Mario Botta: «architettura e matematica sono discipline che […] hanno sempre coltivato interessi di reciprocità», trovando nella mutua complementarietà «continue occasioni di crescita e confronto» (Botta 2003), allora nell'attuale contesto matematico-architettonico, l'interdisciplinarietà di questo contributo vuole evidenziare come la matematica continui a svolgere il ruolo «di grande mediatrice fra la scienza e la tecnica nonché tra la scienza e l'arte» (Geymonat 1980), rivelandosi essa stessa soggetto-oggetto e strumento-intento della produzione architettonica.

Per esempio, molti studi sono stati indirizzati verso l'analisi delle costruzioni della voluta del capitello ionico.[2] A scala architettonica risultano fondamentali le analisi su casi applicativi

1 Da qui in avanti GeoGebra. https://www.geogebra.org/about. Cfr. Impedovo (2001) per il concetto di matematica dinamica.

2 Tra questi, a proposito della sua rappresentazione nella trattatistica architettonica, si possono ricordare Losito (1993), Goredeau (2012), Fazzina (2016) e Andrey e Galli (2004). In quest'ultimo gli autori propongono alcune innovative soluzioni di approssimazione matematica della voluta che, non trattando esplicitamente del rapporto tra le spirali di tipo logaritmico e le costruzioni grafiche delle volute, lasciano aperte ulteriori interpretazioni (Spreafico et al. 2016).

operate da Angelini e Migliari (1998). In campo più propriamente matematico sono di notevole interesse le riletture analitiche e geometriche di architetture e paesaggi esposte in Carlini e Tedeschini (2016) così come l'utilizzo di strumenti matematici per l'interpretazione di spirali e volute operate da Gattuso e Serpe (2012) e da Serpe e Frassia (2013). Sia la letteratura matematica che quella architettonica sono quindi pervase da numerose 'riletture' e 'analisi geometriche' di architetture e relativi progetti, mettendo in evidenza un contesto potenzialmente fertile per nuovi approcci didattici multi-disciplinari e multi-scalari.

Ecco quindi che, partendo da un precedente lavoro di ricerca, presentato dagli autori nell'ambito del XXVIII Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione (Spreafico et al. 2016),[3] in questa sede se ne propongono alcune interazioni che possono essere proposte nelle scuole secondarie di primo e secondo grado, utilizzando GeoGebra per le sue dinamiche esplorative-rappresentative, abbracciando discipline diverse e diventandone strumento sinergico. Il programma permette infatti di gestire la descrizione degli elementi geometrici sia a partire dalla geometria intrinseca degli elementi sia usando la geometria analitica.

## 2. Approccio metodologico

Posto che indagare criticamente un oggetto architettonico implica necessariamente un approccio metodologico caratterizzato da una sequenza di passi che portano alla definizione del 'processo di conoscenza' dello stesso, come prevede ad esempio il Progetto Logico del Rilievo (Marotta 2001), un ruolo rilevante è associato alle fonti grafiche.

Queste descrivono le consistenze – di progetto e di rilievo – più o meno materiali del manufatto e si avvalgono di codici grafici eterogenei e trasversali che «grazie all'utilizzo di più disegni […], attraverso una rigorosa sistematizzazione metodologica» permettono al disegno di diventare «un vero strumento di indagine» identificandosi come strumento primo dell'analisi grafica (Docci 2009, 3-4) [Fig.01]. Nel merito, la geometria – alla base dei processi di rilevamento, restituzione, modellazione e composizione – è strumento attivo di lettura e interpretazione della forma, teorica e non.

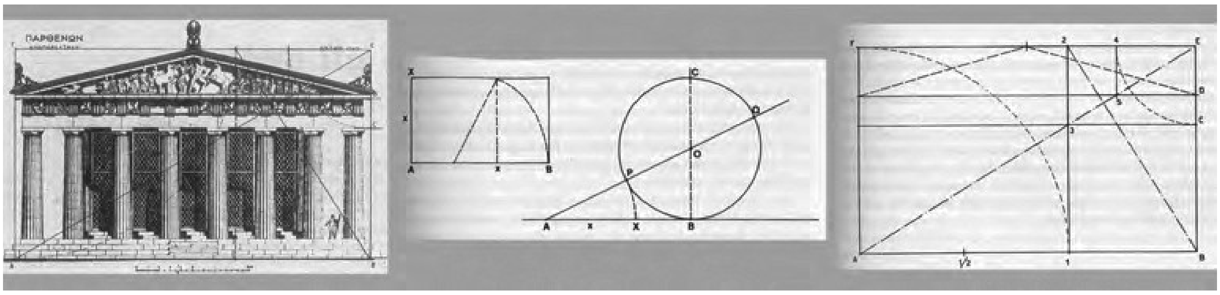

*Figura 1 – Esempio di analisi grafica delle proporzioni architettoniche applicata al fronte principale del Partenone (da Docci, Gaiani e Maestri 2011, 102-103).*

L'uso di GeoGebra come strumento di lettura e interpretazione di una fonte grafica risulta «facile et spedito», tanto da ricordare l'approccio culturale denunciato da Giacomo Barozzi detto il Vignola nella prefazione *A i lettori* della sua *Regola*[4] e riscontrabile nelle tavole di chiara impostazione raffaellesca,[5] ci ha accompagnato nella scelta della fonte da indagare. Le potenzialità dinamiche del software, che permettono di visualizzare aspetti teorici normalmente sottesi rendendoli più accessibili – coniugando geometria, algebra, grafici e non solo in un'unica

3 Il contributo ha come oggetto l'ordine architettonico, matematicamente analizzato in quanto macro-insieme di micro-elementi generati da profili che, estrusi/rotati, ne originano gran parte delle componenti.

4 Barozzi (1562), tav. iii.

5 Cfr. Cfr. Di Teodoro, F. P. (2003). *Raffaello, Baldassar Castiglione e la Lettera a Leone X, con l'aggiunta di due saggi raffaelleschi*. San Giorgio di Piaro: Minerva.

applicazione *user-friendly* – si rivelano infatti ottimali per indagare la complessità intrinseca della trattatistica architettonica, mediando tra testo e immagine esplicitandone relazioni più o meno biunivoche, nel pieno rispetto della cultura politecnica (Marchis 2012, 146).

## 2.1. Perché la Regola

L'identificazione della fonte grafica che fornisce la base delle interazioni che seguono è stata fatta proprio in funzione delle stesse. Questa deve infatti essere comprensibile, sia nei testi che nei grafici e di rapida consultazione. Si è quindi scelto di analizzare, tra i tanti, un trattato architettonico del XVI secolo: la *Regola delli cinque ordini d'architettura di M. Iacomo Barozzio da Vignola*.[6] La *Regola*, pensata come sistema proporzionale (per gli ordini classici romani) di facile applicazione, permette di definire, tramite semplici rapporti algebrici, i vari elementi componenti l'ordine, che viene descritto per mezzo di tavole calcografiche di estremo nitore [Fig.02]. Proprio grazie alla sua struttura formale e alla sua tipologia editoriale, [7] che risulta essere ben diversa rispetto ai trattati coevi,[8] la *Regola* ben si presta ad essere fatta oggetto di questa analisi interdisciplinare.

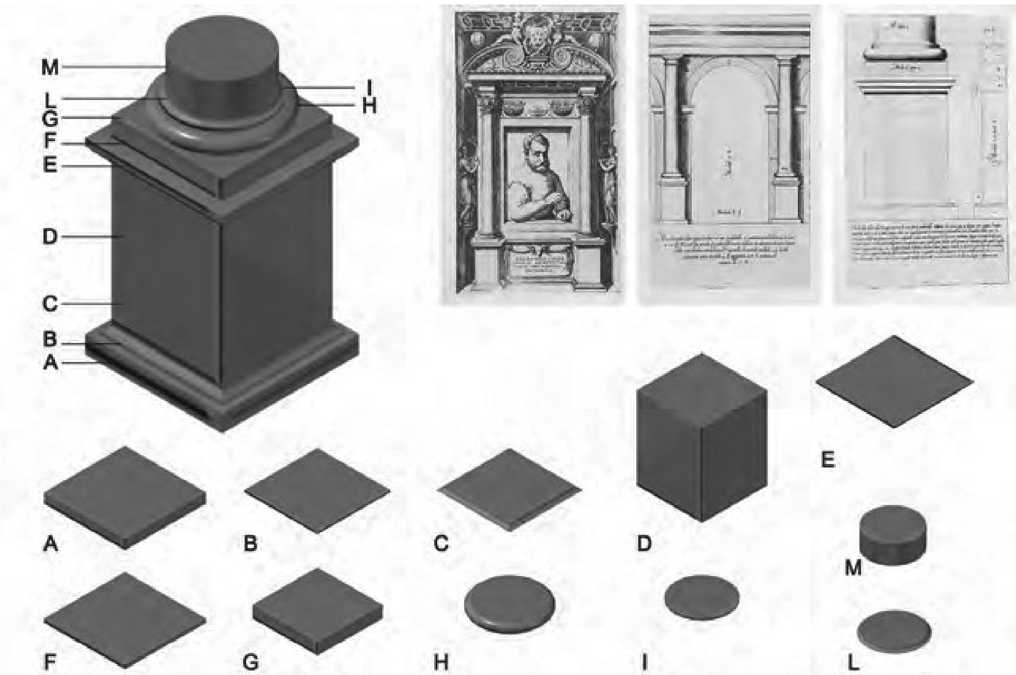


*Figura 2 – Composizione e scomposizione in singoli solidi (di traslazione e di rotazione) del piedestallo tuscanico sulla base delle Tavv. VI e VII della Regola. Elaborazione degli autori.*

## 3. Interazioni tra matematica e disegno architettonico: esperienze laboratoriali

Grazie all'immediatezza di alcune funzioni di GeoGebra (costruzione di rette e circonferenze con determinate condizioni), è possibile ridisegnare molti degli elementi architettonici descritti nella *Regola*, sia interpretando le 'indicazioni grafiche' che seguendo le descrizioni testuali.

6 Edito a Roma, nel 1562. Cfr. Tuttle, R. J. et al. (eds) (2002). Jacopo Barozzi da Vignola. Milano : Electa.

7 L'opera è composta da 32 tavole *in folio*. Queste descrivono i cinque ordini della classicità romana dal generale al particolare, secondo un approccio metodologico ormai affermato nel campo del rilievo architettonico. Cfr. Docci, M. e Maestri, D. (2009). Manuale di rilevamento architettonico e urbano. Roma-Bari: Laterza.

8 Per esempio quelli di Sebastiano Serlio (1537-1575), e Andrea Palladio (1570). Per approfondire: Evers, B. (ed.) (2003). *Teoria dell'architettura. 117 trattati dal Rinascimento a oggi*. Colonia: Taschen; Kruft, H. W. (1988). *Storia delle teorie architettoniche. Da Vitruvio al Settecento*. Roma-Bari: Laterza.

Il lavoro si può adattare a vari livelli di conoscenza della matematica: ai ragazzi del primo e secondo biennio delle secondarie di secondo grado, per esempio, può essere richiesta l'uso di GeoGebra per il ridisegno, con il riconoscimento delle equazioni, fornite dal programma stesso, degli elementi descritti. Se proposta ai ragazzi dell'ultimo anno delle medie superiori, questa sperimentazione può essere lo spunto per parlare di parametrizzazioni e superfici di rotazione e traslazione.

### *3.1. GeoGebra strumento di riconoscimento e ridisegno di alcuni elementi della forma architettonica*

Come esempio si descrive il ridisegno del profilo di una porzione della parte basamentale della colonna di ordine tuscanico, seguendo le indicazioni sugli elementi (tori, cilindri, gole e parallelepipedi) e le proporzioni di questi elementi così come descritte dal Vignola. Dal momento che gli elementi tridimensionali si possono ottenere facendo traslare o ruotare le curve semplici che rappresentano la sezione di questi oggetti, ha senso lavorare su un piano cartesiano, disegnando solo il profilo dei vari elementi. La prima parte del lavoro richiede esclusivamente strumenti di geometria elementare: saper tracciare la retta per due punti, circonferenze (dato centro e raggio, o passanti per tre punti o tangenti ad una data retta in un punto e di raggio fissato).

Si può dunque far suddividere agli studenti il foglio di lavoro con rette parallele all'asse delle ascisse che mantengano tra loro distanze proporzionali seguendo il disegno della fonte grafica. Scegliendo poi un punto di partenza opportuno, si possono seguire i comandi di GeoGebra di costruzione di rette perpendicolari a rette fissate e passanti per un punto o circonferenze di centro e raggio fissati, per ricostruire il profilo. Si possono anche analizzare le posizioni reciproche dei centri delle circonferenze coinvolte e le proporzioni dei loro raggi.

Questa prima parte può essere svolta anche dagli studenti del primo biennio delle superiori. Per gli studenti delle classi successive, sarà invece interessante, dopo aver determinato con GeoGebra le equazioni delle rette, cercare una parametrizzazione di ogni singolo elemento. Un ulteriore approfondimento può essere dato dalla scrittura dei solidi di rotazione e di traslazione.

Si mostra come esempio il profilo succitato, mettendo a confronto la rielaborazione degli autori con il disegno estrapolato dalla *Regola* del Vignola.

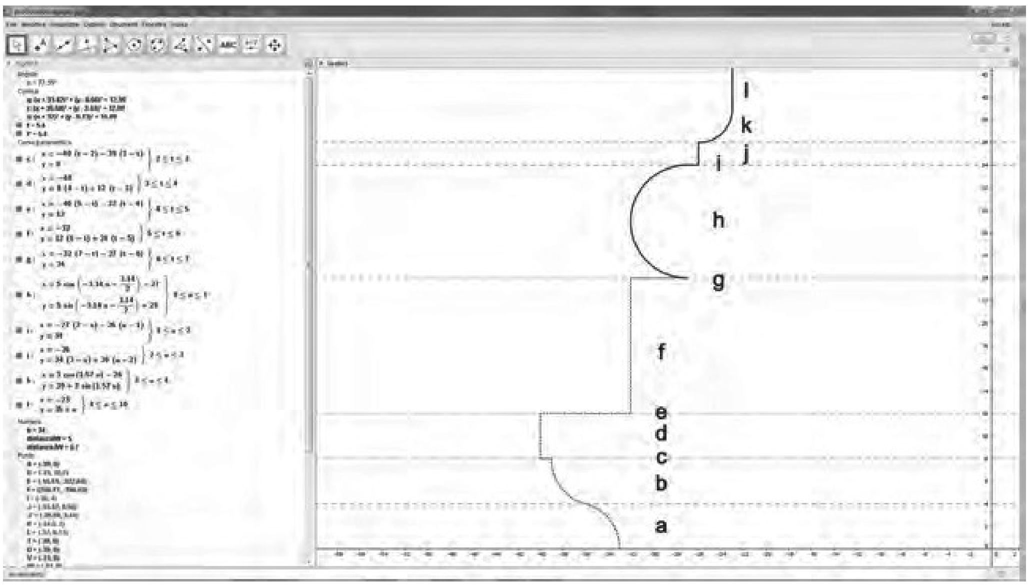


*Figura 3 – Schema proporzionale porzione di base tuscanica. Elaborazione degli autori.*

Nella Fig. 03 si è scelto di parametrizzare una porzione particolarmente significativa dell'ordine tuscanico, che contiene sia elementi di traslazione sia elementi di rotazione.

Dato che GeoGebra utilizza già le coordinate xy, per ottenere la traslazione del profilo lungo un'asse perpendicolare al piano sezione, qui indicato come z, si considera il punto (x(t),y(t)) e si costruisce la superficie di traslazione (uno dei quattro lati della colonna). Nel caso in figura avremo

$$(x(t), y(t), x(t)*tg(s)) \text{ con } t \in [0,7], s \in [-\pi/4, \pi/4].$$

Dove t è il parametro del profilo che genera il solido di traslazione

Per ottenere gli altri lati si procede in modo analogo. Per ottenere la rotazione (completa) del profilo, basta considerare la superficie:

$$(x(u)\cos\vartheta, y(u), x(u)\sin\vartheta) \text{ con } u \in [0,10], \vartheta \in [0,2\pi]$$

### *3.2. GeoGebra strumento conoscitivo per un ridisegno analitico seguendo la "regola", ovvero della rappresentazione d'architettura*

È possibile utilizzare GeoGebra per ripercorrere alcune costruzioni geometriche del disegno architettonico, così come descritte nei trattati, a parole o solamente tramite grafici, e confrontare il disegno ottenuto con quelli proposti dagli autori.

In questo caso è fondamentale poter importare tramite GeoGebra le immagini digitali delle fonti, in modo che si possa sovrapporre la costruzione elaborata con GeoGebra al disegno originale. È possibile selezionare le costruzioni in modo che queste possano essere sviluppate anche dagli studenti del biennio delle scuole secondarie di secondo grado.

Come esempio si mostra come sia possibile ripercorre la costruzione geometrica della gola rovescia, elemento architettonico il cui profilo è costituito da due archi di circonferenza.

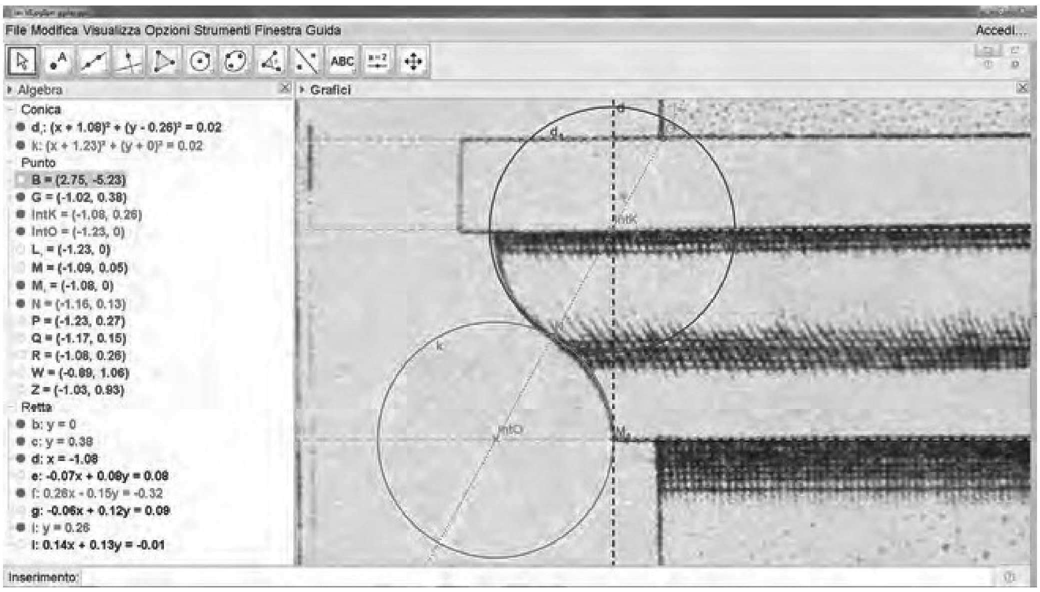


*Figura 4 – Studio analitico della gola rovescia.*

In questo caso, dopo aver importato l'immagine del disegno vignolesco e utilizzato GeoGebra per tracciarne la costruzione spiegata dal Barozzi, si è osservato che il risultato si discosta leggermente dal disegno dell'autore. Analoghe differenze si possono rilevare qualora si provasse a riproporre l'originale con applicativo CAD e a confrontare questa tipologia di ridisegno assistito con il grafico risultate da un percorso di reinterpretazione manuale della *Regola* (Pavignano 2009, 14-30).

Le costruzioni stesse, insieme alle eventuali insorgenza di discrepanze in fase di confronto tra la fonte e l'interpretazione su GeoGebra, possono diventare interessanti spunti di discussione per la classe. Può infatti risultare costruttivo sottolineare e analizzare queste "difformità", dal momento che sussistono notevoli differenze sia tra le diverse tipologie di rappresentazione quali disegno manuale e disegno assistito (Pavignano 2009, 31) che tra le fonti grafiche di molteplice natura (Pavignano 2012, 114-116).

### *3.3. GeoGebra strumento interpretativo per la rappresentazione di sintesi*

Scegliendo opportunamente tavole di disegni e immagini di realizzazioni architettoniche è possibile approssimare o interpolare con funzioni e/o curve parametriche alcuni tratti delle opere. In questo caso il lavoro è maggiormente stimolante nelle classi finali delle scuole secondarie di secondo grado, quando la conoscenza della matematica è più approfondita.

Nel precedente lavoro, abbiamo utilizzato GeoGebra per fare alcune osservazioni sulla percezione delle volute dei capiteli ionici disegnati dal Vignola (Spreafico et al. 2016, 1289). L'analisi è sorta dal confronto tra la forma delle volute così come descritte dal Barozzi e la spirale logaritmica. Il risultato ha permesso di notare come tratti di spirali di questo tipo approssimino quest'ultima, quand'anche sottoposta ad operazioni di adattamento al grafico originale, risulti essere quella che meglio approssima quella utilizzata in questo specifico disegno architettonico, sottolineando quindi, ancora una volta, come la spirale logaritmica sia quella più usata in natura e in generale percepita come maggiormente armoniosa dal nostro occhio.

Si è quindi provato ad approssimarne la costruzione con diversi tratti o porzioni di spirali logaritmiche di entrambe le volute disegnate dal Vignola, ovvero sia sulla spirale derivata dalla costruzione di Giuseppe Salviati[9] sia su quella desunta delle congetture di Albrecht Dürer (come elaborate da Guillaume Philandriet).[10] Considerata l'equazione parametrica generale della spirale logaritmica:

Si possono allora determinare $x = ae^b \cos(t), y = ae^b \sin(t)$ l passaggio per due punti, per tracciare un arco di logaritmica che interpreti una porzione di voluta. Il nodo cruciale è proprio la scelta dei due punti che si può effettuare in vari modi, che portano ad approssimazioni e discussioni diverse. In questo caso GeoGebra permette molto rapidamente di visualizzare le varie porzioni di logaritmica trovate, di cogliere immediatamente le soluzioni più soddisfacenti, dal punto di vista percettivo, e di controllare anche la regolarità delle curve a tratti individuate (continuità e derivabilità nei punti di connessione).

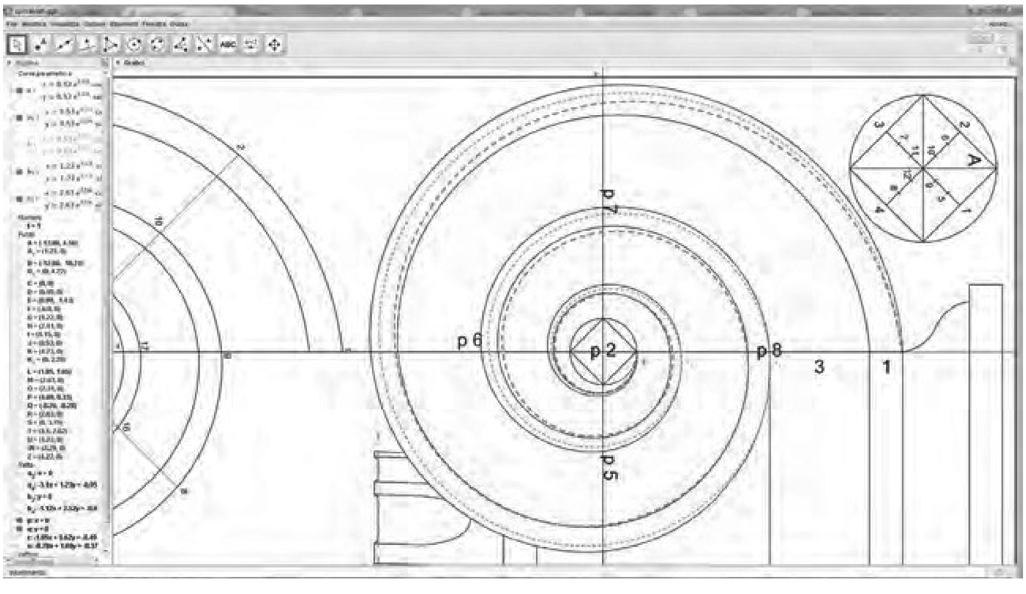


*Figura 5 – Approssimazioni della voluta ionica secondo Salviati.*

9 Pubblicata nel 1552 da Francesco Marcolini a Venezia. Losito 1993, 133

10 Egli basa le sue congetture sugli studi di Dürer. *Ibidem*, 196

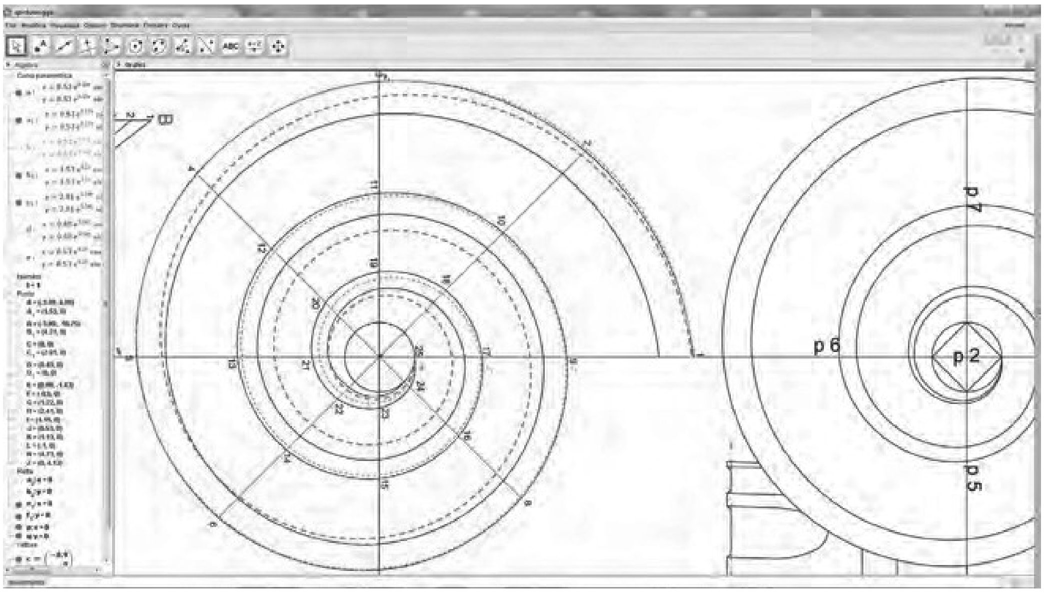

*Figura 6 – Approssimazioni della voluta ionica secondo Dürer.*

Per esempio, nelle Figg.05 e 06, si è costruita una spirale logaritmica (curva rossa e tratteggiata) passante per il punto di contatto della spirale più esterna con l'abaco e per il punto nel quale le spirali toccano l'occhio della voluta (quindi è la medesima spirale per i due disegni). Si può notare che nella spirale del Salviati la logaritmica è quasi sempre compresa tra le due spire (esce solo nel secondo avvolgimento ma discostandosi di poco da quelle disegnate). Quindi la percezione visiva è accompagnata da questa curva 'interpolante' e la spirale risulta più gradevole di quella di Dürer. Nel caso della spirale di Dürer invece, la stessa spirale logaritmica si discosta molto da quella disegnata, soprattutto nei due avvolgimenti più interni.

In seconda istanza si è approssimata ogni spira (avvolgimento della voluta) con una spirale logaritmica (curve azzurre). In questo caso le terne di logaritmiche usate nei due casi sono molto diverse tra loro (nella spirale di Dürer l'approssimazione è molto buona nei primi due giri, ma non nell'ultimo avvolgimento, vicino all'occhio). Nel caso della spirale di Salviati, i tre tratti delle spirali logaritmiche utilizzate sono sempre compresi tra le due spirali disegnate; le equazioni hanno parametri molto più vicini. Ovviamente questo implica comportamenti diversi per i coefficienti angolari nei punti di contatto delle spirali: essi presentano una variazione significativa in quella di Dürer, mentre nell'altra voluta si evidenzia un'approssimazione migliore della derivabilità nel punto che unisce le spire. Questo può essere proposto come esercizio sulla derivabilità in un punto, che nasce dalla ricerca di una 'proporzione architettonica' mediatrice tra la rigorosa costruzione geometrica e le qualità estetiche della forma naturale "perfetta".

## 4. Proiezioni per future applicazioni e conclusioni

Queste esperienze, proprie di una riflessione sull'uso della geometria per l'analisi di un oggetto architettonico e dei parametri critici per la scelta della fonte grafica idonea per lo studio, sono da prendere come spunti per analoghi lavori da svolgere nelle classi, coinvolgendo, accanto alla matematica, discipline diverse come il disegno geometrico e la storia dell'arte.

Gli esempi descritti, infatti, mostrano un nuovo utilizzo della matematica che, trasversalmente ad altre discipline ad essa naturalmente legate, tramite l'utilizzo di software di matematica dinamica come GeoGebra, propongono un approccio decisamente coinvolgente per gli studenti. Dal punto di vista dei contenuti matematici i casi di studio mostrano come si possa spaziare dall'utilizzo di semplici elementi di geometria sintetica e analitica, per descrivere rette e segmenti, circonferenze ed archi, fino a funzioni parametriche e alla descrizione di superfici di traslazione e rotazione. Questo rende adattabile il percorso a varie tipologie di corsi di studi. Infatti, esercizi analoghi a quelli proposti nelle sezioni 3.1 e 3.2 possono essere proposti anche nella scuola secondaria di primo grado, mentre per analisi più approfondite, come lo studio delle spirali affrontato in 3.3 o la descrizione analitica delle superfici fatta in 3.1, sono più adatte all'ultimo triennio delle scuole secondarie di secondo grado.

In tutti i casi, la capacità di mostrare agli studenti non solo un'applicazione diversa della matematica, ma anche un profondo legame con le altre discipline, può far capire come la matematica stessa non sia solo strumento di indagine analitica, ma possa sottendere più profondamente agli sviluppi del disegno architettonico, e non solo.

Ne consegue che sia possibile proporre esperienze che sviluppino le capacità discrezionali di individuare le geometrie di base utili a una descrizione della complessità architettonica, per macro-volumi, ma anche per micro-dettagli, lavorando su una molteplicità di fonti grafiche che spazino tra progetto e rilievo, tra sintesi comunicativa ed invenzione.

## *Bibliografia*


Andrey, D. e Galli, M. (2004). Geometric Methods of the 1500s for Laying Out the Ionic Volute. Nexus Network Journal, 2, 2004, 31-48.

Barozzi da Vignola, G. (1562). *Regola delli cinque ordini di architettura di M. Iacomo Barozzio da Vignola*. [Roma]: s.e.

Carlini, A. e Tedeschini Lalli, L. (2016). Interrogare lo spazio. Roma: Gangemi.

Docci, M. (2009). Disegno e analisi grafica con elementi di storia dell'arte. Nuova edizione. Bari-Roma: Laterza.

Docci, M, Gaiani, M. e Maestri, D., (2011). *Scienza del disegno*. Novara: CittàStudi.

Fazzina, V. (2016). L'analisi grafica come strumento di conoscenza: studio della geometria della voluta ionica nei trattati di architettura dal XV al XVII secolo. In Bertocci, S. e Bini, M. (eds.). *Le Ragioni del Disegno. Pensiero, Forma e Modello nella Gestione della Complessità*. Atti del 38° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione. Firenze, 15-16-17 settembre 2016. Roma: Gangemi, pp. 311-318.

Gattuso, C. e Serpe, A. (2012). Ornamenti architettonici e modelli matematici. In L. Campanella, L. e Piccioli, C. (eds). *Diagnosis for the Conservation and Valorization of Cultural Heritage*. Atti del terzo convegno internazionale, Napoli 13-14 dicembre 2012. Napoli: Ethos, pp. 169-177.

Geymonat, L. (1980). Prefazione. Alberti, L. B., *Ludi matematici (Ludi rerum mathematicarum)*. A cura di Rinaldi, R. Firenze/Milano: Guanda.

Goredeau, J. (2012). Going round in circles. Circumambulate the Vitruvian Volute in Early Modern Architectural Theory. *Horti Hesperidum. Studi di Storia del Collezionismo e della Storiografia Artistica*, II, 2012, 61-102.

Impedovo, M. (2001). Computer algebra e insegnamento della matematica, *Quaderni del Ministero della Pubblica Istruzione, Direzione Generale Classica*, 44.

Lockwood, E.H. (1967). *A Book of Curves*. Cambridge University Press, 173-164.

Losito, M. (1993). La ricostruzione della voluta ionica vitruviana nei trattati del Rinascimento. *Mélanges de l'Ecole francaise de Rome. Italie et Méditerranée*. 105, 1, 1993, 133-175.

Marchis, V. (2012). Un Politecnico in Europa. La nascita di un ateneo in un contesto internazionale (1906-61). In Marucco, D. e Accornero, C. (eds.). *Torino città internazionale: storia di una vocazione europea*. Roma: Donzelli Editore, pp. 133-146.

Marotta, A. (2001). Un "progetto logico di rilievo" tra proposta e sperimentazione. L'esempio nella cattedrale di San Donato a Mondovì. In Davico, P., Minchi Giorgetti, C. e Opalio, A. (eds.). *Rilievo e forma urbana. Il disegno dei portici. Il disegno della città*. Contributi al convegno. Torino, 6-7 dicembre 2001. Torino: Celid, pp. 31-41.

Pavignano, M (2009). *"Regola delli cinque ordini d'architettura": il disegno degli ordirni secondo Jacopo Barozzi da Vignola. Problematiche di restituzione grafica*. Tesi di laurea in Storia e Conservazione dei Beni Architettonici e Ambientali – Settembre 2009. Rel. Zich, U., corr. Di Teodoro, F. P.. Torino: Politecnico di Torino – Facoltà di Architettura 2.

Pavignano, M. (2012). *Per un'analisi grafica e storica della "Regola delli cinque ordini d'architettura di M. Iacomo Barozzio da Vignola"*. Tesi di laurea specialistica in Architettura (Restauro e Valorizzazione) – Settembre 2012. Rel. Zich., U., corr. Di Teodoro, F. P.. Torino: Politenico di Torino – Facoltà di Architettura 2.

Sala, N. e Cappellato, G. (2003). *Viaggio matematico nell'arte e nell'architettura*. Presentazione di Mario Botta. Milano: Franco Angeli.

Serpe, A. e Frassia, M. G. 2013. Laboratorio interdisciplinare tra matematica, informatica e disegno la voluta ionica del Vignola. In Robutti, O. e Mosca, M. (eds.). *I docenti di matematica e di fisica di fronte ai mutamenti della scuola: concetti, processi, valutazioni*. Atti del VI Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica DI.FI.MA. 2013. Torino 2-4 ottobre 2013 – Liceo M. D'Azeglio. Torino: Ledizioni, pp. 365-376.

Spreafico, M. L., Casnati, G., Notari, R., Pavignano, M. e Zich, U. (2016). Analisi matematica e geometrica nei profili degli ordini architettonici: esempi dalla "Regola delli cinque ordini d'architettura di M. Iacomo Barozzio da Vignola". In Bertocci, S. e Bini, M. (eds.). *Le Ragioni del Disegno. Pensiero, Forma e Modello nella Gestione della Complessità*. Atti del 38° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione. Firenze, 15-16-17 settembre 2016. Roma: Gangemi, pp. 1282-1290.